



UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Linealización de singularidades hiperbólicas.

JUAN ROBERTO CARMONA HERRERA

Tesis para optar el grado de:
Magister en ciencias mención matemática

Director de Tesis: Dr. Bernardo San Martín Rebolledo
Tesis parcialmente financiada por proyecto fondecyt número 1110717

Antofagasta - Chile
2013

A mi Familia...

Índice

1. Introducción	4
2. Linealización topológica	6
2.1. Concepto de linealización	6
2.1.1. Parte lineal de un campo de vectores	6
2.1.2. Linealización de singularidades de campos de vectores.	8
2.2. Teorema de Hartman-Grobman	10
3. Linealización Diferenciable	22
3.1. Caso unidimensional real	24
3.2. Ejemplos	29
3.3. Teoremas clásicos de linealización	32
4. Teorema de Sternberg	44
5. Bibliografía	63

1. Introducción

Uno de los problemas centrales en los sistemas dinámicos es la descripción de la estructura de órbitas entorno a una singularidad para un campo de vectores o, en el caso de difeomorfismos, un punto periódico. Esta estructura es simple y completamente describible, cuando nos enfrentamos a ecuaciones diferenciales lineales autónomas o transformaciones lineales. Una pregunta natural a responder, es cuanto de esta estructura permanece bajo pequeñas perturbaciones del sistema en una vecindad de la singularidad o del punto periódico en cuestión. Una herramienta fundamental para tal descripción es la linealización. En esta tesis nos enfocamos en linealización de singularidades para campos de vectores.

Considere la ecuación diferencial no lineal en $\mathbb{R}^n$,

$$\dot{x} = Ax + f(x),$$

donde la matriz A tiene autovalores con parte real no nula y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función C^r , tal que $f(0) = 0$, $Df_{(0)} = 0$.

Estamos interesados en saber si existe un cambio de variables $y = h(x)$ de clase C^k , $k \geq 1$, con jacobiano no nulo en $x = 0$, que conjugue en una vecindad de $y = 0$ el sistema dado anteriormente con el sistema lineal:

$$\dot{y} = Ay,$$

es decir

$$hx_t = e^{At}h,$$

donde x_t es el flujo asociado al campo $Ax + f(x)$.

Para el caso de ecuaciones diferenciales de variable real unidimensional, esto es, campos de vectores en $\mathbb{R}$, veremos que todo campo C^k es C^{k-1} -linealizable. En esta tesis presentaremos una serie de resultados que establecen condiciones para la existencia de linealizaciones diferenciables y daremos ejemplos que mostraran que la situación en dimensiones mayores es diferente al caso unidimensional.

Este trabajo se divide en tres capítulos, en el primero definimos el concepto de linealización y presentamos el teorema de Hartman-Grobman, el cual establece condiciones para la existencia de linealizaciones topológicas. En el segundo capítulo presentaremos teoremas

clásicos que garantizan linealización diferenciable, entre ellos el teorema de linealización de Poincaré.

Henri Poincaré en su tesis titulada "Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles" [9] , publicada en 1879, estudió la linealización de un campo vectorial alrededor de un punto de equilibrio, a través de la existencia de soluciones analíticas de ecuaciones en derivadas parciales casi lineales de primer orden. En particular, mostró que cuando los exponentes característicos del punto de equilibrio de un campo vectorial analítico cumplían una condición de no resonancia y adicionalmente una condición geométrica sobre los mismos, entonces existen coordenadas linealizables alrededor del punto de equilibrio. Este resultado es conocido como el Teorema de Linealización analítica de Poincaré.

En el último capítulo presentaremos el teorema de Sternberg, que garantiza que todo campo C^∞ sin resonancias es C^∞ -linealizable en una vecindad de una singularidad hiperbólica. En general Sternberg mostró, que dado un entero $n > 0$, existe un entero $N \geq 2$ que depende de n tal que todo campo C^N , cuya matriz de la parte lineal no tiene resonancias es C^n -linealizable en una vecindad de la singularidad hiperbólica.

2. Linealización topológica

Este capítulo se divide en dos secciones, en la primera introduciremos el concepto de linealización topológica para campos de vectores. En la segunda sección enunciaremos y presentaremos una demostración del teorema de Hartman-Grobman, el cual garantiza que toda singularidad hiperbólica de un campo C^1 admite una linealización topológica.

2.1. Concepto de linealización

2.1.1. Parte lineal de un campo de vectores

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = \mathbb{X}(x) \quad (2.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbb{X} \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{R}^n)$, el espacio de campos en $\mathbb{R}^n$ de clase C^r .

Definición 2.1. *Un punto $\xi \in \mathbb{R}^n$, es llamado singularidad del campo $\mathbb{X}$ si $\mathbb{X}(\xi) = 0$.*

Observemos que si la matriz jacobiana $D\mathbb{X}_{(\xi)}$ es no singular, entonces, por virtud del teorema de la función implícita, todo campo cercano a $\mathbb{X}$ tiene una única singularidad en un entorno de ξ . Esto significa que las singularidades son aisladas. Así, en general el campo $\mathbb{X}$ tiene un número finito de singularidades en cualquier región compacta contenida en el dominio. El estudio del sistema (2.1) entorno a una singularidad puede ser estudiado a través de la linealización.

