



UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Física

**Estimación de precios de opciones financieras:
distribuciones de retornos y aplicaciones**

Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias con
mención en Física.

Felipe Cuevas Pacheco

Profesor Guía: Dr. Sergio Curilef Huichalaf

Antofagasta, Chile

2014

A quienes se hicieron parte de este trabajo, muchas gracias.

Agradecimientos

Antes que todo agradecer al departamento de Física en especial a su cuerpo docente por el apoyo dado.

También agradecer al profesor guía Dr. Sergio Curilef por permitirme trabajar bajo su tutela.

A mi hermano Mg. Francisco Cuevas por sus aportaciones y discusiones sobre la tesis.

Agradezco también a Rodrigo Meneses por sus aportes, apoyo y orientación del tema a abordar.

Agradezco a los compañeros de magister que colaboraron con ayuda, ya sea directa o indirecta.

Esta tesis ha recibido financiamiento parcial por medio de la beca FIC-Regional.

Resumen

En esta tesis se propone estudiar las hipótesis que permiten formular la ecuación diferencial parcial de segundo orden de Black-Scholes, se estudia sus consecuencias en el mercado y su relación con la estimación de precios de opciones. Se observa que las hipótesis no son completamente satisfechas por la dinámica que gobiernan los retornos.

En el desarrollo del presente trabajo se propone modificar, al menos, dos hipótesis. Con ello se construye una ecuación no lineal de Black-Scholes. El término no lineal de la ecuación se asocia a la volatilidad. Se propone una volatilidad basada en distribuciones empíricas de retornos. La ecuación diferencial se resuelve numéricamente usando el método de Crank-Nicolson, apropiado para problemas de difusión. Los resultados del modelo no lineal de Black-Scholes se comparan con los de Black-Scholes. Se discuten las diferencias.

Este trabajo se enmarca en un área moderna de desarrollo interdisciplinario llamada econofísica con especialidad en finanzas cuantitativas. Esta área no es cercana al curriculum de un licenciado en física UCN. Siendo así, como otra aplicación de la presente investigación, se propone un curso para graduados de física, con los fundamentos que los aproximen a desarrollar investigaciones en tópicos emergentes y recientes como la econofísica.

Abstract

In this work, we propose to study the fundamental questions that allow us to formulate the Black-Scholes partial differential equation of second order. It is clear, such hypotheses are not fully satisfied by the dynamics which is imposed by returns. To develop the present proposal, we suggest to modify, at least, two hypothesis. Taking into account the last, we propose a non linear Black-Scholes equation.

The volatility is associated with the non linearity. It is proposed a non linear function as volatility based on empirical distributions of returns. The partial differential equation is numerically solved through a proper way, the Crank-Nicolson method. Results from both models, lineal and non linear, are compared and their differences are discussed.

This work is involved through interdisciplinary development in modern research, the econophysics, particularly the quantitative finance. This topic is far from UCN Physicist. Then, as other possible application of the current research, we propose a program of contents to approach physicist to econophysics.

Índice general

Introducción	5
1. Ecuación de Black-Scholes con términos no lineales	17
1.1. Propuesta	17
1.2. Herramientas para el análisis numérico	20
1.2.1. Prueba de Kolmogorov-Smirnov	20
1.2.2. Medida de la desviación: Expansión en término de los mo- mentos	21
1.2.3. Esquema de diferencias finitas	22
1.2.4. Método de Crank-Nicolson	23
2. Discusión de resultados	26
2.1. Test de gaussianidad de Kolmogorv-Smirnov	26
2.2. Estimación del parámetro de desviación de gaussianidad	29
2.3. Gráficos comparativos para los distintos índices bursátiles	30
3. El aprendizaje de la econofísica como herramienta de estudio en la mecánica estadística	37
3.1. Elementos sobre curriculum	38
3.2. Propuesta de asignatura “Tópicos de la Econofísica”	39
3.2.1. Objetivo General	39

3.2.2. Contenidos	40
Conclusión	42
Glosario	44
Bibliografía	47
Apéndice A	50
Apéndice B	54

Índice de figuras

1.1. Se muestra la distribución de retornos normalizados al cierre de entre el 10 de Noviembre de 2013 y 10 de Noviembre de 2014. . . .	18
2.1. Se grafica la distribución de retornos normalizados de los precios de cierre de entre 10 de Noviembre de 2013 y 10 de Noviembre de 2014.	28
2.2. Se gráfica el precio de una opción <i>call</i> en función del precio de activo subyacente considerando los retornos de S& P 500 $T = 1$, $K = 50$, $r = 0.1$ y $\nu = 0.84341142$	31
2.3. Se grafica el precio de la opción <i>call</i> en función del precio de activo subyacente considerando los retornos de Eurostoxx 50 $T=1$, $K=50$, $r=0.1$ y $\nu=0.84354609$	32
2.4. Se grafica el precio de la opción <i>call</i> en función del precio de activo subyacente considerando los retornos de Ibex 35 $T = 1$, $K = 50$, $r = 0.1$ y $\nu = 0.95032973$	33
2.5. Se gráfica el precio de la opción <i>call</i> en función del precio de activo subyacente considerando los retornos de Nikkei 225 $T = 1$, $K = 50$, $r = 0.1$ y $\nu = 0.94500184$	34
2.6. Se gráfica la opción <i>call</i> en función del precio de activo subyacente de los distintos índices bursátiles estudiados para diferentes σ , considerando $T = 1$, $K = 50$, $r = 0.1$	35

2.7. Se muestra la tendencia de las diferencias relativas entre el modelo lineal y el modelo no lineal, para diferentes volatilidades, como función del activo subyacente considerando los retornos de Eurostoxx 50 considerando $T = 1$, $K = 50$, $r = 0.1$ 36

Índice de cuadros

2.1. Se muestran el cuadros de datos obtenidos sobre el test de gaussianidad de Kolmogorov-Smirnov. Los valores para cada estadístico de prueba son mayores 0.05 en la tabla lo que nos indica que no pueden ser ajustados a una gaussiana.	27
2.2. Se muestra el valor de estimación del cumulante de cuarto orden ν respecto a los distintos índices bursátiles estudiados.	29

Introducción

Se dice que un sistema es complejo cuando está compuesto por una gran cantidad de elementos interactuantes, capaces de intercambiar información entre ellos y el entorno, además de adaptar sus estructuras internas como consecuencia de tales interacciones. Una característica propia de sistemas de este tipo es la existencia de interacciones no lineales entre sus componentes, que son las responsables de producir comportamientos emergentes en los que el todo es más que la simple suma de las partes. Vistos en forma agregada, estos comportamientos no pueden ser atribuibles a la acción aislada de cada elemento por separado sino que son el resultado de su acción colectiva.

Esta descripción nos permite decir que los mercados financieros tienen comportamiento de sistema complejo. Partiendo del hecho que existe un gran número de agentes económicos, y estos agentes pueden realizar múltiples transacciones; son entes dinámicos, los cuales interactúan entre sí de forma frecuente, además, las decisiones dependen de la información que obtiene de estos mismos mercados. Otro aspecto a considerar es que los agentes económicos influyen en los estados del mercado y, a la vez, los mercados influyen en el comportamiento de los agentes. También podemos considerar el desarrollo de tecnología, cómo Internet por dar un ejemplo, cómo factor determinante en el comportamiento de los mercados. Si bien este desarrollo tecnológico logra mejorar el manejo de datos estos también se incrementaron ayudando a aumentar el nivel de complejidad en los mercados.

El estudio de los sistemas complejos, al ser transversales, es un tema que atrae y llama la atención de numerosos investigadores de los más diversos campos, tanto en las ciencias naturales como en las ciencias sociales, dentro de las ciencias naturales está la física, que tiene como objetivo describir, explicar y controlar el comportamiento de un sistema debido a los diversos fenómenos que ocurren en su entorno, desarrollando teorías y modelos que permiten el análisis de estos. Para la física el estudio de los sistemas complejos observados en economía tienen larga data, ya que los mercados financieros ofrecen una gran oportunidad de desarrollar teorías y aplicar modelos que intentan utilizar datos que se almacenan con precisión. Como consecuencia de esto nace el término *Econofísica* para referirnos al área interdisciplinaria que realiza estos estudios.

Al observar el avance que esta área ha tenido en el ámbito de las finanzas cuantitativas, podemos identificar el modelo de Black-Scholes [1] como uno de los mayores aportes. Este modelo ha sido aplicado en las más diversos ámbitos: estimación de precios de opciones financieras, estimación de presupuestos de la nación, estudio de fondos de pensión, por nombrar algunos [2–11]. A fines del siglo XX el modelo de Black-Scholes se tomó como una herramienta fundamental en el mercado de opciones.

Para entender la metodología utilizada en el modelo de Black-Scholes se introduce a continuación un conjunto de elementos conceptuales básicos relacionados con dicha metodología. Primero se darán a conocer conceptos económicos, específicamente el de opción financiera y la definición de relación entre precio actual y futuro, para luego de esto se entregan herramientas físico matemáticas como es la descripción del movimiento browniano, y la construcción del modelo de Black Scholes. Para apoyar la lectura de estos párrafos explicativos, la definición de la

terminología financiera se incluye en el Glosario.

Para introducir al lector en el tema en cuestión, primeramente definiremos que se entiende por opción financiera. Usando la definición de Hull [2], entenderemos una opción como un acuerdo que se realiza por medio de un contrato a plazo, en que el dueño del contrato tendrá el derecho, más no el deber, de comprar o vender un activo determinado. Para que un agente se haga titular de este contrato se deberá pagar un costo de adquisición. Hay dos tipos básicos de opciones: *call* y *put*. Una opción *call* le da al titular el derecho a comprar un activo determinado a una fecha determinada. Una opción *put* le da al titular el derecho de vender un activo determinado en una fecha determinada. El precio en que se realice la compra o venta del activo que esté estipulado en el contrato es conocido como precio de ejercicio E y la fecha del contrato se conoce como la fecha de vencimiento o de madurez T . Una opción americana puede ser ejercida en cualquier momento hasta la fecha de vencimiento, por otro lado, las opciones europeas pueden ser ejercidas sólo en la fecha de vencimiento. Las opciones se negocian tanto en los mercados formales como informales. Si el precio del activo es mayor que el precio del contrato *call* ($S(T) > E$) la opción será ejercida, pues el titular obtendrá una ganancia equivalente a $G = S(T) - E$. En el instante T el titular de la opción compra una acción al precio de ejercicio E y la puede vender inmediatamente al precio del mercado $S(T)$, con lo que obtendrá una ganancia de $S(T) - E$. Considerando que los agentes son racionales, no se ejerce la opción cuando $S(T) < E$ porque no se produce ningún beneficio al titular, es decir, $G = 0$.

$$G = \max \{S(T) - E, 0\} \tag{1}$$

Por otro lado, la función de pago de un contrato *put* es análogo al *call*. En el instante T el titular de la opción vende una acción al precio de ejercicio E y la puede comprar inmediatamente al precio del mercado $S(T)$, con lo que obtiene

una ganancia de $E - S(T)$. No se ejerce la opción cuando $E < S(T)$ porque no se produce ningún beneficio al titular, es decir, $G = 0$.

Otro concepto financiero importante de explicar es la relación entre el precio actual y el precio futuro que está dado por

$$V(0) = V(T)F_{des} \quad (2)$$

Donde $V(0)$ es el precio actual, $V(T)$ es el precio en un tiempo T y F_{des} es un factor de descuento. Este concepto está intrínsecamente ligado a la existencia de la tasa de interés libre de riesgo, al ser dependiente al interés que se aplica a un activo. Por ejemplo, si tiene capitalización anual $F_{des} = \frac{1}{1+r}$. Si se tiene un capital C y lo invierte en un bono de tasa r con capitalización anual (es decir, los intereses se pagan anualmente), entonces al cabo de un año se tendrá $C(1 + rT)$. Si la capitalización es semestral, al cabo de seis meses se tendrá $C(1 + \frac{rT}{2})$ y seis meses más tarde, como se capitaliza respecto al total, $C(1 + \frac{rT}{2})(1 + \frac{rT}{2})$, es decir $C(1 + \frac{rT}{2})^2$. Si se capitalizara continuamente entonces se tendría

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nT} = Ce^{rT} \quad (3)$$

donde e^{-rT} es la fórmula de interés compuesto continuo. Por lo tanto en el caso de capitalización continua $F_{des} = e^{-rT}$. Esto quiere decir que para nuestro caso $V(0) = V(T)e^{-rT}$ es equivalente a la relación de precio actual y futuros.

