



**UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE**

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Matemáticas

**PROBLEMA INVERSO DE LOS DIVISORES  
ELEMENTALES Y PERTURBACIÓN ESPECTRAL DE  
MATRICES NO-NEGATIVAS**

Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Mención Matemática

**ROBERTO CARLOS DÍAZ MARTÍNEZ**

Profesor Guía: Dr. Ricardo Lorenzo Soto Montero

**Antofagasta, Chile  
2015**



**PROBLEMA INVERSO DE LOS DIVISORES  
ELEMENTALES Y PERTURBACIÓN ESPECTRAL DE  
MATRICES NO-NEGATIVAS <sup>1</sup>**

**ROBERTO CARLOS DÍAZ MARTÍNEZ**

**Programa de Doctorado en Ciencias Mención Matemática**

**Departamento de Matemáticas**

**Universidad Católica del Norte**

**2015**

---

<sup>1</sup> Tesis apoyada por Conicyt / PCHA / Doc. Nac. / 2013-63130008, Fondecyt 1120180, Chile

*Dedicada especialmente a mi hijo Jeremy Andrés,  
a mi esposa Ana Isabel,  
a mis padres y hermanos.*

# Agradecimientos

Agradecido eternamente por siempre con mi *Dios padre celestial* por proveerme las condiciones necesarias y suficientes que me permiten cumplir con los objetivos trazados.

A mis padres, el “vejete”, *Edwin Manuel Díaz Castro* y mi “gorda”, *Ofelia Martínez Rodríguez*, quienes han sido mi ejemplo de lucha, sacrificio y perseverancia. Muchas gracias por su inmenso amor y apoyo incondicional en cada etapa de mi formación.

A mi esposa *Ana Isabel Julio Torres*, mi mano derecha y confidente en todo momento. Gracias mi amor por todo lo que me brindas.

A ti *Jeremy Andrés Díaz Julio*, hijo de mi alma, que has sido testigo fiel de toda la lucha y el sacrificio realizado por tus padres. Gracias le doy a Dios por regalarme un hijo como tu.

A mis hermanos *Edwin Manuel*, *Eliecer José* y *Juan David*, muchas gracias siempre por su incondicional amor de hermano, por todo lo que me brindan y por siempre estar pendientes desde la distancia al bienestar mío y de mi familia.

A mis abuelitas, “*Tata*”, “*Evi*” y mis abuelos que Dios los bendiga siempre. Representan un angel para mi.

A mis suegros *Guillermo Julio* y *Sol Maria Torres* por el amor y la confianza que me han brindado como a un hijo, siempre viviré agradecido con ustedes.

A mi tutor *Dr. Ricardo L. Soto Montero*, por las enseñanzas y las ayudas brindadas para mi formación personal. Más que un tutor, representa para mi un padre en este país. Gracias por su buena disposición de querer siempre ayudarnos.

A todos mis compañeros del programa, en especial a *Exequiel Mallea*, *Guillermo Güevara*, *Eber Lenes*, gracias por todos los momentos compartidos.

Al pueblo Chileno, en especial a la *Universidad Católica del Norte*, a la *Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica “CONICYT”* y a los docentes del departamento de matemáticas, por todo lo que le brindaron a mi formación personal y profesional. Al *Jardín Infantil Taqinki* por su inmensa ayuda, tanto en la formación académica de mi hijo, como en su cuidado. En fin, a todas y cada una de las personas que de una u otra manera me ayudaron a alcanzar los objetivos, Dios los bendiga.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>IV</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Notación y preliminares generales . . . . .	4
1.2. Preliminares principales . . . . .	9
<b>2. Matrices no-negativas con divisores elementales prescritos</b>	<b>11</b>
2.1. Nuevas condiciones para el NIEDP . . . . .	11
2.2. Perturbación de autovalores complejos en el NIEP . . . . .	24
2.3. Perturbación de autovalores complejos en el NIEDP . . . . .	30
<b>3. Problema inverso de los divisores elementales para espectros teniendo parte real negativa</b>	<b>36</b>
3.1. Solución del NIEDP para listas $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ con $Re\lambda_i < 0$ , $ \sqrt{3}Re\lambda_i  \geq  Im\lambda_i $ , $i = 2, \dots, n$ . . . . .	38
3.2. Nuevas Condiciones Suficientes para el NIEDP . . . . .	44
3.3. Otra condición suficiente para el NIEDP . . . . .	52
<b>4. M-matrices con Divisores Elementales Prescritos</b>	<b>59</b>
4.1. Una aplicación de las M-matrices . . . . .	61
4.2. Versiones M-matrices de Teoremas de Brauer y Rado . . . . .	64
4.3. Versiones M-matrices de resultados de Minc . . . . .	68
4.4. IEDP para M-matrices estocásticas generalizadas y doblemente estocásticas generalizadas . . . . .	70
4.5. Otra condición suficiente para el IEDP para M-matrices . . . . .	72
4.6. NIEP para M-matrices inversas . . . . .	75
4.7. NIEDP para M-matrices inversas . . . . .	79
<b>Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>82</b>
<b>Referencias Bibliográficas</b>	<b>83</b>

# Resumen

Esta tesis tiene que ver con *matrices no-negativas* y la siguiente pregunta planteada por H. Minc [33]: ¿Cuales son las condiciones necesarias y suficientes para que una matriz dada sea similar a una matriz no-negativa o a una matriz doblemente estocástica?. Responder esta pregunta es equivalente a resolver el *Problema Inverso de los Divisores Elementales para Matrices No-negativas (NIEDP)*, el cual consiste en determinar condiciones bajo las cuales los polinomios

$$(\lambda - \lambda_1)^{n_1}, (\lambda - \lambda_2)^{n_2}, \dots, (\lambda - \lambda_k)^{n_k}, \quad n_1 + n_2 + \dots + n_k = n,$$

son los *divisores elementales* de una matriz no-negativa de orden  $n$ . Puesto que el problema es difícil y aún permanece abierto, el objetivo general de la tesis es avanzar hacia el conocimiento de una solución para el *NIEDP*, resolviendo casos especiales y tópicos específicos relacionados con el problema.

El problema inverso de autovalores constituye una subclase importante de los problemas inversos que surgen en el contexto de modelos matemáticos y la identificación de parámetros. Aunque en un contexto más general, el *NIEDP* aparece en conexión con el problema de asignación del factor invariante en la teoría de control [55] y con el problema de realizabilidad en la teoría de control positivo [56].

El *NIEDP* está fuertemente relacionado a otro problema inverso, llamado *Problema Inverso de Autovalores para Matrices No-negativas (NIEP)*, el cual consiste en caracterizar aquellas listas de números complejos que pueden ser el espectro de una matriz no-negativa. El *NIEDP* contiene al *NIEP* y ambos problemas son equivalentes si los autovalores prescritos son distintos. El *NIEP* ha atraído la atención de muchos autores. En contraste, solo algunos trabajos se conocen acerca del *NIEDP*. Los dos problemas permanecen abiertos. El *NIEP* está completamente resuelto para  $n \leq 4$ , sin embargo no se sabe si existe una matriz no-negativa de orden 4 con divisores elementales arbitrariamente prescritos [33].

Los primeros trabajos acerca del *NIEDP* se deben a H. Minc [31, 32], quien estudió el problema, módulo el *NIEP*: *dada una matriz no-negativa  $A$ , existe una matriz no-negativa con el mismo espectro que  $A$  y con divisores elemen-*

tales arbitrariamente prescritos (siempre que los divisores elementales prescritos que corresponden a autovalores no-reales se presenten en pares conjugados)?. En particular, Minc demostró que si  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  es el espectro de una matriz  $A$  positiva y diagonalizable (positiva, diagonalizable y doblemente estocástica), entonces existe una matriz  $B$  positiva (positiva y doblemente estocástica) con espectro  $\Lambda$  y con divisores elementales arbitrariamente prescritos.

En [45], los autores, usando resultados simples de perturbación para la forma canónica de Jordan (FCJ), resolvieron completamente el NIEDP en dos casos genéricos: *i*) para listas satisfaciendo  $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$  y *ii*) para listas satisfaciendo  $\lambda_1 > 0 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ , dando respuesta de este modo a la pregunta de Minc para estos casos. Para casos más generales, los autores en [45, 5, 6] encontraron respuestas parciales.

En esta tesis obtenemos nuevas condiciones que garantizan la existencia y construcción de matrices no-negativas con divisores elementales prescritos, las cuales mejoran significativamente, y contienen, algunas de las previas condiciones conocidas. En particular, resolvemos completamente el NIEDP para listas de números complejos del tipo Suleimanova; es decir, listas  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , satisfaciendo  $\lambda_i \in \mathcal{F}$ ,  $i = 2, \dots, n$ , donde

$$\mathcal{F} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0, |\operatorname{Re} z| \geq |\operatorname{Im} z|\}.$$

La condición necesaria y suficiente encontrada es simplemente  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ , la cual coincide con la condición necesaria y suficiente dada en el NIEP para listas del mismo tipo.

Resolvemos también completamente el NIEDP para listas de números complejos  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , satisfaciendo  $\lambda_i \in \mathcal{G}$ ,  $i = 2, \dots, n$ , donde

$$\mathcal{G} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0, |\sqrt{3}\operatorname{Re} z| \geq |\operatorname{Im} z|\},$$

y para el caso  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ ,  $i = 2, \dots, n$ , damos condiciones suficientes.

Mostramos además en esta tesis, cómo perturbar autovalores complejos de una matriz no-negativa, preservando la no-negatividad de la matriz. Bajo ciertas condiciones, estos resultados nos permiten decidir fácilmente si una lista dada es realizable con divisores elementales prescritos.

Finalmente, estudiamos también el IEDP para M-matrices, obteniendo condiciones suficientes que garantizan la existencia de una M-matriz con divisores elementales prescritos y además, presentamos condiciones suficientes que garantizan la existencia de una M-matriz inversa, simétrica y doblemente estocástica generalizada con espectro prescrito. Todos nuestros resultados generan un procedimiento algorítmico para computar una matriz solución.

# Capítulo 1

## Introducción

Sea  $A$  una matriz compleja de orden  $n$  y sea

$$J(A) = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

la *Forma Canónica de Jordan* de  $A$  (en adelante FCJ de  $A$ ). Las submatrices de orden  $n_i$

$$J_{n_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \cdots & \\ & & \cdots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

son llamadas los *bloques de Jordan* de  $J(A)$ . Los *divisores elementales* de  $A$  son los polinomios  $(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$ , es decir, los polinomios característicos de los bloques de Jordan  $J_{n_i}(\lambda_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . El *Problema Inverso de los Divisores Elementales* (IEDP) consiste en determinar condiciones necesarias y suficientes para que los polinomios

$$(\lambda - \lambda_1)^{n_1}, (\lambda - \lambda_2)^{n_2}, \dots, (\lambda - \lambda_k)^{n_k},$$

con  $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ , sean los divisores elementales de una matriz  $A$  de orden  $n$ . Es claro que para cualquier forma de Jordan  $J$  arbitrariamente prescrita y para cualquier matriz no-singular  $S$ , existe una matriz  $A = SJS^{-1}$  con  $J$  como su FCJ. En este orden, para que el problema tenga sentido, se requiere que la matriz  $A$  tenga una estructura particular. Cuando se pide que  $A$  sea una matriz no-negativa, el problema es llamado *Problema Inverso de los*

*Divisores Elementales para Matrices No-negativas (NIEDP).*

El *NIEDP* está fuertemente relacionado a otro problema inverso llamado *Problema Inverso de Autovalores para Matrices No-negativas (NIEP)*, el cual consiste en caracterizar aquellas listas de números complejos que pueden ser el espectro de una matriz no-negativa. El *NIEDP* contiene al *NIEP* y ambos problemas son equivalentes si los autovalores prescritos son distintos. El *NIEP* ha atraído la atención de muchos autores [1-3, 7, 8, 12-15, 17-27, 30, 35-44, 46-48, 52-54]. En contraste, solo algunos trabajos se conocen acerca del *NIEDP* (en orden cronológico [31, 32, 28, 29, 45, 5, 6, 34] y recientemente en [50]). Ambos problemas, el *NIEP* y el *NIEDP*, permanecen abiertos. El *NIEP* está completamente resuelto para  $n \leq 4$ , sin embargo no se sabe si existe una matriz no-negativa de orden 4 con divisores elementales arbitrariamente prescritos [33].

Al parecer los primeros estudios acerca del problema inverso de los divisores elementales para matrices no-negativas son debidos a H. Minc [31, 32]. En [32], Minc estudio el *NIEDP* módulo el *NIEP*: *dada una matriz no-negativa  $A$ , existe una matriz no-negativa con el mismo espectro que  $A$  y con divisores elementales arbitrariamente prescritos (siempre que los divisores elementales prescritos que corresponden a autovalores no-reales se presenten en pares conjugados)?*; resolviendo completamente el problema para listas de números reales que son el espectro de una matriz positiva diagonalizable doblemente estocástica. Este resultado fue extendido en [31] a matrices con autovalores complejos.

En [28], London estudió la pregunta acerca de la existencia de una matriz doblemente casi-estocástica teniendo entradas diagonales y divisores elementales prescritos. En [29], Lubeck presenta un algoritmo que calcula, para una matriz  $A$  con entradas enteras y de rango conocido, y un número primo  $p$  dado, las multiplicidades de  $p$  en las factorizaciones de los divisores elementales de  $A$ .

En [45], los autores resuelven completamente el *NIEDP* para listas de números reales no-negativos y para listas reales del tipo Suleimanova, es decir, listas  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , satisfaciendo  $\lambda_i < 0$ ,  $i = 2, \dots, n$ .

En [5], los autores muestran como construir matrices positivas estocásticas y matrices positivas doblemente estocásticas con un espectro dado y con divisores elementales arbitrariamente prescritos. Estos resultados extienden los resultados dados por los mismos autores en [45]. En particular, ellos pudieron extender, bajo ciertas condiciones, un espectro no-negativo dado a un espectro que contiene algunos números negativos. Ellos además muestran que si  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , con  $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$  (también admitiendo algunos elementos negativos) es el espectro de una matriz positiva estocástica, positiva doblemente estocástica o positiva simétrica, entonces para todo  $t > 0$ , la lista  $\Lambda_t = \{\lambda_1 + t, \lambda_2 \pm t, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$  es también el espectro de una matriz positiva estocástica, positiva doblemente es-

tocástica (en ambos casos con divisores elementales arbitrariamente prescritos) y una matriz positiva simétrica, respectivamente. Es decir, los autores en [5] prueban que el resultado de perturbación de W. Guo [14] también se satisface para este tipo de matrices.

En [6], los autores extendieron el resultado de perturbación de Guo a divisores elementales, esto es, ellos demostraron que si  $A$  es una matriz no-negativa con espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , entonces aplicando dos perturbaciones de rango uno, construyen una nueva matriz  $B$ , la cual también es no-negativa con espectro  $\Lambda_t = \{\lambda_1 + t, \lambda_2 \pm t, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$ , y además, proporcionan de manera explícita, la forma canónica de Jordan de la matriz  $B$ .

En esta tesis obtenemos nuevas condiciones que garantizan la existencia y construcción de matrices no-negativas con divisores elementales prescritos, las cuales mejoran significativamente y contienen algunas de las previas condiciones conocidas. En particular, resolvemos completamente el NIEDP para listas de números complejos del tipo Suleimanova, es decir, listas  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , satisfaciendo  $\lambda_i \in \mathcal{F}$ ,  $i = 2, \dots, n$ , donde

$$\mathcal{F} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}z \leq 0, |\operatorname{Re}z| \geq |\operatorname{Im}z|\}.$$

La condición necesaria y suficiente encontrada es simplemente  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ , la cual coincide con la condición necesaria y suficiente dada en el NIEP para listas del mismo tipo.

Resolvemos también completamente el NIEDP para listas de números complejos  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , satisfaciendo  $\lambda_i \in \mathcal{G}$ ,  $i = 2, \dots, n$ , donde

$$\mathcal{G} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}z \leq 0, |\sqrt{3}\operatorname{Re}z| \geq |\operatorname{Im}z|\}$$

y damos condiciones suficientes para el caso  $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ ,  $i = 2, \dots, n$ .

Mostramos además en esta tesis, cómo perturbar autovalores complejos de una matriz no-negativa preservando la no-negatividad de la matriz. Bajo ciertas condiciones, estos resultados nos permiten decidir fácilmente si una lista dada es realizable con divisores elementales prescritos.

Finalmente, estudiamos también el IEDP para M-matrices, obteniendo condiciones suficientes que garantizan la existencia de una M-matriz con divisores elementales prescritos y además, presentamos condiciones suficientes que garantizan la existencia de una M-matriz inversa, simétrica y doblemente estocástica generalizada con espectro prescrito. Todos nuestros resultados generan un procedimiento algorítmico para computar una matriz solución.

---

## 1.1. Notación y preliminares generales

---

Como es usual,  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{R}$  denotan el conjunto de los números complejos y el conjunto de los números reales respectivamente.  $M_n$  denota el conjunto de las matrices cuadradas de orden  $n$ .

Dada  $A \in M_n$ , las matrices  $A^{-1}$  y  $A^T$  son las matrices *inversa* y *transpuesta* de  $A$ . Así también,  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , es el *espectro* de  $A$  y el número no-negativo  $\rho(A) = \max_{i=1, \dots, n} \{|\lambda_i|\}$ , es el *radio espectral* de  $A$ .

Una matriz  $A = (a_{ij}) \in M_n$  se dice *no-negativa* ( $A \geq \mathbf{0}$ ) (*positiva* ( $A > \mathbf{0}$ )) si para cada  $i, j = 1, \dots, n$ , se tiene que  $a_{ij} \geq 0$  ( $a_{ij} > 0$ ).

Dada una lista de números complejos  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , si existe una matriz no-negativa  $A$  tal que  $\Lambda = \sigma(A)$ , se dice que la lista  $\Lambda$  es *realizable* y que  $A$  es una matriz que *realiza* a  $\Lambda$ .

Una matriz  $A = (a_{ij}) \in M_n$  se dice que tiene *sumas fila constantes*, si la suma de cada una de sus filas es igual a una misma constante  $\alpha \in \mathbb{C}$ , es decir, si

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = \alpha, \quad i = 1, \dots, n.$$

$\mathcal{CS}_\alpha$  denota el conjunto de las matrices con sumas fila constantes igual a  $\alpha$ . Denotaremos por  $\mathbf{e}$  el vector de unos; es decir,  $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T$ . Es claro que para cualquier matriz  $A \in \mathcal{CS}_\alpha$ , se tiene que  $A\mathbf{e} = \alpha\mathbf{e}$ .

Una matriz no-negativa  $A$  se dice *estocástica* si  $A \in \mathcal{CS}_1$ , y se dice *doblemente estocástica* si  $A, A^T \in \mathcal{CS}_1$ . Una matriz  $A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ , se dice *estocástica generalizada* y se dice *doblemente estocástica generalizada* si  $A, A^T \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ .

$E_{ij} \in M_n$  denota la matriz con un 1 en la posición  $(i, j)$  y 0 en sus demás entradas, y  $\mathbf{e}_k$  es el vector con un 1 en su  $k$ -ésima coordenada y ceros en el resto.

**Observación 1.1.** Sea  $S$  una matriz no-singular tal que  $S^{-1}AS = J(A)$  es la FCJ de  $A$ . Si  $A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ , entonces  $S$  puede ser elegida tal que  $S\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}$  y por tanto,  $S^{-1}\mathbf{e} = \mathbf{e}_1$ , esto es, las filas de la matriz  $S^{-1} = (\hat{s}_{ij})$  satisfacen

$$\sum_{j=1}^n \hat{s}_{1j} = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^n \hat{s}_{ij} = 0, \quad i = 2, \dots, n.$$

Si  $T$  es una matriz de orden  $n$ , de la forma

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

y

$$S = \begin{bmatrix} 1 & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ 1 & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix}$$

es no-singular, entonces  $STS^{-1}\mathbf{e} = \lambda_1\mathbf{e}$ , es decir,  $STS^{-1} \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ .

Consideremos la matriz

$$C = \pm \sum_{i \in K} E_{i,i+1}, \quad K \subset \{1, 2, \dots, n-1\},$$

y sea  $A$  una matriz compleja de orden  $n$  con FCJ  $J(A) = S^{-1}AS$ . Entonces, para un conjunto apropiado  $K$ , la matriz

$$J(A) + C = S^{-1}AS + C = S^{-1}(A + SCS^{-1})S,$$

es la FCJ de  $A + SCS^{-1}$ . Por tanto, dada una matriz compleja  $A$  con FCJ  $J(A) = S^{-1}AS$ , podemos obtener, trivialmente, una matriz  $B = A + SCS^{-1}$ , con  $\sigma(B) = \sigma(A)$  y divisores elementales prescritos. Así entonces, si  $A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$  y  $S = [\mathbf{e} \mid * \mid \cdots \mid *]$ , tenemos que  $(A + SCS^{-1}) \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ .

En [31], Minc presenta el siguiente resultado:

**Teorema 1.1.** [31] *Dada una matriz  $A$  positiva y diagonalizable, existe una matriz positiva con el mismo espectro que  $A$  y con divisores elementales arbitrariamente prescritos, siempre que los divisores elementales que corresponden a autovalores no reales se presenten en pares conjugados.*

Según Minc, la condición de positividad es esencial en la prueba dada para el Teorema 1.1 y no se sabe si el resultado es cierto sin esta condición. En realidad, no se sabe si para cada matriz diagonalizable no-negativa, existe una matriz no-negativa con el mismo espectro y con divisores elementales arbitrariamente prescritos.