Sea ξ una singularidad del campo $\mathbb{X}$. El cambio de variables

$$x = \xi + y \quad (2.2)$$

traslada la singularidad hacia el origen en el nuevo campo. Con este cambio de variable el sistema (2.1) esta dado por

$$\dot{y} = \mathbb{X}(\xi + y), \quad (2.3)$$

y por expansión de Taylor alrededor de ξ , como

$$\dot{y} = \mathbb{X}(\xi) + D\mathbb{X}_{(\xi)}y + O(y). \quad (2.4)$$

Como $\mathbb{X}(\xi) = 0$, el sistema (2.4) se transforma en

$$\dot{y} = Ay + g(y), \quad (2.5)$$

donde $A = D\mathbb{X}_{(\xi)} \in M_{n \times n}$ y $g(y)$ es una función C^r que satisface la condición

$$g(0) = Dg(0) = 0 \quad (2.6)$$

En general, el último término en (2.5) es de un orden mayor igual que 2. Es por ello, que aparentemente el comportamiento de las trayectorias del sistema (2.1) en una pequeña vecindad del origen se rige principalmente por el sistema linealizado:

$$\dot{y} = Ay. \quad (2.7)$$

Al sistema (2.7) le diremos parte lineal del sistema (2.1).

Ejemplo 2.2. Consideremos en $\mathbb{R}^2$ el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= e^{(x_1+x_2)} - x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_1x_2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Probaremos que el sistema (2.8) tiene una única singularidad y encontraremos su parte lineal en dicho punto. En efecto las singularidades del sistema anterior satisfacen

$$e^{(x_1+x_2)} - x_2 = 0 \quad (2.9)$$

y

$$x_1(x_2 - 1) = 0 \quad (2.10)$$

La ecuación (2.10) se satisface sólo para $x_1 = 0$ ó $x_2 = 1$. Si $x_1 = 0$, tenemos en la ecuación (2.9) $e^{x_2} = x_2$ la cual no tiene solución real (pues $e^{x_2} > x_2$, para todo $x_2 \in \mathbb{R}$) y esto significa que no hay singularidades para $x_1 = 0$. Si $x_2 = 1$, tenemos en la ecuación (2.9) que $e^{(x_1+1)} = 1$ la cual tiene como única solución real $x_1 = -1$. Así $(x_1, x_2) = (-1, 1)$ es la única singularidad de (2.8).

Para encontrar el sistema linealizado en $(-1, 1)$ utilizamos la observación anterior, en efecto, sean

$$\mathbb{X}_1(x_1, x_2) = e^{(x_1+x_2)} - x_2, \quad \mathbb{X}_2(x_1, x_2) = -x_1 + x_1x_2.$$

La matriz $A = D\mathbb{X}_{(0)}$ en (2.5) esta dada por

$$A = \begin{bmatrix} e^{(x_1+x_2)} & e^{(x_1+x_2)} - 1 \\ -1 + x_2 & x_1 \end{bmatrix}_{(x_1, x_2)=(-1, 1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto su parte lineal en $(-1, 1)$ es

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_1 \\ \dot{y}_2 &= -y_2. \end{aligned}$$

Las trayectorias de los sistemas lineales en una vecindad de una singularidad son totalmente conocidos, por lo que el interés de estudiar la correspondencia entre un sistema no lineal y su parte lineal es evidente.

2.1.2. Linealización de singularidades de campos de vectores.

Introduciremos el concepto de equivalencia topológica el cual nos servirá para definir la linealización de campos de vectores.

Definición 2.3. Sean $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{R}^m)$ y $p, q \in \mathbb{R}^m$. Diremos que $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ son topológicamente equivalentes en p y q respectivamente, si existen vecindades $V(p)$ y $W(q)$ y un homeomorfismo $h : V(p) \longrightarrow W(q)$ con $h(p) = q$ tal que, si X_t e Y_t son los flujos de $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ respectivamente, entonces para todo $x_0 \in V(p) - \{p\}$ y todo $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que, para cada $t \in (0, \delta)$

$$h(X_t(x_0)) = Y_{t'}(h(x_0)),$$

para algún $t' \in (0, \epsilon)$.

Observación 2.4. De la definición anterior observemos que el homeomorfismo h lleva órbitas de $\mathbb{X}$ en órbitas de $\mathbb{Y}$, preservando su orientación.

Ejemplo 2.5. Considere los campos de vectores $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ dados en la Figura 1. $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ no son topológicamente equivalentes en P_N y $P_{N'}$, pues cada vecindad de P_N no contiene orbitas cerradas mientras que el campo $\mathbb{Y}$ presenta orbitas cerradas.

Definición 2.6. Dos campos de vectores $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{R}^m)$, son conjugados si existe una equivalencia topológica h que preserva el parámetro t . Esto es

$$h(X_t(x)) = Y_t(h(x)),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^m$ y $t \in \mathbb{R}$.

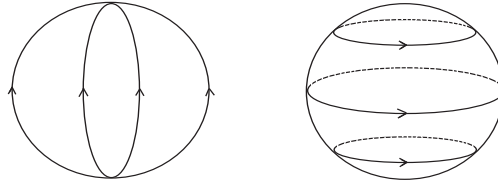


Figura 1: Campos en S^2 .

Ejemplo 2.7. Considere los campos $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ en $\mathbb{R}^2$ definidos por $\mathbb{X}(x, y) = (x, y)$ e $\mathbb{Y}(x, y) = (x + y, -x + y)$. Afirmamos que los campos $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ son conjugados.