Por ejemplo, si $r = 0.08$, es decir la tasa de interés libre de riesgo es un 8% anual, y se sabe que en 2 años se tendrán \$100, el precio de esos \$100 hoy será:

$$V(0) = 100e^{-\frac{8}{100} \cdot 2} \quad (4)$$

obteniendo \$85.21, lo que es equivalente a \$100 en dos años.

Ahora se introducen los conceptos físicos matemáticos relativos al modelo de Black-Scholes.

El primer concepto a analizar es el movimiento browniano geométrico. Para explicar esto se considera $X(t)$ como la trayectoria de una partícula que está sometida a choques con moléculas (por ejemplo, dentro de un fluido); el desplazamiento de esta partícula, en un intervalo de tiempo Δt de longitud se mide mediante $X(t + \Delta t) - X(t)$, luego este desplazamiento, aparte de deberse a la velocidad de la partícula en ese momento, se agrega a otro que puede ser proporcional a un desplazamiento debido a interacciones aleatorias, denotado por $\Delta W(t) = W(t + \Delta t) - W(t)$. Supongamos que $X(t + \Delta t) - X(t)$ se le asocia una velocidad, es decir $\mu(X, t)$, para un tiempo t en una posición X , se tiene que

$$X(t + \Delta t) - X(t) = \mu(X, t)\Delta t + \sigma(X, t)\Delta W, \quad (5)$$

donde $\sigma(X, t)$ es el factor de proporción que eventualmente puede depender del tiempo t y la posición X . De (5) se desprende que el desplazamiento se explica por una parte determinista asociada al primer término de la expresión y por una parte aleatoria indicada por el segundo término.

Se puede observar que $\Delta W(t) = W(t + \Delta t) - W(t)$ obedece las leyes de alguna probabilidad se obtiene que $X(t + \Delta t) - X(t)$, y por ende $X(t)$, es una variable aleatoria. Si $X(t)$ una variable aleatoria, entonces existe una posible trayectoria, conforme a la ley de probabilidad que la rige, que se denota por $X(t, \omega)$, donde ω es el resultado obtenido del espacio de probabilidad en que se sustenta la variable $X(t)$ [14]. Ahora para modelar un movimiento browniano geométrico unidimensional se supone que $\{W_t; t \geq 0\}$ es una colección de variables aleatorias, diremos que este proceso es un movimiento Browniano si tiene las siguientes propiedades:

- (i) para $0 \leq s < t < \infty$ W_t es una variable aleatoria distribuida como una gaussiana con media 0 y varianza $t - s$.

(ii) para $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty, \{W_{t_0}; W_{t_k} - W_{t_{k-1}}, k = 1 \dots n\}$ es un conjunto de variables aleatorias independientes.

Cabe recordar que una variable aleatoria X se distribuye de como una normal con media μ y varianza σ ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$), si la ley de probabilidad es

$$Pr \{X \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy, \quad (6)$$

de manera que la propiedad (i) nos dice que para $0 < s < t$

$$Pr \{W_t - W_s \leq a\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx, \quad (7)$$

y la propiedad (ii) nos dice que para $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$ se tiene que

$$\begin{aligned} & Pr \{W_{t_1} - W_{t_0} \leq a_1, W_{t_2} - W_{t_1} \leq a_2, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \leq a_n\} = \\ & Pr \{W_{t_1} - W_{t_0} \leq a_1\} Pr \{W_{t_2} - W_{t_1} \leq a_2\}, \dots, Pr \{W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \leq a_n\}. \end{aligned}$$

Sea $0 < t_1 < t_2 \dots < t_n$, se crea una posible trayectoria para cada valor de t_i , esto es $W(0), W(t_1), W(t_2) \dots W(t_n)$. Suponiendo que $W_0 = 0$, por hipótesis se busca obtener $W(t_1)$, para esto se acude a la variable aleatoria $W(t_1) - W(0) = W(t_1)$, donde se sabe que un posible valor para este incremento sigue una distribución gaussiana $N(0, t_1)$. Luego, según esta distribución, generamos un valor aleatorio y así obtenemos un valor para $W(t_1)$. Para generar el valor de W_{t_2} , se acude al incremento $W(t_2) - W(t_1)$ considerando que ya se sabe el valor de $W(1)$. Sea $W(1) = w_1$ que se obtiene mediante la generación de un número aleatorio según una distribución $N(0, t_2 - t_1)$, sea este número k_2 , esto es $W(t_2) - W(t_1) = k_2$, de modo que $W(t_2) = k_2 + W(t_1) = k_2 + w_1$, y así se continua con el proceso. De modo que para generar una posible trayectoria de este movimiento browniano, se genera en forma independiente (garantizado por la propiedad (ii)) incrementos

$B(1) = W(t_1), B(2) = W(t_2) - W(t_1), \dots$, y se calcula la trayectoria mediante

$$\begin{aligned} W(0) &= 0 \\ W(t_1) &= B(1) \\ W(t_2) &= B(2) + B(1) \\ &\vdots \\ W(t_n) &= B(n) + B(n-1) + \dots + B(1). \end{aligned}$$

No hay que olvidar que cada $B(i)$ se ha obtenido de una distribución $N(0, t_i - t_{i-1})$, para nuestro caso se considera que la diferencia entre los tiempos $(t_i - t_{i-1})$ es constante, vale decir $\Delta t = t_i - t_{i-1}, \forall i$, de modo que se genera mediante una distribución $N(0, \Delta t), \forall i$. Con lo cual, se describe el movimiento de una partícula suspendida en un fluido, y que estaba influenciado por dos fuerzas. La primera, corresponde a un movimiento no aleatorio (determinístico) generado por la naturaleza subyacente del flujo del fluido o inducida por alguna fuerza externa impuesta sobre el sistema. La segunda, colisiones y/o relaciones de interacciones con otras partículas originan movimientos aleatorios que actúan en tiempos de corta duración, y que a menudo se describen correctamente por las fluctuaciones de un movimiento browniano, de manera que, para un periodo de tiempo desde t hasta $t + \Delta t$, el desplazamiento de la partícula se aproxima por

$$X(t + \Delta t) - X(t) \approx \mu(x, t)\Delta t + \sigma(x, t)\Delta W, \quad (8)$$

donde $X(t) = X(t, w) = x$ es la localización de la partícula en el tiempo t . Aquí $\mu(x, t)$ es la velocidad instantánea del fluido en el tiempo t y en la posición x mientras que el cambio incremental asociado a un movimiento browniano, $W(t)$, está representado por $\Delta W(t) = W(t + h) - W(t)$, y $t_i - t_{i-1}$ mide la varianza instantánea asociada con las colisiones del proceso $X(t)$.

Ahora bien, la ecuación (8) se puede escribir en notación de diferenciales, esto es

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dW(t), \quad (9)$$

y esta es una ecuación diferencial estocástica. Si obviamos la palabra “estocástica”, que se debe a la diferencial dW , estamos tentados a integrar en el sentido clásico de Riemann-Stieltjes, a fin de obtener alguna “solución” para $X(t)$, esto es

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(X(z), z)dz + \int_0^t \sigma(X(z), z)dW(z), \quad (10)$$

sin embargo, la segunda integral que diremos integral estocástica no puede recibir el tratamiento clásico, entonces la integral estocástica $\int \sigma(X(t), t)dW(t)$ deberá tener un tratamiento especial. Existen dos versiones para el tratamiento de esta integral, digamos entonces que hay dos tipos de integrales estocásticas: la integral de Itô, y la integral de Stratonovich. Si consideramos que $X(t)$ sigue un proceso estocástico visto anteriormente y consideramos una función determinista f , que sea continua y diferenciable, entonces $f(X(t)) = f(X)$ es también un proceso estocástico y puede estar dado por:

$$df(X) = f_x dx_t + \frac{1}{2} f_{xx} (dX)^2 + \frac{1}{3!} f_{xxx} (dx)^3 + \dots \quad (11)$$

Al cual se lo llama proceso de Itô.

Con las ecuaciones (9) y (11) podemos construir el modelo Black-Scholes, utilizado para dar precios teóricos a las opciones *call* y *put* europeas sobre activos que no pagan dividendos. Se asume que el precio del activo subyacente sigue un proceso aleatorio y usando métodos estocásticos de cálculo, el precio de la opción se puede ser calcular.

Si bien es cierto, la ecuación (9) se obtiene teniendo en cuenta consideraciones de la Física, veremos como el precio de los activos se comporta como una partículas que sufre fluctuaciones aleatorias debidos a interacciones que se pueden describir

mediante este método. El modelo Black Scholes puede ser demostrada rigurosamente sólo si existen ciertas hipótesis establecidas. Las hipótesis del modelo, según Hull [2], son las siguientes:

- Los precios de los activos obedecen a una distribución *log-normal* y la dinámica del precio es descrita por un movimiento browniano geométrico.
- La volatilidad se conoce de antemano y es constante.
- El activo no paga dividendos.
- El tipo de interés se conoce de antemano y es constante.
- La opción se puede ejercer sólo en la fecha de vencimiento, no después.
- El mercado no tiene fricciones: Las transacciones no están sujetas a ninguna tasa impositiva, no generan costos de transacción y pueden realizarse sin ninguna limitación.
- No hay posibilidad de arbitraje. La ausencia de arbitraje significa que todos los portafolios libres de riesgo deben tener el mismo retorno.

Black y Scholes demostraron que, bajo estas condiciones, se puede replicar el precio de una opción europea *call* en T , comprando un portafolio de activos y bonos libres de riesgo en t , y transando este portafolio hasta T .

El retorno que consideramos en los precios de activos es

$$R = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \Rightarrow R = \frac{dS}{S}, \quad (12)$$

con el cual se considera que el precio de un activo S sigue una distribución *log-normal*, podemos decir que

$$S = S_0 e^{X(T)} \Rightarrow \log\left(\frac{S}{S_0}\right) = X(t) \quad (13)$$

con

$$dX = \mu dt + \sigma dW \quad (14)$$

combinando las ecuaciones (13) y (14) podemos obtener

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW, \quad dW = \epsilon \sqrt{t}, \quad \epsilon \sim N(0, 1) \quad (15)$$

donde μ es la medida del cambio del crecimiento promedio del activo(drift), σ es la volatilidad y ϵ es una variable aleatoria que sigue una distribución gaussiana de media 0 y desviación estándar 1. Sea entonces $dV = V(S + ds, t + dt) - V(S, t)$, donde $V(S, t)$ es el precio de la opción en función de S , por el lema de Itô dV se expresa como:

$$dV = V_t dt + V_S dS + \frac{1}{2} V_{SS} dS^2 + \dots, \quad (16)$$

donde los términos asociados a dt con orden mayor a 1 se descartan, ya que no describen el comportamiento del activo V . Por lo tanto al reemplazar (15) en (16), dV queda como:

$$dV = \left(V_t + \mu S V_S + \frac{\sigma^2}{2} S^2 V_{SS} \right) dt + \sigma S V_S dW. \quad (17)$$

Proponiendo un portafolio Π libre de riesgo, es decir

$$\Pi = \Delta S - V \Rightarrow d\Pi = \Delta dS - dV, \quad (18)$$

se obtiene

$$d\Pi = - \left(V_t + \frac{\sigma^2}{2} S^2 V_{SS} \right) dt, \quad (19)$$

Además, por la hipótesis de no arbitraje, donde Π es un portafolio libre de riesgo donde su retorno es r .