En [32], Minc demostró que si la matriz dada en el teorema anterior es no-negativa, doblemente estocástica y diagonalizable, entonces la respuesta a la existencia de otra matriz doblemente estocástica con el mismo espectro, pero con divisores

elementales arbitrariamente prescritos es negativa. Por ejemplo, la matriz doblemente estocástica

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

tiene autovalores  $1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ , pero no existe una matriz de orden 3 doblemente estocástica con divisores elementales

$$(\lambda - 1), \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Sin embargo, en [31], Minc demostró que la respuesta es afirmativa si la matriz dada es positiva, doblemente estocástica y diagonalizable, lo cual está establecido en el siguiente teorema:

**Teorema 1.2.** [31] *Dada una matriz  $A$  positiva, doblemente estocástica y diagonalizable, existe una matriz positiva doblemente estocástica con el mismo espectro que  $A$  y con divisores elementales arbitrariamente prescritos, siempre que los divisores elementales que corresponden a autovalores no reales se presenten en pares conjugados.*

H. Perfect en [35] demuestra lo siguiente:

Dada una matriz  $D = \text{diag}\{1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , donde  $1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ , se tiene que la matriz  $A = PDP^{-1}$  es positiva y estocástica, donde la matriz  $P$  es la matriz no-singular:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Teniendo en cuenta lo demostrado por H. Perfect, los autores en [45] resuelven completamente el NIEDP para listas  $\Lambda = \{1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , satisfaciendo  $1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ . Ellos demuestran lo siguiente:

**Teorema 1.3.** [45] *Sea  $\Lambda = \{1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  con  $1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ . Entonces existe una matriz  $A \in \mathcal{CS}_1$  con espectro  $\Lambda$  y con divisores elementales arbitrariamente prescritos*

$$(\lambda - 1), (\lambda - \lambda_2)^{n_2}, \dots, (\lambda - \lambda_k)^{n_k}, \quad n_2 + \dots + n_k = n - 1.$$

**Observación 1.2.** *Es claro que una lista  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , satisfaciendo  $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ , también será siempre el espectro de una matriz no-negativa  $A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$  con divisores elementales arbitrariamente prescritos.*

En [45], los autores también resuelven completamente el NIEDP para listas  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  satisfaciendo  $\lambda_1 > 0 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ . Más precisamente, ellos demuestran que:

**Teorema 1.4.** [45] *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  con  $\lambda_1 > 0 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ . Entonces, existe una matriz no-negativa  $A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$  con espectro  $\Lambda$  y con divisores elementales arbitrariamente prescritos*

$$(\lambda - 1), (\lambda - \lambda_2)^{n_2}, \dots, (\lambda - \lambda_k)^{n_k}, \quad n_2 + \dots + n_k = n - 1,$$

si y sólo si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ .

**Observación 1.3.** *La matriz solución  $A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$  del Teorema 1.4 es tal que*

$$\mathbf{e}_1^T A \mathbf{e}_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Por tanto, al considerar la matriz de permutación:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \diagup & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

se tiene que la matriz  $\tilde{A} = PAP \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$  también es no-negativa con espectro  $\Lambda$ , divisores elementales arbitrariamente prescritos y  $\mathbf{e}_n^T \tilde{A} \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_1^T A \mathbf{e}_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ .

Para simplificar la escritura en lo que sigue, definimos las siguientes regiones del plano complejo:

$$\mathcal{F} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0, |\operatorname{Re} z| \geq |\operatorname{Im} z|\},$$

$$\mathcal{G} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0, |\sqrt{3} \operatorname{Re} z| \geq |\operatorname{Im} z|\}.$$

Para listas de números complejos  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , satisfaciendo  $\lambda_i \in \mathcal{F}$ ,  $i = 2, \dots, n$ , ó satisfaciendo  $\lambda_i \in \mathcal{G}$ ,  $i = 2, \dots, n$ , el NIEP está resuelto completamente. Más precisamente, en [3], los autores demuestran que si  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  es una lista de números complejos con  $\lambda_i \in \mathcal{F}$ ,  $i = 2, \dots, n$ , entonces existe una matriz no-negativa con espectro  $\Lambda$  si y sólo si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ .

En [39], H. Šmigoc extiende este resultado a la región  $\mathcal{G}$  del plano complejo, esto es, ella demuestra que si  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  es una lista de números complejos con  $\lambda_i \in \mathcal{G}$ ,  $i = 2, \dots, n$ , entonces existe una matriz no-negativa con espectro

$\Lambda$  si y sólo si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ .

En [45], los autores también presentan la siguiente condición suficiente para el NIEDP. Esta condición ha sido extendida en el Capítulo 2 (Corolario 2.1).

**Teorema 1.5.** [45] *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  con  $\lambda_i \in \mathcal{F}$ ,  $i = 2, \dots, n$ , una lista de números complejos. Si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$ , entonces, existe una matriz no-negativa  $A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$  con espectro  $\Lambda$  y con divisores elementales arbitrariamente prescritos*

$$(\lambda - 1), (\lambda - \lambda_2)^{n_2}, \dots, (\lambda - \lambda_k)^{n_k}, \quad n_2 + \dots + n_k = n - 1.$$

En [5], los autores construyen una matriz  $A$  positiva doblemente estocástica con espectro  $\Lambda = \{1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  satisfaciendo  $1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ . Para esto, ellos consideran la matriz no-ningular

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & -(n-2) & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -(n-1) & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

y demuestran que la matriz  $RDR^{-1} \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$  es positiva y simétrica, donde  $D = \text{diag}\{1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ . Teniendo en cuenta este resultado, los autores en [5], resuelven completamente el NIEDP para matrices doblemente estocástica, para listas  $\Lambda = \{1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  satisfaciendo  $1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ .

**Teorema 1.6.** [5] *Sea  $\Lambda = \{1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  con  $1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ . Entonces existe una matriz positiva doblemente estocástica con espectro  $\Lambda$  y divisores elementales arbitrariamente prescritos.*

**Observación 1.4.** *Es claro que una lista  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , satisfaciendo  $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ , será también el espectro de una matriz positiva doblemente estocástica generalizada ( $\in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ ) con divisores elementales arbitrariamente prescritos.*

**Definición 1.1.** [16] *Sea  $p(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + c_1\lambda + c_0$ .*

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & \dots & -c_{n-2} & -c_{n-1} \end{bmatrix},$$

es llamada matriz compañera del polinomio  $p(\lambda)$ .

**Observación 1.5.** *Es bien sabido que la FCJ de cualquier matriz compañera tiene uno y sólo un bloque de Jordan asociado a cada autovalor distinto.*

En [24], T. Laffey y H. Šmigoc resuelven completamente el NIEP para listas  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  de números complejos, satisfaciendo  $\lambda_1 > 0$  y  $\operatorname{Re}\lambda_k \leq 0$ ,  $k = 2, \dots, n$ . Ellos demuestran el siguiente Teorema:

**Teorema 1.7.** [24] *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos, donde  $\Lambda = \bar{\Lambda}$ ,  $\operatorname{Re}\lambda_k \leq 0$ ,  $k = 2, \dots, n$  y  $\lambda_1 > 0$ . Entonces  $\Lambda$  es el espectro de una matriz no-negativa si y sólo si*

$$(1) \quad s_1(\Lambda) = \rho + \sum_{i=2}^n \lambda_i \geq 0,$$

$$(2) \quad s_2(\Lambda) = \rho^2 + \sum_{i=2}^n \lambda_i^2 \geq 0,$$

$$(3) \quad s_1(\Lambda)^2 \leq ns_2(\Lambda).$$

Laffey y Šmigoc establecen que las listas que satisfacen las condiciones del Teorema 1.7, pueden ser realizadas por una matriz no-negativa de la forma  $C + \alpha I$ , donde  $C$  es una matriz compañera de traza cero,  $\alpha$  es un escalar no-negativo e  $I$  es la matriz identidad del orden apropiado. Puesto que  $C$  es una matriz compañera, la matriz  $C + \alpha I$  tiene uno y sólo un bloque de Jordan asociado a cada autovalor distinto. La pregunta natural que surge entonces es: *¿Qué se puede decir acerca del NIEDP para listas que satisfacen las condiciones de Laffey y Šmigoc? ¿Es posible resolver completamente el NIEDP para listas de este tipo?.* Esto es precisamente lo que se estudia en el Capítulo 3.

---

## 1.2. Preliminares principales

---

El siguiente lema, atribuido a menudo a Charles R. Johnson [17], establece que si  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  es el espectro de una matriz no-negativa, entonces  $\Lambda$  es en particular el espectro de una matriz no-negativa en  $\mathcal{CS}_{\lambda_1}$ . Esto permite considerar el NIEDP, sin pérdida de generalidad, para matrices en  $\mathcal{CS}_{\lambda_1}$ .

**Lema 1.1** (Johnson [17]). *Sea  $A \in M_n$  una matriz no-negativa con espectro  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ ; donde  $\rho(A) = \lambda_1$ . Entonces, existe una matriz no-negativa  $B \in M_n$  la cual satisface:*

$$i) \quad \sigma(B) = \sigma(A),$$

ii)  $B \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ .

Los siguientes dos resultados han mostrado ser muy útiles en ambos problemas, el NIEP y el NIEDP, no sólo para encontrar condiciones suficientes que garanticen la realizabilidad de una lista dada, si no también para construir la matriz realizadora. El primer resultado, debido a Brauer [4], muestra cómo modificar un autovalor de una matriz dada, vía una perturbación de rango uno, sin cambiar los demás autovalores de la matriz (ver [41], [3], [45] y las referencias allí, para conocer cómo ha sido aplicado este resultado en el NIEP y en el NIEDP).

El segundo resultado, debido a R. Rado e introducido por H. Perfect [36], es una extensión del resultado de Brauer y muestra cómo cambiar “ $r$ ” autovalores de una matriz de orden  $n$  ( $r < n$ ), vía una perturbación de rango  $r$ , sin modificar los restantes  $n - r$  autovalores (ver [35], [44], [48] y las referencias allí, para conocer cómo ha sido aplicado el resultado de Rado en el NIEP).

**Teorema 1.8** (Brauer [4]). *Sea  $A \in M_n$  con espectro  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ . Sea  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T$  un autovector de  $A$  asociado al autovalor  $\lambda_k$ , para algún  $k = 1, \dots, n$ . Sea  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T \in \mathbb{C}^n$ . Entonces, la matriz  $A + \mathbf{v}\mathbf{q}^T$  tiene espectro*

$$\sigma(A + \mathbf{v}\mathbf{q}^T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k + \mathbf{v}^T \mathbf{q}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}.$$

**Teorema 1.9** (Rado [36]). *Sean  $A \in M_n$  con espectro  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ ,  $X = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \dots \mid \mathbf{x}_r]$ , con  $\text{rango}(X) = r$  y  $AX = X\Omega$ , donde  $\Omega = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ . Sea  $C$  una matriz de orden  $r \times n$  arbitraria. Entonces, la matriz  $A + XC$  tiene espectro*

$$\sigma(A + XC) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n\},$$

donde los elementos  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$  son los autovalores de la matriz  $\Omega + CX$ .

En [45], los autores presentan el siguiente lema, el cual muestra cómo es la FCJ de una matriz obtenida mediante una perturbación tipo Brauer.

**Lema 1.2.** [45] *Sea  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T \in \mathbb{C}^n$  y sea  $A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ , con FCJ*

$$J(A) = (\lambda_1) \oplus \bigoplus_{i=2}^k J_{n_i}(\lambda_i).$$

Sea  $\lambda_1 + \sum_{i=1}^n q_i \neq \lambda_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ . Entonces, la matriz  $A + \mathbf{e}\mathbf{q}^T$  tiene FCJ

$$J(A + \mathbf{e}\mathbf{q}^T) = J(A) + \left( \sum_{i=1}^n q_i \right) E_{11}.$$

En particular, si  $\sum_{i=1}^n q_i = 0$ , entonces  $A$  y  $A + \mathbf{e}\mathbf{q}^T$  son similares.

# Capítulo 2

## Matrices no-negativas con divisores elementales prescritos

En este capítulo establecemos nuevas condiciones suficientes para la existencia de una solución al NIEDP, las cuales mejoran significativamente, y contienen, algunas de las condiciones suficientes que se conocen acerca del problema y que fueron presentadas en el capítulo anterior. En particular, resolvemos completamente el NIEDP para listas de números complejos  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , con  $\lambda_i \in \mathcal{F}$ ,  $i = 2, \dots, n$ ; donde

$$\mathcal{F} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0, |\operatorname{Re} z| \geq |\operatorname{Im} z|\}.$$

También mostramos en este capítulo, como perturbar autovalores complejos de una matriz no-negativa, preservando la no-negatividad. Estos resultados nos permitirán, bajo ciertas condiciones, decidir fácilmente si una lista dada es realizable con divisores elementales prescritos.

Los resultados de este capítulo constituyen esencialmente la publicación [49] (R. L. Soto, R. C. Díaz, H. Nina, M. Salas, *Nonnegative matrices with prescribed spectrum and elementary divisors*, Linear Algebra Appl. 439 (2013) 3591-3604.)

---

### 2.1. Nuevas condiciones para el NIEDP

---

El siguiente resultado para el NIEDP es de tipo general. El establece que si el autovalor de Perron  $\lambda_1$  es suficientemente grande, entonces la lista  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  es el espectro de una matriz no-negativa con ciertos divisores elementales prescritos. Puesto que el resultado y su demostración son más bien complicados de asimilar, empezamos presentando un ejemplo para mostrar las ideas y el procedimiento constructivo seguidos en la demostración.



Eligiendo  $|\epsilon| \leq 1$ ,  $\mathbf{q}^T = (-10, 0, 0, 1, 1, 3, 1, 3, 1)$  y  $\lambda_1 \geq 13 = M + m$ , tenemos que la matriz

$$A = B + \mathbf{e}\mathbf{q}^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 - 10 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ \lambda_1 - 13 & 3 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ \lambda_1 - 13 & 0 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ \lambda_1 - 9 - \epsilon & 0 & 0 & 0 & 1 + \epsilon & 3 & 1 & 3 & 1 \\ \lambda_1 - 9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ \lambda_1 - 12 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ \lambda_1 - 6 - \epsilon & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 + \epsilon & 1 \\ \lambda_1 - 12 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ \lambda_1 - 6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{CS}_{\lambda_1},$$

es no-negativa con espectro  $\Lambda$  y los bloques de Jordan deseados.

ii) Ahora busquemos posibles valores para  $\lambda_1$  tal que exista una matriz no-negativa con espectro  $\Lambda$  y bloques de Jordan

$$J_1(\lambda_1), J_2(3), J_2(-1), J_2(-1 + 3i), J_2(-1 - 3i).$$

En este caso, elegimos  $E = E_{2,3} + E_{4,5} + E_{7,8}$ . Entonces,

$$B = S(D + \epsilon E)S^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ \lambda_1 - 3 - \epsilon & 3 & \epsilon & & & & & & \\ \lambda_1 - 3 & & 3 & & & & & & \\ \lambda_1 + 1 - \epsilon & & & -1 & \epsilon & & & & \\ \lambda_1 + 1 & & & & -1 & & & & \\ \lambda_1 - 2 & & & & & -1 & 3 & & \\ \lambda_1 + 4 - \epsilon & & & & & -3 & -1 & \epsilon & \\ \lambda_1 - 2 & & & & & & & -1 & 3 \\ \lambda_1 + 4 & & & & & & & -3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}.$$

Por tanto, eligiendo  $\epsilon > 0$ ,  $\mathbf{q}^T = (-10, 0, 0, 1, 1, 3, 1, 3, 1)$ , y  $\lambda_1 > 13 = M + m$ , tenemos que la matriz

$$A = B + \mathbf{e}\mathbf{q}^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 - 10 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ \lambda_1 - 13 - \epsilon & 3 & \epsilon & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ \lambda_1 - 13 & 0 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ \lambda_1 - 9 - \epsilon & 0 & 0 & 0 & 1 + \epsilon & 3 & 1 & 3 & 1 \\ \lambda_1 - 9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ \lambda_1 - 12 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ \lambda_1 - 6 - \epsilon & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 + \epsilon & 1 \\ \lambda_1 - 12 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ \lambda_1 - 6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{CS}_{\lambda_1},$$

es no-negativa con espectro  $\Lambda$  y los bloques de Jordan deseados.

**Teorema 2.1.** Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos con  $\bar{\Lambda} = \Lambda$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ , y  $\lambda_1 \geq |\lambda_i|$ ,  $i = 2, \dots, n$ . Sean

$$M = \max_{2 \leq i \leq n} \{0, \operatorname{Re}\lambda_i + \operatorname{Im}\lambda_i\}, \quad m = - \sum_{i=2}^n \min\{0, \operatorname{Re}\lambda_i, \operatorname{Im}\lambda_i\}. \quad (2.1)$$

Si

$$i) \quad \lambda_1 \geq M + m, \quad (2.2)$$

cuando todos los posibles bloques de Jordan  $J_{n_i}(\lambda_i)$ , de orden  $n_i \geq 2$ , están asociados a un autovalor real  $\lambda_i < 0$ , o cuando existe al menos un bloque de Jordan  $J_{n_i}(\lambda_i)$ , de orden  $n_i \geq 2$ , asociado a un autovalor real  $\lambda_i \geq 0$  con  $M = \operatorname{Re}\lambda_{i_0} + \operatorname{Im}\lambda_{i_0} > |\lambda_k|$ ,  $2 \leq k \leq p$ , para algún  $i_0$ ,  $p+1 \leq i_0 \leq n-1$ , o si

$$ii) \quad \lambda_1 > M + m, \quad (2.3)$$

cuando al menos un bloque de Jordan  $J_{n_i}(\lambda_i)$ , de orden  $n_i \geq 2$ , está asociado a un autovalor real  $\lambda_i \geq 0$  con  $M = \lambda_k \geq 0$ , para algún  $k$ ,  $2 \leq k \leq p$ , entonces existe una matriz no-negativa  $A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$  de orden  $n$  con espectro  $\Lambda$  y con divisores elementales arbitrariamente prescritos

$$(\lambda - \lambda_1), (\lambda - \lambda_2)^{n_2}, \dots, (\lambda - \lambda_k)^{n_k}, \quad n_2 + \dots + n_k = n - 1.$$

*Demostración.* Sean  $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$  números reales y sean

$$\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2} = \bar{\lambda}_{p+1}, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n = \bar{\lambda}_{n-1},$$

números complejos no-reales. Sea



consiguiente, para el *Caso i*), eligiendo

$$0 < \epsilon \leq \min \left\{ \min_{2 \leq k \leq p} \{ \lambda_1 - \lambda_k - m \}, \min_{2 \leq k \leq p} |\lambda_k|, \min_{p+1 \leq k \leq n} \operatorname{Im} \lambda_k \right\},$$

se tiene que todas las entradas en la primera columna de  $A$  son no-negativas.

*Caso ii*) Si elegimos

$$0 < \epsilon \leq \min \left\{ \lambda_1 - (M + m), \min_{2 \leq k \leq p} |\lambda_k|, \min_{p+1 \leq k \leq n} \operatorname{Im} \lambda_k \right\},$$

las entradas de  $A$  en las columnas  $2, 3, \dots, n$ , son todas no-negativas, siempre que  $\epsilon$  aparezca en al menos una posición  $(i, i + 1)$ ,  $i = 2, \dots, n - 1$ . En la primera columna, las entradas de  $A$  en las posiciones  $k = 2, \dots, p$ , son todas no-negativas si se elige  $0 < \epsilon \leq \min \left\{ \lambda_1 - (M + m), \min_{2 \leq k \leq p} |\lambda_k| \right\}$ . En las posiciones  $k = p + 1, \dots, n$ , si elegimos  $0 < \epsilon \leq \min_{p+1 \leq k \leq n} \operatorname{Im} \lambda_k$ , las entradas de  $A$  en dichas posiciones son todas no-negativas. Entonces, eligiendo  $\epsilon < 0$  con

$$|\epsilon| \leq \min \left\{ \min_{2 \leq k \leq p} |\lambda_k|, \min_{p+1 \leq k \leq n} \operatorname{Im} \lambda_k \right\},$$

ó

$$0 < \epsilon \leq \min \left\{ \min_{2 \leq k \leq p} \{ \lambda_1 - \lambda_k - m \}, \min_{2 \leq k \leq p} |\lambda_k|, \min_{p+1 \leq k \leq n} \operatorname{Im} \lambda_k \right\},$$

en el *Caso i*), ó eligiendo

$$0 < \epsilon \leq \min \left\{ \lambda_1 - (M + m), \min_{2 \leq k \leq p} |\lambda_k|, \min_{p+1 \leq k \leq n} \operatorname{Im} \lambda_k \right\},$$

en el *Caso ii*), todas las entradas en la primera columna de  $A$  son no-negativas. Es claro de (2.2) que si  $\epsilon$  no aparece en al menos una posición  $(i, i + 1)$ ,  $i = 2, 3, \dots, n - 1$ , la matriz  $A = B + \mathbf{e}\mathbf{q}^T$  sigue siendo no-negativa. Finalmente, puesto que  $\sum_{i=1}^n q_i = 0$ , se sigue del Lema 1.2 que  $A$  tiene la misma FCJ que la matriz  $B$ . ■

El siguiente corolario extiende el Teorema 1.5 y resuelve completamente el NIEDP para listas de números complejos del tipo Suleimanova; es decir, listas  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , satisfaciendo  $\lambda_i \in \mathcal{F}$   $i = 2, \dots, n$ ; donde

$$\mathcal{F} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0, |\operatorname{Re} z| \geq |\operatorname{Im} z|\}.$$

**Corolario 2.1.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , con  $\lambda_i \in \mathcal{F}$ ,  $i = 2, \dots, n$ ; una lista de números complejos. Entonces, existe una matriz no-negativa  $A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$*

con espectro  $\Lambda$  y divisores elementales arbitrariamente prescritos si y sólo si  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \geq 0$ .

*Demostración.* Es claro que la condición es necesaria para la existencia de una matriz no-negativa con espectro  $\Lambda$ . Observemos que la condición es también suficiente por el Teorema 2.1. En efecto,

$$M = \max_{2 \leq i \leq n} \{0, \operatorname{Re} \lambda_i + \operatorname{Im} \lambda_i\} = 0$$

$$m = - \sum_{i=2}^n \min\{0, \operatorname{Re} \lambda_i, \operatorname{Im} \lambda_i\} = - \sum_{i=2}^n \operatorname{Re} \lambda_i = - \sum_{i=2}^n \lambda_i .$$

Puesto que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ , se sigue entonces que  $\lambda_1 \geq - \sum_{i=2}^n \lambda_i = M + m$ . Por tanto, del Teorema 2.1, se tiene que existe una matriz no-negativa  $A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$  con espectro  $\Lambda$  y con divisores elementales arbitrariamente prescritos. ■

**Observación 2.1.** Recordemos que el Teorema de Rado (Teorema 1.9) permite cambiar  $r$  autovalores de una matriz  $A \in M_n$ ,  $r \leq n$ , sin cambiar los  $n - r$  autovalores restantes. Cuando se aplica el Teorema de Rado para obtener una matriz no-negativa  $A + XC$  con espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , se empieza con una matriz  $A$  diagonal en bloques, donde cada bloque  $A_k$ ,  $k = 1, \dots, r$ , es no-negativo con autovalor de Perron  $\omega_k$  y espectro  $\Gamma_k = \{\omega_k, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}$ . Entonces, la matriz  $A + XC$  será no-negativa con nuevos autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  en vez de  $\omega_1, \dots, \omega_r$ . Las  $r$  columnas  $\mathbf{x}_i$  de  $X$  son autovectores no-negativos linealmente independientes de  $A$ , correspondientes a los autovalores  $\omega_i$  y  $C \in M_{r,n}$  es una matriz no-negativa tal que  $\Omega + CX$ , con  $\Omega = \operatorname{diag}\{\omega_1, \dots, \omega_r\}$ , tiene los nuevos autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ . Por consiguiente, la matriz  $A + XC$  tendrá el espectro deseado  $\Lambda$ . El siguiente resultado muestra que los bloques diagonales  $A_1, \dots, A_r$  de la matriz  $A$ , pueden tener entradas negativas, siempre que se considere la matriz  $C$  con ciertas entradas adecuadas en posiciones estratégicas, para no afectar la no-negatividad de la matriz resultante  $A + XC$ .