En efecto, los flujos correspondientes a estos campos son $X_t(x, y) = e^t(x, y)$ e $Y_t(x, y) = e^t(x \cos t + y \sin t, -x \sin t + y \cos t)$. Vamos a construir un homeomorfismo h de $\mathbb{R}^2$ que conjugue X_t con Y_t . Como 0 es la única singularidad de $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ hacemos $h(0) = 0$. Es fácil ver que el círculo unitario S^1 es transversal a $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$. Por otra parte, todas las trayectorias de $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ excepto 0 intersectan a S^1 . Definamos $h(p) = p$, si $p \in S^1$. Si $q \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ existe un único $t \in \mathbb{R}$ tal que $X_t(q) = p \in S^1$. Así ponemos $h(q) = Y_{-t}(p) = Y_{-t}X_t(q)$. Es fácil ver que h es continua con inversa continua en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. La continuidad de h y su inversa en 0 se prueba utilizando los flujos de $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$.

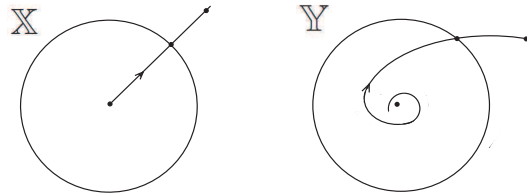


Figura 2: Conjugación entre los campos $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$.

Definición 2.8. Sea ξ una singularidad del campo $\mathbb{X}$. Diremos que ξ es hiperbólica si $A = D\mathbb{X}_{(\xi)}$ es una matriz cuyo espectro no intersecta al eje imaginario. El número de autovalores con parte real negativa es denominado el índice de A .

Las siguientes observaciones son resultados cuyas demostraciones pueden ser revisadas en

[6],[7].

Observación 2.9. Sean $\mathbb{L}$ y $\mathbb{T}$ campos lineales hiperbólicos. Entonces $\mathbb{L}$ y $\mathbb{T}$ son conjugados, si y solamente si, tienen el mismo índice.

Observación 2.10. Sean $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{R}^m)$ y $p, q \in \mathbb{R}^m$ puntos regulares de $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ respectivamente, entonces $\mathbb{X}$ es conjugado a $\mathbb{Y}$ en p y q .

Definición 2.11. Sea $\mathbb{X}$ un campo de vectores y $\mathbb{L}$ su parte lineal. Si $\mathbb{X}$ es conjugado a $\mathbb{L}$ entonces diremos que es C^0 -linealizable. A tal homeomorfismo se le denominará linealización del campo $\mathbb{X}$

2.2. Teorema de Hartman-Grobman

En esta sección presentaremos el teorema de Hartman y Grobman. Comenzaremos enunciando y demostrando tal resultado para difeomorfismos para luego extender el resultado para campos.

En primer lugar, recordaremos la definición de punto fijo hiperbólico, para difeomorfismo.

Definición 2.12. Sean M una variedad y $p \in M$ un punto fijo de $f \in \text{Dif}^r(M)$ el espacio de difeomorfismos de clase C^r sobre M . Diremos que p es un punto fijo hiperbólico si $Df_{(p)} : T_p M \rightarrow T_p M$ es un isomorfismo hiperbólico, esto es, si $Df_{(p)}$ no tiene autovalor de norma 1.

Teorema 2.13. (Hartman-Grobman para difeomorfismo) Sean $f \in \text{Dif}^r(M)$, $p \in M$ un punto fijo hiperbólico de f y $A = Df_{(p)} : T_p M \rightarrow T_p M$. Entonces existen vecindades $V(p) \subset M$ y $U(0) \subset T_p M$ y un homeomorfismo $h : V(p) \rightarrow U(0)$ tal que

$$hf = Ah$$

Observación 2.14. Como se trata de un problema local, utilizando una carta, podemos suponer que $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un difeomorfismo teniendo a 0 como punto fijo hiperbólico.

Antes de demostrar el teorema 2.13, necesitamos algunos lemas:

Lema 2.15. Sea E un espacio de Banach y $\mathcal{L}(E, E)$, el espacio de operadores lineales continuos de E . Sean $\mathbb{L} \in \mathcal{L}(E, E)$ satisfaciendo $\|\mathbb{L}\| \leq a < 1$, y $G \in \mathcal{L}(E, E)$ un isomorfismo con $\|G^{-1}\| \leq a < 1$. Entonces

1. $(I + L)$ es un isomorfismo y su inversa satisface $\|(I + L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-a}$
2. $(I + G)$ es un isomorfismo y su inversa satisface $\|(I + G)^{-1}\| \leq \frac{a}{1-a}$

Demostración

1. Para $y \in E$, fijo, definamos la aplicación $u : E \longrightarrow E$ por $u(x) = y - L(x)$. Tenemos que $u(x_1) - u(x_2) = L(x_2 - x_1)$. Así

$$\|u(x_1) - u(x_2)\| \leq a\|x_1 - x_2\|$$

y por tanto u es una contracción, en consecuencia u tiene un único punto fijo $x \in E$, esto es, $x = u(x) = y - L(x)$. Por lo tanto existe un único $x \in E$ tal que $(I + L)(x) = y$, luego podemos concluir que $I + L$ es una aplicación biyectiva. Tomemos ahora un $y \in E$ con $\|y\| = 1$ y $x \in E$ tal que $(I + L)^{-1}(y) = x$. Como $x + L(x) = y$, tenemos que $\|x\| - a\|x\| \leq 1$, y por tanto, $\|x\| \leq \frac{1}{1-a}$. Luego tenemos que

$$\|(I + L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-a}.$$

2. Dado que $I + G = G(I + G^{-1})$, como $\|G^{-1}\| \leq a < 1$, tenemos por la primera parte del lema, que $I + G^{-1}$ es invertible. Luego $(I + G)^{-1} = (I + G^{-1})^{-1}G^{-1}$, así