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = r dt \Rightarrow d\Pi = r \Pi dt \quad (20)$$

igualando (19) con (20), obtenemos:

$$r \Pi dt = - \left(V_t + \frac{\sigma^2}{2} S^2 V_{SS} \right) dt, \quad (21)$$

simplificando dt y reemplazando $\Pi = \Delta S - V = V_S S - V$ y arreglando la ecuación (21), se obtiene

$$V_t + \frac{\sigma^2}{2} S^2 V_{SS} + r S V_S - r V = 0, \quad (22)$$

que recibe el nombre de ecuación de Black-Scholes. En el apéndice A se muestra la solución tradicional de (22) y en el apéndice B, proponemos una solución alternativa.

Dicho lo anterior es posible darse cuenta de la complejidad de los conceptos matemáticos utilizados, y los los agentes de mercados bursátiles ocupaban este modelo sin entender sus debilidades (sólo interesaban las predicciones); esto hizo considerar al modelo de Black-Scholes como una de las causas de las crisis financieras [2], y por lo tanto se ha vuelto uno de los modelos más estudiados en las últimas décadas buscando su perfeccionamiento, en base a la modificación de sus hipótesis, que permitan mejorar su rol predictivo.

El objetivo de este trabajo es considerar un modelo del tipo Black-Scholes con términos no lineales, a partir de la modificación de dos hipótesis, sugerida en el trabajo de Borland [12]. Se propone considerar datos empíricos para construir un modelo realístico que tome en cuenta las distribuciones históricas recientes de retornos, y realizar una comparación con el modelo lineal de Black-Scholes y discusión de los resultados obtenidos.

Para demostrar que los retornos no siguen una distribución gaussiana, primero realizamos un test de gaussianidad. Se ha determinado que estos no cumplen esta hipótesis establecida por Black-Scholes. Luego, se busca establecer por medio de un parámetro la desviación de la gaussianidad. Con estas distribuciones se busca construir una ecuación que modele el comportamiento de los retornos, para luego usarla en la construcción de un modelo de Black-Scholes con términos no lineales

donde la hipótesis de la volatilidad constante es modificada.

Para obtener las soluciones de los modelos se usa el metodología de Crank-Nicolson y se realizan variaciones del parámetro σ . Se realiza un análisis comparativo entre los resultados dados por el modelo de Black-Scholes y el que proponemos, modelo no lineal. Se discutirá las diferencias en el incremento de la variación de precios de opciones respecto al activo subyacente. Además, se hacen estudios de diferencias relativas entre ambos modelos donde se ven diferencias sustanciales asociadas al incremento del precio del activo subyacente.

Podemos agregar que la econofísica es un área emergente en los programas de estudio de nuestra universidad. Entonces, entre las aplicaciones del presente estudio, se ha incluido una propuesta en un curso electivo considerando el curriculum de un estudiante de pregrado de la UCN.

El trabajo se organiza de la siguiente forma: El primer capítulo enseña la propuesta y las herramientas necesarias para el estudio de este tema. El segundo capítulo muestra los resultados obtenidos y discusión del tema. En el tercer capítulo se presenta un propuesta de un curso de Tópicos de la ecónofísica y la motivación de este. Finalmente se enfatizan conclusiones del trabajo y posibles líneas de acción futuras sobre lo realizado.

Capítulo 1

Ecuación de Black-Scholes con términos no lineales

1.1. Propuesta

El modelo de Black-Scholes considera que el precio de un activo se describe como (15)

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW, \quad dW = \epsilon \sqrt{dt}.$$

Donde S representa el activo en cuestión, μ es la media de la distribución de los retornos, σ es la varianza (volatilidad en nuestro caso) del activo, y W como un proceso de Wiener en donde $\epsilon \sim N(0, 1)$ es una variable aleatoria que sigue una distribución gaussiana. Vamos a modificar dos hipótesis del modelo de Black-Scholes, sugeridas por Hull [2] y descritas en la introducción de esta tesis.

- El precio del activo subyacente no se distribuye como una distribución *log-normal* y la dinámica del precio es descrita por un movimiento browniano geométrico modificado.
- La volatilidad no es constante.

Podemos indicar que una de las hipótesis del modelo de Black-Scholes es que la distribución de los retornos, para índices bursátiles que contengan una cantidad significativa de información, sigue una distribución gaussiana. Sin embargo, los datos empíricos muestran que las distribuciones de los retornos no son estrictamente gaussianas. Se han considerado cuatro de los índices bursátiles más importantes: S& P 500, IBEX 35, Eurostoxx 50 y Nikkei 225. Si describimos lo obtenido en los

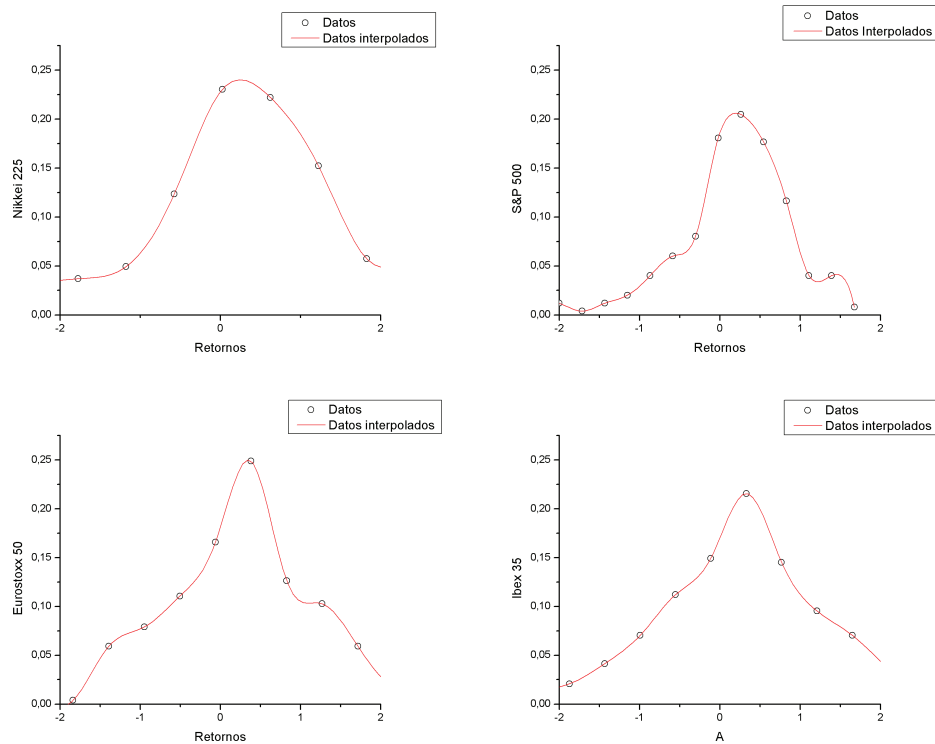


Figura 1.1: Se muestra la distribución de retornos normalizados al cierre de entre el 10 de Noviembre de 2013 y 10 de Noviembre de 2014.

gráficos, observamos que la cola de la distribución cae de manera diferente a una gaussiana, con lo cual podemos argumentar que el proceso difusivo es anómalo entre los retornos de los mercados analizados. Es por esto que se propone una nueva

ecuación que describe la distribución de los retornos, dado por

$$dS = \mu S dt + \sigma S d\Omega, \quad d\Omega = F(S)^{\frac{\nu}{2}} dW, \quad (1.1)$$

donde $F(S)$ es una función que multiplica a la variable asociada al proceso estocástico que nos indica la distribución los retornos [13], la cual es construida por medio del método de interpolación, a partir de los datos empíricos normalizados de índices bursátiles considerados en este trabajo, el cual perturba al valor de la variable aleatoria del proceso de Wiener, asociado al proceso gaussiano. Cabe señalar que la distribución obtenida estará asociada a un proceso difusivo anómalo a determinar. También hay que señalar que ν es considerado un parámetro asociado a la gaussianidad de la distribución $F(S)$ el cual es determinado por medio del momento de cuarto orden. Si la distribución $F(S)$ es gaussiana obtendríamos $\nu = 0$, como contraparte, si $F(S)$ se desvía de la gaussiana el parámetro $\nu \neq 0$ se constituye en una medida que indica dicha desviación. Este parámetro es explicado en la subsección 1.2.2. Si ahora consideramos $V(S, t)$ como una función que describirá el comportamiento de un activo en función de nuestro activo S , podemos decir que el diferencial de $V(S, t)$ (en adelante V) por el lema de Itô es

$$dV = V_t dt + V_S dS + \frac{1}{2} V_{SS} dS^2 + \dots \quad (1.2)$$

En donde los términos de orden superior a dt son descartados ya que no describen el problema.

Reemplazando (1.1) en (1.2) y nuevamente descartando los términos de orden superior a dt , además de considerar que la varianza $var(\epsilon^2 dt)$ y $var(\epsilon dt)$ tienden a dt y $d\Omega$ respectivamente

$$dV = \left(V_t + \mu S V_S + \frac{\sigma^2}{2} S^2 V_{SS} F(S)^\nu \right) dt + \sigma S V_S F(S)^{\frac{\nu}{2}} d\Omega. \quad (1.3)$$

Ahora se considera la condición en que se tiene un portafolio Π libre de riesgo donde exista un Δ de activos y una opción V

$$\Pi = \Delta S - V \rightarrow d\Pi = \Delta dS - dV, \quad (1.4)$$

donde al hacer Δ infinitesimal se considera

$$\Pi = V_s S - V \rightarrow d\Pi = V_s dS - dV, \quad (1.5)$$

y teniendo en cuenta que $d\Pi = r\Pi dt$. Al hacer esta igualdad obtenemos

$$V_t + \frac{\bar{\sigma}^2}{2} S^2 V_{SS} + r S V_s - r V = 0, \quad \bar{\sigma}^2 = \sigma^2 F(S)^\nu \quad (1.6)$$

La cual es una ecuación de Black-Scholes no lineal donde la volatilidad no es constante si $\nu \neq 0$.

1.2. Herramientas para el análisis numérico

1.2.1. Prueba de Kolmogorov-Smirnov

En estadística, la prueba de Kolmogórov-Smirnov se utiliza para decidir si dos distribuciones de probabilidad se ajustan entre sí.

Una característica atractiva de esta prueba es que la distribución de la propia estadística de prueba no depende de la función de distribución acumulativa subyacente que se está probando. Si se compara con una gaussiana y si los ajustes se cuantifican dentro de un rango se considera gaussiana, si cae fuera del rango se considera no gaussiana, considerando lo anterior, el valor que se emplea como criterio elegido para el estadístico de prueba como 0.05, ya que es un valor definido y aceptado por convención [23].

Para mayor profundidad se puede consultar el apoyo bibliográfico [23].

1.2.2. Medida de la desviación: Expansión en término de los momentos

Para definir los cumulantes de una cantidad x estas pueden ser obtenidas desde una expansión de la forma

$$\langle e^x \rangle = 1 + \langle x \rangle + \frac{1}{2} \langle x^2 \rangle + \frac{1}{6} \langle x^3 \rangle + \frac{1}{24} \langle x^4 \rangle + \dots, \quad (1.7)$$

donde el símbolo $\langle \bullet \rangle$ denota el promedio. Si conservamos los términos hasta el cuarto orden, el logaritmo de esta expansión puede ser escrito cómo:

$$\log \langle e^x \rangle = 1 + \frac{1}{2} Q_2 + \frac{1}{6} Q_3 + \frac{1}{24} Q_4 + \dots, \quad (1.8)$$

de donde se pueden definir los cumulantes Q_2 , Q_3 y Q_4 están dados por

$$\begin{aligned} Q_2 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \\ Q_3 &= \langle x^3 \rangle - 3\langle x \rangle \langle x^2 \rangle + 2\langle x \rangle^3, \\ Q_4 &= \langle x^4 \rangle - 3\langle x^2 \rangle^2 - 4\langle x \rangle \langle x^3 \rangle + 12\langle x \rangle^2 \langle x^2 \rangle - 6\langle x \rangle^4. \end{aligned}$$

Estos cumulantes pueden ser escritos de manera más compacta

$$\begin{aligned} Q_2 &= \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle, \\ Q_3 &= \langle (x - \langle x \rangle)^3 \rangle, \\ Q_4 &= \langle (x - \langle x \rangle)^4 \rangle - 3\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle^2. \end{aligned}$$

donde el cumulante de cuarto orden Q_4 es nulo si la distribución es gaussiana y puede expresarse de la siguiente manera

$$\nu = 1 - \frac{\langle (x - \langle x \rangle)^4 \rangle}{3\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle^2}. \quad (1.9)$$

Esta función es muy conocida en contextos como el ferromagnetismo y aplicada a variados problemas de física u otros relacionados. También se conoce como cumulante de Binder [24, 25]. Cualquier distribución que no sea gaussiana debe tener un

cumulante de cuarto orden $\nu \neq 0$. Por lo tanto podemos considerar al cumulante de cuarto orden como un parámetro que determina la desviación de la gaussianidad de una distribución.