**Lema 2.1.** Sea  $A \in M_n$  una matriz diagonal en bloques con entradas reales, donde cada bloque diagonal  $A_k \in \mathcal{CS}_{\lambda_{k1}}$  (no necesariamente no-negativo) tiene espectro

$$\Lambda_k = \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, \quad k = 1, 2, \dots, r,$$

satisfaciendo las condiciones del Teorema 2.1. Para cada  $k = 1, \dots, r$ , sea  $\widehat{\mathbf{q}}_k^T = (q_{k1}, \dots, q_{kp_k})$  con  $\sum_{j=1}^{p_k} q_{kj} = 0$ , tal que  $A_k + \mathbf{e}\widehat{\mathbf{q}}_k^T$  es no-negativa. Entonces, la matriz  $M = A + XC$  es no-negativa con espectro

$$\{\mu_1, \dots, \mu_r, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1p_1}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2p_2}, \dots, \lambda_{r2}, \dots, \lambda_{rp_r}\},$$

donde  $\mu_1, \dots, \mu_r$  son autovalores de  $\Omega + CX$  con  $\Omega = \operatorname{diag}\{\lambda_{11}, \dots, \lambda_{r1}\}$ .

*Demostración.* Sea  $A = \text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$  y  $A\mathbf{x}_k = \lambda_{k1}\mathbf{x}_k$ ,  $k = 1, \dots, r$ , donde  $\mathbf{x}_k$  tiene  $p_k$  unos, ubicados en las posiciones  $p_{(k-1)} + 1$  a  $p_k$ , con  $p_0 = 0$  y ceros en las demás posiciones. Para cada  $k = 1, \dots, r$ , sea  $\mathbf{q}_k$  un vector  $n$ -dimensional que contiene al vector  $\widehat{\mathbf{q}}_k^T = (q_{k1}, \dots, q_{kp_k})$  en sus posiciones  $p_{(k-1)} + 1$  a  $p_k$ , con  $p_0 = 0$  y ceros en las demás posiciones. Es decir,

$$\mathbf{x}_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{p_k \text{-veces}}, 0, \dots, 0)^T,$$

$$\mathbf{q}_k^T = (0, \dots, 0, \underbrace{q_{k1}, \dots, q_{kp_k}}_{p_k \text{-posiciones}}, 0, \dots, 0).$$

Sean

$$X = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \dots \mid \mathbf{x}_r] \quad y \quad C_B = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \mathbf{q}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{q}_r^T \end{bmatrix}.$$

Observe que la matriz  $C_B X = \mathbf{0}$ . Note además que la matriz

$$\widetilde{M} = A + X C_B = A + \mathbf{x}_1 \mathbf{q}_1^T + \mathbf{x}_2 \mathbf{q}_2^T + \dots + \mathbf{x}_r \mathbf{q}_r^T,$$

es no-negativa con espectro  $\bigcup_{k=1}^r \Lambda_k$ , pues  $\widetilde{M}$  es una matriz diagonal en bloques, donde cada bloque diagonal,  $A_k + \mathbf{e} \widehat{\mathbf{q}}_k^T$ , es no-negativo y tiene espectro  $\Lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, r$ . Por otra parte, para cambiar los autovalores  $\lambda_{11}, \lambda_{21}, \dots, \lambda_{r1}$  por  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ , aplicamos el Teorema de Rado (Teorema 1.9) para obtener una matriz no-negativa

$$M = \widetilde{M} + X C_R = (A + X C_B) + X C_R = A + X(C_B + C_R) = A + X C$$

con el espectro deseado; donde  $C_R \in M_{r,n}$  es una matriz no-negativa tal que  $\Omega + C_R X = \Omega + (C - C_B)X = \Omega + CX$ , con  $\Omega = \text{diag}\{\lambda_{11}, \dots, \lambda_{r1}\}$ , tiene los nuevos autovalores  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ . ■

Sean  $A, X, C$ , y  $\Omega$  como en el Teorema 1.9 y sea  $S$  una matriz no-singular de orden  $n$ , particionada como  $S = [X \mid Y]$  con  $S^{-1} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$ . Entonces,  $UX = I_r$ ,  $VY = I_{n-r}$ ,  $VX = \mathbf{0}_{n-r,r}$ ,  $UY = \mathbf{0}_{r,n-r}$  y  $AX = X\Omega$ . Tenemos entonces que

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} A [X \mid Y] = \begin{bmatrix} \Omega & UAY \\ \mathbf{0} & VAY \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

$$S^{-1}XCS = \begin{bmatrix} CX & CY \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

y

$$S^{-1}(A + XC)S = \begin{bmatrix} \Omega + CX & CY + UAY \\ \mathbf{0} & VAY \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

donde  $B = \Omega + CX \in M_r$  tiene autovalores  $\mu_1, \dots, \mu_r$  (los nuevos autovalores) y entradas diagonales  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  (los antiguos autovalores). Entonces, en (2.4), si  $\Omega$  y  $VAY$  no tienen autovalores en común, se sigue que  $A$  es similar a  $\Omega \oplus VAY$  ([33, Chapter VI, Lemma 1.2]). De manera similar, si  $B = \Omega + CX$  y  $VAY$  en (2.5) no tienen autovalores en común, entonces  $A + XC$  es similar a  $B \oplus VAY$ . Hemos así probado el siguiente lema.

**Lema 2.2.** *Sean  $A, X, Y, V, C$  y  $\Omega$  como arriba. Si las matrices  $B = \Omega + CX$  y  $VAY$  no tienen autovalores en común, entonces*

$$J(A + XC) = J(B) \oplus J(VAY).$$

*En particular, si  $CX = \mathbf{0}$ , se tiene que  $A$  y  $A + XC$  son similares.*

El siguiente resultado, extiende el Teorema 2.1.

**Teorema 2.2.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos con  $\Lambda = \bar{\Lambda}$ ,  $\lambda_1 \geq \max_i |\lambda_i|$ ,  $i = 2, \dots, n$ ;  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ . Sea  $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_{p_0}$  una partición disjunta dos a dos, con  $\Lambda_k = \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}$ ;  $\lambda_{01} = \lambda_1$ ,  $k = 0, 1, \dots, p_0$ , donde  $\Lambda_0$  es realizable,  $p_0$  es el número de elementos de la lista  $\Lambda_0$  y algunas listas  $\Lambda_k$  pueden ser vacías. Sean  $\omega_k \in \mathbb{R}$ , con  $0 \leq \omega_k \leq \lambda_1$ ,  $k = 1, \dots, p_0$ . Supóngase que*

- i) para  $k = 1, \dots, p_0$ , existe una lista  $\Gamma_k = \{\omega_k, \lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}$  con  $\omega_k \geq M_k + m_k$  o  $\omega_k > M_k + m_k$ , como en el Teorema 2.1, donde*

$$M_k = \max_{1 \leq i \leq p_k} \{0, \operatorname{Re} \lambda_{ki} + \operatorname{Im} \lambda_{ki}\}, \quad m_k = - \sum_{i=1}^{p_k} \min\{0, \operatorname{Re} \lambda_{ki}, \operatorname{Im} \lambda_{ki}\},$$

y

- ii) existe una matriz no-negativa  $B \in M_{p_0}$  con espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales  $\omega_1, \dots, \omega_{p_0}$ .*

*Entonces, existe una matriz no-negativa  $M \in M_n$ ,  $M \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$  con espectro  $\Lambda$  y con divisores elementales prescritos*

$$(\lambda - \lambda_1), (\lambda - \lambda_2)^{n_2}, \dots, (\lambda - \lambda_k)^{n_k}, \quad n_2 + \dots + n_k = n - 1.$$

*Demostración.* Sea







$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ \frac{34}{7} & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{8}{7} \\ \frac{34}{7} & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{8}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tiene espectro  $\Lambda$  y los divisores elementales deseados.

**Corolario 2.2.** Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_s, \lambda_{s+1}, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos satisfaciendo  $\Lambda = \bar{\Lambda}$ ,  $\lambda_1 \geq \max_{2 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ ; donde  $\lambda_k \leq 0$ , para  $k = 2, \dots, p$ , y  $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$  son números complejos no reales con  $\lambda_i \in \mathcal{F}$ , para  $i = p+1, \dots, s$  y  $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$  para  $i = s+1, \dots, n$ . Sea  $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ , donde

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \{\lambda_1, \lambda_{s+1}, \dots, \lambda_n\}, \\ \Lambda_2 &= \{\lambda_2, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_s\}, \end{aligned}$$

siendo  $\Lambda_1$  una lista realizable por una matriz compañera no-negativa. Entonces,  $\Lambda$  es realizable por una matriz no-negativa con divisores elementales arbitrariamente prescritos asociados a los autovalores de la lista  $\Lambda_2$ .

*Demostración.* Por hipótesis, existe una matriz compañera no-negativa  $B \in M_{n-s+1}$  con espectro  $\Lambda_1$  y un elemento diagonal  $\mu_1 = b_{11} = \operatorname{tr}(B)$ . Por otra parte, el Corolario 2.1 garantiza que la lista  $\Gamma_2 = \{\mu_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_s\}$  es realizable por una matriz  $A_2$  con divisores elementales arbitrariamente prescritos. Para cada  $k = 3, \dots, n-s+2$ , sea  $\Gamma_k = \{0\}$ . Entonces, la matriz

$$A = \begin{bmatrix} A_2 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix},$$

es no-negativa con espectro

$$\{\mu_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-s)\text{-ceros}}\}.$$

Aplicamos el Teorema de Rado (Teorema 1.9) para cambiar los autovalores

$$\mu_1, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-s)\text{-ceros}}$$

por los nuevos autovalores  $\lambda_1, \lambda_{s+1}, \dots, \lambda_n$ , con lo cual, obtenemos una matriz no-negativa  $M = A + XC$  con espectro  $\Lambda$  y con los divisores elementales prescritos asociados a los autovalores de la lista  $\Lambda_2$ . ■

---

## 2.2. Perturbación de autovalores complejos en el NIEP

---

Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , con  $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ , una lista de números complejos, realizable por una matriz no-negativa. W. Guo [14] probó que para todo  $t > 0$ , las listas perturbadas  $\Lambda_t^\pm = \{\lambda_1 + t, \lambda_2 \pm t, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$ , son también realizables por una matriz no-negativa. El problema de perturbar las partes reales de un par de autovalores complejos de una lista realizable, manteniendo la realizabilidad de la nueva lista, fue considerado por T. J. Laffey en [23] y por S. Guo y W. Guo en [15]. El siguiente resultado, dado en [49], muestra que podemos también perturbar las partes imaginarias de una pareja de autovalores complejos  $a + bi$ ,  $a - bi$  de una lista realizable de números complejos del tipo Suleimanova y así obtener una nueva lista la cual es también realizable.

**Teorema 2.3.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  con  $\lambda_k \in \mathcal{F}$ ,  $k = 2, \dots, n$ , una lista realizable de números complejos. Entonces, para todo  $t > 0$ , las listas perturbadas*

$$\Lambda_t^+ = \{\lambda_1 + 2t, \lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}, \lambda_p + ti, \bar{\lambda}_p - ti, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n\},$$

$$\Lambda_t^- = \{\lambda_1 + 2t, \lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}, \lambda_p - ti, \bar{\lambda}_p + ti, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n\}$$

son también realizables.

*Demostración.* Sean  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}$  números reales y sean  $\lambda_p, \lambda_{p+1} = \bar{\lambda}_p, \lambda_{p+2}, \lambda_{p+3} = \bar{\lambda}_{p+2}, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n = \bar{\lambda}_{n-1}$  números complejos. Para cada  $k = p, p+2, p+4, \dots, n-1$ , denotamos por  $x_k = \operatorname{Re}\lambda_k = \operatorname{Re}\lambda_{k+1}$  y  $0 \leq y_k = \operatorname{Im}\lambda_k = -\operatorname{Im}\lambda_{k+1}$ . Dado  $t > 0$ , consideremos la matriz







Del Corolario 2.1 sabemos que la lista

$$\Lambda' = \{6, -2 + 2i, -2 - 2i, -1 + i, -1 - i\}$$

es realizable. Entonces, del Teorema 2.4, con  $t = 2$ , tenemos que la lista

$$\Lambda'' = \{10, -2 + 2i, -2 - 2i, -3 + i, -3 - i\}$$

es realizable. Finalmente, del Teorema 2.3, con  $t = 3$ , obtenemos que la lista

$$\Lambda = \{16, -2 + 5i, -2 - 5i, -3 + i, -3 - i\}$$

es realizable. Observemos sin embargo que con este procedimiento, el incremento efectuado al autovalor de Perron  $\lambda_1$  puede ser más grande que lo necesario. En efecto, el autovalor de Perron 16, en este ejemplo, puede ser reemplazado por  $\lambda_1 \geq 10$ ; puesto que para  $\lambda_1 = 10$ , la matriz compañera con espectro  $\Lambda$  es no-negativa.

A continuación presentamos un resultado de perturbación de las partes imaginarias de una pareja de autovalores complejos de una lista realizable de números complejos  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , satisfaciendo  $Re\lambda_k \leq 0$ ,  $k = 2, \dots, n$ . Este resultado extiende parcialmente el Teorema 2.3. La demostración se fundamenta en la condición necesaria y suficiente dada por T. Laffey y H. Šmigoc para el NIEP (Teorema 1.7). Más precisamente, nosotros demostramos que si una lista  $\Lambda$  satisface las condiciones necesarias y suficientes dadas en el Teorema 1.7, entonces las listas perturbadas  $\Lambda_t^\pm$  también satisfacen dichas condiciones.

**Teorema 2.5.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista realizable de números complejos con  $Re\lambda_k \leq 0$ ,  $k = 2, \dots, n$ . Entonces, para todo  $t > 0$ , las listas perturbadas*

$$\Lambda_t^- = \{\lambda_1 + 2t, \lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}, \lambda_p - ti, \bar{\lambda}_p + ti, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n\}$$

$$\Lambda_t^+ = \{\lambda_1 + 4t, \lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}, \lambda_p + ti, \bar{\lambda}_p - ti, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n\}$$

son también realizables.

*Demostración.* Sean  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}$  números reales y sean  $\lambda_p, \lambda_{p+1} = \bar{\lambda}_p, \lambda_{p+2}, \lambda_{p+3} = \bar{\lambda}_{p+2}, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n = \bar{\lambda}_{n-1}$  números complejos. Para cada  $k = p, p+2, p+4, \dots, n-1$ , sean  $x_k = Re\lambda_k = Re\lambda_{k+1}$  y  $0 \leq y_k = Im\lambda_k = -Im\lambda_{k+1}$ .

\* Primero demostramos que para todo  $t > 0$ , la lista

$$\Lambda_t^- = \{\lambda_1 + 2t, \lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}, \lambda_p - ti, \bar{\lambda}_p + ti, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n\}$$

es realizable. En efecto, sea  $t > 0$ .

$$\begin{aligned}
 s_1(\Lambda_t^-) &= 2t + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i + (x_p + (y_p - t)i) + (x_p - (y_p - t)i) + \sum_{r=1}^{\frac{n-p-1}{2}} (\lambda_{p+2r} + \bar{\lambda}_{p+2r}) \\
 &= 2t + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i + 2 \sum_{r=0}^{\frac{n-p-1}{2}} x_{p+2r} \\
 &= s_1(\Lambda) + 2t.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
 s_2(\Lambda_t^-) &= \\
 &= (\lambda_1 + 2t)^2 + \sum_{i=2}^{p-1} \lambda_i^2 + (x_p + (y_p - t)i)^2 + (x_p - (y_p - t)i)^2 + \sum_{r=1}^{\frac{n-p-1}{2}} (\lambda_{p+2r}^2 + (\bar{\lambda}_{p+2r})^2) \\
 &= \lambda_1^2 + \sum_{i=2}^{p-1} \lambda_i^2 + 2 \sum_{r=0}^{\frac{n-p-1}{2}} (x_{p+2r}^2 - y_{p+2r}^2) + 4(\lambda_1 + y_p)t + 2t^2 \\
 &= s_2(\Lambda) + 4(\lambda_1 + y_p)t + 2t^2.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Es claro que  $\Lambda_t^- = \overline{\Lambda_t^-}$ . Además, puesto que  $s_1(\Lambda) \geq 0$ ,  $s_2(\Lambda) \geq 0$  y  $\lambda_1 + y_p \geq 0$  (pues,  $\lambda_1 \geq |\lambda_p| \geq |Im \lambda_p| = |y_p|$  por ser  $\Lambda$  realizable), entonces de (2.6) y (2.7) tenemos que  $s_1(\Lambda_t^-) \geq 0$  y  $s_2(\Lambda_t^-) \geq 0$ . Resta verificar que  $s_1(\Lambda_t^-)^2 \leq n s_2(\Lambda_t^-)$ . De (2.6) y (2.7) se tiene que

$$s_1(\Lambda_t^-)^2 = s_1(\Lambda)^2 + 4s_1(\Lambda)t + 4t^2,$$

y

$$n s_2(\Lambda_t^-) = n s_2(\Lambda) + 4n(\lambda_1 + y_p)t + 2nt^2.$$

Puesto que  $\Lambda$  es realizable, entonces  $s_1(\Lambda)^2 \leq n s_2(\Lambda)$  (Cond. (3) Teorema 1.7). Además,  $s_1(\Lambda) \leq \lambda_1 + y_p$  (pues,  $s_1(\Lambda) \leq \lambda_1$  y  $y_p \geq 0$ ),  $4 < 4n$  y  $4 < 2n$  ( $n \geq 3$ ). Por consiguiente,  $s_1(\Lambda_t^-)^2 \leq n s_2(\Lambda_t^-)$ . Con lo anterior, hemos demostrado que la lista  $\Lambda_t^-$  satisface las condiciones necesarias y suficientes del Teorema 1.7, y por tanto, es realizable.

\* \* Mostramos ahora que la lista

$$\Lambda_t^+ = \{\lambda_1 + 4t, \lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}, \lambda_p + ti, \bar{\lambda}_p - ti, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n\}$$

es realizable. En efecto, dado  $t > 0$  es claro que  $\Lambda_t^+ = \overline{\Lambda_t^+}$ . Además, es fácil ver que en este caso

$$s_1(\Lambda_t^+) = s_1(\Lambda) + 4t, \quad (2.8)$$

y

$$s_2(\Lambda_t^+) = s_2(\Lambda) + 4(2\lambda_1 - y_p)t + 14t^2. \quad (2.9)$$

Puesto que  $s_1(\Lambda) \geq 0$ ,  $s_2(\Lambda) \geq 0$  y  $2\lambda_1 - y_p \geq 0$  (pues,  $\lambda_1 \geq |y_p|$ ), entonces de (2.8) y (2.9) tenemos que  $s_1(\Lambda_t^+) \geq 0$  y  $s_2(\Lambda_t^+) \geq 0$ . Resta verificar que  $s_1(\Lambda_t^+)^2 \leq ns_2(\Lambda_t^+)$ . De (2.8) y (2.9) se tiene que

$$s_1(\Lambda_t^+)^2 = s_1(\Lambda)^2 + 8s_1(\Lambda)t + 16t^2,$$

y

$$ns_2(\Lambda_t^+) = ns_2(\Lambda) + 4n(2\lambda_1 - y_p)t + 14nt^2.$$

Puesto que  $\Lambda$  es realizable, entonces  $s_1(\Lambda)^2 \leq ns_2(\Lambda)$ . Además,  $s_1(\Lambda) \leq 2\lambda_1 - y_p$  (pues,  $s_1(\Lambda) \leq \lambda_1$  y  $y_p \leq \lambda_1$ ),  $8 < 4n$  y  $16 < 14n$  ( $n \geq 3$ ). Por consiguiente,  $s_1(\Lambda_t^+)^2 \leq ns_2(\Lambda_t^+)$ . De esta manera, hemos demostrado que la lista  $\Lambda_t^+$  satisface las condiciones necesarias y suficientes del Teorema 1.7, y por tanto, es realizable. ■

**Observación 2.4.** *Es claro que en el teorema anterior podemos perturbar simultáneamente dos o más pares de números complejos conjugados, bajo la condición que se debe incrementar  $\lambda_1$  de manera apropiada. Es claro que también podemos perturbar un par de autovalores reales repetidos  $\lambda_k, \lambda_k$  para obtener  $\lambda_k + ti, \lambda_k - ti$ .*

---

### 2.3. Perturbación de autovalores complejos en el NIEDP

---

Los resultados de perturbación de autovalores complejos presentados en la sección anterior, dan lugar a un interesante procedimiento, el cual permite construir, a partir de una lista realizable con ciertos divisores elementales, una nueva lista realizable, donde los divisores elementales asociados a los nuevos autovalores mantienen la estructura de los divisores elementales asociados a los antiguos autovalores. Esto es lo que establecemos en el siguiente teorema:





obtenemos que la matriz  $A(t) = S(J(A) + D_t^+)S^{-1} + \mathbf{e}\mathbf{q}^T$  es no-negativa, con espectro  $\Lambda_t^+$  y los divisores elementales prescritos como en (2.11). Para el caso de la lista  $\Lambda_t^-$ , consideramos la matriz

$$D_t^- = ((n_p + 1)t) \oplus \mathbf{0}_{p-2} \oplus \underbrace{A_{-t} \oplus A_{-t} \oplus \cdots \oplus A_{-t} \oplus A_{-t}}_{n_p \text{ veces}} \oplus \mathbf{0}_{n-2n_p-p+1},$$

donde

$$A_{-t} = \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces, la matriz  $J(A) + D_t^-$  tiene espectro  $\Lambda_t^-$  y los divisores elementales prescritos como en (2.11). Nótese que la matriz  $S(J(A) + D_t^-)S^{-1} \in \mathcal{CS}_{\lambda_1 + (n_p+1)t}$  y además

$$S(J(A) + D_t^-)S^{-1} = J(A) + D_t^- + [B_1 \mid \mathbf{0} \mid \cdots \mid \mathbf{0}],$$

donde  $B_1 = (0, b_2, \dots, b_n)^T \geq \mathbf{0}$ . Considerando en este caso el vector  $\mathbf{q}^T = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$  como

$$\begin{aligned} q_1 &= \sum_{k=2}^n \lambda_k - n_p t, \\ q_k &= -\lambda_k, \quad k = 2, \dots, p-1, \\ q_k &= -x_p, \quad k = p, p+2, \dots, p+2n_p-2, \\ q_k &= -x_p + t, \quad k = p+1, p+3, \dots, p+2n_p-1, \\ q_k &= q_{k+1} = -x_k, \quad k = p+2n_p, p+2n_p+2, \dots, n-3, n-1, \end{aligned}$$

obtenemos que la matriz  $A(t) = S(J(A) + D_t^-)S^{-1} + \mathbf{e}\mathbf{q}^T$  es no-negativa, con espectro  $\Lambda_t^-$  y los divisores elementales prescritos como en (2.11).  $\blacksquare$

**Ejemplo 2.4.** *Existe una matriz no-negativa con espectro*

$$\Lambda = \{10, -1, -1, -1, -1 \pm 2i, -1 \pm 2i\}$$

*y divisores elementales*

$$(\lambda - 10), (\lambda + 1)^2, (\lambda + 1), (\lambda + 1 - 2i)^2, (\lambda + 1 + 2i)^2 ?$$

*Para dar respuesta a esta pregunta, hacemos lo siguiente: Consideremos la lista*

$$\Gamma = \{7, -1, -1, -1, -1 \pm i, -1 \pm i\}.$$

Del Corolario 2.1 sabemos que existe una matriz no-negativa con espectro  $\Gamma$  y divisores elementales

$$(\lambda - 7), (\lambda + 1)^2, (\lambda + 1), (\lambda + 1 - i)^2, (\lambda + 1 + i)^2 .$$

Por tanto, del Teorema 2.6 con  $t = 1$ , tenemos que  $\Lambda$  es el espectro de una matriz no-negativa con los divisores elementales deseados. Hallemos una matriz con estas condiciones. En efecto, la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tiene espectro  $\Gamma$  y

$$J(A) = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sea

$$D_1^+ = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$S(J(A) + D_1^+)S^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 14 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{CS}_{10}.$$

Considerando el vector  $\mathbf{q}^T = (-9, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1)$ , tenemos que la matriz

$$A(1) = S(J(A) + D_1^+)S^{-1} + \mathbf{e}\mathbf{q}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

es no-negativa con espectro  $\Lambda$  y los divisores elementales deseados.