$$\|(I + G)^{-1}\| \leq \|(I + G^{-1})^{-1}\| \|G^{-1}\| \leq \frac{a}{1-a}.$$

Lo que demuestra el lema. ■

Para todo isomorfismo hiperbólico A , existe una descomposición invariante $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$ y una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^m$, tal que para las restricciones $A_1 = A|_{E^s} : E^s \longrightarrow E^s$, $A_2 = A|_{E^u} : E^u \longrightarrow E^u$ satisfacen

$$\|A_1\| \leq a < 1$$

$$\|(A_2)^{-1}\| \leq a < 1.$$

Sea $C_b^0(\mathbb{R}^m)$ el espacio de Banach de las funciones continuas y acotadas de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^m$ con la norma uniforme

$$\|u\| = \sup\{\|u(x)\|; x \in \mathbb{R}^m\}.$$

Como $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$, tenemos una descomposición natural para $C_b^0(\mathbb{R}^m)$ dada por

$$C_b^0(\mathbb{R}^m) = C_b^0(\mathbb{R}^m, E^s) \oplus C_b^0(\mathbb{R}^m, E^u),$$

Así cada función $u \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ puede ser escrita como $u = u_- + u_+$, donde $u_- = \pi_- \circ u$ y $u_+ = \pi_+ \circ u$ ($\pi_- : E^s \oplus E^u \longrightarrow E^s$ y $\pi_+ : E^s \oplus E^u \longrightarrow E^u$ son las proyecciones naturales).

Lema 2.16. *Existe $\epsilon > 0$ tal que, si $\phi_1, \phi_2 \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ tienen constante de Lipschitz menor que ϵ , entonces $(A + \phi_1)$ y $(A + \phi_2)$ son conjugados.*

Demostración Debemos buscar un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ que satisfaga la ecuación

$$h(A + \phi_1) = (A + \phi_2)h.$$

Buscaremos una solución h de la forma $h = I + u$ con $u \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$. Así nuestra nueva ecuación es

$$(I + u)(A + \phi_1) = (A + \phi_2)(I + u)$$

o equivalentemente

$$Au - u(A + \phi_1) = \phi_1 - \phi_2(I + u) \quad (2.11)$$

Vamos a mostrar que existe un único $u \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ que satisface la ecuación (2.11). Para esto consideremos el operador lineal

$$\mathcal{L} : C_b^0(\mathbb{R}^m) \longrightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m)$$

$$\mathcal{L}(u) = Au - u(A + \phi_1).$$

Afirmamos que $\mathcal{L}$ es invertible y $\|\mathcal{L}^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|/(1 - a)$. De hecho, $\mathcal{L} = \overline{A}\mathcal{L}^*$ donde $\mathcal{L}^*, \overline{A} : C_b^0(\mathbb{R}^m) \longrightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m)$ están dada por $\mathcal{L}^*(u) = u - A^{-1}u(A + \phi_1)$ y $\overline{A}(u) = Au$. Por lo tanto, como $\overline{A}$ es invertible, basta mostrar que $\mathcal{L}^*$ es invertible y tendremos $\mathcal{L}^{-1} = (\mathcal{L}^*)^{-1}(\overline{A})^{-1}$. Observemos que $C_b^0(\mathbb{R}^m, E^s)$ y $C_b^0(\mathbb{R}^m, E^u)$ son invariantes por $\mathcal{L}^*$, pues E^s y E^u son invariantes por A^{-1} . Podemos entonces escribir $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}^{*s} \oplus \mathcal{L}^{*u}$ donde

$$\mathcal{L}^{*s} : \mathcal{L}^*|_{C_b^0(\mathbb{R}^m, E^s)} \longrightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m, E^s)$$

$$\mathcal{L}^{*u} : \mathcal{L}^*|_{C_b^0(\mathbb{R}^m, E^u)} \longrightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m, E^u).$$

Es fácil ver que si ϵ es suficientemente pequeño entonces $A + \phi_1$ es un homeomorfismo, y por lo tanto, el operador $u_- \longrightarrow A^{-1}u_-(A + \phi_1)$ es invertible y su inversa $u_- \longrightarrow A_1u_-(A + \phi_1)^{-1}$ es una contracción con norma acotada por $a < 1$. Por la parte 2 del Lema 2.15 tenemos que el operador $\mathcal{L}^{*s}$ es invertible y $\|(\mathcal{L}^{*s})^{-1}\| \leq a/(1-a)$. Aplicando la parte 1 del Lema 2.15 concluimos también que $\mathcal{L}^{*u}$ es invertible y $\|\mathcal{L}^{*u}\| \leq 1/(1-a) = \max\{1/(1-a), a/(1-a)\}$. Por lo tanto $\mathcal{L}$ es invertible y

$$\|\mathcal{L}^{-1}\| = \|(\mathcal{L}^*)^{-1}(\overline{A})^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-a},$$

lo que demuestra la afirmación.