1.2.3. Esquema de diferencias finitas

Ahora describiremos la metodología que usamos para resolver la ecuación no lineal de Black-Scholes (1.6). El esquema de diferencias finitas es una herramienta utilizada principalmente en el desarrollo de ecuaciones diferenciales que no tienen desarrollo analítico. Su amplio uso se debe a la claridad conceptual y a su facilidad de programación, ya que las ecuaciones diferenciales son discretizadas directamente.

En términos generales podemos decir que al usar este esquema necesitamos de 3 cosas: Seleccionar un esquema apropiado de diferencias finitas. Para nuestro caso, debemos discretizar las ecuaciones y resolver. Las variables consideradas en la ecuación, se establecen en una “red”, donde los nodos de esta red estarán condicionados por las variables independientes (sean espaciales y/o temporales) como dependientes de la ecuación.

Estos esquemas los podemos separar entre formas explícitas e implícitas, y esas divisiones dependen de cómo se considera la dependencia temporal. Los métodos explícitos están basados en esquemas en que las incógnitas en cada nodo se expresan explícitamente en función de valores conocidos en un paso de tiempo anterior. Por otra parte, los métodos implícitos requieren la solución de un sistema de ecuaciones simultáneas que contienen las variables dependientes en varios nodos evaluadas en un nuevo intervalo de tiempo. Al aplicar el esquema seleccionado, suele obtenerse un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales, en el cual

los coeficientes dependen de las incógnitas.

1.2.4. Método de Crank-Nicolson

Este método es la aplicación del esquema de diferencias finitas de forma implícita para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales, ampliamente utilizado en la resolución de ecuaciones de difusión. Consiste en obtener el valor de la función del problema en el instante posterior a partir de las condiciones del mismo. La ecuación de Black-Scholes para la estimación de precios de opciones se presenta de la siguiente manera

$$V_t + \frac{\sigma^2 F(S)^\nu}{2} S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0, S \in [0, \infty) \wedge t \in [0, T], \quad (1.10)$$

donde σ y r representan la volatilidad y la tasa libre de riesgo respectivamente. Para el caso de una opción de compra (*Call*) se utilizan las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} V(S, 0) &= \max(S - E, 0), \\ V(0, t) &= 0, \\ V(S, T) &= S - Ee^{-rT}, S \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Haciendo los ajustes correspondientes es posible llegar a la ecuación

$$V_t + \frac{\bar{\sigma}^2(S)}{2} S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0, \quad (1.11)$$

donde $\bar{\sigma}^2(S) = \sigma^2 F(S)^\nu$.

Para resolver numéricamente (1.6) se puede utilizar el esquema de diferencias finitas, es por esto que se discretiza $S \in (0, \infty)$ a $S_i \in [0, R]$, al hacer $S_i = ih$ donde $i \in [0, N]$ y h es la separación espacial, con $R = iN$. En cuanto a la dimensión temporal se pasa de $t \in (0, T)$ a $j \in [0, M]$, haciendo $t_j = jk$ con k como la separación en la dimensión temporal $\bar{T} = kM$, con lo cual pasamos de una función

$V(S, t)$ a $V(S_i, t_j) \approx V_i^j$ y las condiciones del problema pasan a ser

$$\begin{aligned} V_i^M &= \max(S - E, 0), \\ V_0^j &= 0, i = 0, \\ V_N^j &= S - Ee^{-kj}, i = N. \end{aligned}$$

Se usa una notación de V_i^j , respecto a la derivación de $V(S_i, t_j)$ en su dimensión espacial: Diferencia posterior:

$$V_S = \frac{V(S + h, t) - V(S, t)}{h} = D_h^+ V_i^j.$$

Diferencia anterior:

$$V_S = \frac{V(S, t) - V(S - h, t)}{h} = D_h^- V_i^j.$$

Diferencia central:

$$V_S = \frac{V(S + h, t) - V(S - h, t)}{h} = D_h^0 V_i^j.$$

Segunda derivada:

$$V_{SS} = \frac{V(S + h, t) - 2V(x, t) + V(x - h, t)}{h^2} = D_h^2 V_i^j.$$

Para el método de Crank-Nicholson, la ecuación queda

$$D_k^+ V_i^j + \frac{\sigma^2 F(i)^\nu}{2} i^2 h^2 (D_h^2 V_i^{j+1} + D_h^2 V_i^j) + rih (D_h^0 V_i^{j+1} + D_h^0 V_i^j) - \frac{r}{2} (V_i^{j+1} + V_i^j) = 0,$$

lo que es equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{V_i^{j+1} - V_i^j}{k} + \frac{\sigma^2 F(i)^\nu}{2} i^2 h^2 \left(\frac{V_{i+1}^{j+1} - 2V_i^{j+1} - V_{i-1}^{j+1}}{2h^2} + \frac{V_{i+1}^j - 2V_i^j - V_{i-1}^j}{2h^2} \right) \\ + rih \left(\frac{V_{i+1}^{j+1} - V_{i-1}^{j+1}}{h} + \frac{V_{i+1}^j - V_{i-1}^j}{h} \right) - \frac{r}{2} (V_i^{j+1} + V_i^j) = 0. \end{aligned}$$

Al hacer los pasos correspondientes es posible llegar a la igualdad

$$\gamma_i V_{i+1}^{j+1} + (\beta_i + 1) V_i^{j+1} + \alpha_i V_{i-1}^{j+1} = \alpha_i V_{i+1}^j + (\beta_i - 1) V_i^j + \gamma_i V_{i-1}^j, \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{k}{4} (\sigma^2 F(i)^\nu i^2 - rj) \\ \beta_i &= -\frac{k}{2} (\sigma^2 F(i)^\nu i^2 + r) \\ \gamma_i &= \frac{k}{4} (\sigma^2 F(i)^\nu i^2 + rj).\end{aligned}$$

La igualdad (1.12) puede ser escrita de forma matricial de la forma

$$AV^{j+1} = BV^j + c \quad (1.13)$$

donde

$$V^j = [V_0^j, \dots, V_{N-1}^j]^\top \in \mathbb{R}^{N-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} (\beta_1 - 1) & -\gamma_1 & \cdots & 0 & 0 \\ -\alpha_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -\gamma_{N-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{N-1} & (\beta_{N-1} - 1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$$

$$B = \begin{bmatrix} (\beta_1 + 1) & \gamma_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \gamma_{N-2} \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{N-1} & (\beta_{N-1} + 1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$$

$$c = [\alpha_1(V_0^j - V_0^{j+1}), 0, \dots, 0, \gamma_{N-1}^j(V_N^j - V_N^{j+1})]^\top \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

Se puede observar que las matrices A_i y B_i son tridiagonales. Una de las observaciones que se deben tener en cuenta a la hora de desarrollar el método numérico es delimitar la función asociada a la volatilidad. Para nuestro caso se asocia esta, a la cantidad de puntos interpolados.

Capítulo 2

Discusión de resultados

En el presente capítulo se muestran los resultados obtenidos. Se muestra lo que resulta del test de gaussianidad y los valores del parámetro de desviación de gaussianidad, además, por medio de figuras se muestra las comparaciones entre los modelos de Black-Scholes y el modelo no lineal propuesto.

2.1. Test de gaussianidad de Kolmogorov-Smirnov

Primero se hace el test de gaussianidad usando el método de Kolmogorov-Smirnov en el cuadro 2.1 se muestra los valores de los 4 índices bursátiles que fueron estudiados y usados para la construcción del modelo no lineal de Black-Scholes. Los valores de los retornos fueron tomados en un intervalo de un año entre el 10 de Noviembre de 2013 y el 10 de Noviembre de 2014.

Índice	Datos	Est.Prueba	Probabilidad
SP 500	251	0.07605	0.10718
Eurostoxx 50	255	0.0619	0.27899
Ibex 35	243	0.05652	0.41809
Nikkei 225	244	0.07127	0.16436

Cuadro 2.1: Se muestran el cuadros de datos obtenidos sobre el test de gaussianidad de Kolmogorov-Smirnov. Los valores para cada estadístico de prueba son mayores 0.05 en la tabla lo que nos indica que no pueden ser ajustados a una gaussiana.

Considerando que el criterio utilizado para determinar que las distribuciones se ajustan a una gaussiana es que el estadístico de prueba sea menor a 0.05. Los resultados obtenidos para los casos discutidos nos indican que las distribuciones no pueden ser consideradas gaussianas. Esto nos lleva a resolver una ecuación como la que proponemos en el Capítulo 1.

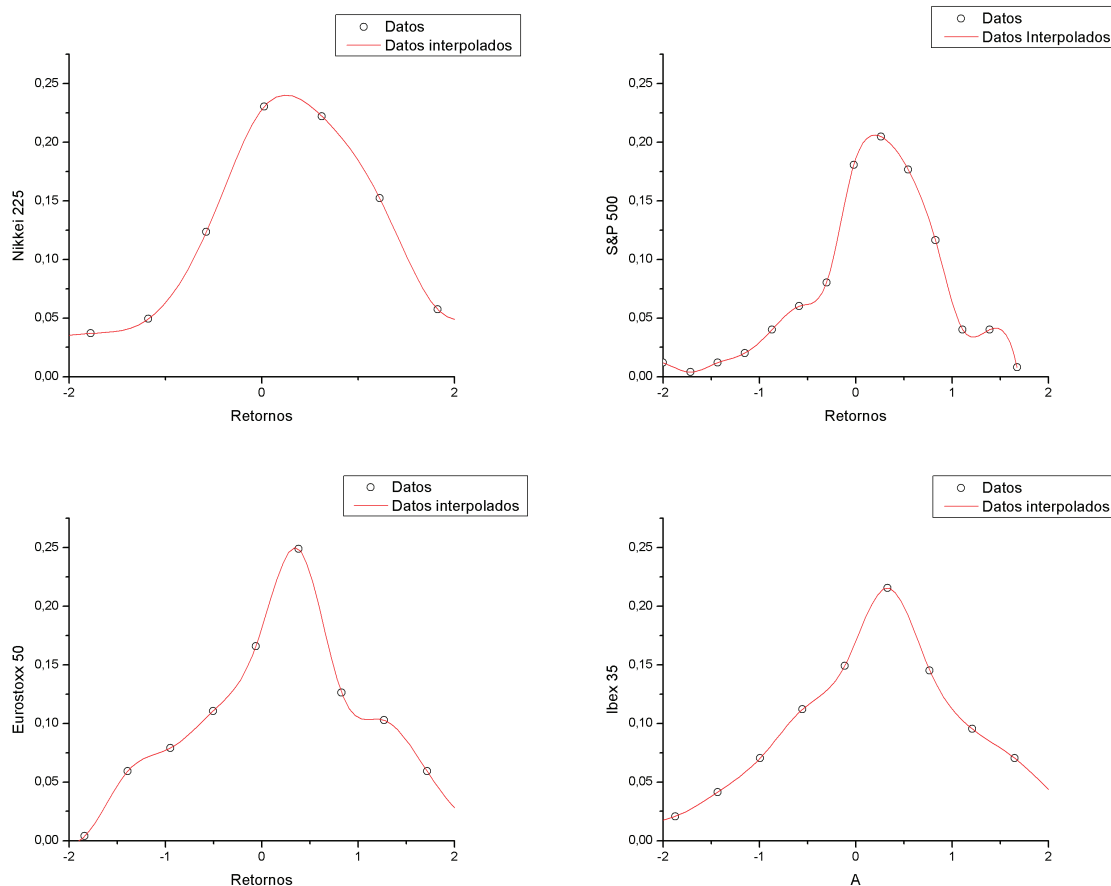


Figura 2.1: Se grafica la distribución de retornos normalizados de los precios de cierre de entre 10 de Noviembre de 2013 y 10 de Noviembre de 2014.