# Capítulo 3

## Problema inverso de los divisores elementales para espectros teniendo parte real negativa

En este capítulo establecemos una condición necesaria y suficiente para que el *NIEDP* tenga una solución, en el caso de listas de números complejos  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , con  $\lambda_i \in \mathcal{G}$ ,  $i = 2, \dots, n$ , donde

$$\mathcal{G} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0, |\sqrt{3}\operatorname{Re} z| \geq |\operatorname{Im} z|\}.$$

Para el caso  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ ,  $i = 2, \dots, n$ , presentamos una nueva condición suficiente. Es claro que la condición necesaria y suficiente que presentamos en este capítulo, extiende el Corolario 2.1, lo que constituye un aporte al conocimiento del problema. Nuestras condiciones generan un procedimiento algorítmico para construir una matriz solución.

Los resultados de este capítulo constituyen esencialmente la publicación [9] (R. C. Díaz, R. L. Soto, *Nonnegative inverse elementary divisors problem in the left half plane*, Linear and Multilinear Algebra, DOI: 10.1080/03081087.2015.1034640.)

Primeramente presentamos algunos resultados generales que serán usados para obtener los resultados principales de este capítulo. Los siguientes dos Lemas son debidos a H. Śmigoc [39], y T. Laffey y H. Śmigoc [24], respectivamente.

**Lema 3.1.** [39] Sean  $A = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^T & c \end{bmatrix} \in M_n$  y  $B \in M_m$  con FCJ

$$J(B) = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & I(B) \end{bmatrix}.$$

Entonces, la matriz

$$C = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{at}^T \\ \mathbf{sb}^T & B \end{bmatrix}$$

donde  $B\mathbf{s} = c\mathbf{s}$  y  $\mathbf{t}^T B = c\mathbf{t}^T$ , tal que  $\mathbf{t}^T \mathbf{s} = 1$ , tiene FCJ

$$J(C) = \begin{bmatrix} J(A) & 0 \\ 0 & I(B) \end{bmatrix}.$$

**Lema 3.2.** [24] Sea  $t$  un número real no-negativo y sean  $\lambda_j \in \mathbb{C}$  con  $\text{Re}\lambda_j \leq 0$ , para  $j = 2, \dots, n$ , tal que la lista  $\{\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$  es cerrada bajo conjugación. Sea  $\rho = 2t - \lambda_2 - \dots - \lambda_n$  y sea

$$f(x) = (x - \rho) \prod_{j=2}^n (x - \lambda_j) = x^n - 2tx^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_n.$$

Entonces,  $b_2 \leq 0$  implica que  $b_j \leq 0$  para todo  $j = 2, \dots, n$ .

**Teorema 3.1.** [16] (Identidades de Newton's)

Sea

$$p(\lambda) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \dots + b_{n-1}\lambda + b_n$$

un polinomio con raíces (contadas según multiplicidad)  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Para  $j = 1, 2, 3, \dots$ , sea

$$s_j = \lambda_1^j + \lambda_2^j + \dots + \lambda_n^j.$$

Sea  $b_k = 0$  para  $k > n$ . Entonces, para todo  $j = 1, 2, 3, \dots$ , se tiene que

$$s_j + b_1s_{j-1} + b_2s_{j-2} + \dots + b_{j-1}s_1 + jb_j = 0. \quad (3.1)$$

**Observación 3.1.** Note en particular que de (3.1) se tiene que:

$$\begin{aligned} s_1 + b_1 &= 0, \\ s_2 + b_1s_1 + 2b_2 &= 0, \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$b_2 = \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2). \quad (3.2)$$

---

### 3.1. Solución del NIEDP para listas $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ con $Re\lambda_i < 0$ , $|\sqrt{3}Re\lambda_i| \geq |Im\lambda_i|$ , $i = 2, \dots, n$ .

---

En esta sección resolvemos completamente el NIEDP para listas de números complejos del tipo Šmigoc; es decir, listas  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , satisfaciendo

$$\lambda_i \in \mathcal{G} = \{z \in \mathbb{C} : Rez \leq 0, |\sqrt{3}Rez| \geq |Imz|\}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Empezamos con el siguiente lema.

**Lema 3.3.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, a \pm bi, \dots, a \pm bi\}$  una lista de  $n$  números complejos y sea*

$$p(\lambda) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \dots + b_{n-1}\lambda + b_n,$$

*el polinomio asociado a  $\Lambda$ . Entonces,*

$$b_2 = \left(\frac{n-1}{2}\right)(2\lambda_1 a + (n-2)a^2 + b^2).$$

*Demostración.* Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , donde  $\lambda_{2j} = a + bi$  y  $\lambda_{2j+1} = \bar{\lambda}_j = a - bi$ , para  $j = 1, \dots, \frac{n-1}{2}$  y sea  $s_k := s_k(\Lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Puesto que  $s_1(\Lambda) = \lambda_1 + (n-1)a$  y  $s_2(\Lambda) = \lambda_1^2 + (n-1)(a^2 - b^2)$ , entonces de (3.2) se sigue que

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{1}{2}(s_1^2(\Lambda) - s_2(\Lambda)) \\ &= \frac{1}{2}([\lambda_1 + (n-1)a]^2 - [\lambda_1^2 + (n-1)(a^2 - b^2)]) \\ &= \left(\frac{n-1}{2}\right)(2\lambda_1 a + (n-2)a^2 + b^2). \end{aligned}$$

■

El siguiente resultado establece una condición suficiente para listas de la forma  $\Lambda = \{\lambda_1, a \pm bi, \dots, a \pm bi\}$ .

**Teorema 3.2.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, a \pm bi, \dots, a \pm bi\}$  una lista de  $n$  números complejos, siendo  $n \geq 3$ ,  $a < 0$  y  $b > 0$ . Si*

$$\lambda_1 \geq \max\left\{- (n-1)a, -\frac{(2n-5)a^2 + b^2}{2a}\right\}, \quad (3.3)$$

*entonces para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , existe una matriz no-negativa  $A = (a_{ij}) \in M_n$  con espectro  $\Lambda$  y entrada  $a_{nn} = \lambda_1 + (n-1)a$ .*

*Demostración. Caso  $n = 3$ :* Note que haciendo  $n = 3$  en (3.3), se sigue que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda_1(a^2 + b^2) & -(2\lambda_1 a + a^2 + b^2) & \lambda_1 + 2a \end{bmatrix},$$

es no-negativa. Además,  $A$  tiene espectro  $\Lambda$ , divisores elementales lineales y entrada  $a_{33} = \lambda_1 + 2a$ .

*Caso General:* Supongamos que el Teorema 3.2 es cierto para toda lista con una cantidad menor o igual a  $k$  números complejos. Veamos que éste también es cierto para una lista con  $k + 2$  números complejos. En efecto: Sea

$$\Lambda = \{\lambda_1, a \pm bi, \dots, a \pm bi\},$$

una lista con  $k + 2$  números complejos, siendo  $a < 0$  y satisfaciendo (3.3) (con  $n = k + 2$ ); es decir,

$$\lambda_1 \geq \max \left\{ -(k + 1)a, -\frac{(2k - 1)a^2 + b^2}{2a} \right\}. \quad (3.4)$$

Para cada  $r = 1, \dots, \frac{k+1}{2}$ , se desea hallar una matriz no negativa con espectro  $\Lambda$  y divisores elementales

$$(\lambda - \lambda_1), (\lambda - (a + bi))^r, (\lambda - (a - bi))^r, \dots \text{arbitrarios.}$$

Definamos las siguientes listas

$$\Lambda_1 = \{\lambda_1, a \pm bi, \dots, a \pm bi\} \quad (2r + 1 \text{ números}),$$

$$\Lambda_2 = \{\lambda_1 + 2ra, a \pm bi, \dots, a \pm bi\} \quad (k - 2r + 2 \text{ números}).$$

La matriz compañera

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -b_{2r+1} & -b_{2r} & -b_{2r-1} & \cdots & -b_2 & \lambda_1 + 2ra \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^T & c \end{bmatrix},$$

donde  $b_j$ ,  $j = 2, \dots, 2r + 1$ , son los coeficientes del polinomio característico

obtenido de la lista  $\Lambda_1$ , tiene espectro  $\Lambda_1$  y divisores elementales

$$(\lambda - \lambda_1), (\lambda - (a + bi))^r, (\lambda - (a - bi))^r.$$

Veamos que  $A$  es no-negativa. Del Lema 3.3, se tiene que

$$b_2 = r(2\lambda_1 a + (2r - 1)a^2 + b^2) = r\beta,$$

y de (3.4) se sigue que

$$\alpha = 2\lambda_1 a + (2k - 1)a^2 + b^2 \leq 0.$$

Como  $\beta < \alpha$  si y sólo si  $r < k$  (lo cual es cierto, pues  $1 \leq r \leq \frac{k+1}{2} < k$ ), entonces  $b_2 < 0$ . Por tanto, el Lema 3.2 garantiza que la matriz  $A$  es no-negativa. Por otra parte, teniendo en cuenta nuevamente (3.4), se tiene que:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2ra & \geq -((k - 2r + 2) - 1)a, \\ \lambda_1 + 2ra & \geq -\frac{(2(k-2r+2)-5)a^2+b^2}{2a}. \end{cases} \quad (3.5)$$

De las desigualdades en (3.5) se sigue que  $\Lambda_2$  satisface (3.3) (con  $n = k - 2r + 2 \leq k$ , para cada  $1 \leq r \leq \frac{k+1}{2}$ ), con lo cual, por hipótesis de inducción, existe una matriz  $B = (b_{ij})$  no-negativa con espectro  $\Lambda_2$ , divisores elementales arbitrariamente prescritos y entrada

$$b_{k-2r+2, k-2r+2} = \lambda_1 + (k + 1)a.$$

Por consiguiente, la matriz

$$C = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{at}^T \\ \mathbf{sb}^T & B \end{bmatrix} = (c_{ij}),$$

donde  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{s}$  son autovectores a izquierda y a derecha de  $B$ , respectivamente, asociados al autovalor  $\lambda_1 + 2ra$ , es no-negativa con espectro  $\Lambda$ , entrada  $c_{k+2, k+2} = \lambda_1 + (k + 1)a$  y del Lema 3.1 ella tiene los divisores elementales prescritos.  $\blacksquare$

El Teorema 3.2 da una solución completa cuando el máximo en (3.3) es igual a  $-(n - 1)a$ . Un caso especial, que garantiza que esto ocurre, se establece en el siguiente Corolario:

**Corolario 3.1.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, a \pm bi, \dots, a \pm bi\}$  una lista de  $n$  números complejos con  $0 < b \leq -\sqrt{3}a$ . Entonces, para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , existe una matriz no-negativa  $A = (a_{ij}) \in M_n$  con espectro  $\Lambda$  y entrada  $a_{nn} = \lambda_1 + (n - 1)a$  si y sólo si  $\lambda_1 + (n - 1)a \geq 0$ .*

*Demostración.* Es claro que la condición es necesaria. Probamos que la condición también es suficiente. En efecto, supongamos que  $\lambda_1 + (n-1)a \geq 0$ . Puesto que  $0 < b \leq -\sqrt{3}a$ , entonces  $\frac{3a^2-b^2}{2a} \leq 0$ ; con lo cual,

$$\begin{aligned} & \text{máx} \left\{ -(n-1)a, -\frac{(2n-5)a^2 + b^2}{2a} \right\} \\ &= \text{máx} \left\{ -(n-1)a, -(n-1)a + \frac{3a^2 - b^2}{2a} \right\} \\ &= -(n-1)a \leq \lambda_1. \end{aligned}$$

Por consiguiente, en virtud del Teorema 3.2, para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , existe una matriz no-negativa  $A = (a_{ij}) \in M_n$  con espectro  $\Lambda$  y entrada  $a_{nn} = \lambda_1 + (n-1)a$ . ■

Otras situaciones, como la existencia de números reales, o la existencia de distintas parejas de complejos conjugados en la lista  $\Lambda$ , son consideradas en el siguiente resultado, en el cual resolvemos completamente el NIEDP para listas tipo Šmigoc. La condición que presentamos, es la misma condición simple establecida en el Corolario 2.1.

**Teorema 3.3.** [*Resultado Principal*] Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos, con  $\lambda_k \in \mathcal{G} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}z \leq 0, |\sqrt{3}\text{Re}z| \geq |\text{Im}z|\}$ ,  $k = 2, \dots, n$ . Entonces, para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , existe una matriz no-negativa  $A = (a_{ij}) \in M_n$  con espectro  $\Lambda$  si y sólo si  $\sum_{k=1}^n \lambda_k \geq 0$ .

*Demostración.* Es claro que la condición es necesaria. Probamos que la condición también es suficiente. En efecto, sean  $\lambda_1 > 0 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$  números reales y sean  $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2} = \bar{\lambda}_{p+1}, \dots, \lambda_{n-1}, \bar{\lambda}_{n-1} = \lambda_n$  números complejos no reales. Supongamos que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ . Consideremos las siguientes listas

$$\Lambda_0 = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\},$$

$$\Lambda_r = \{s_1(\Lambda_{r-1}), \lambda_{p+r}, \bar{\lambda}_{p+r}, \dots, \lambda_{p+r}, \bar{\lambda}_{p+r}\}, \quad r = 1, \dots, m,$$

con  $\Lambda_r$  teniendo  $n_r + 1$  elementos, tal que  $\sum_{r=1}^m n_r = n - p$ . Es claro que la lista  $\Lambda_0$  satisface el Teorema 1.4 y por tanto, de la Observación 1.3, existe para cada FCJ asociada a  $\Lambda_0$ , una matriz  $A_0 = (a_{ij}^0)$  con espectro  $\Lambda_0$  y entrada  $a_{pp}^0 = s_1(\Lambda_0)$ .

Además, puesto que para cada  $r = 1, \dots, m$ ,  $0 < \operatorname{Im}\lambda_{p+r} \leq -\sqrt{3}\operatorname{Re}\lambda_{p+r}$  y  $s_1(\Lambda_r) \geq s_1(\Lambda) \geq 0$ , entonces se tiene del Corolario 3.1, que existe para cada FCJ asociada a  $\Lambda_r$ , una matriz no-negativa  $A_r = (a_{ij}^{(r)})$  de orden  $n_r + 1$  con espectro  $\Lambda_r$  y entrada

$$a_{n_r+1, n_r+1}^{(r)} = s_1(\Lambda_r).$$

Finalmente, empleando  $m$  veces el Lema 3.1, construimos, para cada FCJ asociada a  $\Lambda$ , una matriz no-negativa  $A = (a_{ij}) \in M_n$  con espectro  $\Lambda$  y entrada  $a_{nn} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ . ■

El método que empleamos para probar el Teorema 3.2 y el Teorema 3.3 nos permite obtener, bajo ciertas condiciones, una matriz no-negativa con espectro  $\Lambda$ , para cada FCJ asociada con dicha lista. Sin embargo, este método no funciona para cualquier lista de números complejos en el semiplano izquierdo. En particular, la lista

$$\Lambda = \{6, -1 \pm 3i, -1 \pm 3i\},$$

satisface las condiciones de Laffey y Šmigoc (Teorema 1.7), y por tanto es realizable. Sin embargo,  $\Lambda$  no satisface la condición del Teorema 3.2 (pues, la sublista  $\Lambda_2 = \{4, -1 \pm 3i\}$  no es realizable).

El siguiente ejemplo, ilustra el Teorema 3.3.

**Ejemplo 3.1.** Sea  $\Lambda = \{23, -1, -1, -1, -2 \pm 3i, -2 \pm 3i, -3 \pm 5i, -3 \pm 5i\}$ . Queremos construir una matriz no-negativa de orden 12, con espectro  $\Lambda$  y divisores elementales

$$\begin{aligned} &(\lambda - 23), (\lambda + 1)^2, (\lambda + 1), (\lambda^2 + 4\lambda + 13)^2, \\ &(\lambda + 3 - 5i), (\lambda + 3 - 5i), (\lambda + 3 + 5i), (\lambda + 3 + 5i). \end{aligned}$$

Consideremos las siguientes listas:

$$\Lambda_0 = \{23, -1, -1, -1\},$$

$$\Lambda_1 = \{20, -2 \pm 3i, -2 \pm 3i\},$$

$$\Lambda_2 = \{12, -3 \pm 5i, -3 \pm 5i\}.$$

Es claro que la lista  $\Lambda_0$ , satisface el Teorema 1.4 y de la Observación 1.3, podemos encontrar la matriz

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 21 \\ 1 & 0 & 0 & 22 \\ 1 & 1 & 0 & 21 \\ 1 & 1 & 1 & 20 \end{bmatrix},$$

la cual tiene espectro  $\Lambda_0$ , divisores elementales

$$(\lambda - 23), (\lambda + 1)^2, (\lambda + 1),$$

y entrada  $a_{44}^{(0)} = 20$ . Por otra parte, las listas  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  satisfacen el Corolario 3.1. Por tanto, podemos obtener las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3380 & 1911 & 736 & 118 & 12 \end{bmatrix},$$

la cual tiene espectro  $\Lambda_1$ , divisores elementales

$$(\lambda - 20), (\lambda^2 + 4\lambda + 13)^2,$$

y entrada  $a_{55}^{(1)} = 12$ ,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{612}{53} & \frac{108}{53} & \frac{18}{53} \\ \frac{34}{3} & \frac{19}{18} & 0 & 1 & 0 \\ 68 & \frac{19}{3} & 0 & 0 & 1 \\ 408 & 38 & 204 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

la cual tiene espectro  $\Lambda_2$  y divisores elementales

$$(\lambda - 12), (\lambda + 3 - 5i), (\lambda + 3 - 5i), (\lambda + 3 + 5i), (\lambda + 3 + 5i).$$

Luego empleamos el Lema 3.1 con las matrices  $A_0$  y  $A_1$ , para obtener la matriz

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{567840000}{243049} & \frac{349440000}{243049} & \frac{141120000}{243049} & \frac{26880000}{243049} & \frac{3360000}{243049} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{594880000}{243049} & \frac{366080000}{243049} & \frac{147840000}{243049} & \frac{28160000}{243049} & \frac{3520000}{243049} \\ 1 & 1 & 0 & \frac{567840000}{243049} & \frac{349440000}{243049} & \frac{141120000}{243049} & \frac{26880000}{243049} & \frac{3360000}{243049} \\ \frac{1}{160000} & \frac{1}{160000} & \frac{1}{160000} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8000} & \frac{1}{8000} & \frac{1}{8000} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{400} & \frac{1}{400} & \frac{1}{400} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3380 & 1911 & 736 & 118 & 12 \end{bmatrix} = (b_{ij}),$$

la cual tiene espectro  $\Gamma = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 - \{20\}$ , divisores elementales

$$(\lambda - 23), (\lambda + 1)^2, (\lambda + 1), (\lambda^2 + 4\lambda + 13)^2,$$

y entrada  $b_{8,8} = 12$ . Finalmente, empleamos nuevamente el Lema 3.1 con las matrices  $B_1$  y  $A_2$ , para encontrar una matriz no-negativa  $A = (a_{ij})$  con espectro  $\Lambda$  y con los divisores elementales deseados.

---

## 3.2. Nuevas Condiciones Suficientes para el NIEDP

---

En esta sección se establece una nueva condición suficiente para que el NIEDP tenga una solución, en el caso de listas de números complejos  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , con  $\lambda_k \in \mathcal{H}$ ,  $k = 2, \dots, n$ , donde

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0, |\sqrt{3}\operatorname{Re} z| < |\operatorname{Im} z|\}.$$

Presentamos primeramente el siguiente corolario del Teorema 3.2.

**Corolario 3.2.** Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, a \pm bi, \dots, a \pm bi\}$  una lista de  $n$  números complejos con  $0 < -\sqrt{3}a < b$ . Si

$$\lambda_1 \geq -(n-1)a + \frac{3a^2 - b^2}{2a},$$

entonces para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , existe una matriz no-negativa  $A = (a_{ij}) \in M_n$  con espectro  $\Lambda$  y entrada  $a_{nn} = \lambda_1 + (n-1)a$ .

*Demostración.* Puesto que  $0 < -\sqrt{3}a < b$ , entonces  $\frac{3a^2-b^2}{2a} \geq 0$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} & \text{máx} \left\{ -(n-1)a, -\frac{(2n-5)a^2 + b^2}{2a} \right\} \\ &= \text{máx} \left\{ -(n-1)a, -(n-1)a + \frac{3a^2 - b^2}{2a} \right\} \\ &= -(n-1)a + \frac{3a^2 - b^2}{2a}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, si

$$\lambda_1 \geq -(n-1)a + \frac{3a^2 - b^2}{2a},$$

entonces en virtud del Teorema 3.2, tenemos que para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , existe una matriz no-negativa  $A = (a_{ij}) \in M_n$  con espectro  $\Lambda$  y entrada  $a_{nn} = \lambda_1 + (n-1)a$ . ■

El siguiente ejemplo, ilustra el corolario anterior.