Consideremos ahora la aplicación

$$\Gamma : C_b^0(\mathbb{R}^m) \longrightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m); \quad \Gamma(u) = \mathcal{L}^{-1}[\phi_1 - \phi_2(I + u)].$$

Tenemos que

$$\|\Gamma(u_1) - \Gamma(u_2)\| = \|\mathcal{L}^{-1}[\phi_2(I + u_2) - \phi_2(I + u_1)]\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-a} \epsilon \|u_1 - u_2\|.$$

Tomando ϵ suficientemente pequeño de manera que $\epsilon\|A^{-1}\|/(1-a) < 1$, podemos decir que la aplicación Γ es una contracción, y por tanto, tiene un único punto fijo $u \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$. Por otra parte como $u \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ es solución de (2.11), si y solamente si, u es punto fijo de Γ , podemos concluir que (2.11) tiene una única solución en $C_b^0(\mathbb{R}^m)$. Sólo nos resta mostrar que $h = I + u$ es un homeomorfismo. Para esto observemos que el mismo método utilizado anteriormente permite concluir que la ecuación

$$(A + \phi_1)(I + \nu) = (I + \nu)(A + \phi_2)$$

también tienen una única solución $\nu \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$. Afirmamos que

$$(I + u)(I + \nu) = (I + \nu)(I + u) = I.$$

En efecto,

$$(I + u)(I + \nu)(A + \phi_2) = (I + u)(A + \phi_1)(I + \nu) = (A + \phi_2)(I + u)(I + \nu).$$

Por otro lado, como $(I + u)(I + \nu) = I + \nu + u(I + \nu)$, donde $\nu + u(I + \nu) \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ y $I(A + \phi_2) = (A + \phi_2)I$, tenemos, por la unicidad de la solución de la ecuación $(I + \omega)(A + \phi_2) = (A + \phi_2)(I + \omega)$, que

$$(I + u)(I + \nu) = I.$$

Análogamente, tenemos que $(I + \nu)(I + u) = I$. Esto muestra que $h = (I + u)$ es un homeomorfismo que conjuga a $A + \phi_1$ y $A + \phi_2$. ■

Lema 2.17. *Dado $\epsilon > 0$, existe una vecindad $U(0)$ y existe una extensión de $f|_U$ de la forma $A + \phi$, donde $\phi \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ tiene constante de Lipschitz menor que ϵ .*

Demostración Sea $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ con las siguientes propiedades:

1. $\alpha(t) = 0$, si $t \geq 1$
2. $\alpha(t) = 1$, si $t \leq 1/2$
3. $|\alpha(t)| < K$, para todo $t \in \mathbb{R}$, y $K > 2$.

Sean $f = A + \varphi$ con $\varphi(0) = 0$ y $D\varphi(0) = 0$, B_r una bola de centro en el origen y radio r tal que $\|D\varphi\|_{B_r} < \epsilon/2K$. Tomemos $\phi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\phi(x) = \alpha(\|x\|/r)\varphi(x)$. Es claro que $\phi(x) = 0$ si $\|x\| \geq r$. Mostraremos ahora que ϕ satisface las condiciones del Lema. De hecho, como $\phi(x) = \varphi(x)$, si $\|x\| \leq r/2$, tenemos que $A + \phi$ es una extensión de $f|_{B_{r/2}}$. Por otro lado, si $x_1, x_2 \in B_r$, tenemos

$$\begin{aligned} \|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| &= \|\alpha(\|x_1\|/r)\varphi(x_1) - \alpha(\|x_2\|/r)\varphi(x_2)\| \\ &= \|[\alpha(\|x_1\|/r) - \alpha(\|x_2\|/r)]\varphi(x_1) + \alpha(\|x_2\|/r)[\varphi(x_1) - \varphi(x_2)]\| \\ &\leq (K\|x_1 - x_2\|/r)(r/2K)\|x_1\| + (\epsilon/2K)\|x_1 - x_2\| \\ &\leq \epsilon\|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

Si $x_1 \in B_r$ y $x_2 \notin B_r$, tenemos $\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| \leq \epsilon/2\|x_1 - x_2\| \leq \epsilon\|x_1 - x_2\|$ y si $x_1, x_2 \notin B_r$ tenemos $\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| = 0 < \epsilon\|x_1 - x_2\|$. Luego, ϕ tiene constante de Lipschitz menor que ϵ , lo que demuestra el Lema. ■

Ahora procederemos a probar el teorema 2.13.

Demostración Sea $\epsilon > 0$ como en el lema (2.16). Sea $A + \phi$ una extensión de $f|_U$ donde U es una vecindad de 0 y $\phi \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ con constante de Lipschitz menor o igual que ϵ . Por el lema (2.16) tenemos que existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$hA = (A + \phi)h.$$

Luego tenemos que;

$$hA = fh$$

en una vecindad de 0. ■

Observación 2.18. 1. La conjugación entre $A + \phi_1$ y $A + \phi_2$ en el Lema 2.16 es única a distancia finita con la identidad. Si no exigiéramos esta última condición podríamos encontrar una infinidad de conjugaciones. Por ejemplo, considere una contracción $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(0) = 0$. Supongamos que $\varphi(1) = a > 0$ y $\varphi(-1) = b < 0$. Consideremos un homeomorfismo cualquiera $h : [-1, b] \cup [a, 1] \longrightarrow [-1, b] \cup [a, 1]$ con $h(-1) = -1$, $h(b) = b$, $h(a) = a$, $h(1) = 1$. Extendemos h a todo $\mathbb{R}$, haciendo $h(0) = 0$ y $h(x) = \varphi^n \circ h \circ \varphi^{-n}(x)$ donde $n \in \mathbb{Z}$ es tal que $\varphi^{-n}(x) \in [-1, b] \cup [a, 1]$. Tenemos así, tantas soluciones de la ecuación $h\varphi = \varphi h$ como homeomorfismos existen de $[-1, b] \cup [a, 1]$ en si mismo.