2.2. Estimación del parámetro de desviación de gaussianidad

Luego del test de gaussianidad se procedió a determinar el parámetro que sirve como indicador de la desviación de la distribución.

Índice	Cumulante de 4to orden (ν)
SP 500	0.84341142
Eurostoxx 50	0.84354609
Ibex 35	0.95032973
Nikkei 225	0.94500184

Cuadro 2.2: Se muestra el valor de estimación del cumulante de cuarto orden ν respecto a los distintos índices bursátiles estudiados.

El cumulante de cuarto orden, que es utilizado como parámetro de desviación de gaussianidad de la distribución, nos muestra los valores obtenidos. A partir de los resultado obtenidos en el cuadro 2.2 podemos inferir que las distribuciones de retornos no obedecen a una distribución *log-normal*, además, por medio de la observación en la figura 2.1 se detecta que los retornos en la cola de son lo que más se desvían de un posible ajuste gaussiano, lo que no indica que la distribución de retornos sigue un proceso difusivo anómalo, esto nos dice que los mercados no son eficiente, es decir, los agentes no actúan bajo la misma información. Los agentes actúan en relación a lo conocido del sistema y el sistema se retroalimenta con la información que entregan los agentes económicos produciéndose cambios en la dinámica del mercado de manera continuada.

2.3. Gráficos comparativos para los distintos índices bursátiles

Si se comparan los modelos de Black-Scholes y el modelo no lineal propuesto vemos que la diferencia entre estos está determinada por el término asociado a la volatilidad.

$$\begin{aligned} V_t + \frac{\sigma^2}{2} S^2 V_{SS} + rSV_s - rV &= 0, & \sigma &= cte, \\ V_t + \frac{\bar{\sigma}^2}{2} S^2 V_{SS} + rSV_s - rV &= 0, & \bar{\sigma}^2 &= \sigma^2 F(\Omega)^\nu. \end{aligned}$$

Es por esto que si variamos el término σ podremos hacer una comparación de cómo se ven afectados los precios de opciones en ambos modelos y comparar estos. Se comparan el modelo lineal de Black-Scholes con el modelo no lineal propuesto por medio de gráficos de precio de opción *call* versus precio de activo subyacente S , para los distintos índices bursátiles analizados anteriormente.

Para los gráficos a analizar se considera los casos de opciones tipo *call* con los parámetros $T = 1$, $E = 50$, $r = 0.1$, $S_0 = 0$, $S_N = 100$, $N = 98$, $M = 100$, se realizaran cambios en el parámetro σ que variará entre los valores de 0.2 a 0.5 en intervalos de 0.1.

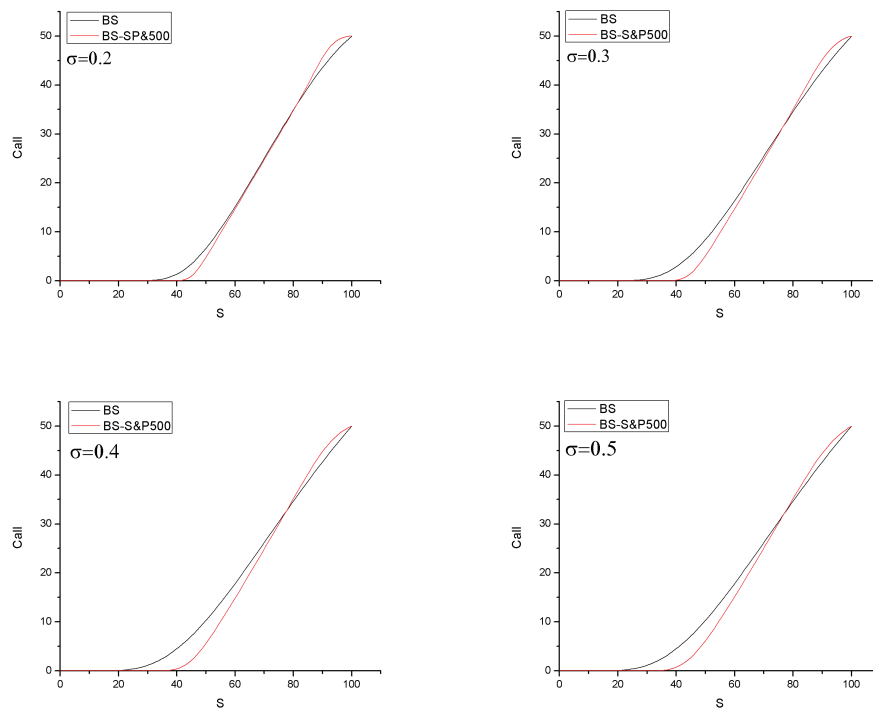


Figura 2.2: Se gráfica el precio de una opción *call* en función del precio de activo subyacente considerando los retornos de S& P 500 $T = 1$, $K = 50$, $r = 0.1$ y $\nu = 0.84341142$.

La figura 2.2 indica que para el caso del precio de una opción *call* utilizando los datos del índice bursátil S& P 500, y considerando las variables $T = 1$ $K = 50$, $r = 0.1$ y $\nu = 0.84341142$. Se obtiene un crecimiento monótono creciente, y que a medida que el valor de la volatilidad se incrementa se incrementa diferencia de precios obtenidos por los modelos lineal y no lineal.

También se puede observar que para el modelo no lineal, el precio de la opción comienza a ser diferente de cero para valores del activo subyacente S mayores respecto al modelo lineal. Sin embargo, podemos observar que una vez que el precio de la opción es distinto de cero el incremento de este valor se mayor para el caso no lineal.

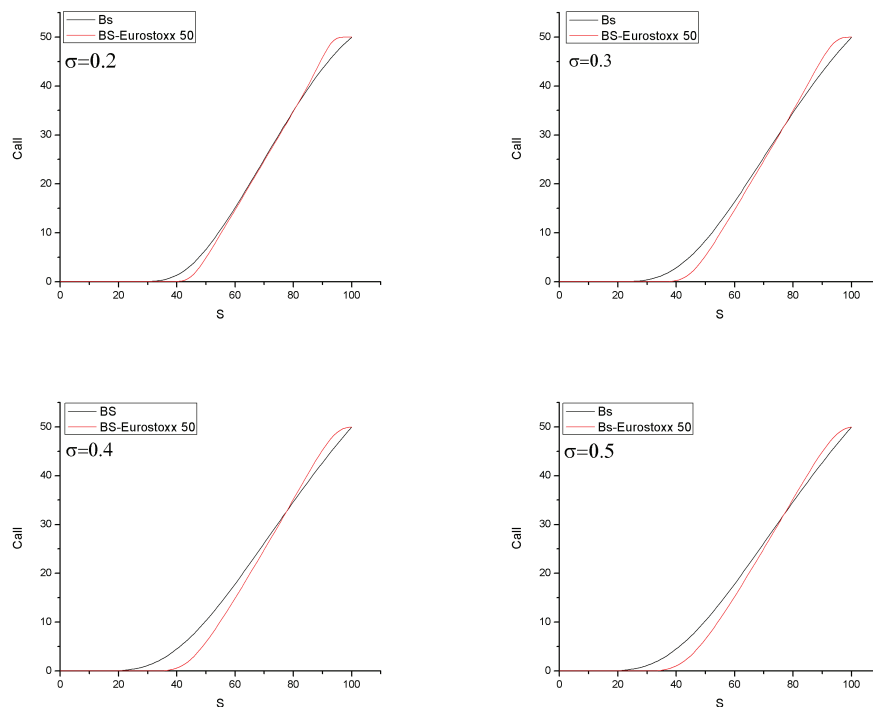


Figura 2.3: Se grafica el precio de la opción *call* en función del precio de activo subyacente considerando los retornos de Eurostoxx 50 $T=1$, $K=50$, $r=0.1$ y $\nu=0.84354609$.

En la figura 2.3 se utilizan los datos del índice bursátil Eurostoxx 50, considerando las variables $T=1$ $K=50$, $r=0.1$ y $\nu=0.84354609$. Se puede observar que para el modelo no lineal, el precio de la opción comienza a ser diferente de cero para valores del activo subyacente S mayores respecto al modelo lineal. Sin embargo, podemos observar que una vez que el precio de la opción es distinto de cero el incremento de este valor se mayor para el caso no lineal. Otra de las cosas que se puede notar es que las curvas dadas para ambos modelos terminan en un mismo punto. Esto se debe a que se usan las mismas condiciones de borde final que se imponen a ambos modelos.

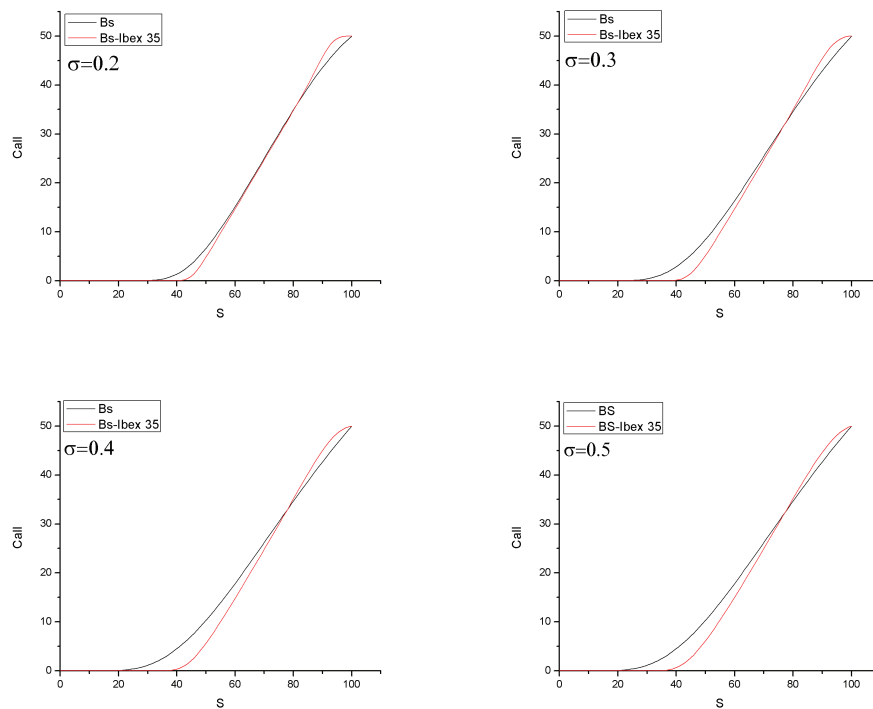


Figura 2.4: Se grafica el precio de la opción *call* en función del precio de activo subyacente considerando los retornos de Ibex 35 $T = 1$, $K = 50$, $r = 0.1$ y $\nu = 0.95032973$.

La figura 2.4 indica que para el caso de una opción *call* utilizando los datos del índice bursátil de Ibex 35, y considerando las variables $T = 1$, $K = 50$, $r = 0.1$ y $\nu = 0.95032973$. Se obtiene un crecimiento monótono creciente, cuando el valor de la volatilidad se incrementa se incrementa diferencia de precios obtenidos por los modelo de Black Scholes y el propuesto.