**Ejemplo 3.2.** Sea  $\Lambda = \{7, -1 \pm 3i, -1 \pm 3i\}$ . Puesto que

$$\lambda_1 \geq -4(-1) + \frac{3(-1)^2 - (3)^2}{2(-1)} = 7,$$

se sigue del Corolario 3.2 que para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , existe una matriz no-negativa  $A$  con espectro  $\Lambda$ . En efecto, la matriz compañera

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 700 & 180 & 128 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

tiene espectro  $\Lambda$  y divisores elementales

$$(\lambda - 7), (\lambda^2 + 2\lambda + 10)^2.$$

Buscamos ahora una matriz no-negativa con espectro  $\Lambda$  y divisores elementales

$$(\lambda - 7), (\lambda^2 + 2\lambda + 10), (\lambda^2 + 2\lambda + 10).$$

Consideremos la partición:

$$\Lambda_1 = \{7, -1 \pm 3i\},$$

$$\Lambda_2 = \{5, -1 \pm 3i\}.$$

Las matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 70 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^T & 5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 50 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

tienen espectro  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  respectivamente. Los vectores  $\mathbf{s} = (\frac{1}{25}, \frac{1}{5}, 1)^T$  y  $\mathbf{t}^T = (\frac{50}{9}, \frac{10}{9}, \frac{5}{9})$  son autovectores a derecha y a izquierda de  $A_2$  respectivamente, y satisfacen  $\mathbf{t}^T \mathbf{s} = 1$ . Del Lema 3.1 obtenemos la matriz

$$C = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{a} \mathbf{t}^T \\ \mathbf{s} \mathbf{b}^T & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{50}{9} & \frac{10}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{14}{5} & \frac{4}{25} & 0 & 1 & 0 \\ 14 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 1 \\ 70 & 4 & 50 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

la cual tiene espectro  $\Lambda$  y divisores elementales

$$(\lambda - 7), (\lambda^2 + 2\lambda + 10), (\lambda^2 + 2\lambda + 10).$$

A continuación presentamos una condición suficiente para listas de números complejos sobre el eje imaginario.

**Teorema 3.4.** Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \pm bi, \dots, \pm bi\}$  una lista de  $n$  números complejos, con  $n \geq 3$  y  $b > 0$ . Si

$$\lambda_1 \geq (\sqrt{2n-3})b,$$

entonces para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , existe una matriz no-negativa con espectro  $\Lambda$ .

*Demostración.* Sea

$$t = \frac{\lambda_1 - \sqrt{\lambda_1^2 - (2n-3)b^2}}{2n-3} > 0,$$

y consideremos la lista

$$\Lambda_t = \{\lambda_1 - t, -t \pm bi, \dots, -t \pm bi\}.$$

Mostramos que  $\Lambda_t$  satisface el Corolario 3.2. En efecto, puesto que  $0 < y \leq x$  implica  $x - y \leq \sqrt{x^2 - y^2}$ , se sigue entonces de la hipótesis  $0 < (\sqrt{2n-3})b \leq \lambda_1$ , que  $\lambda_1 - (\sqrt{2n-3})b \leq \sqrt{\lambda_1^2 - (2n-3)b^2}$ , con lo cual

$$\begin{aligned} t &= \frac{\lambda_1 - \sqrt{\lambda_1^2 - (2n-3)b^2}}{2n-3} \leq \frac{\lambda_1 - (\lambda_1 - (\sqrt{2n-3})b)}{2n-3} \\ &= \frac{b}{\sqrt{2n-3}}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sqrt{3}t \leq \frac{\sqrt{3}b}{\sqrt{2n-3}} \leq b.$$

Además,

$$-(n-1)(-t) + \frac{3(-t)^2 - b^2}{2(-t)} = \frac{(2n-5)t^2 + b^2}{2t} = \lambda_1 - t.$$

De esta manera obtenemos que la lista  $\Lambda_t$  satisface el Corolario 3.2, con lo cual existe, para cada FCJ asociada con  $\Lambda_t$ , una matriz  $B$  no-negativa con espectro  $\Lambda_t$ . Por tanto, la matriz no-negativa  $A = B + tI$  tiene espectro  $\Lambda$  para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ . ■

El siguiente ejemplo, ilustra el teorema anterior.

**Ejemplo 3.3.** Sea  $\Lambda = \{20, \pm 5i, \pm 5i, \pm 5i, \pm 5i\}$ . Se desea hallar una matriz no-negativa  $A = (a_{ij})$  con espectro  $\Lambda$  y divisores elementales

$$(\lambda - 20), (\lambda^2 + 25)^2, (\lambda^2 + 25)^2.$$

*Nótese que*

$$20 \geq (\sqrt{2(9) - 3})5 = (\sqrt{15})5 = 19.365,$$

y

$$t = \frac{20 - \sqrt{20^2 - (2(9) - 3)5^2}}{2(9) - 3} = 1.$$

Consideremos la lista

$$\Lambda_1 = \{19, -1 \pm 5i, -1 \pm 5i, -1 \pm 5i, -1 \pm 5i\}.$$

Sean

$$\Lambda_{11} = \{19, -1 \pm 5i, -1 \pm 5i\}$$

$$\Lambda_{12} = \{15, -1 \pm 5i, -1 \pm 5i\}.$$

Las matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 12844 & 1300 & 960 & 20 & 15 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 10140 & 884 & 736 & 4 & 11 \end{bmatrix},$$

tienen espectro  $\Lambda_{11}$  y  $\Lambda_{12}$  y divisores elementales

$$(\lambda - 19), (\lambda^2 + 2\lambda + 26)^2,$$

y

$$(\lambda - 15), (\lambda^2 + 2\lambda + 26)^2,$$

respectivamente. Aplicamos el Lema 3.1 con las matrices  $A_1$  y  $A_2$ , para encontrar la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{34222500}{78961} & \frac{5265000}{78961} & \frac{2835000}{78961} & \frac{202500}{78961} & \frac{50625}{78961} \\ \frac{12844}{50625} & \frac{52}{2025} & \frac{64}{3375} & \frac{4}{10125} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12844}{3375} & \frac{52}{135} & \frac{64}{225} & \frac{4}{675} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{12844}{225} & \frac{52}{9} & \frac{64}{15} & \frac{4}{45} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{12844}{15} & \frac{260}{3} & 64 & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 12844 & 1300 & 960 & 20 & 10140 & 884 & 736 & 4 & 11 \end{bmatrix} = (b_{ij}),$$

la cual tiene espectro  $\Lambda_1$  y divisores elementales

$$(\lambda - 19), (\lambda^2 + 2\lambda + 26)^2, (\lambda^2 + 2\lambda + 26)^2.$$

Por consiguiente, la matriz no-negativa  $A = B + I$  tiene espectro  $\Lambda$  y divisores elementales

$$(\lambda - 20), (\lambda^2 + 25)^2, (\lambda^2 + 25)^2,$$

como se deseaba.

Al aplicar de manera iterativa el Corolario 3.2, obtenemos el siguiente resultado:

**Teorema 3.5.** Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  con  $\lambda_k \in \mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0, |\sqrt{3}\operatorname{Re} z| < |\operatorname{Im} z|\}$ ,  $k = 2, \dots, n$ , una lista de números complejos. Si

$$\lambda_1 \geq \max_{1 \leq r \leq m-1} \left\{ - \sum_{j=1}^r n_{j+1} \operatorname{Re} \lambda_{j+1} + \frac{3(\operatorname{Re} \lambda_{r+1})^2 - (\operatorname{Im} \lambda_{r+1})^2}{2\operatorname{Re} \lambda_{r+1}} \right\},$$

donde  $m - 1$  denota el número de distintas parejas de complejos conjugados que hay en la sublista  $\Lambda - \{\lambda_1\}$  y  $n_{j+1} = 2a(\lambda_{j+1})$ , donde  $a(\lambda)$  denota la multiplicidad algebraica de  $\lambda$ ,  $j = 1, \dots, m - 1$ , entonces para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , existe una matriz no-negativa  $A = (a_{ij}) \in M_n$  con espectro

$\Lambda$  y entrada  $a_{nn} = \sum_{k=1}^n \lambda_k$ .

*Demostración.* Para  $r = 1, \dots, m - 1$ , consideramos la lista

$$\Lambda_r = \{s_1(\Lambda_{r-1}), \lambda_{r+1}, \bar{\lambda}_{r+1}, \dots, \lambda_{r+1}, \bar{\lambda}_{r+1}\},$$

donde  $s_1(\Lambda_0) = \lambda_1$  y  $\Lambda_r$  tiene  $n_{r+1} + 1$  elementos, tal que  $\sum_{r=1}^{m-1} n_{r+1} = n - 1$ . Supongamos que

$$\lambda_1 \geq \max_{1 \leq r \leq m-1} \left\{ - \sum_{j=1}^r n_{j+1} \operatorname{Re} \lambda_{j+1} + \frac{3(\operatorname{Re} \lambda_{r+1})^2 - (\operatorname{Im} \lambda_{r+1})^2}{2 \operatorname{Re} \lambda_{r+1}} \right\}.$$

Entonces, para  $r = 1, \dots, m-1$ , tenemos que

$$\lambda_1 \geq - \sum_{j=1}^r n_{j+1} \operatorname{Re} \lambda_{j+1} + \frac{3(\operatorname{Re} \lambda_{r+1})^2 - (\operatorname{Im} \lambda_{r+1})^2}{2 \operatorname{Re} \lambda_{r+1}}.$$

Por tanto, para  $r = 1, \dots, m-1$ , se sigue que

$$\lambda_1 + \sum_{j=1}^{r-1} n_{j+1} \operatorname{Re} \lambda_{j+1} \geq -n_{r+1} \operatorname{Re} \lambda_{r+1} + \frac{3(\operatorname{Re} \lambda_{r+1})^2 - (\operatorname{Im} \lambda_{r+1})^2}{2 \operatorname{Re} \lambda_{r+1}},$$

es decir,

$$s_1(\Lambda_{r-1}) \geq -n_{r+1} \operatorname{Re} \lambda_{r+1} + \frac{3(\operatorname{Re} \lambda_{r+1})^2 - (\operatorname{Im} \lambda_{r+1})^2}{2 \operatorname{Re} \lambda_{r+1}}.$$

Esta última desigualdad muestra que para cada  $r = 1, \dots, m-1$ , la lista  $\Lambda_r$  satisface el Corolario 3.2. Por consiguiente, para cada  $r = 1, \dots, m-1$  y para cada FCJ asociada con  $\Lambda_r$ , existe una matriz no-negativa  $A_r = (a_{ij}^{(r)})$  de orden  $n_{r+1} + 1$  con espectro  $\Lambda_r$  y entrada

$$a_{n_{r+1}+1, n_{r+1}+1}^{(r)} = s_1(\Lambda_r).$$

Empleando  $m-2$  veces el Lema 3.1, tenemos que para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , existe una matriz no-negativa  $A = (a_{ij}) \in M_n$  con espectro  $\Lambda$  y entrada  $a_{nn} = \sum_{k=1}^n \lambda_k$ . ■

Nótese ahora, mediante un ejemplo, que la manera de posicionar los autovalores en la lista  $\Lambda$ , en el Teorema 3.5, es importante.

**Ejemplo 3.4.** Sea  $\Lambda = \{19, -1 \pm 3i, -2 \pm 5i\}$  con multiplicidades algebraicas  $a(-1 \pm 3i) = 2$  y  $a(-2 \pm 5i) = 3$ . Nótese que en este caso  $m = 3$ . Puesto que

$$19 \not\geq \max\{7, 19.25\},$$

$\Lambda$  no satisface la condición suficiente del Teorema 3.5. Sin embargo, si tomamos  $\Lambda = \{19, -2 \pm 5i, -1 \pm 3i\}$  con multiplicidades algebraicas  $a(-2 \pm 5i) = 3$  y

$a(-1 \pm 3i) = 2$ , tenemos en este caso que

$$19 \geq \max\{15.25, 19\}.$$

De esta forma,  $\Lambda$  satisface el Teorema 3.5, con lo cual para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , existe una matriz no-negativa con espectro  $\Lambda$ .

A continuación establecemos una condición suficiente para que una lista  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  de números complejos, con  $Re(\lambda_k) < 0$ ,  $k = 2, \dots, n$ , sea realizable por una matriz no-negativa  $C$ , para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ .

**Teorema 3.6.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos con  $\lambda_k \in \mathcal{H}$ ,  $k = 2, \dots, p$ ,  $p \leq n$ , y  $\lambda_k \in \mathcal{G}$ ,  $k = p + 1, \dots, n$ . Si*

$$\lambda_1 \geq \max_{1 \leq r \leq m-1} \left\{ -\sum_{k=2}^n \lambda_k, -\sum_{j=1}^r n_{j+1} Re\lambda_{j+1} + \frac{3(Re\lambda_{r+1})^2 - (Im\lambda_{r+1})^2}{2Re\lambda_{r+1}} \right\},$$

donde  $m - 1$  denota el número de distintas parejas de complejos conjugados que hay en la sublista  $\{\lambda_2, \dots, \lambda_p\}$  y  $n_{j+1} = 2a(\lambda_{j+1})$ , con  $a(\lambda)$  siendo la multiplicidad algebraica de  $\lambda$ ,  $j = 1, \dots, m - 1$ ; entonces, para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , existe una matriz no-negativa con espectro  $\Lambda$ .

*Demostración.* Consideremos las siguientes listas

$$\Lambda_1 = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\},$$

$$\Lambda_2 = \{s_1(\Lambda_1), \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}.$$

Puesto que

$$\lambda_1 \geq \max_{1 \leq r \leq m-1} \left\{ -\sum_{j=1}^r n_{j+1} Re\lambda_{j+1} + \frac{3(Re\lambda_{r+1})^2 - (Im\lambda_{r+1})^2}{2Re\lambda_{r+1}} \right\},$$

tenemos del Teorema 3.5 que para cada FCJ asociada con  $\Lambda_1$ , existe una matriz no-negativa  $A = (a_{ij})$  de orden  $p$ , con espectro  $\Lambda_1$  y entrada  $a_{pp} = s_1(\Lambda_1)$ .

Por otra parte, puesto que  $\lambda_1 \geq -\sum_{k=2}^n \lambda_k$ , entonces  $s_1(\Lambda_2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \geq 0$ . Por tanto, del Teorema 3.3, tenemos que para cada FCJ asociada con  $\Lambda_2$ , existe una matriz no-negativa  $B = (b_{ij})$  con espectro  $\Lambda_2$ . Finalmente, aplicando el Lema 3.1 con las matrices  $A$  y  $B$ , obtenemos una matriz no-negativa  $C$  con espectro  $\Lambda$  para cualquier FCJ asociada con  $\Lambda$ . ■

**Observación 3.2.** *La forma en la cual se ha subdividido la lista  $\Lambda$  en la hipótesis del Teorema 3.6 y en su demostración, es fundamental para garantizar la realizabilidad de la lista. Observemos esto mediante el siguiente ejemplo.*

**Ejemplo 3.5.** *Sea  $\Lambda = \{27, -1 \pm 3i, -2 \pm 5i, -1, -2 \pm i\}$ , una lista de 18 números, con las multiplicidades algebraicas*

$$a(-1 \pm 3i) = 2 \quad a(-2 \pm 5i) = 3$$

$$a(-1) = 3 \quad a(-2 \pm i) = 2.$$

Nótese que  $m = 3$ . Puesto que

$$27 \geq \text{máx}\{27, 7, 19.25\}, \quad (3.6)$$

tenemos del Teorema 3.6 que para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , existe una matriz no-negativa  $C$  con espectro  $\Lambda$ . Para hallar una matriz realizadora con FCJ deseada, consideramos las listas de 11 y 8 números

$$\Lambda_1 = \{27, -1 \pm 3i, -1 \pm 3i, -2 \pm 5i, -2 \pm 5i, -2 \pm 5i\},$$

$$\Lambda_2 = \{11, -1, -1, -1, -2 \pm i, -2 \pm i\},$$

respectivamente. De (3.6) tenemos que la lista  $\Lambda_1$  satisface el Teorema 3.5 y es fácil ver que la lista  $\Lambda_2$  satisface el Teorema 3.3. Luego empleamos el Lema 3.1 para así obtener la matriz requerida. Pero ahora note lo siguiente: Si en vez de considerar las listas anteriores, se consideran las listas de 8 y 11 números

$$\Lambda_1 = \{27, -1, -1, -1, -2 \pm i, -2 \pm i\},$$

$$\Lambda_2 = \{16, -1 \pm 3i, -1 \pm 3i, -2 \pm 5i, -2 \pm 5i, -2 \pm 5i\},$$

observamos claramente que la lista  $\Lambda_1$  satisface el Teorema 3.3, pero del Ejemplo 3.4 sabemos que la lista  $\Lambda_2$  no satisface la condición del Teorema 3.5.

---

### 3.3. Otra condición suficiente para el NIEDP

---

En esta sección establecemos otra condición suficiente para una solución del

NIEDP, para listas de la forma  $\Lambda = \{\lambda_1, a \pm bi, \dots, a \pm bi\}$ . Es claro que la cota mínima, dada para  $\lambda_1$ , en esta nueva condición, es siempre más pequeña que la establecida en el Teorema 3.2. Sin embargo, esta condición no garantiza que las matrices que realizan  $\Lambda$ , para cada una de sus FCJ asociadas, tengan su entrada  $a_{nn} = s_1(\Lambda)$ . Como consecuencia de esto, no ha sido posible, con esta nueva condición, considerar otras situaciones, como por ejemplo, agregar distintas parejas de complejos conjugados en la lista  $\Lambda$ .

Antes de presentar la condición suficiente, establecemos el siguiente corolario del Teorema 1.7.

**Corolario 3.3.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, a \pm bi, \dots, a \pm bi\}$  una lista de  $n$  números complejos, con  $a \leq 0$ . Entonces,  $\Lambda$  es realizable si y sólo si*

$$\lambda_1 \geq \max\{-(n-1)a, a + \sqrt{nb}\}. \quad (3.7)$$

*Demostración.* Dada la lista  $\Lambda = \{\lambda_1; a \pm bi, \dots, a \pm bi\}$ , tenemos que  $s_1(\Lambda) = \lambda_1 + (n-1)a$  y  $s_2(\Lambda) = \lambda_1^2 + (n-1)(a^2 - b^2)$ . Del Teorema 1.7, sabemos que  $\Lambda$  es realizable si y sólo si  $s_1(\Lambda) \geq 0$  y  $s_1^2(\Lambda) \leq ns_2(\Lambda)$ ; lo cual es equivalente a decir que

$$\lambda_1 \geq \max\{-(n-1)a, a + \sqrt{nb}\}. \quad \blacksquare$$

Presentamos ahora una nueva condición suficiente para listas de la forma  $\Lambda = \{\lambda_1, a \pm bi, \dots, a \pm bi\}$ .

**Teorema 3.7.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, a \pm bi, \dots, a \pm bi\}$  una lista de  $n$  números complejos, siendo  $n \geq 3$ ,  $a < 0$  y  $b > 0$ . Si*

$$\lambda_1 \geq \max\left\{-(n-1)a, -(n-4)a + \sqrt{3b}, -\frac{(2n-9)a^2 + b^2}{2a}\right\}, \quad (3.8)$$

*entonces para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , existe una matriz no-negativa con espectro  $\Lambda$ .*

*Demostración.* *Caso  $n = 3$ :* Nótese que haciendo  $n = 3$  en (3.8), se cumplen las condiciones del Corolario 3.3.

*Caso  $n = 5$ :* Consideremos las siguientes listas:

$$\Lambda_1 = \{\lambda_1, a \pm bi\},$$

$$\Lambda_2 = \{\lambda_1 + 2a, a \pm bi\}.$$

De (3.8) (con  $n = 5$ ), se tiene que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda_1(a^2 + b^2) & -(2\lambda_1 a + a^2 + b^2) & \lambda_1 + 2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^T & c \end{bmatrix},$$

es no-negativa con espectro  $\Lambda_1$  y divisores elementales

$$(\lambda - \lambda_1), (\lambda - (a + bi)), (\lambda - (a - bi)).$$

Además, nuevamente de (3.8) (con  $n = 5$ ), tenemos que la lista  $\Lambda_2$  satisface el Corolario 3.3, y por tanto, ella es realizable.

\* Si  $2\lambda_1 a + 5a^2 + b^2 \leq 0$  (segunda función simétrica elemental de la lista  $\Lambda_2$ ), podemos elegir como matriz realizadora de la lista  $\Lambda_2$ , la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ (\lambda_1 + 2a)(a^2 + b^2) & -(2(\lambda_1 + 2a)a + a^2 + b^2) & \lambda_1 + 4a \end{bmatrix}.$$

\* Si  $2\lambda_1 a + 5a^2 + b^2 > 0$ , consideramos la lista

$$\tilde{\Lambda}_2 = \Lambda_2 - \frac{\lambda_1 + 4a}{3} = \left\{ \frac{2}{3}(\lambda_1 + a), -\frac{1}{3}(\lambda_1 + a) \pm bi \right\}.$$

$\tilde{\Lambda}_2$  es realizable por la matriz no-negativa

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{9}(\lambda_1 + a)^3 + (\lambda_1 + a)b^2 \right] & - \left[ -\frac{1}{3}(\lambda_1 + a)^2 + b^2 \right] & 0 \end{bmatrix}.$$

Puesto que  $-\frac{1}{3}(\lambda_1 + a)^2 + b^2 \leq 0$  (pues,  $\lambda_1 \geq -a + \sqrt{3}b$ ), tenemos que la matriz  $R$  es no-negativa. Por consiguiente, eligiendo  $B = R + \left(\frac{\lambda_1 + 4a}{3}\right)I_3$ , se sigue que  $B \geq 0$  con espectro  $\Lambda_2$  y divisores elementales

$$(\lambda - (\lambda_1 + 2a)), (\lambda - (a + bi)), (\lambda - (a - bi)).$$

De esta manera, la matriz

$$C = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{a} \mathbf{t}^T \\ \mathbf{s} \mathbf{b}^T & B \end{bmatrix},$$

es no-negativa con espectro  $\Lambda$  y divisores elementales lineales.

Por otra parte, puesto que la lista  $\Lambda$  es realizable, satisface en particular el Corolario 3.3, con lo cual, existe una matriz no-negativa con espectro  $\Lambda$  y divisores elementales cuadráticos.