2. Incluso, exigiendo la proximidad a la identidad para la conjugación entre A y f , ella no es única pues depende de la extensión $A + \phi$ de f a todo el espacio $\mathbb{R}^m$.

A continuación extenderemos los resultados obtenidos anteriormente para campos de vectores. Para esto necesitamos probar algunos lemas.

Lema 2.19. (Desigualdad de Gronwall) Sean $u, v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas no negativas tal que, para algún $\alpha \geq 0$, se satisface que

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t u(s)v(s)ds, \quad \text{para todo } t \in [a, b].$$

Entonces,

$$u(t) \leq \alpha \exp \left[\int_a^t v(s)ds \right].$$

Demostración Sea $\omega : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación dada por $\omega(t) = \alpha + \int_a^t u(s)v(s)$. Supongamos primero que $\alpha > 0$, tenemos entonces que $\omega(a) = \alpha$ y $\omega(t) \geq \alpha > 0$ para todo $t \in [a, b]$. Como $\omega'(t) = u(t)v(t) \leq v(t)\omega(t)$, tenemos $\omega'(t)/\omega(t) \leq v(t)$. Integrando de a a t obtenemos

$$\frac{\omega(t)}{\omega(a)} \leq \exp \left[\int_a^t v(s)ds \right].$$

Entonces

$$u(t) \leq \omega(t) \leq \alpha \exp \left[\int_a^t v(s)ds \right].$$

Si $\alpha = 0$ el caso anterior implica que, para todo $\alpha_1 > 0$, $u(t) < \alpha_1 \exp \left[\int_a^t v(s)ds \right]$. Así, $u(t) = 0$ y la desigualdad queda demostrada. ■

Lema 2.20. Sea $\mathbb{Y} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un campo de vectores C^r con $\mathbb{Y}(0) = 0$ que satisface la condición de Lipschitz con constante K . Entonces el flujo de $\mathbb{Y}$ esta definido en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ y además cumple que para todo $x, y \in \mathbb{R}^m$

$$\|Y_t(x) - Y_t(y)\| \leq e^{K|t|}\|x - y\|.$$

Demostración Sea $x \in \mathbb{R}^m$. Supongamos que el intervalo maximal de la curva integral de $\mathbb{Y}$ que pasa por el punto x es (a, b) con $b < \infty$. Sea $\varphi : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la curva integral que pasa por el punto x . Tenemos entonces

$$\varphi(t) = x + \int_0^t \mathbb{Y}(\varphi(s))ds.$$

Por lo tanto, si $t \geq 0$,

$$\|\varphi(t)\| \leq \|x\| + \int_0^t \|\mathbb{Y}(\varphi(s))\|ds \leq \|x\| + K \int_0^t \|\varphi(s)\|ds.$$

De la desigualdad de Gronwall (lema 2.19) obtenemos

$$\|\varphi(t)\| \leq e^{K|t|}\|x\| \leq e^{Kb}\|x\| \quad \text{si } t \geq 0.$$

Sea $t_n \rightarrow b$ y considere la sucesión $\{\varphi(t_n)\}$ cuyos términos pertenecen a la bola cerrada con centro en 0 y radio $M = e^{Kb}\|x\|$. Como

$$\varphi(t_n) - \varphi(t_m) = \int_{t_m}^{t_n} \mathbb{Y}(\varphi(s))ds,$$

entonces tenemos que

$$\|\varphi(t_n) - \varphi(t_m)\| \leq KM|t_n - t_m|.$$

Así, $\varphi(t_n)$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^m$, por lo tanto, converge a un punto $y \in \mathbb{R}^m$. Así el flujo local de $\mathbb{Y}$ alrededor de y nos permite extender la curva integral φ a la derecha de b lo que contradice la hipótesis de maximalidad del intervalo (a, b) . Por lo tanto podemos concluir que el flujo del campo $\mathbb{Y}$ esta definido sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$. Por otra parte como

$$Y_t(x) - Y_t(y) = x - y + \int_0^t [\mathbb{Y}(Y_s(x)) - \mathbb{Y}(Y_s(y))]ds,$$

luego, para $t \geq 0$ tenemos;

$$\|Y_t(x) - Y_t(y)\| \leq \|x - y\| + K \int_0^t \|Y_s(x) - Y_s(y)\|ds.$$

Nuevamente de la desigualdad de Gronwall (Lema 2.19) obtenemos

$$\|Y_t(x) - Y_t(y)\| \leq e^{K|t|}\|x - y\|, \quad \text{si } t \geq 0.$$

Para $t \leq 0$ obtenemos la misma expresión solo que aplicando el argumento al campo $-\mathbb{Y}$. ■

Lema 2.21. *Sea $\mathbb{X} : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un campo C^r con $\mathbb{X}(0) = 0$. Sea $\mathbb{L} = D\mathbb{X}_{(0)}$. Dado $\epsilon > 0$ existe un campo C^r , $\mathbb{Y} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, con las siguientes propiedades:*

1. *El campo $\mathbb{Y}$ tiene constante de Lipschitz limitada por K , y por tanto, el flujo inducido por $\mathbb{Y}$ esta definido en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$;*
2. *$\mathbb{Y} = \mathbb{L}$ fuera de la bola $B_l(0)$ con centro en 0 y radio l ;*
3. *Existe un abierto de 0, $U \subset V$, tal que $\mathbb{Y} = \mathbb{X}$ en U ;*
4. *Si $Y_t = L_t + \phi_t$, existe $M > 0$ tal que $\|\phi_t\| \leq M$ para todo $t \in [-2, 2]$ y ϕ_1 tiene constante de Lipschitz menor o igual que ϵ . Además, $(D\phi_1)_{(0)} = 0$, o equivalentemente, $(DY_1)_{(0)} = e^L = L_1$.*

Demostración Como $\mathbb{L} = D\mathbb{X}_{(0)}$ tenemos $\mathbb{X} = \mathbb{L} + \psi$, donde $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una función C^r que satisface $\psi(0) = 0$ y $D\psi_{(0)} = 0$. Sea $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ tal que $\alpha(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$, $\alpha(t) = 1$ si $|t| \leq l/2$ y $\alpha(t) = 0$ si $t \geq l$.