Además se observa que para el modelo no lineal, el precio de la opción comienza a ser diferente de cero para valores del activo subyacente S mayores respecto al modelo de Black-Scholes. También se puede observar que las curvas dadas para ambos modelos terminan en un mismo punto. Esto es debido a las mismas condiciones de borde impuestas a ambos modelos.

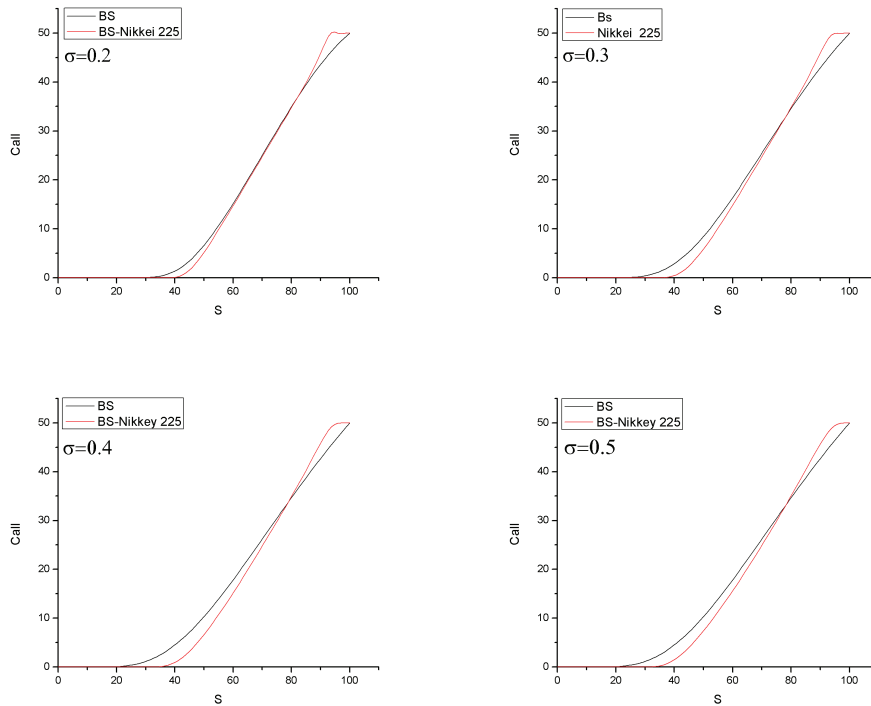


Figura 2.5: Se gráfica el precio de la opción *call* en función del precio de activo subyacente considerando los retornos de Nikkei 225 $T = 1$, $K = 50$, $r = 0.1$ y $\nu = 0.94500184$.

En la figura 2.5 se observa una opción *call* para el índice bursátil Nikkei 225, y considerando $T = 1$, $K = 50$, $r = 0.1$ y $\nu = 0.94500184$. El precio de la opción comienza a ser diferente de cero para precios del activo subyacente S mayores respecto al modelo lineal. A su vez, podemos observar que cuando el precio de la opción es distinto de cero el incremento de este valor se mayor para el modelo propuesto. También podemos notar que las curvas dadas para ambos modelos terminan en un mismo punto. Esto es debido a que se usan las mismas condiciones de borde final que se imponen a ambos modelos.

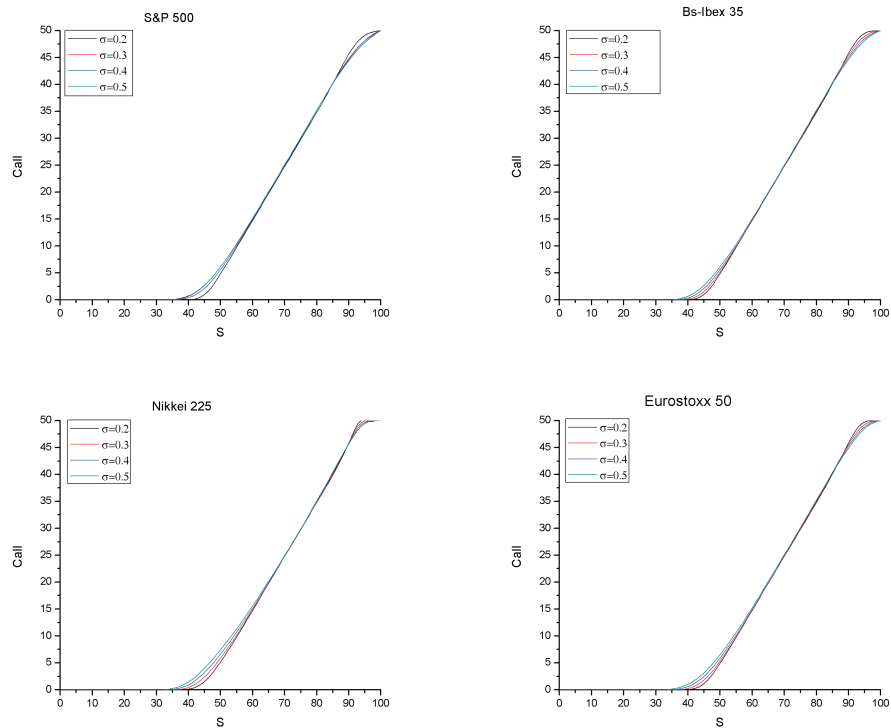


Figura 2.6: Se gráfica la opción *call* en función del precio de activo subyacente de los distintos índices bursátiles estudiados para diferentes σ , considerando $T = 1$, $K = 50$, $r = 0.1$.

De las figuras 2.2, 2.3, 2.4 y 2.5, para distintos valores de σ y considerando $T = 1$, $K = 50$, $r = 0.1$, observamos que el precio del activo subyacente en que la opción comienza a ser distinta de cero varía según el modelo. Respecto al modelo lineal, los precios de las opciones en que el valor es distinto de cero ocurre para valores de S mayores. A medida que el valor de la volatilidad aumenta, la diferencia de este fenómeno respecto al modelo lineal, se incrementa. El incremento del precio de la opción es mayor en el modelo no lineal. Sin embargo, el precio final de los modelo es el mismo, y esto obedece a que las condiciones de borde final impuestas son las mismas para ambos modelos.

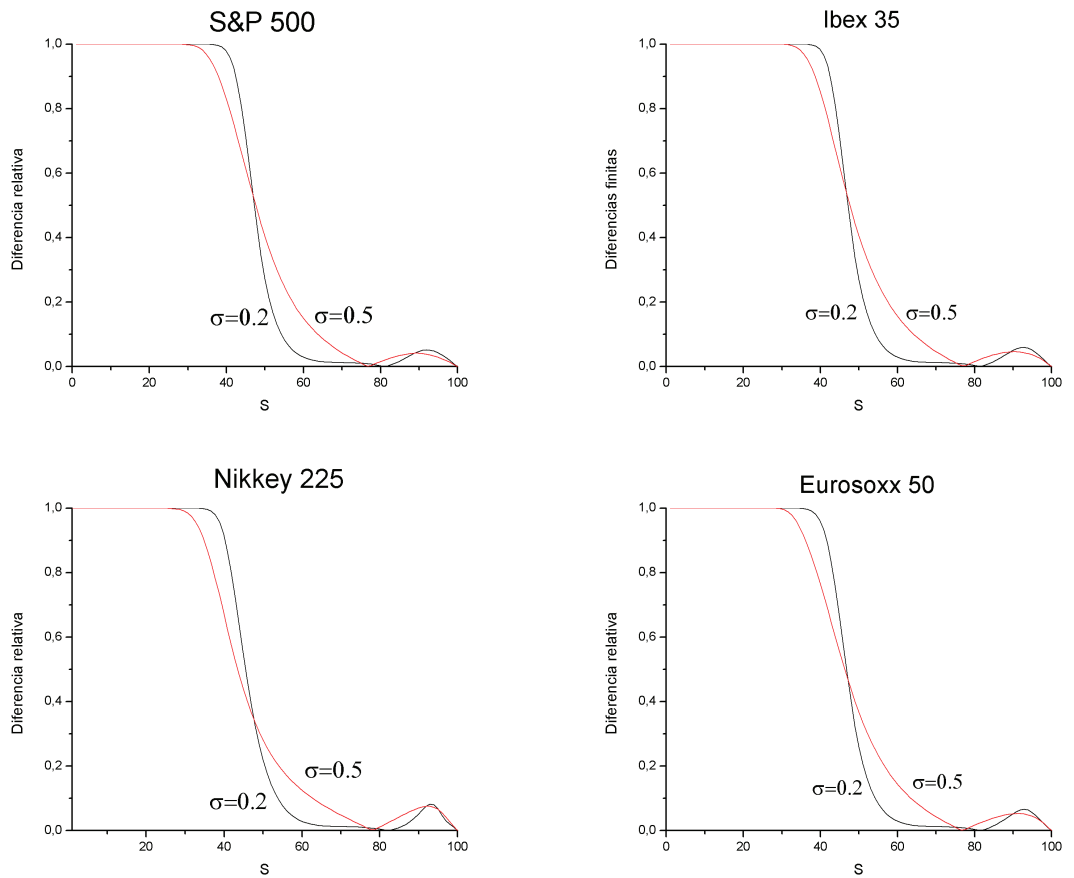


Figura 2.7: Se muestra la tendencia de las diferencias relativas entre el modelo lineal y el modelo no lineal, para diferentes volatilidades, como función del activo subyacente considerando los retornos de Eurostoxx 50 considerando $T = 1$, $K = 50$, $r = 0.1$

En los gráficos de diferencias relativas entre el modelo lineal y el no lineal, la medida es mayor en el punto en llamado en que el activo subyacente está cerca del precio de ejercicio, y comienza a disminuir a medida que el precio se incrementa. También se observa que a medida que el valor de σ aumenta la el decrecimiento de las diferencias relativas, si bien comienza antes, es más lento. Esto se condice con los resultados obtenidos en las figuras anteriores.

Capítulo 3

El aprendizaje de la econofísica como herramienta de estudio en la mecánica estadística

El rápido desarrollo que ocurre en el campo de las ciencias físicas hace que estas se vean afectadas por profundos y frecuentes cambios, es por esto que los planes de estudios necesitan una estructura capaz de adaptarse a estos cambios. Por otra parte, cabe señalar que la importancia que han adquirido las áreas multidisciplinares ha hecho que la física considere natural la aplicación de sus herramientas a disciplinas emergentes. Por estos hechos se sugiere un curso con contenidos racionalizados y optimizados, válidos para un licenciado en física UCN, que lo aproxime a una especialidad como la econofísica, en particular las finanzas cuantitativas, de nivel de postgrado en física. Siendo la econofísica una línea de investigación lejana al curriculum de un físico UCN. Como consecuencia de lo anterior se puede inferir que por medio del aprendizaje de tópicos de una disciplina como la econofísica, es posible que sea aprovechada para consolidar conceptos físico-matemáticos útiles principalmente en mecánica estadística, teoría de la información, física compu-

tacional y otras especialidades asociadas a la física.

3.1. Elementos sobre curriculum

La física curricular ha experimentado una evolución constante. A partir del siglo XIX la física se consolida cómo una disciplina independiente y además pasa a ser considerada una carrera universitaria y profesional. A principios del siglo XX ocurre una revolución en la física debido a la formulación de la relatividad general y la física cuántica, produciendo cambios rápidos y profundos en la física curricular. Sin embargo, esto se modifica a finales del siglo XX, cuando los cambios en la física no fueron tan profundos, lo que genera en los físicos la percepción que se estaba llegando a un curriculum definitivo. Esta percepción es errónea, ya que los cambios que presenta la física siguen siendo constantes cómo consecuencia de la investigación científica, tanto la física teórica como aplicada, y uno de los principales motivos de la investigación en física aplicada es estudiar nuevos temas que requieren la participación de otras áreas de la ciencia, tales como la biología, economía, sociología, etc. Todo este incremento en la investigación trae consecuentemente el incremento del conocimiento y paradójicamente, presenta un problema para la física curricular y es cómo definir apropiadamente su extensión. Ciertamente, la física curricular debe tener una extensión finita. Siendo así, no es posible incluir nuevos contenidos, sin al mismo tiempo hacer una reorganización de los conceptos que tradicionalmente se consideran básicos o fundamentales que inconscientemente pueden ser definidos como inamovibles. Es por esto que como solución aparece una disciplina dedicada al proceso enseñanza-aprendizaje, la didáctica de la física, que dentro de sus mayores aportes está la reorganización de los contenidos en el curriculum, además de la propuesta de nuevos cursos y especialidades, considerando que los estudios de tópicos específicos para luego ser “absorbidos” por conceptos generales.