*Caso General:* Supongamos que el Teorema 3.7 es cierto para toda lista con una cantidad menor o igual a  $k \geq 5$  números complejos. Veamos que éste también es cierto para una lista con  $k + 2$  números complejos. Sea

$$\Lambda = \{\lambda_1, a \pm bi, \dots, a \pm bi\},$$

una lista con  $k + 2$  números complejos, siendo  $a < 0$  y satisfaciendo (3.8) (con  $n = k + 2$ ); es decir,

$$\lambda_1 \geq \max \left\{ -(k+1)a, -(k-2)a + \sqrt{3}b, -\frac{(2k-5)a^2 + b^2}{2a} \right\}. \quad (3.9)$$

Para cada  $r = 1, \dots, \frac{k+1}{2}$ , queremos encontrar una matriz no negativa con espectro  $\Lambda$  y divisores elementales

$$(\lambda - \lambda_1), (\lambda - (a + bi))^r, (\lambda - (a - bi))^r, \dots \text{arbitrarios.}$$

Definamos las siguientes listas

$$\Lambda_1 = \{\lambda_1, a \pm bi, \dots, a \pm bi\} \quad (2r + 1 \text{ números}),$$

$$\Lambda_2 = \{\lambda_1 + 2ra, a \pm bi, \dots, a \pm bi\} \quad (k - 2r + 2 \text{ números}).$$

La matriz compañera

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -b_{2r+1} & -b_{2r} & -b_{2r-1} & \cdots & -b_2 & \lambda_1 + 2ra \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^T & c \end{bmatrix},$$

donde  $b_j$ ,  $j = 2, \dots, 2r + 1$ , son los coeficientes del polinomio característico obtenido de la lista  $\Lambda_1$ , tiene espectro  $\Lambda_1$  y divisores elementales

$$(\lambda - \lambda_1), (\lambda - (a + bi))^r, (\lambda - (a - bi))^r.$$

Veamos que  $A$  es no-negativa. Del Lema 3.3, se tiene que

$$b_2 = r(2\lambda_1 a + (2r - 1)a^2 + b^2) = r\beta,$$

y de (3.9) se sigue que

$$\alpha = 2\lambda_1 a + (2k - 5)a^2 + b^2 \leq 0.$$

Como  $\beta < \alpha$  si y sólo si  $r < k - 2$  (lo cual es cierto, pues  $1 \leq r \leq \frac{k+1}{2} < k - 2$  si y sólo si  $k \geq 5$ ), entonces  $b_2 < 0$ . Por tanto, el Lema 3.2 garantiza que la matriz  $A$  es no-negativa.

Por otra parte, teniendo en cuenta nuevamente (3.9), se tiene que:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2ra & \geq -((k - 2r + 2) - 1)a, \\ \lambda_1 + 2ra & \geq -((k - 2r + 2) - 4)a + \sqrt{3}b, \\ \lambda_1 + 2ra & \geq -\frac{(2(k-2r+2)-9)a^2+b^2}{2a}. \end{cases} \quad (3.10)$$

De las desigualdades en (3.10) se sigue que  $\Lambda_2$  satisface (3.8) (con  $n = k - 2r + 2 \leq k$ , para cada  $1 \leq r \leq \frac{k+1}{2}$ ), con lo cual, por hipótesis de inducción, existe una matriz  $B = (b_{ij})$  no-negativa con espectro  $\Lambda_2$ , y divisores elementales arbitrariamente prescritos. Por consiguiente, la matriz

$$C = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{at}^T \\ \mathbf{sb}^T & B \end{bmatrix} = (c_{ij}),$$

donde  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{s}$  son autovectores a izquierda y a derecha de  $B$  respectivamente, asociados al autovalor  $\lambda_1 + 2ra$ , es no-negativa con espectro  $\Lambda$  y del Lema 3.1 tiene los divisores elementales arbitrariamente prescritos. ■

A continuación presentamos un ejemplo de una lista que satisface las condiciones del Teorema 3.7, pero no satisface las condiciones del Teorema 3.2. A pesar de que podemos encontrar todas las FCJ asociadas con  $\Lambda$ , no es posible obtener, mediante el método que empleamos, que las matrices que realizan  $\Lambda$ , para cada una de las FCJ asociadas con  $\Lambda$ , tengan la entrada  $a_{55} = s_1(\Lambda)$ .

**Ejemplo 3.6.** Sea  $\Lambda = \{1 + 3\sqrt{3}, -1 \pm 3i, -1 \pm 3i\}$ . Nótese que la lista  $\Lambda$ , satisface el Teorema 3.7. Hallemos primero una matriz no-negativa con espectro  $\Lambda$  y divisores elementales lineales. Consideremos las listas

$$\Lambda_1 = \{1 + 3\sqrt{3}, -1 \pm 3i\},$$

$$\Lambda_2 = \{s_1(\Lambda_1) = -1 + 3\sqrt{3}, -1 \pm 3i\}.$$

Los polinomios característicos asociados a las listas  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  son

$$p_1(\lambda) = \lambda^3 - (3\sqrt{3} - 1)\lambda^2 - (6\sqrt{3} - 8)\lambda - (30\sqrt{3} + 10),$$

$$p_2(\lambda) = \lambda^3 - (3\sqrt{3} - 3)\lambda^2 - (6\sqrt{3} - 12)\lambda - (30\sqrt{3} - 10),$$

respectivamente. Por tanto, las matrices compañeras

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 30\sqrt{3} + 10 & 6\sqrt{3} - 8 & 3\sqrt{3} - 1 \end{bmatrix},$$

y

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 30\sqrt{3} - 10 & 6\sqrt{3} - 12 & 3\sqrt{3} - 3 \end{bmatrix},$$

tienen espectros  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  respectivamente. Nótese que  $A_1$  es no-negativa, pero  $A_2$  no lo es. De esta manera, al emplear el Lema 3.1 con las matrices  $A_1$  y  $A_2$ , no se obtendrá una matriz no-negativa con espectro  $\Lambda$ , pero sí con los divisores elementales que se desean. Para solucionar esto, debemos hallar primero una matriz no-negativa  $A_2$  con espectro  $\Lambda_2$ . Usando el Teorema 1.7, encontramos la matriz

$$A_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{3} - 1 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} - 1 & 1 \\ 24\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} - 1 \end{bmatrix},$$

la cual es no-negativa con espectro  $\Lambda_2$ . Luego, empleamos el Lema 3.1 para obtener la matriz

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \frac{2}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{6} & \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{2}{3} & \sqrt{3} - 1 & 1 & 0 \\ \frac{5}{3}\sqrt{3} + 15 & 3 - \frac{4}{3}\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} - 1 & 1 \\ 30\sqrt{3} + 10 & 6\sqrt{3} - 8 & 24\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} - 1 \end{bmatrix},$$

la cual es no-negativa con espectro  $\Lambda$  y divisores elementales

$$(\lambda - 1 - 3\sqrt{3}), (\lambda + 1 - 3i), (\lambda + 1 - 3i), (\lambda + 1 + 3i), (\lambda + 1 + 3i).$$

Buscamos ahora una matriz no-negativa con espectro  $\Lambda$  y divisores elementales cuadráticos. El polinomio característico asociado a la lista  $\Lambda$  es:

$$p(\lambda) = (\lambda - 1 - 3\sqrt{3})(\lambda + 1 - 3i)^2(\lambda + 1 + 3i)^2 = \lambda^5 - (3\sqrt{3} - 3)\lambda^4 - (12\sqrt{3} - 20)\lambda^3 - (72\sqrt{3} - 16)\lambda^2 - (120\sqrt{3} - 60)\lambda - (300\sqrt{3} + 100).$$

La matriz compañera

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 300\sqrt{3} + 100 & 120\sqrt{3} - 60 & 72\sqrt{3} - 16 & 12\sqrt{3} - 20 & 3\sqrt{3} - 3 \end{bmatrix},$$

tiene espectro  $\Lambda$ . Note además que  $C$  es no-negativa y tiene divisores elementales

$$(\lambda - 1 - 3\sqrt{3}), (\lambda + 1 - 3i)^2, (\lambda + 1 + 3i)^2.$$

# Capítulo 4

## M-matrices con Divisores Elementales Prescritos

Una matriz  $A \in M_n$  con entradas reales, se dice que es una *M-matriz* si es de la forma

$$A = \alpha I - B,$$

donde  $B$  es una matriz no-negativa con autovalor de Perron  $\rho(B)$  y  $\alpha$  es un escalar positivo tal que  $\alpha \geq \rho(B)$ .

En este capítulo establecemos condiciones suficientes para la existencia y construcción de una M-matriz con divisores elementales prescritos y mostramos como construir, a partir de una M-matriz dada, nuevas M-matrices con divisores elementales prescritos. También presentamos condiciones suficientes para la existencia y construcción de una M-matriz inversa, simétrica y doblemente estocástica generalizada con espectro prescrito. Además, discutimos una aplicación de las M-matrices al problema de control de potencia óptima en comunicaciones inalámbricas.

Los resultados de este capítulo constituyen esencialmente la publicación [51] (R. L. Soto, R. C. Díaz, M. Salas, O. Rojo *M-matrices with prescribed elementary divisors*, sometido)

Las M-matrices aparecen en muchas aplicaciones en ciencias físicas, biológicas y sociales, entre ellas, comunicaciones inalámbricas, diferencias finitas para ecuaciones diferenciales parciales, modelos de crecimiento, producción insumo-producto en economía, procesos de Markov en probabilidad y estadística. En conexión con diferentes tópicos, las M-matrices han atraído la atención de muchos investigadores (ver [1]). En contraste, hasta donde sabemos, el problema inverso de los divisores elementales para M-matrices no ha sido considerado.

Dado que el autovalor maximal de cualquier submatriz principal de una matriz no-negativa  $B$ , no excede a  $\rho(B)$  ([33, Chapter 1, Theorem 5.2]), se tiene que las entradas en la diagonal principal de una M-matriz  $A = \alpha I - B$  son no-negativas, mientras que todas sus otras entradas son no-positivas. Las M-matrices han sido definidas de muchas otras maneras. Berman and Plemmons [1] dan 50 definiciones equivalentes para M-matrices no-singulares.

El siguiente resultado establece una condición necesaria para que una lista de números complejos  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  sea el espectro de una M-matriz.

**Teorema 4.1.** [33] *Todos los autovalores de una M-matriz tienen parte real no-negativa.*

Aunque las M-matrices no son no-negativas, ellas están estrechamente relacionadas a las matrices no-negativas. Por ejemplo, el problema de encontrar una M-matriz  $A = \alpha I - B$  con un espectro complejo prescrito  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , puede ser visto como el problema de encontrar una matriz no-negativa  $B$  con espectro  $\sigma(B) = \{\alpha - \lambda_1, \alpha - \lambda_2, \dots, \alpha - \lambda_n\}$ .

El siguiente resultado permite considerar, sin pérdida de generalidad, a las M-matrices como matrices con sumas fila constantes.

**Lema 4.1.** *Sea  $A \in M_n$  una M-matriz. Entonces, existe una M-matriz  $A'$  con el mismo espectro que  $A$  y sumas fila constantes.*

*Demostración.* Si  $A = \alpha I - B$  es una M-matriz, entonces  $B$  es una matriz no-negativa con  $\alpha \geq \rho(B)$ . Del Lema 1.1, existe una matriz no-negativa  $B'$  con el mismo espectro que  $B$  y con sumas fila constantes. Por tanto, la matriz  $A' = \alpha I - B'$  es una M-matriz con el mismo espectro que  $A$  y con sumas fila constantes. ■

Algunas propiedades simples de las M-matrices son las siguientes:

**Proposición 4.1.** *Sea  $A = \alpha I - B \in M_n$  una M-matriz. Entonces,*

- i)  $B \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$  si y sólo si  $A \in \mathcal{CS}_{\alpha - \lambda_1}$ ,*
- ii)  $B, B^T \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$  si y sólo si  $A, A^T \in \mathcal{CS}_{\alpha - \lambda_1}$ ,*
- iii)  $A$  y  $B$  tienen los mismos autovectores.*

*Demostración.* Para *i)* se tiene:

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{CS}_{\alpha - \lambda_1} &\iff Ae = (\alpha - \lambda_1)e \\ &\iff (\alpha I_n - B)e = (\alpha - \lambda_1)e \\ &\iff Be = \lambda_1 e \\ &\iff B \in \mathcal{CS}_{\lambda_1} \end{aligned}$$

ii) Es una consecuencia inmediata de i).

iii)  $\mathbf{x}$  es un autovector de  $A$  asociado al autovalor  $\lambda$  si y sólo si:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} &\iff (\alpha I_n - B)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \\ &\iff \alpha\mathbf{x} - B\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \\ &\iff B\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} \\ &\iff B\mathbf{x} = (\alpha - \lambda)\mathbf{x} \end{aligned}$$

■

El Lema 4.1 y la Proposición 4.1, nos permiten asumir, sin pérdida de generalidad, que  $A \in \mathcal{CS}_{\alpha-\lambda_1}$  y  $B \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ .

Un cálculo algebraico directo muestra las siguientes propiedades:

**Proposición 4.2.** *Sea  $A = \alpha I - B$  una M-matriz de orden  $n$ . Entonces,*

- i)  $B$  es normal si y sólo si  $A$  es normal,
- ii)  $B$  es simétrica si y sólo si  $A$  es simétrica,
- iii)  $B$  es circulante si y sólo si  $A$  es circulante.

---

## 4.1. Una aplicación de las M-matrices

---

En [10], los autores estudian el problema de control de potencia óptima en comunicaciones inalámbricas. La solución de este problema requiere resolver la desigualdad  $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ , donde  $A = (a_{ij}) \in M_n$  es una Z-matriz, esto es,

$$A \in F_n = \{X = (x_{ij}) \in M_n \mid x_{ij} \leq 0, \text{ si } i \neq j\}$$

y  $\mathbf{b}$  es un vector positivo. El conjunto  $F_n$ , definido en [33], se llama conjunto de Z-matrices. La desigualdad  $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$  tiene una solución positiva si y sólo si  $A$  es una M-matriz [10]. Motivados por las aplicaciones de la ingeniería, los autores en [10], consideran el siguiente problema:

Dada una M-matriz  $A$  y vectores no-negativos  $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , encontrar condiciones bajo las cuales  $A - \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$  es también una M-matriz. Para dar respuesta a este problema, los autores en [10], dan condiciones en términos de  $A^{-1}$  y de los vectores  $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . En particular, para el caso  $k = 1$ ,

ellos prueban que  $A - \mathbf{u}\mathbf{v}^T$  es una M-matriz si y sólo si  $\mathbf{v}^T A^{-1} \mathbf{u} < 1$ .

En esta sección, estudiamos la matriz  $A - \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$  desde un punto de vista diferente y encontramos condiciones suficientes, las cuales pensamos son más fáciles de manejar.

**Lema 4.2.** Sea  $A = \alpha I - B \in M_n$  una M-matriz y sean  $\mathbf{u}^T = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{v}^T = (v_1, \dots, v_n)$ , vectores no-negativos. Si

$$\|\mathbf{u}\mathbf{v}^T\|_\infty \leq \alpha - \lambda_1,$$

donde  $\lambda_1 = \rho(B)$ , entonces  $A - \mathbf{u}\mathbf{v}^T$  es una M-matriz.

*Demostración.* Del Lema 4.1 podemos asumir que  $A \in \mathcal{CS}_{\alpha-\lambda_1}$ , y por tanto,  $B \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \rho(B + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) &\leq \|B + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\|_\infty \\ &\leq \|B\|_\infty + \|\mathbf{u}\mathbf{v}^T\|_\infty \\ &= \lambda_1 + \|\mathbf{u}\mathbf{v}^T\|_\infty \\ &\leq \alpha. \end{aligned}$$

De esta manera, la matriz

$$A - \mathbf{u}\mathbf{v}^T = \alpha I - (B + \mathbf{u}\mathbf{v}^T),$$

es una M-matriz. ■

**Corolario 4.1.** Sea  $A = \alpha I - B \in M_n$  una M-matriz y sean  $\mathbf{u}_i^T = (u_1^i, \dots, u_n^i)$ ,  $\mathbf{v}_i^T = (v_1^i, \dots, v_n^i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , vectores no-negativos. Si

$$\sum_{i=1}^k \|\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T\|_\infty \leq \alpha - \lambda_1,$$

donde  $\lambda_1 = \rho(B)$ , entonces  $A - \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$  es una M-matriz.

*Demostración.* Del Lema 4.1 asumimos que  $A \in \mathcal{CS}_{\alpha-\lambda_1}$ , y por tanto,  $B \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ .

Entonces,

$$\begin{aligned}
\rho\left(B + \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T\right) &\leq \left\| B + \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \right\|_{\infty} \\
&\leq \|B\|_{\infty} + \sum_{i=1}^k \|\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T\|_{\infty} \\
&= \lambda_1 + \sum_{i=1}^k \|\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T\|_{\infty} \\
&\leq \alpha .
\end{aligned}$$

Por consiguiente, la matriz

$$A - \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T = \alpha I - \left( B + \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \right),$$

es una M-matriz. ■

**Observación 4.1.** Sean  $\mathbf{u}_i^T = (u_1^i, \dots, u_n^i)$ ,  $\mathbf{v}_i^T = (v_1^i, \dots, v_n^i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , vectores no-negativos; donde suponemos, sin pérdida de generalidad, que para cada  $i = 1, \dots, k$ ,  $\mathbf{v}_i^T \mathbf{e} = \sum_{j=1}^n v_j^i = 1$ . Entonces, para todo  $i = 1, \dots, k$ ,  $\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \in \mathcal{CS}_{\alpha_i}$  si y sólo si  $\mathbf{u}_i = \alpha_i \mathbf{e}$ . En efecto,

$$\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \in \mathcal{CS}_{\alpha_i} \iff \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{e} = \alpha_i \mathbf{e} \iff (\mathbf{v}_i^T \mathbf{e}) \mathbf{u}_i = \alpha_i \mathbf{e} \iff \mathbf{u}_i = \alpha_i \mathbf{e} .$$

En el siguiente teorema, suponemos sin pérdida de generalidad que para cada  $i = 1, \dots, k$ ,  $\mathbf{v}_i^T \mathbf{e} = \sum_{j=1}^n v_j^i = 1$ . En este caso tenemos condiciones necesarias y suficientes, las cuales son más fáciles de manejar que los correspondientes resultados establecidos en [10].

**Teorema 4.2.** Sea  $A = \alpha I - B \in M_n$  una M-matriz y sean  $\mathbf{u}_i^T = (u_1^i, \dots, u_n^i)$ ,  $\mathbf{v}_i^T = (v_1^i, \dots, v_n^i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , vectores no-negativos tales que  $\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \in \mathcal{CS}_{\alpha_i}$  (es decir,  $\mathbf{u}_i = \alpha_i \mathbf{e}$ ). Entonces,  $A - \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$  es una M-matriz si y sólo si

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \leq \alpha - \lambda_1,$$

donde  $\lambda_1$  es el autovalor de Perron de  $B$ .

*Demostración.* Asumimos que  $B \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ . Puesto que  $\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \in \mathcal{CS}_{\alpha_i}$ , tenemos que la matriz no-negativa  $B + \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$  es sumas fila constantes igual a

$$\lambda_1 + \sum_{i=1}^k \alpha_i = \rho \left( B + \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \right).$$

Por consiguiente, la matriz

$$A - \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T = \alpha I - \left( B + \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \right),$$

es una M-matriz si y sólo si  $\lambda_1 + \sum_{i=1}^k \alpha_i \leq \alpha$ , es decir, si y sólo si

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \leq \alpha - \lambda_1.$$

■

El caso especial  $k = 1$  es:

**Corolario 4.2.** Sea  $A = \alpha I - B \in M_n$  una M-matriz y sean  $\mathbf{u}^T = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{v}^T = (v_1, \dots, v_n)$  vectores no-negativos tales que  $\mathbf{u} \mathbf{v}^T \in \mathcal{CS}_{\mathbf{v}^T \mathbf{u}}$ . Entonces,  $A - \mathbf{u} \mathbf{v}^T$  es una M-matriz si y sólo si

$$\mathbf{v}^T \mathbf{u} \leq \alpha - \lambda_1,$$

donde  $\lambda_1$  es el autovalor de Perron de  $B$ .

---

## 4.2. Versiones M-matrices de Teoremas de Brauer y Rado

---

Los resultados presentados en esta sección son versiones M-matrices de los Teoremas de Brauer y de Rado, los cuales muestran como generar nuevas M-matrices a partir de M-matrices dadas.

Definimos para cada  $j = 1, \dots, n$ , el conjunto

$$\mathcal{A}_j := \left\{ \mathbf{q} = (q_i) \in \mathbb{R}^n \mid q_i \leq 0, \quad i \neq j \quad \wedge \quad q_j = - \sum_{i \neq j} q_i \right\}.$$

Dada una matriz no-negativa  $B = (b_{ij}) \in M_n$ , definimos para  $j = 1, \dots, n$ , el conjunto

$$\mathcal{X}_j = \left\{ \mathbf{q} \in \mathcal{A}_j \mid q_j \leq \min_{1 \leq i \leq n} \{b_{ij}\} \right\}.$$

Entonces tenemos:

**Teorema 4.3.** *Sea  $A = \alpha I - B \in M_n$  una M-matriz con sumas fila constantes y espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , y sea  $B$  no-negativa con su  $k$ -ésima columna positiva, para algún  $k = 1, \dots, n$ . Entonces, para todo  $\mathbf{q} \in \mathcal{X}_k$ , la matriz  $A + \mathbf{e}\mathbf{q}^T$  es también una M-matriz con el mismo espectro y los mismos divisores elementales que  $A$ .*

*Demostración.* Sean  $B \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$  y  $\mathbf{q} = (q_i) \in \mathcal{X}_k$ .

$$A + \mathbf{e}\mathbf{q}^T = \alpha I - (B - \mathbf{e}\mathbf{q}^T).$$

Puesto que  $\mathbf{q} \in \mathcal{X}_k$ , entonces la matriz  $B - \mathbf{e}\mathbf{q}^T$  es no negativa y además, del Lema 1.2, tiene el mismo espectro y los mismos divisores elementales que  $B$ . Por consiguiente, la matriz  $A + \mathbf{e}\mathbf{q}^T$  es también una M-matriz con el mismo espectro y los mismos divisores elementales que  $A$ . ■

**Ejemplo 4.1.** *Sea*

$$A = 11I - B = \begin{bmatrix} 11 & -3 & -1 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 11 & -1 & -1 & -4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 11 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 & 11 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 & -1 & 10 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 & -1 & -2 & 11 & -3 \\ -2 & -2 & -1 & -1 & -4 & -1 & 11 \end{bmatrix} \in \mathcal{CS}_0,$$

donde

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{CS}_{11}.$$

Note que la matriz  $B$  tiene su quinta columna positiva. En este caso tenemos que

$$\mathcal{A}_5 = \left\{ \mathbf{q} = (q_i) \in \mathbb{R}^7 \mid q_i \leq 0, \quad i \neq 5 \quad \wedge \quad q_5 = - \sum_{i \neq 5} q_i \right\},$$

y  $\mathcal{X}_5$  asociado a la matriz  $B$  es el conjunto

$$\mathcal{X}_5 = \left\{ \mathbf{q} \in \mathcal{A}_5 \mid q_5 \leq \min_{1 \leq i \leq n} \{b_{i5}\} = 1 \right\}.$$

Por consiguiente, para todo  $\mathbf{q} \in \mathcal{X}_5$  se tiene que la matriz  $A + \mathbf{e}\mathbf{q}^T$  es también una M-matriz con el mismo espectro y los mismos divisores elementales que  $A$ .