Sea $\hat{\phi} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $\hat{\phi}(x) = \alpha(\|x\|)\psi(x)$ si $x \in V$ y $\hat{\phi}(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}^m - V$. Dado $\delta > 0$, podemos escoger $l > 0$ de tal forma que la función $\hat{\phi}$ sea C^r y tenga constante de Lipschitz acotada por δ . Es claro que $\hat{\phi} = \psi$ en $B_{l/2}(0)$ y $\hat{\phi}(x) = 0$ fuera de la bola $B_l(0)$. Sea $\mathbb{Y} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ el campo de vectores definido por $\mathbb{Y} = \mathbb{L} + \hat{\phi}$. Es fácil verificar que $\mathbb{Y} = \mathbb{X}$ en $B_{l/2}(0)$, $\mathbb{Y} = \mathbb{L}$ fuera de la bola $B_l(0)$ e $\mathbb{Y}$ satisface (1). Solo nos resta mostrar la última condición. En efecto; por el Lema 2.20 tenemos que

$$\|Y_t(x) - Y_t(y)\| \leq e^{2K}\|x - y\|, \quad \text{para } t \in [-2, 2].$$

Sea $\phi_t = Y_t - L_t$, tenemos entonces

$$\phi_t(x) - \phi_t(y) = \int_0^t [\hat{\phi}(Y_s(x)) - \hat{\phi}(Y_s(y))]ds + \int_0^t L(\phi_s(x) - \phi_s(y))ds.$$

Usando la desigualdad de Gronwall (lema 2.19) concluimos que

$$\|\phi_t(x) - \phi_t(y)\| \leq e^{2K} \delta e^{2\|L\|} \|x - y\|, \text{ para todo } t \in [-2, 2].$$

Tomando δ suficientemente pequeño probamos la primera parte de la condición (4).

Finalmente, mostraremos que $(D\phi_1)_{(0)} = 0$. Queremos mostrar que dado $\rho > 0$ existe $r > 0$ tal que $\|\phi_1(x)\| \leq \rho\|x\|$ para $\|x\| \leq r$. Como $(D\hat{\phi}_1)_{(0)} = 0$, podemos escoger r de manera que $\|\hat{\phi}(z)\| \leq \eta\|z\|$ para $\|z\| < r$ con $\eta < \rho e^{-(K+\|L\|)}$. Como

$$\phi_1(x) = \int_0^1 \hat{\phi}_1(Y_s(x)) ds + \int_0^1 \mathbb{L}(\phi_s(x)) ds.$$

Usando el hecho de que $\|Y_s(x)\| \leq e^K\|x\|$ para $0 \leq s \leq 1$, de la desigualdad de Gronwall (Lema 2.19) obtenemos

$$\|\phi_1(x)\| \leq \eta e^{K+\|L\|} \|x\| \leq \rho\|x\|.$$

Por lo tanto; hemos probado de forma completa el lema 2.21. ■

El siguiente lema nos permitirá extender el resultado del teorema 2.13 para campos.

Lema 2.22. *Sean $x_t = \phi(t, x)$ solución del sistema $\dot{x} = \mathbb{X}(x)$ y $u_t = \ell(t, u)$ solución del sistema $\dot{u} = \mathbb{L}(u)$, donde $\mathbb{L}$ es la parte lineal del campo $\mathbb{X}$. Consideremos el conjunto de transformaciones $T_t : x_t = \phi(t, x)$ y $L_t : u_t = \ell(t, u)$. Si existe un homeomorfismo h tal que*

$$hT_1 = L_1h$$

Entonces existe un cambio de variables H de una vecindad de $x = 0$ a una vecindad de $u = 0$ tal que para todo t :

$$HT_tH^{-1} = L_t$$

Demostración Definamos $H(x) = \int_0^1 L_{-s}hT_s(x)ds$, vamos a probar que $HT_t = L_tH$, para todo t . En efecto

$$\begin{aligned} L_{-t}HT_t(x) &= L_{-t} \left(\int_0^1 L_{-s}hT_s ds \right) T_t(x) \\ &= \int_0^1 L_{-(t+s)}hT_{(t+s)}(x) ds \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $u = t + s - 1$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
&= \int_{t-1}^t L_{-(u+1)} hT_{(u+1)}(x) du \\
&= \int_{t-1}^0 L_{-(u+1)} hT_{(u+1)}(x) du + \int_0^t L_{-(u+1)} hT_{(u+1)}(x) du
\end{aligned}$$