Un ejemplo de esta evolución es la que observamos en el curso de mecánica clásica en los últimos treinta años. Actualmente el curso incorpora tópicos de caos y mecánica de fluidos que, hasta hace poco, eran considerados líneas de investigación que desarrollaban algunos especialistas en el país. La extensión del curso sigue siendo de un semestre y la dedicación semestral no ha sido modificada. Cabe señalar que las ciencias de la complejidad han permitido la incursión de la física estadística en otras áreas, tanto de las ciencias naturales como sociales, dándole a estas herramientas una connotación transversal. Bajo este concepto la econofísica se puede considerar como un unificador, donde los procesos difusivos y otros principios estudiados en mecánica estadística son utilizados en esta propuesta curricular.

3.2. Propuesta de asignatura “Tópicos de la Econofísica”

Esta asignatura está orientada a estudiantes de posgrado en física UCN interesados en adquirir conocimientos de física aplicados a instrumentos financieros y mecanismos que permiten describir el comportamiento de los mercados, por medio del análisis de datos de los mercados utilizando métodos propios de la física.

3.2.1. Objetivo General

Al final del curso el estudiante será capaz de aplicar conceptos de sistemas complejos y herramientas apropiadas de física y matemáticas al estudio analítico y numérico de problemas generales de econofísica y en particular, de finanzas cuantitativas.

3.2.2. Contenidos

Sistemas complejos

Objetivo específico 1

Explicar términos y conceptos relacionados a sistemas complejos.

- Origen y definición de sistemas complejos. Campos relacionados: Sistemas autoorganizados y criticalidad autoorganizada
- Invariancia de escala y autosimilaridad
- Leyes de potencia, Redes.

Bibliografía específica

- M. Newman, Power laws, Pareto distributions and Zipf's law, Contemporary Physics 46, 323-351, (2005).

Matemática de complejidad

Objetivo específico 2

Manejar con familiaridad herramientas de matemática probabilística y de procesos de difusión.

- Teoría de Probabilidad: Distribuciones de probabilidad. Distribuciones útiles.
- Procesos difusivos: Análisis de la ecuación de calor. Ley de Fick.
- Procesos estocásticos: Movimiento browniano aritmético y geométrico. Integrales de Itô. Lema de Itô.

Bibliografía específica

Mantegna.R & Stanley.E 2000, An introduction to Econophysics. Correlations and Complexity in Finance, Cambridge University Press.

Opciones y derivados financieros

Objetivo específico 3

Derivar la ecuación diferencial de Black Scholes y algunas extensiones no lineales.

- Definición a la economía y su evolución. Definición de finanzas cuantitativas y su finalidad.
- Conceptos financieros elementales. Futuros y opciones. Estimación de precios de opciones en mercados eficientes.
- Método estándar de estimación de precio de Opciones: Ecuación de Black-Scholes.
- Extensiones no lineales del modelo de Black-Scholes.

Bibliografía específica

- Hull.J.C 2003, Introducción a los mercados futuros y opciones. Wilmott.P 2007,introduces Quantitatives Finance, second edition .

Métodos numéricos aplicados y recopilación de datos financieros

Objetivo específico 4

Implementar programas computacionales que permitan resolver numéricamente ecuaciones diferenciales parciales, lineales y no lineales de difusión.

- Métodos numéricos: Esquema de diferencias finitas (EDF).
- Método de Crank-Nicolson (C-N). Método de (C-N) aplicado a la ecuación de calor.
- Ecuación de Black-Scholes. Modelos no lineales de la ecuación de Black-Scholes.
- Búsqueda de información de datos financieros.

Bibliografía específica

Düring.B 2008, High order compact finite difference scheme for a non linear Black-Scholes equation, International journal of theoretical and applied finance, Vol 6, No.7.

Resumen y Conclusión

Por medio de la observación se concluye que las distribuciones de retornos no siguen una distribución gaussiana, es por esto que se propuso modificar la hipótesis que indica que los precios de los activos se ajustan a una distribución *log-normal*. Lo cual significó modificar la ecuación que describe el comportamiento de los activos, los cuales obedecen al movimiento browniano geométrico. La modificación consiste en insertar en el término asociado a la componente aleatoria del movimiento browniano una función que indique la relación entre los retornos. Con este movimiento browniano geométrico modificado, se construye una nueva ecuación de Black-Scholes, la cual contiene un término no lineal asociado a la volatilidad, lo cual trae como consecuencia la modificación de la hipótesis de volatilidad constante.

Por medio del test de gaussianidad de Kolmogorov-Smirnov se concluye de manera cuantitativa que las distribuciones de retornos no siguen una distribución gaussiana. Luego de esto se procedió a determinar, por medio del cumulante de cuarto orden un parámetro que nos indique la desviación de la gaussianidad. Por medio del esquema de Crank-Nicolson se obtuvo las soluciones para los modelos estudiados.

Por medio de un análisis comparativo se muestran diferencias entre el modelo de Black-Scholes y el propuesto observando un menor crecimiento en la zona en donde las opciones son cercanas a cero y un incremento mayor que el modelo lineal

para valores superiores a los indicados anteriormente.

El que las distribución no sean gaussianas significa que el proceso difusivo al que se ven sometidos los retornos son del tipo anómalo. Esto se traduce en que los mercados no son eficientes, es decir, los agentes financieros no utilizan la misma información. Los propios agentes introducen información al mercado bursátil y esta nueva información es utilizada por otros agentes produciendo una dinámica constante de este tipo.

Como el modelo propuesto contempla datos empíricos, y estos se van modificando, podemos concluir que las soluciones del modelo propuesto son del tipo transiente, es decir, la respuesta a nuestro modelo se extingue con el tiempo. Lo cual da a entender que el modelo propuesto debe ser constantemente actualizado con valores de retornos recientes, para así obtener resultados confiables.

Además, se ha propuesto un curso de tópicos de la econofísica en donde se introducen conceptos asociados a procesos difusivos y a mecánica estadística, que permite a un licenciado en física UCN introducirse en esta disciplina.

Como investigación futura, se propone utilizar el modelo presentado en esta tesis en el trabajo de Zurita [26], donde, por medio del modelo de Black-Scholes propone realizar un estudio de cómo determinar el aporte estatal a valor presente para un fondo de pensión en caso que este fondo no tenga el mínimo necesario para dar una pensión mínima. Otra línea futura es poder asociar a una determinada distribución de retornos de índices bursátiles una determinada ecuación de difusión con la cual podamos explicar el tipo de proceso difusivo anómalo que está ocurriendo en el índice bursátil estudiado.

Glosario

Se introducen aquí algunas definiciones básicas sobre la terminología usada en finanzas cuantitativas.

- Activo financiero: Llamaremos activo a cualquier posesión que pueda producir beneficios económicos.
- Activo subyacente: Activo que sirve como base para un contrato.
- Costo de transacción: Costos para realizar operaciones financieras.
- Dividendos: Fracción de las Utilidades de una Sociedad anónima que se reparte a los accionistas en relación a los activos que cada uno posea.
- Foward: Derivado financiero, contrato a largo plazo entre dos partes para comprar o vender un activo a precio fijado y en una fecha determinada. Opera fuera de mercados organizados.
- Futuro: Derivado financiero, contrato a largo plazo entre dos partes para comprar o vender un activo a precio fijado y en una fecha determinada. Opera en mercados organizados.
- Hedging financiero: En español cobertura, es la realización de una actividad financiera para reducir o eliminar las posibles pérdidas que pueden causar las inversiones financieras.

- Interés compuesto: Acumulación de intereses que se han generado en un período determinado por un capital inicial (CI) o principal a una tasa de interés (r) durante (n) periodos de imposición.
- Opción americana: Pueden ser ejercidas a lo largo de su vida hasta la fecha de ejercicio.
- Opción europea: Opciones en que sólo se pueden ser ejercidas en una fecha determinada (fecha de ejercicio).
- Payoff: Resultado final de la inversión.
- Portafolio: Es un conjunto de activos, que pueden ser acciones, derivados, bonos, etc.
- Posición “dentro del dinero”: Cuando na opción de compra el precio del activo subyacente es mayor que el precio de ejercicio de la opción.
- Posición “en el dinero”: si su precio de ejercicio es el mismo que el precio del activo subyacente sobre el que la opción está basada.
- Posición “fuera del dinero”: Si no tiene valor intrínseco; para una opción de compra (*call*) en que el activo subyacente es menor que el precio de ejercicio de la opción.
- Precio de ejercicio: Precio en el que se ejercerá la compra o venta de la opción.
- Posición long: Cuando se tiene una postura en que se “compra”, en una inversión.
- Posición short: Cuando tiene una postura en que se “vende”, en una inversión.
- Ratio: Razón en español, indicador que nos permite hacer comparaciones por medio de la división de dos datos financieros.

- Retorno: Ganancia relativa de una inversión.
- Tiempo de expiración (en opciones): Tiempo en el cual la opción puede ser ejercida.
- Tasa de Interés: es el precio del dinero o pago estipulado, por encima del valor depositado, que un inversionista debe recibir, por unidad de tiempo determinando, del deudor, a raíz de haber usado su dinero durante ese tiempo.
- Tasa libre de riesgo: Tasa de una inversión sin riesgo para el inversionista.
- Volatilidad: Medida de la frecuencia e intensidad de los cambios del precio de un activo o de un tipo definido como la desviación estándar de dicho cambio en un horizonte temporal específico.

Bibliografía

- [1] BLACK.F and SCHOLE.S.M 1973, *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of political economy, Vol 81, 637-54.
- [2] HULL.J.C, 2003, *Introducción a los mercados futuros y opciones* Cuarta edición, Editorial Hall, Madrid.
- [3] WILMOTT.P 2007, *introduces Quantitatives Finance* second edition, John Wiley and Sons. Ltd. England, Chichester.
- [4] WILMOTT.P 2002, *on Quantitative Finance*, second edition, John Wiley and Sons. Ltd. England, Chichester.
- [5] BOUCHAD.J and POTTERS.M 2000, *Theory of financial risk*, Cambridge university press, England.
- [6] KARATZAS.I 1998, *Method of mathematical finance*, Springer.
- [7] SHAW.W 1998, *Modeling financial derivatives with mathematica*, Cambridge university press
- [8] CHERUBINI.U 2007, *Estructured finance*, John Whiley and Sons, Ltd.
- [9] CHERUBINI.U 2004, *Copula Methods in Finance*, John Whiley and Sons, Ltd.

- [10] KABANOV.Y 2000,*From Stochastic Calculus to Mathematical Finance*, Springer.
- [11] Mc NIELS.P.D 2005, *Neural Networks in Finance:Gaining Predictive Edge in the Market*, Elsevier.
- [12] BORLAND.L, 2002, *Option Pricing formulas based on a non-gaussian stock price model*, Physical review letters, Vol 83, No.9,
- [13] BAUDOINS.F Self-similarity and fractional Brownian motions on Lie groups, Electronic Journal of Probability,Vol 13, No.38,
- [14] MÁRTINEZ.E 2011, *El Movimiento Browniano*, <<http://www.uantof.cl/facultades/csbasicas/Matematicas/academicos/emartinez/dinamica/Brown/brown.html>>
- [15] ANDERSEN.T 2001, *The distribution of realized stockreturn volatility*, Journal of financial economics, Vol, 61 No.43
- [16] DÜRING.B 2008,*High order compact finite difference scheme for a nonlinear Black-Scholes equation*,International journal of theoretical and applied finance, Vol 6, No.7,
- [17] EHRHARDT.M 2008,*Nonlinear models in option pricing, an Introduction*.
- [18] HAHN.B 1994,*Introduction to Fortran 90 for scientists and engineers*, Department of applied mathematics university of Cape Town.
- [19] Department of mathematics and statistics York university. 2010,*Finite Difference Method*.
- [20] MAURETTE.M 2006, *Modelos matemáticos para la valuación de derivados financieros*, Tesis de licenciatura. Universidad de Buenos Aires.