Por ejemplo, si elegimos el vector  $\mathbf{q} = \left( -\frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{3}, 0, 1, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{3} \right)^T \in \mathcal{X}_5$ , tenemos que la matriz

$$A + \mathbf{e}\mathbf{q}^T = \begin{bmatrix} \frac{65}{6} & -3 & -\frac{4}{3} & -1 & -1 & -\frac{13}{6} & -\frac{7}{3} \\ -\frac{7}{6} & 11 & -\frac{4}{3} & -1 & -3 & -\frac{13}{6} & -\frac{7}{3} \\ -\frac{13}{6} & -2 & \frac{32}{3} & -1 & -1 & -\frac{13}{6} & -\frac{7}{3} \\ -\frac{13}{6} & -2 & -\frac{4}{3} & 11 & -1 & -\frac{13}{6} & -\frac{7}{3} \\ -\frac{13}{6} & -2 & -\frac{4}{3} & -1 & 11 & -\frac{13}{6} & -\frac{7}{3} \\ -\frac{13}{6} & -2 & -\frac{4}{3} & -1 & -1 & \frac{65}{6} & -\frac{10}{3} \\ -\frac{13}{6} & -2 & -\frac{4}{3} & -1 & -3 & -\frac{7}{6} & \frac{32}{3} \end{bmatrix} \in \mathcal{CS}_0,$$

es también una M-matriz con el mismo espectro y los mismos divisores elementales que  $A$ .

**Teorema 4.4.** Sea  $A = \alpha I - B \in M_n$  una M-matriz con espectro

$$\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\},$$

donde  $B$  es una matriz positiva. Sea  $X = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \dots \mid \mathbf{x}_t]$  tal que  $\text{rank}(X) = t$  y  $A\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, t$ . Sea  $C$  una matriz de orden  $t \times n$  tal que  $B - XC$  es no-negativa. Entonces, la matriz  $A + XC$  es una M-matriz con espectro

$$\{\mu_1, \dots, \mu_t, \lambda_{t+1}, \dots, \lambda_n\},$$

donde los elementos  $\mu_1, \dots, \mu_t$  satisfacen  $|\mu_i|^2 \leq 2\alpha \text{Re}\mu_i$ ,  $i = 1, \dots, t$ , y son los autovalores de la matriz  $\Omega + CX$ , siendo  $\Omega = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$ .

*Demostración.* De la hipótesis tenemos que  $\sigma(B) = \{\alpha - \lambda_1, \alpha - \lambda_2, \dots, \alpha - \lambda_n\}$ , y además,  $B\mathbf{x}_i = (\alpha - \lambda_i)\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, t$  [Proposición 4.1 iii)]. Por otra parte, del Teorema de Rado (Teorema 1.9), se sigue que la matriz  $B - XC$  tiene autovalores

$$\beta_1, \dots, \beta_t, \alpha - \lambda_{t+1}, \dots, \alpha - \lambda_n,$$

donde  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, t$ , son los autovalores de la matriz  $\Omega' - CX$ , con  $\Omega' = \text{diag}\{\alpha - \lambda_1, \dots, \alpha - \lambda_t\} = \alpha I_t - \Omega$ , siendo  $\Omega = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$ . De esta manera,  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, t$ , son los autovalores de la matriz  $\alpha I_t - (\Omega + CX)$ . Por tanto,  $\beta_i = \alpha - \mu_i$ ,  $i = 1, \dots, t$ , donde los  $\mu_i$  son los autovalores de la matriz de orden  $t$ ,  $\Omega + CX$ . Puesto que para cada  $i = 1, \dots, t$ ,  $|\mu_i|^2 \leq 2\alpha \text{Re}\mu_i$ , entonces

$$\begin{aligned} |\beta_i| &= |\alpha - \mu_i| \\ &= \sqrt{(\alpha - \text{Re}\mu_i)^2 + (\text{Im}\mu_i)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha \text{Re}\mu_i + (\text{Re}\mu_i)^2 + (\text{Im}\mu_i)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha \text{Re}\mu_i + |\mu_i|^2} \\ &\leq \sqrt{\alpha^2} = |\alpha| = \alpha. \end{aligned}$$

Además, como  $B - XC$  es una matriz no-negativa, tenemos entonces que la matriz  $A + XC = \alpha I - (B - XC)$  es también una M-matriz con espectro

$$\{\mu_1, \dots, \mu_t, \lambda_{t+1}, \dots, \lambda_n\}.$$

■

**Ejemplo 4.2.** Sea  $\Lambda = \{5, 13 \pm i, 13 \pm i\}$ . La M-matriz

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -2 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 11 & -2 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & 12 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 11 & -2 \\ -3 & -2 & -1 & -1 & 12 \end{bmatrix} = 15I - \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

tiene espectro  $\Lambda$ . Aplicamos el Teorema 4.4 para cambiar un par de autovalores  $13 \pm i$  por los autovalores 15 y 14. En efecto, sean

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i & -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i & \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces, la matriz

$$A + XC = \begin{bmatrix} 12 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 11 & -2 & -2 & -4 \\ -4 & -1 & 12 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 11 & -2 \\ -2 & -2 & -1 & -1 & 14 \end{bmatrix},$$

es una M-matriz con espectro  $\Lambda = \{15, 14, 5, 13 \pm i\}$ , donde 15 y 14 son los autovalores de la matriz  $\Omega + CX$ , siendo  $\Omega = \text{diag}\{13 + i, 13 - i\}$ .

---

### 4.3. Versiones M-matrices de resultados de Minc

---

En esta sección damos versiones M-matrices de dos resultados de Minc [31, Theorems 1 and 2], acerca de matrices positivas diagonalizables y positivas diagonalizables doblemente estocásticas, que dan lugar a matrices positivas y positivas doblemente estocásticas con divisores elementales arbitrariamente prescritos, respectivamente. Entonces tenemos:

**Teorema 4.5.** *Sea  $A = (a_{ij}) = \alpha I - B \in M_n$  una M-matriz diagonalizable con  $a_{ij} < 0$  para  $i \neq j$ , y  $a_{ii} < \alpha$  para  $i = 1, \dots, n$ . Entonces, existe una M-matriz con el mismo espectro que  $A$  y con divisores elementales arbitrariamente prescritos, siempre y cuando los divisores elementales correspondientes a autovalores no reales ocurran en pares conjugados.*

*Demostración.* Puesto que  $A$  es diagonalizable, entonces  $B$  también lo es. Además, para  $i \neq j$ ,  $a_{ij} = -b_{ij} < 0$  implica que  $b_{ij} > 0$ . Así también,  $a_{ii} = \alpha - b_{ii} < \alpha$  implica que  $b_{ii} > 0$ . Por tanto,  $B$  es positiva y diagonalizable, y del Teorema de Minc (Teorema 1.1), tenemos que existe una matriz positiva  $B'$  con el mismo espectro que  $B$  y con divisores elementales arbitrariamente prescritos. Por consiguiente, la matriz  $A' = \alpha I_n - B'$  es una M-matriz con el mismo espectro que  $A$  y con divisores elementales arbitrariamente prescritos. ■

**Ejemplo 4.3.** Consideremos la M-matriz del Ejemplo 4.2

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -2 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 11 & -2 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & 12 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 11 & -2 \\ -3 & -2 & -1 & -1 & 12 \end{bmatrix} = 15I - \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 15I - B.$$

Note que la matriz  $B$  es positiva y diagonalizable con espectro

$$\sigma(B) = \{10, 2 \pm i, 2 \pm i\}.$$

Queremos construir una M-matriz con el mismo espectro que  $A$ , pero con divisores elementales cuadráticos. Del resultado de Minc (Teorema 1.1), obtenemos la matriz

$$B' = \begin{bmatrix} \frac{107}{26} & \frac{55}{26} & \frac{14}{13} & \frac{21}{13} & \frac{14}{13} \\ \frac{29}{26} & \frac{107}{26} & \frac{27}{13} & \frac{21}{13} & \frac{14}{13} \\ \frac{69}{26} & \frac{17}{26} & \frac{36}{13} & \frac{41}{13} & \frac{10}{13} \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

la cual es positiva, tiene el mismo espectro que  $B$  y tiene divisores elementales

$$(\lambda - 10), (\lambda - 2 + i)^2, (\lambda - 2 - i)^2.$$

Por consiguiente, la matriz  $A' = 15I - B'$ , es una M-matriz con el mismo espectro que  $A$ , pero con divisores elementales

$$(\lambda - 5), (\lambda - 13 + i)^2, (\lambda - 13 - i)^2.$$

**Teorema 4.6.** Sea  $A = (a_{ij}) = \alpha I_n - B \in M_n$  una M-matriz diagonalizable con  $A, A^T \in \mathcal{CS}_{\alpha-\lambda_1}$  y con  $a_{ij} < 0$  para  $i \neq j$ , y  $a_{ii} < \alpha$  para  $i = 1, \dots, n$ . Entonces, existe una M-matriz  $A'$ , con  $A', A'^T \in \mathcal{CS}_{\alpha-\lambda_1}$ , con el mismo espectro que  $A$  y con divisores elementales arbitrariamente prescritos, siempre y cuando los divisores elementales correspondientes a autovalores no reales ocurran en pares conjugados.

*Demostración.* De la hipótesis y la Proposición 4.1 tenemos que  $B$  es diagonalizable, positiva con  $B, B^T \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ . Del Teorema de Minc (Teorema 1.2), tenemos

que existe una matriz positiva  $B'$ , con  $B', B'^T \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ , con el mismo espectro que  $B$  y con divisores elementales arbitrariamente prescritos. Por tanto, la matriz  $A' = \alpha I_n - B'$  es una M-matriz, con  $A', A'^T \in \mathcal{CS}_{\alpha - \lambda_1}$ , con el mismo espectro que  $A$  y con divisores elementales arbitrariamente prescritos. ■

---

#### 4.4. IEDP para M-matrices estocásticas generalizadas y doblemente estocásticas generalizadas

---

Podemos construir M-matrices estocásticas generalizadas y doblemente estocásticas generalizadas con espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , satisfaciendo  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} > \lambda_n \geq 0$ , para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ . Esto es precisamente lo que establecemos en esta sección.

**Teorema 4.7.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , con  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} > \lambda_n \geq 0$ . Entonces, para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , existe una M-matriz estocástica generalizada  $A \in \mathcal{CS}_{\lambda_n}$  con espectro  $\Lambda$ .*

*Demostración.* Sea  $\alpha \geq \lambda_1$ . Consideremos la lista

$$\Lambda' = \{\alpha - \lambda_n, \alpha - \lambda_{n-1}, \dots, \alpha - \lambda_2, \alpha - \lambda_1\}.$$

Puesto que  $\alpha - \lambda_n > \alpha - \lambda_{n-1} \geq \dots \geq \alpha - \lambda_2 \geq \alpha - \lambda_1 \geq 0$ , tenemos del Teorema 1.3 y la Observación 1.2 que para cada FCJ asociada con  $\Lambda'$ , existe una matriz no-negativa  $B \in \mathcal{CS}_{\alpha - \lambda_n}$  con espectro  $\Lambda'$ . Por consiguiente, para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , existe una M-matriz  $A = \alpha I_n - B \in \mathcal{CS}_{\lambda_n}$  con espectro  $\Lambda$ . ■

**Corolario 4.3.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números reales con  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{p-1} > \lambda_p = \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n \geq 0$ ,  $2 \leq p \leq n$ . Entonces, para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , existe una M-matriz con espectro  $\Lambda$ .*

*Demostración.* Consideremos las sublistas

$$\Lambda_1 = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}, \lambda_p\},$$

$$\Lambda_2 = \{\lambda_p, \dots, \lambda_p\}.$$

Del Teorema 4.7 sabemos que para cada FCJ asociada con  $\Lambda_1$ , existe una M-matriz  $A_1 = \alpha I_p - B_1$ , siendo  $\alpha \geq \lambda_1$ , con espectro  $\Lambda_1$ . Por otra parte, consideremos la matriz no-negativa

$$D = \text{diag}\{\alpha - \lambda_p, \dots, \alpha - \lambda_p\},$$

y sea  $E = \sum_{i \in K} E_{i,i+1}$ ,  $K \subset \{2, \dots, n-p-1\}$ , tal que la matriz no-negativa  $B_2 = D + E$  tiene espectro  $\Lambda'_2 = \{\alpha - \lambda_p, \dots, \alpha - \lambda_p\}$  y la FCJ deseada. Entonces, la matriz  $A_2 = \alpha I_{(n-p)} - B_2$  es una M-matriz con espectro  $\Lambda_2$  y FCJ deseada. Por tanto, para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , existe una M-matriz de la forma

$$\begin{aligned} A &= A_1 \oplus A_2 = (\alpha I_p - B_1) \oplus (\alpha I_{(n-p)} - B_2) \\ &= \alpha(I_p \oplus I_{n-p}) - (B_1 \oplus B_2) \\ &= \alpha I - B, \end{aligned}$$

donde  $I = I_p \oplus I_{n-p}$  y  $B = B_1 \oplus B_2 \geq 0$ , con espectro  $\Lambda$ . ■

**Teorema 4.8.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  con  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} > \lambda_n \geq 0$ . Entonces, para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , existe una M-matriz doblemente estocástica generalizada  $A, A^T \in \mathcal{CS}_{\lambda_n}$  con espectro  $\Lambda$ .*

*Demostración.* Sea  $\alpha \geq \lambda_1$ . Consideremos la lista

$$\Lambda' = \{\alpha - \lambda_n, \alpha - \lambda_{n-1}, \dots, \alpha - \lambda_2, \alpha - \lambda_1\}.$$

Puesto que  $\alpha - \lambda_n > \alpha - \lambda_{n-1} \geq \dots \geq \alpha - \lambda_2 \geq \alpha - \lambda_1 \geq 0$ , se sigue del Teorema 1.6 y la Observación 1.4 que para cada FCJ asociada con  $\Lambda'$ , existe una matriz positiva doblemente estocástica generalizada  $B, B^T \in \mathcal{CS}_{\alpha - \lambda_n}$  con espectro  $\Lambda'$ . Por consiguiente, para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , existe una matriz  $A = \alpha I - B$  doblemente estocástica generalizada  $A, A^T \in \mathcal{CS}_{\lambda_n}$  con espectro  $\Lambda$ . ■

El siguiente corolario es una consecuencia del Teorema 2.1.

**Corolario 4.4.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, a \pm bi, a \pm bi, \dots, a \pm bi\}$  una lista de  $n$  números complejos con  $a \geq 0$  y  $b > 0$ . Si*

$$\lambda_1 \geq a + \left(\frac{n+1}{2}\right)b,$$

*entonces, para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , existe una matriz no-negativa  $A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$  con espectro  $\Lambda$ .*

*Demostración.* Teniendo en cuenta el Teorema 2.1, tenemos que

$$M = a + b \quad y \quad m = \left(\frac{n-1}{2}\right)b.$$

Por consiguiente, si  $\lambda_1 \geq M + m = a + \left(\frac{n+1}{2}\right)b$ , entonces se sigue del Teorema 2.1 que para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , existe una matriz no-negativa  $A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$  con espectro  $\Lambda$ . ■

**Corolario 4.5.** Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, a \pm bi, a \pm bi, \dots, a \pm bi\}$  una lista de  $n$  números complejos con  $a > 0$  y  $b > 0$ . Si

$$0 \leq \lambda_1 \leq a - \left(\frac{n+1}{2}\right)b,$$

entonces, para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , existe una M-matriz con espectro  $\Lambda$ .

*Demostración.* Sea  $\alpha \geq a$ . Consideremos la lista

$$\Lambda' = \{\alpha - \lambda_1, (\alpha - a) \pm bi, \dots, (\alpha - a) \pm bi\}.$$

Puesto que  $\lambda_1 \leq a - \left(\frac{n+1}{2}\right)b$ , entonces

$$\alpha - \lambda_1 \geq \alpha - a + \left(\frac{n+1}{2}\right)b.$$

Por consiguiente, del Corolario 4.4 se sigue que para cada FCJ asociada con  $\Lambda'$ , existe una matriz no-negativa  $B \in \mathcal{CS}_{\alpha - \lambda_1}$  con espectro  $\Lambda'$ . De esta manera, para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , existe una M-matriz  $A = \alpha I_n - B$  con espectro  $\Lambda$ . ■

---

## 4.5. Otra condición suficiente para el IEDP para M-matrices

---

Del Teorema 2.2 obtenemos el siguiente resultado para M-matrices.

**Teorema 4.9.** Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos. Sea  $\alpha \geq \max_{1 \leq k \leq n} \{Re \lambda_k\}$  y sea

$$\Lambda' = \{\alpha - \lambda_1, \alpha - \lambda_2, \dots, \alpha - \lambda_n\}.$$

Supongamos que existe una partición disjunta dos a dos  $\Lambda' = \Lambda'_0 \cup \Lambda'_1 \cup \dots \cup \Lambda'_{p_0}$ , con

$$\Lambda'_0 = \{\alpha - \lambda_{01}, \alpha - \lambda_{02}, \dots, \alpha - \lambda_{0p_0}\},$$

$$\Lambda'_k = \{\alpha - \lambda_{k1}, \alpha - \lambda_{k2}, \dots, \alpha - \lambda_{kp_k}\}, \quad k = 1, 2, \dots, p_0,$$

donde algunas de las listas  $\Lambda'_k$ ,  $k = 1, \dots, p_0$ , pueden ser vacías, tal que:

i) para cada  $k = 1, \dots, p_0$ , existe una lista realizable

$$\Gamma_k = \{\omega_k, \alpha - \lambda_{k1}, \dots, \alpha - \lambda_{kp_k}\},$$

con ciertos divisores elementales prescritos.

ii) Existe una matriz no-negativa  $B'$  con espectro  $\Lambda'_0$ , elementos diagonales  $\omega_1, \dots, \omega_{p_0}$  y ciertos divisores elementales prescritos.

Entonces, existe una M-matriz con espectro  $\Lambda$  y con los divisores elementales prescritos.

*Demostración.* De i) tenemos que para cada  $k = 1, \dots, p_0$ , existe una matriz no-negativa  $A'_k \in \mathcal{CS}_{\omega_k}$  con espectro  $\Gamma_k$  y divisores elementales prescritos asociados a las listas  $\Gamma_k$ . Entonces, la matriz  $A' = \text{diag}\{A'_1, \dots, A'_{p_0}\}$  es no-negativa con espectro  $\bigcup_{k=1}^{p_0} \Gamma_k$  y divisores elementales prescritos. Sea  $\Omega = \text{diag}\{\omega_1, \dots, \omega_{p_0}\}$  y sea  $X$  la matriz de orden  $n \times p_0$  con sus columnas siendo los autovectores de  $A'$  correspondientes a los autovalores  $\omega_1, \dots, \omega_{p_0}$ .

De ii) sea  $C$  la matriz de orden  $p_0 \times n$  tal que  $\Omega + CX = B'$ . Entonces,  $B = A' + XC$  es no-negativa con espectro  $\Lambda'$  y divisores elementales prescritos. Por tanto, la matriz  $A = \alpha I_n - B$  es una M-matriz con espectro  $\Lambda$  y con divisores elementales prescritos. ■

El siguiente ejemplo ilustra el Teorema 4.9.

**Ejemplo 4.4.** Sea  $\Lambda = \{3, 5, 10 \pm 2i, 10 \pm 2i, 14 \pm 3i, 14 \pm 3i\}$ . Queremos construir una M-matriz con espectro  $\Lambda$  y divisores elementales

$$(\lambda - 3), (\lambda - 5), (\lambda^2 - 20\lambda + 104)^2, (\lambda^2 - 28\lambda + 205)^2.$$

Aplicamos el Teorema 4.9 con  $\alpha = 14$ . En tal caso,

$$\Lambda' = \{11, 9, 4 \pm 2i, 4 \pm 2i, \pm 3i, \pm 3i\}.$$

Consideremos la partición

$$\Lambda'_0 = \{11, 9\}, \quad \Lambda'_1 = \{4 \pm 2i, 4 \pm 2i\}, \quad \Lambda'_2 = \{\pm 3i, \pm 3i\},$$

con las correspondientes listas realizables

$$\Gamma_1 = \{10, 4 \pm 2i, 4 \pm 2i\}, \quad \Gamma_2 = \{10, \pm 3i, \pm 3i\}.$$

Buscamos ahora una matriz no-negativa  $B'$  con espectro  $\Lambda'_0$  y entradas diagonales  $10, 10$ . Esta es

$$B' = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}.$$

Las matrices

$$A'_1 = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad y \quad A'_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tienen espectros  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , con los divisores elementales

$$(\lambda - 10), (\lambda^2 - 8\lambda + 20)^2 \quad y \quad (\lambda - 10), (\lambda^2 + 9)^2,$$

respectivamente. La matriz

$$B = \begin{bmatrix} A'_1 & \\ & A'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

es no-negativa con espectro  $\Lambda'$  y divisores elementales

$$(\lambda - 11), (\lambda - 9), (\lambda^2 - 8\lambda + 20)^2, (\lambda^2 + 9)^2.$$

Por tanto, la matriz  $A = 14I_{10} - B$  es una M-matriz con espectro  $\Lambda$  y los divisores elementales

$$(\lambda - 3), (\lambda - 5), (\lambda^2 - 20\lambda + 104)^2, (\lambda^2 - 28\lambda + 205)^2.$$

---

## 4.6. NIEP para M-matrices inversas

---

Una matriz no-singular se dice M-matriz inversa si su inversa es una M-matriz.

En esta sección estudiamos el problema inverso de autovalores para M-matrices inversas, el cual consiste en encontrar condiciones para que dada una lista de números complejos  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , exista una M-matriz inversa  $A$  con espectro  $\Lambda$ .

Recordemos el conjunto

$$F_n = \{X = (x_{ij}) \in M_n \mid x_{ij} \leq 0, \text{ si } i \neq j\},$$

el cual es llamado conjunto de Z-matrices.

En [11], K. Fan probó el siguiente resultado:

**Teorema 4.10.** [11] *Una matriz no-singular  $A \in F_n$  es una M-matriz si y sólo si  $A^{-1}$  es no-negativa.*

Del teorema anterior se deduce entonces que si  $A$  es una M-matriz inversa,  $A$  es no-negativa.