- [21] LELAND.H, 1985, *Option Pricing and Replication with Transaction Cost*, Journal of Finance, Vol 40, No.5
- [22] S. NUÑEZ, 2009, *Adaptación del modelo Black-Scholes en la simulación de un portafolio de acciones*, Tesis para optar al grado de Ingeniero Industrial. PUCD .
- [23] NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods 2012, <<http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda35g.htm>>
- [24] CALDERON.F, 2009 *Ley de Zipf en la literatura latinoamericana*, Tesina para optar al grado de Licenciatura en física con mención Astronomía (UCN).
- [25] TSAI.S SALINAS.S, 1998 *Fourth-Order Cumulants to Characterize the Phase Transitions of a Spin-1 Ising Model*, Brazilian journal of physics, Vol 28 No.1.
- [26] ZURITA.S, Minimum pension insurance in the Chilean pension system. Analisis economic Vol 9. pag 105-126

Apéndice A: Solución de la ecuación de Black-Scholes

Considere

$$x = \log\left(\frac{S}{E}\right), \quad \tau = \frac{\sigma^2(T-t)}{2}, \quad v(x, \tau) = \frac{C(S, t)}{E}, \quad (3.1)$$

Con lo cual las derivadas parciales quedan dadas por

$$C_t = -E v_\tau \frac{\sigma^2}{2}, \quad C_S = \frac{E}{S} v_x, \quad C_{SS} = \frac{E}{S^2} (-v_x + v_{xx}). \quad (3.2)$$

Como $\tau(T) = 0$, también se tiene una condición inicial para v a partir de la condición final de C :

$$C(S, T) = E v(x, 0) = \max\{Ee^x - E, 0\} \Rightarrow v(x, 0) = \max\{e^x - 1, 0\}, \quad (3.3)$$

que es nuestra condición inicial. La ecuación queda

$$v_t \frac{\sigma^2}{2} = -\frac{\sigma^2}{2} v_x + \frac{\sigma^2}{2} v_{xx} + r v_x - r v \quad x \in \mathbb{R}, \tau \in \left(0, T \frac{\sigma^2}{2}\right] \quad (3.4)$$

$$v(x, 0) = \max\{e^x - 1, 0\} \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.5)$$

si hacemos $\theta = \frac{2r}{\sigma^2}$, entonces, tenemos:

$$v_t = v_{xx} + (\theta - 1)v_x - r v \quad x \in \mathbb{R}, \tau \in \left(0, T \frac{\sigma^2}{2}\right] \quad (3.6)$$

$$v(x, 0) = \max\{e^x - 1, 0\} \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.7)$$

Haciendo un último cambio de variable del tipo

$$v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \quad (3.8)$$

donde α y β son parámetros a determinar. Las derivadas de v resultan

$$v_x = \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u + e^{\alpha x + \beta \tau} u_x, \quad v_\tau = e^{\alpha x + \beta \tau} u + e^{\alpha x + \beta \tau} u_\tau \quad (3.9)$$

$$v_{xx} = \alpha^2 e^{\alpha x + \beta \tau} u + 2\alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u_x + e^{\alpha x + \beta \tau} u_{xx} \quad (3.10)$$

Reemplazando en la ecuación (3.8) y simplificando por $e^{\alpha x + \beta \tau}$ obtenemos:

$$\beta u + u_\tau = \alpha^2 u + 2\alpha u_x + u_{xx} + (\theta - 1)(\alpha u + u_x) + \theta u \quad (3.11)$$

luego se eligen los α y β para que se anulen los coeficientes que multiplican a u y a u_x , es decir

$$\beta = \alpha^2 + (\theta - 1)\alpha - \theta \text{ y } 0 = 2\alpha + (\theta - 1) \quad (3.12)$$

De la segunda ecuación anterior resulta que $\alpha = -\frac{1}{2}(\theta - 1)$. Usando ese α en la primera, resulta $\beta = \frac{1}{4}(\theta + 1)^2$. Con esta elección de los parámetros la ecuación (3.8) queda:

$$u_\tau = u_{xx}. \quad (3.13)$$

Donde la condición inicial además es:

$$u(x, 0) = v(x, 0)e^{\frac{(\theta-1)x}{2}} = \max \{e^x - 1, 0\} e^{\frac{(\theta-1)x}{2}} = \max \left\{ e^{\frac{(\theta+1)x}{2}} - e^{\frac{(\theta-1)x}{2}}, 0 \right\} \quad (3.14)$$

con lo cual se tiene la ecuación de calor con condiciones iniciales especiales. La solución a la ecuación general es ampliamente conocida es posible expresarla como

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\frac{x-s}{4\tau}} \quad (3.15)$$

que es la convolución entre la condición inicial y la solución fundamental de la ecuación del calor (*Núcleo de Poisson*). Al evaluar la integral haciendo $x' = \frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}$,

($s = x' \sqrt{2\tau + x}$) queda entonces:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x' \sqrt{2\tau} + x) e^{-\frac{x'}{2}} dx \quad (3.16)$$

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \max \left\{ e^{\frac{(\theta+1)(x' \sqrt{2\tau} + x)}{2}} - e^{\frac{(\theta-1)(x' \sqrt{2\tau} + x)}{2}}, 0 \right\} e^{-\frac{x'}{2}} dx' \quad (3.17)$$

Para eliminar el máximo:

$$e^{\frac{(\theta+1)s}{2}} - e^{\frac{(\theta-1)s}{2}} \geq 0 \Leftrightarrow e^{\frac{(\theta+1)s}{2}} \geq e^{\frac{(\theta-1)s}{2}} \Leftrightarrow \frac{(\theta+1)s}{2} \geq \frac{(\theta-1)s}{2} \Leftrightarrow s \geq -s, \quad (3.18)$$

es decir, en nuestro caso, sí y sólo sí $s \geq 0$. Por lo cual el integrando no es nulo cuando $x' \sqrt{2\tau} + x \geq 0$, esto es, si $x' \geq \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}$. Entonces la solución queda:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{(\theta+1)(x' \sqrt{2\tau} + x)}{2}} e^{-\frac{x'}{2}} dx' - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{(\theta-1)(x' \sqrt{2\tau} + x)}{2}} e^{-\frac{x'}{2}} dx', \quad (3.19)$$

con lo cual se obtiene una resta de 2 integrales $u(x, \tau) = I_1 - I_2$, para resolver I_1 se usa el paso análogo para I_2 , se debe sacar del integrando el término que no depende de x' y juntamos las dos exponenciales:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{(\theta+1)(x' \sqrt{2\tau} + x)}{2}} e^{-\frac{x'}{2}} dx' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(\theta+1)x}{2}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{(\theta+1)(x' \sqrt{2\tau} + x)}{2} - \frac{x'}{2}} dx'. \quad (3.20)$$

Completando el cuadrado en el exponente tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(\theta+1)x}{2}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{(\theta+1)^2\tau - \frac{1}{2}(x' - \frac{1}{2}(\theta+1)\sqrt{2\tau})^2}{2}} dx', \quad (3.21)$$

con lo cual al sacar el término independiente de x' , hacemos $\rho = x' - \frac{1}{2}(\theta+1)\sqrt{2\tau}$, la integral queda

$$I_1 = e^{\frac{(\theta+1)x}{2} + \frac{(\theta+1)^2\tau}{4}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{(\theta+1)\sqrt{2\tau}}{2}}^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho, \quad (3.22)$$

donde si se hace $d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{(\theta+1)\sqrt{2\tau}}{2}$ resulta

$$I_1 = e^{\frac{(\theta+1)x}{2} + \frac{(\theta+1)^2\tau}{4}} \int_{d_1}^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho = e^{\frac{(\theta+1)x}{2} + \frac{(\theta+1)^2\tau}{4}} N(d_1). \quad (3.23)$$

La función $N(\cdot)$ es la distribución Normal:

$$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_1}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds. \quad (3.24)$$

El cálculo de I_2 es idéntico al de I_1 , sólo se debe reemplazar $(k+1)$ por $(k-1)$ en el análisis. Es decir, resulta:

$$I_2 = e^{\frac{(\theta-1)x}{2} + \frac{(\theta-1)^2\tau}{4}} N(d_2) \quad (3.25)$$

$$d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{(\theta-1)\sqrt{2\tau}}{2}. \quad (3.26)$$

con lo cual se tiene una forma explícita para $u(x, \tau)$:

$$u(x, \tau) = e^{\frac{(\theta+1)x}{2} + \frac{(\theta+1)^2\tau}{4}} N(d_1) - e^{\frac{(\theta-1)x}{2} + \frac{(\theta-1)^2\tau}{4}} N(d_2). \quad (3.27)$$

Ahora se debe de realizar los cambios de variables visto en (3.1) para obtener la expresión para $C(S, t)$. En primer lugar se tiene que

$$v(x, \tau) = e^{\frac{(\theta-1)x}{2} + \frac{(\theta-1)^2\tau}{4}} u(x, \tau), \quad (3.28)$$

con lo cual nos queda

$$v(x, \tau) = e^x N(d_1) - e^{-\theta\tau} N(d_2), \quad (3.29)$$

ahora usando

$$x = \log\left(\frac{S}{E}\right), \quad \tau = \frac{\sigma^2(T-t)}{2}, \quad v(x, \tau) = \frac{C(S, t)}{E}, \quad \theta = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad (3.30)$$

y haciendo los ajustes pertinentes se obtiene

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (3.31)$$

que es la solución de Black-Scholes.

Apendice B: Solución alternativa de la ecuación lineal de Black-Scholes

Consideramos el caso lineal de Black Scholes:

$$V_t + \frac{\sigma^2}{2} S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0 \quad (3.32)$$

Ahora proponemos una solución alternativa de la ecuación de Black-Scholes, expresado en un Ansatz, dado por:

$$A(S, t) = \exp[\lambda_0(t) - \lambda_1(t) \log S - \lambda_2(t) \log^2 S] \quad (3.33)$$

Donde $\lambda_0(t)$, $\lambda_1(t)$ y $\lambda_2(t)$ son funciones a determinar. Asociando términos se puede obtener un set de ecuaciones acopladas de primer orden.

$$\frac{d\lambda_0}{dt} = \lambda_1 \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{\lambda_1^2 \sigma^2}{2} - \lambda_2 \sigma^2 - r \quad (3.34)$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = 2\lambda_2^2 \sigma^2 \left(\lambda_1 + \frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2} \right) \quad (3.35)$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = 2\lambda_2^2 \sigma^2, \quad (3.36)$$

obteniendo los siguientes resultados

$$\lambda_0(t) = C_3 + \frac{1}{2} \left(-\frac{t(2r + \sigma^2)^2}{4\sigma^2} - \frac{(-2rC_1 + \sigma^2(C_1 + 2C_2)^2)^2}{8\sigma^4(2t\sigma^2 + C_1)} + \log(2t\sigma^2 + C_1) \right) \quad (3.37)$$

$$\lambda_1(t) = \frac{t(2r - \sigma^2) + C_2}{2t\sigma^2 + C_1} \quad (3.38)$$

$$\lambda_2(t) = -\frac{1}{2t\sigma^2 + C_1}, \quad (3.39)$$

donde $C_1 = \sigma_0^2, C_2 = 0$ y $C_3 = 0$. Si bien hemos construido una solución para la ecuación de Black-Scholes lineal, no se ha interpretado el significado de los términos del Ansatz, lo cual queda cómo trabajo futuro.