**Teorema 4.11.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números reales con  $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_n > 0$ . Entonces existe una M-matriz inversa, simétrica y doblemente estocástica generalizada ( $\in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ ) con espectro  $\Lambda$ .*

*Demostración.* Sea

$$D = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}.$$

Consideremos la matriz no-singular  $R$  definida en (1.1), la cual puede ser escrita como

$$R = \begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_n \end{bmatrix},$$

donde

$$G_1 = (1, 1, \dots, 1),$$

$$G_k = (1, 1, \dots, 1, -(k-1), \underbrace{0, \dots, 0}_{(k-2) \text{ ceros}}), \quad k = 2, \dots, n.$$

La matriz inversa de  $R$  es la matriz

$$R^{-1} = [H_1 \ \cdots \ H_n],$$

dada por:

$$H_1^T = \left( \frac{1}{n}, \frac{1}{n(n-1)}, \frac{1}{(n-1)(n-2)}, \dots, \frac{1}{3 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 1} \right),$$

$$H_k^T = \left( \frac{1}{n}, \frac{1}{n(n-1)}, \frac{1}{(n-1)(n-2)}, \dots, \frac{1}{(k+1)k}, -\frac{1}{k}, \underbrace{0, \dots, 0}_{(k-2) \text{ ceros}} \right), \quad k = 2, \dots, n.$$

Sabemos que la matriz  $A = RDR^{-1} \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$  es positiva y simétrica. Demostraremos que la matriz inversa  $A^{-1} \in F_n$ , con lo cual, del Teorema 4.10 tendremos que  $A^{-1}$  es una M-matriz. En efecto, puesto que  $A$  es simétrica,  $A^{-1}$  también lo es. Así entonces, para probar que  $A^{-1} \in F_n$ , es suficiente verificar que  $a_{ij}^{-1} \leq 0$  para  $1 \leq i < j \leq n$  (o  $1 \leq j < i \leq n$ ), donde

$$A^{-1} = (a_{ij}^{-1}) = RD^{-1}R^{-1},$$

siendo

$$D^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \right\},$$

con

$$0 < \frac{1}{\lambda_1} < \frac{1}{\lambda_2} \leq \dots \leq \frac{1}{\lambda_n}.$$

Note que para  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned}
a_{ij}^{-1} &= e_i^T (RD^{-1}R^{-1})e_j \\
&= \text{Fil}_i(R) \cdot D^{-1} \cdot \text{Col}_j(R^{-1}) \\
&= G_i D^{-1} H_j.
\end{aligned}$$

Es claro que

$$\begin{aligned}
G_1 D^{-1} &= \left( \frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \right), \\
G_i D^{-1} &= \left( \frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_{n-i}}, \frac{1}{\lambda_{n-(i-1)}}, -\frac{(i-1)}{\lambda_{n-(i-2)}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{(i-2) \text{ ceros}} \right) \quad i = 2, \dots, n.
\end{aligned}$$

Así entonces, para  $i = 1$  y  $j = 2, \dots, n$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
a_{1j}^{-1} &= G_1 D^{-1} H_j = \left( \frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \right) H_j \\
&= \frac{1}{\lambda_1 \cdot n} + \frac{1}{\lambda_2 \cdot n(n-1)} + \dots + \frac{1}{\lambda_{n-j} \cdot (j+2)(j+1)} + \\
&\quad + \frac{1}{\lambda_{n-(j-1)} \cdot (j+1)j} - \frac{1}{\lambda_{n-(j-2)} \cdot j} \\
&\leq \frac{1}{\lambda_{n-(j-1)}} \underbrace{\left( \sum_{k=j+1}^n \frac{1}{k(k-1)} + \frac{1}{n} \right)}_{\text{suma telescópica}} - \frac{1}{\lambda_{n-(j-2)} \cdot j} \\
&= \frac{1}{\lambda_{n-(j-1)}} \left( \frac{1}{j} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{\lambda_{n-(j-2)} \cdot j} \\
&= \frac{1}{j} \left( \frac{1}{\lambda_{n-(j-1)}} - \frac{1}{\lambda_{n-(j-2)}} \right) \leq 0.
\end{aligned}$$

Para  $2 \leq i < j \leq n$ ,

$$\begin{aligned} a_{ij}^{-1} &= G_i D^{-1} H_j \\ &= \left( \frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_{n-i}}, \frac{1}{\lambda_{n-(i-1)}}, -\frac{(i-1)}{\lambda_{n-(i-2)}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{(i-2) \text{ ceros}} \right) H_j \\ &= a_{1j}^{-1} \leq 0. \end{aligned}$$

Hemos probado que  $A^{-1} \in F_n$ , y por tanto,  $A^{-1}$  es una M-matriz. Entonces,  $A$  es una M-matriz inversa, simétrica y doblemente estocástica generalizada con espectro  $\Lambda$ . Nótese además que la M-matriz  $A^{-1} \in \mathcal{CS}_{1/\lambda_1}$  y por ser simétrica, entonces es doblemente estocástica generalizada. ■

**Ejemplo 4.5.** Sea  $\Lambda = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$ . La matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{11}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{8} & \frac{11}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{11}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{11}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{7}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{7}{12} \end{bmatrix},$$

es una M-matriz inversa, simétrica y doblemente estocástica con espectro  $\Lambda$ . Su inversa, es la M-matriz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{31}{12} & -\frac{5}{12} & -\frac{5}{12} & -\frac{5}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{5}{12} & \frac{31}{12} & -\frac{5}{12} & -\frac{5}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{5}{12} & -\frac{5}{12} & \frac{31}{12} & -\frac{5}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{5}{12} & -\frac{5}{12} & -\frac{5}{12} & \frac{31}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{11}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{11}{6} \end{bmatrix},$$

la cual tiene espectro  $\Lambda^{-1} = \{3, 3, 3, 2, 2, 1\}$ .

**Corolario 4.6.** Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números reales, donde la multiplicidad algebraica del autovalor  $\lambda_1$  es  $p > 1$ , y además  $\lambda_1 > \lambda_{p+1} \geq \dots \geq \lambda_n > 0$ . Entonces existe una M-matriz inversa, simétrica y doblemente estocástica generalizada ( $\in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ ) con espectro  $\Lambda$ .

*Demostración.* Consideremos las siguientes sublistas

$$\Lambda_1 = \{\lambda_1, \dots, \lambda_1\},$$

$$\Lambda_2 = \{\lambda_1, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\},$$

donde la lista  $\Lambda_1$  tiene  $p-1$  elementos y la lista  $\Lambda_2$  tiene  $n-p+1$  elementos. Es claro que la matriz  $A_1 = \lambda_1 I_{p-1}$  es una M-matriz inversa, simétrica y doblemente estocástica generalizada ( $\in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ ) con espectro  $\Lambda_1$ . Por otra parte, en virtud del Teorema 4.11 tenemos que existe una M-matriz inversa, simétrica y doblemente estocástica generalizada ( $\in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ ) con espectro  $\Lambda_2$ . Por consiguiente, la matriz  $A = A_1 \oplus A_2$  es una M-matriz inversa, simétrica y doblemente estocástica generalizada ( $\in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ ) con espectro  $\Lambda$ . ■

---

## 4.7. NIEDP para M-matrices inversas

---

En el siguiente teorema se resuelve completamente el NIEDP para M-matrices inversas, para listas  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  de números reales satisfaciendo  $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_n > 0$ . Más precisamente:

**Teorema 4.12.** Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números reales satisfaciendo  $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_n > 0$ . Entonces, para cada FCJ  $J$  asociada con  $\Lambda$ , existe una M-matriz inversa  $A$  ( $A, A^T \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ ) con  $J(A) = J$ .

*Demostración.* Consideremos la lista  $\Lambda^{-1} = \left\{ \frac{1}{\lambda_n}, \frac{1}{\lambda_{n-1}}, \dots, \frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_1} \right\}$ , donde

$$\frac{1}{\lambda_n} \geq \frac{1}{\lambda_{n-1}} \geq \dots \geq \frac{1}{\lambda_2} > \frac{1}{\lambda_1} > 0.$$

Del Teorema 4.8 tenemos que para cada FCJ asociada con  $\Lambda^{-1}$ , existe una M-matriz  $M$  ( $M, M^T \in \mathcal{CS}_{1/\lambda_1}$ ). Por tanto, al considerar la matriz  $A = M^{-1} \geq 0$  ( $A, A^T \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ ), tenemos demostrado el teorema. ■

Presentamos ahora una condición suficiente para ciertas listas de números complejos. La condición se fundamenta en el Corolario 4.5.

**Teorema 4.13.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, a \pm bi, \dots, a \pm bi\}$  una lista de  $n$  números complejos, donde  $a > \left(\frac{n+1}{2}\right)b > 0$ . Si*

$$\lambda_1 \geq \frac{a^2 + b^2}{a - \left(\frac{n+1}{2}\right)b}, \quad (4.1)$$

*entonces para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , existe una M-matriz inversa con espectro  $\Lambda$ .*

*Demostración.* Consideremos la lista

$$\Lambda^{-1} = \left\{ \frac{1}{\lambda_1}, \frac{a}{a^2 + b^2} \pm \frac{b}{a^2 + b^2}i, \dots, \frac{a}{a^2 + b^2} \pm \frac{b}{a^2 + b^2}i \right\}.$$

De (4.1) se sigue que,

$$\frac{1}{\lambda_1} \leq \frac{a - \left(\frac{n+1}{2}\right)b}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} \left(\frac{n+1}{2}\right).$$

Por tanto, del Corolario 4.5 tenemos que para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , existe una M-matriz  $B \in M_n$  con espectro  $\Lambda^{-1}$ . De esta manera, para cada FCJ asociada con  $\Lambda$ , la matriz  $A = B^{-1}$  es una M-matriz inversa con espectro  $\Lambda$ . ■

**Ejemplo 4.6.** *Sea  $\Lambda = \{3, 1 \pm \frac{1}{6}i, 1 \pm \frac{1}{6}i\}$ . Queremos hallar una M-matriz inversa con espectro  $\Lambda$  y divisores elementales*

$$(\lambda - 3), \quad \left( \lambda^2 - 2\lambda + \frac{37}{36} \right)^2.$$

*Note que  $\Lambda$  satisface la desigualdad (4.1). En este caso*

$$\Lambda^{-1} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{36}{37} \pm \frac{6}{37}i, \frac{36}{37} \pm \frac{6}{37}i \right\}.$$

La matriz

$$B = \begin{bmatrix} \frac{73}{111} & -\frac{6}{37} & 0 & -\frac{6}{37} & 0 \\ -\frac{17}{111} & \frac{30}{37} & -\frac{6}{37} & -\frac{6}{37} & 0 \\ -\frac{71}{111} & 0 & \frac{36}{37} & 0 & 0 \\ -\frac{17}{111} & -\frac{6}{37} & 0 & \frac{30}{37} & -\frac{6}{37} \\ -\frac{53}{111} & -\frac{6}{37} & 0 & 0 & \frac{36}{37} \end{bmatrix},$$

es una M-matriz con espectro  $\Lambda^{-1}$  y divisores elementales

$$\left(\lambda - \frac{1}{3}\right), \left(\lambda^2 - \frac{72}{37}\lambda + \frac{36}{37}\right)^2.$$

Por tanto, la matriz

$$A = B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2574}{1369} & \frac{18}{37} & \frac{3}{37} & \frac{648}{1369} & \frac{108}{1369} \\ \frac{1020}{1369} & \frac{55}{37} & \frac{55}{222} & \frac{611}{1369} & \frac{611}{8214} \\ \frac{10153}{8214} & \frac{71}{222} & \frac{40}{37} & \frac{426}{1369} & \frac{71}{1369} \\ \frac{5861}{8214} & \frac{18}{37} & \frac{3}{37} & \frac{2017}{1369} & \frac{2017}{8214} \\ \frac{8599}{8214} & \frac{18}{37} & \frac{3}{37} & \frac{2519}{8214} & \frac{1477}{1369} \end{bmatrix},$$

es una M-matriz inversa con espectro  $\Lambda$  y los divisores elementales deseados.

# Conclusiones y Trabajo Futuro

Esta tesis contiene resultados que contribuyen al avance hacia una solución del **Problema Inverso de los Divisores Elementales para Matrices No-negativas** (NIEDP). En particular, resolvemos completamente el problema para listas de números complejos  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , con

$$\lambda_i \in \mathcal{G} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0, |\sqrt{3}\operatorname{Re} z| \geq |\operatorname{Im} z|\}, \quad i = 2, \dots, n,$$

extendiendo de este modo, resultados previos para listas del tipo Suleimanova. La condición necesaria y suficiente es simplemente  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ , la cual coincide con la condición necesaria y suficiente para una solución al NIEP para listas del mismo tipo.

Para listas de números complejos  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , con  $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$ ,  $i = 2, \dots, n$ , y listas más generales, presentamos eficientes condiciones suficientes. Todos nuestros resultados generan procedimientos algorítmicos para computar una matriz solución.

Consideramos también en esta tesis, el problema de perturbar autovalores reales y complejos no reales de una lista realizable, preservando la realizabilidad y la estructura de la forma canónica de Jordan. Estos resultados pueden ser útiles, en muchos casos, para decidir la realizabilidad de una lista de números complejos con ciertos divisores elementales prescritos.

Finalmente, estudiamos el problema inverso de los divisores elementales para M-matrices y M-matrices inversas, generando nuevos resultados y condiciones suficientes para una solución.

Algunas técnicas que hemos empleado para obtener nuestros resultados, descansan fuertemente en ciertos resultados de perturbación que han probado ser importantes para la obtención de respuestas eficientes y constructivas en ambos problemas inversos, el de autovalores y el de los divisores elementales, para ma-

trices no-negativas.

Aunque ambos problemas, el NIEP y el NIEDP, son difíciles, ellos son también apasionantes y nos proponemos continuar, en el futuro inmediato, la investigación relacionada con ellos. En este sentido, vemos como temas de investigación inmediatos, buscar una solución completa del NIEDP para listas en el semiplano izquierdo, es decir, listas de números complejos  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , con  $Re\lambda_i \leq 0$ ,  $i = 2, \dots, n$ ; buscar nuevas condiciones para una solución al problema inverso para M-matrices inversas, y estudiar el NIEDP para ciertas matrices estructuradas.

## Referencias Bibliográficas

- [1] A. Berman, R. J. Plemmons, Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences, *SIAM Classics in Applied Mathematics*, Philadelphia, PA, 1994.
- [2] A. Borobia, On the Nonnegative Eigenvalue Problem, *Linear Algebra Appl.*, (223-224):131-140, 1995.
- [3] A. Borobia, J. Moro, R. L. Soto, Negativity compensation in the nonnegative inverse eigenvalue problem, *Linear Algebra Appl.*, 393:73-89, 2004.
- [4] A. Brauer, Limits for the characteristic roots of a matrix IV: Applications to stochastic matrices, *Duke Math. J.*, 19:75-91, 1952.
- [5] J. Ccapa, R. L. Soto, On spectra perturbation and elementary divisors of positive matrices, *Electronic Journal of Linear Algebra*, 18:462-481, 2009.
- [6] J. Ccapa, R. L. Soto, On elementary divisors perturbations of nonnegative matrices, *Linear Algebra Appl.*, 432:546-555, 2010.
- [7] P. G. Ciarlet, Some results in the theory of nonnegative matrices, *Linear Algebra Appl.*, 1:139-152, 1968.
- [8] A. G. Cronin, T. J. Laffey, An inequality for the spectra of nonnegative matrices, *Linear Algebra Appl.*, 436:3225-3238, 2012.
- [9] R. C. Díaz, R. L. Soto, Nonnegative inverse elementary divisors problem in the left half plane, *Linear and Multilinear Algebra*, DOI: 10.1080/03081087.2015.1034640.
- [10] J. Ding, W. Pye, L. Zhao, Some results on structured M-matrices with an application to wireless communications, *Linear Algebra Appl.*, 416:608-614, 2006.
- [11] K. Fan, Topological proofs for certain theorems on matrices with nonnegative elements, *Monatsh. Math.*, 62:219-237, 1958.
- [12] M. Fiedler, Eigenvalues of nonnegative symmetric matrices, *Linear Algebra Appl.*, 9:119-142, 1974.

- [13] W. Guo, An inverse eigenvalue problem for nonnegative matrices, *Linear Algebra Appl.*, 249:67-78, 1996.
- [14] W. Guo, Eigenvalues of nonnegative matrices, *Linear Algebra Appl.*, 266:261-270, 1997.
- [15] S. Guo, W. Guo, Perturbing non-real eigenvalues of nonnegative real matrices, *Linear Algebra Appl.*, 426:199-203, 2007.
- [16] R. A. Horn, C. R. Johnson, Matrix Analysis, *Cambridge University Press*, 1985.
- [17] C. R. Johnson, Row stochastic matrices similar to doubly stochastic matrices, *Linear and Multilinear Algebra*, 10:113-130, 1981.
- [18] C. R. Johnson, T. J. Laffey, R. Loewy, The real and the symmetric nonnegative inverse eigenvalue problems are different, *Proc. AMS* 124:3647-3651, 1996.
- [19] A. I. Julio, C. B. Manzaneda, R. L. Soto, Normal nonnegative realization of spectra, *Linear and Multilinear Algebra*, 63:1204-1215, 2015.
- [20] A. I. Julio, R. L. Soto, Persymmetric and bisymmetric nonnegative inverse eigenvalue problem, *Linear Algebra Appl.*, 469:130-152, 2015.
- [21] T. J. Laffey, E. Meehan, A refinement of an inequality of Johnson, Loewy and London on nonnegative matrices and some applications, *Electronic Journal of Linear Algebra* 3:119-128, 1998.
- [22] T. J. Laffey, E. Meehan, A characterization of trace zero nonnegative  $5 \times 5$  matrices, *Linear Algebra Appl.*, (302-303):295-302, 1999.
- [23] T. J. Laffey, Perturbing non-real eigenvalues of nonnegative real matrices, *Electronic Journal of Linear Algebra*, 12:73-76, 2005.
- [24] T. J. Laffey, H. Šmigoc, Nonnegative realization of spectra having negative real parts, *Linear Algebra Appl.*, 416:148-159, 2006.
- [25] T. J. Laffey, H. Šmigoc, Construction of nonnegative symmetric matrices with given spectrum, *Linear Algebra Appl.*, 421:97-109, 2007.
- [26] R. Loewy, D. London, A note on an inverse problem for nonnegative matrices, *Linear and Multilinear Algebra*, 6:83-90, 1978.
- [27] R. Loewy, J. J. McDonald, The symmetric nonnegative inverse eigenvalue problem for  $5 \times 5$  matrices, *Linear Algebra Appl.*, 393:275-298, 2004.
- [28] D. London, On diagonals of matrices doubly stochastically similar to a given matrix, *Linear Algebra Appl.*, 244:305-340, 1996.
- [29] F. Lubeck, On the computation of elementary divisors of integer matrices, *J. Symbolic Comput.*, 33:57-65, 2002.

- [30] C. Marijuán, M. Pisonero, R. L. Soto, A map of sufficient conditions for the real nonnegative inverse eigenvalue problem, *Linear Algebra Appl.*, 426:690-705, 2007.
- [31] H. Minc, Inverse elementary divisor problem for nonnegative matrices, *Proc. of the Amer. Math. Society* Vol 83, Number 4:665-669, 1981.
- [32] H. Minc, Inverse elementary divisor problem for doubly stochastic matrices, *Linear Multilinear Algebra*, 11:121-131, 1982.
- [33] H. Minc, Nonnegative Matrices, *John Wiley and Sons*, New York, 1988.
- [34] B. Nagy, Inverse elementary divisor problems for nonnegative matrices, *Oper. Matrices* 5 N<sup>o</sup> 2 289-301, 2011.
- [35] H. Perfect, Methods of constructing certain stochastic matrices, *Duke Math. J.*, 20:395-404, 1953.
- [36] H. Perfect, Methods of constructing certain stochastic matrices II, *Duke Math. J.*, 22:305-311, 1955.
- [37] O. Rojo, R. L. Soto, Guo perturbations for symmetric nonnegative circulant matrices, *Linear Algebra Appl.*, 431:594-607, 2009.
- [38] F. Salzmänn, A note on eigenvalues of nonnegative matrices, *Linear Algebra Appl.*, 5:329-338, 1972.
- [39] H. Šmigoc, The inverse eigenvalue problem for nonnegative matrices, *Linear Algebra Appl.*, 393:365-374, 2004.
- [40] H. Šmigoc, Construction of nonnegative matrices and the inverse eigenvalue problem, *Linear and Multilinear Algebra* 53:88-96, 2005.
- [41] R. L. Soto, Existence and Construction of Nonnegative matrices with prescribed spectrum, *Linear Algebra Appl.*, 369:169-184, 2003.
- [42] R. L. Soto, Realizability by symmetric nonnegative matrices, *Proyecciones* 24 (1):65-78, 2005.
- [43] R. L. Soto, Realizability criterion for the symmetric nonnegative inverse eigenvalue problem, *Linear Algebra Appl.*, 416 (2-3):783-794, 2006.
- [44] R. L. Soto, O. Rojo, Applications of a Brauer theorem in the nonnegative inverse eigenvalue problem, *Linear Algebra Appl.*, 416 (2-3):844-856, 2006.
- [45] R. L. Soto, J. Ccapa, Nonnegative matrices with prescribed elementary divisors, *Electronic Journal of Linear Algebra* 17:287-303, 2008.
- [46] R. L. Soto, M. Salas, C. Manzaneda, Nonnegative realization of complex spectra, *Electronic Journal of Linear Algebra* 20:595-609, 2010.

- [47] R. L. Soto, A. I. Julio, A Note on the Symmetric Nonnegative Inverse Eigenvalue Problem, *International Mathematical Forum*, 6 N<sup>0</sup> 50, 2447-2460, 2011.
- [48] R. L. Soto, O. Rojo, C. B. Manzaneda, On nonnegative realization of partitioned spectra, *Electronic Journal of Linear Algebra*, 22:557-572, 2011.
- [49] R. L. Soto, R. C. Díaz, H. Nina, M. Salas, Nonnegative matrices with prescribed spectrum and elementary divisors, *Linear Algebra Appl.*, 439:3591-3604, 2013.
- [50] R. L. Soto, A. I. Julio, M. Salas, Nonnegative persymmetric matrices with prescribed elementary divisors, *Linear Algebra Appl.*, 483:139-157, 2015.
- [51] R. L. Soto, R. C. Díaz, M. Salas, O. Rojo, M-matrices with prescribed elementary divisors, *sometido*.
- [52] G. Soules, Constructing symmetric nonnegative matrices, *Linear and Multilinear Algebra* 13:241-251, 1983.
- [53] H. R. Suleimanova, Stochastic matrices with real characteristic values, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 66:343-345, 1949.
- [54] J. Torre-Mayo, M. R. Abril-Raymundo, E. Alarcia-Estévez, C. Marijuán, M. Pisonero, The nonnegative inverse eigenvalue problem from the coefficients of the characteristic polynomial, EBL digraphs, *Linear Algebra Appl.*, 426:729-773, 2007.
- [55] I. Zaballa, Interlacing and majorization in invariant factor assignment problem, *Linear Algebra Appl.*, 121:409-421, 1989.
- [56] B. G. Zaslavsky, B. Tam, On the Jordan form of an irreducible matrix with eventually nonnegative power, *Linear Algebra Appl.*, 302-303:303-330, 1999.