Nuevamente haciendo el cambio de variables $v = u + 1$ para la primera integral y $v = u$ para la segunda y sabiendo que $L_1 hT_1 = h$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
&= \int_t^1 L_{-v} hT_v(x) dv + \int_0^t L_{-(v+1)} hT_{(v+1)}(x) dv \\
&= \int_t^1 L_{-v} hT_v(x) dv + \int_0^t L_{-v} L_{-1} hT_1 T_v(x) dv \\
&= \int_t^1 L_{-v} hT_v(x) dv + \int_0^t L_{-v} hT_v(x) dv \\
&= \int_0^t L_{-v} hT_v(x) dv \\
&= H(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $L_t H T_t = H$ para todo t . Por otro lado notemos que para $t = 1$ tenemos que $H T_1 = L_1 H$, así podemos concluir que $H = h$. $\blacksquare$

Observación 2.23. *El lema anterior nos permite concluir que si h es C^k entonces H también lo es.*

Teorema 2.24. *(Hartman-Grobman para campos) Sea $\mathbb{X} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un campo C^r y 0 una singularidad hiperbólica de $\mathbb{X}$. Sea $\mathbb{L} = D\mathbb{X}_{(0)}$. Entonces $\mathbb{X}$ es localmente equivalente a $\mathbb{L}$ en 0.*

Demostración Sea $\mathbb{Y} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un campo C^r como en el Lema 2.21. Dado que $\mathbb{Y} = \mathbb{X}$ en U , vecindad de 0, tenemos que la aplicación identidad en U lleva órbitas de $\mathbb{X}$ en órbitas de $\mathbb{Y}$. Por lo tanto $\mathbb{Y}$ es localmente equivalente a $\mathbb{X}$. Solo nos restaría probar que $\mathbb{Y}$ es localmente equivalente a $\mathbb{L}$. De hecho mostraremos que existe un homeomorfismo de $\mathbb{R}^m$ que conjuga los flujos Y_t y L_t . Por el Lema 2.21, $Y_t = L_t + \phi_t$ y como $(DY_1)_{(0)} = L_1$. Luego el difeomorfismo $Y_1 = L_1 + \phi_1$ tiene al origen como punto fijo hiperbólico y ϕ_1 tiene constante de Lipschitz acotada por ϵ . Por el Lema 2.16 existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ cercano a la identidad [$h = I + u$, $u \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$] que satisface

$$hY_1 = L_1 h \tag{2.12}$$

luego por el Lema 2.22 tenemos la existencia de H tal que

$$L_t H = H Y_t, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

■

A continuación daremos un ejemplo para mostrar que la condición de hiperbólicidad es fundamental en el Teorema 2.24.

Ejemplo 2.25. Sea $\omega > 0$ y considere el sistema no lineal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega y + g_1(x, y) \\ \dot{y} &= \omega x + g_2(x, y), \end{aligned} \tag{2.13}$$

donde las funciones g_1 y g_2 cumplen la condición dada en (2.6). La solución general asociada a la parte lineal del campo (2.13) está dada por

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos(\omega t) - y_0 \sin(\omega t) \\ y &= y_0 \cos(\omega t) + x_0 \sin(\omega t), \end{aligned} \tag{2.14}$$

como los autovalores de la matriz asociada a la parte lineal son imaginarios puros ($\lambda_{1,2} = \pm i\omega$), el retrato de fase de la parte lineal son curvas cerradas, mas explícitamente son circunferencias concéntricas que rodean el origen como muestra la Figura 3.

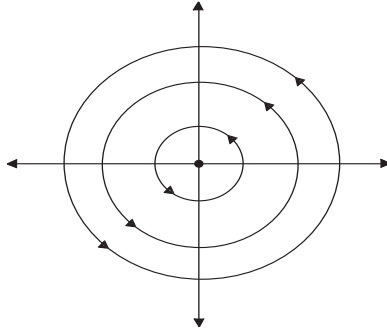


Figura 3: Retrato de fase para el sistema lineal (2.13).

Sin embargo el retrato de fase del sistema no lineal es diferente cuando g_1 y g_2 son funciones no nulas. En efecto, supongamos $g_1 = -x(x^2 + y^2)$ y $g_2 = -y(x^2 + y^2)$, para este ejemplo es sencillo calcular la solución analítica empleando coordenadas polares dadas por

$$x = r \cos(\theta) \text{ e } y = r \sin(\theta), \tag{2.15}$$

reemplazando tenemos que

$$\begin{aligned}\dot{r} \cos(\theta) - r \sin(\theta) \dot{\theta} &= -\omega r \sin(\theta) - r^3 \cos(\theta) \\ \dot{r} \sin(\theta) + r \cos(\theta) \dot{\theta} &= \omega r \cos(\theta) - r^3 \sin(\theta),\end{aligned}$$

el sistema (2.13) se puede expresar como

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -r^3 \\ \dot{\theta} &= \omega,\end{aligned}$$

donde $r(0) = r_0$ y $\theta(0) = \theta_0$ cuya solución es

$$r(t)^2 = \frac{1}{2\theta(t) + r_0^{-2}}$$

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0,$$

Por lo tanto en el caso que $g_1 = -x(x^2 + y^2)$ y $g_2 = -y(x^2 + y^2)$ el retrato de fase tiene forma de espirales a contra reloj, acercándose al origen como muestra la siguiente Figura 4.

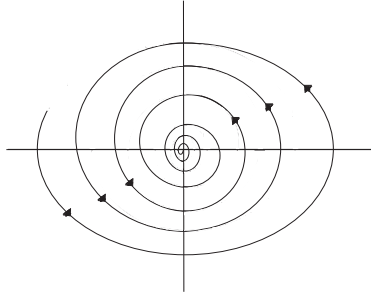


Figura 4: Retrato de fase para el sistema no lineal (2.14).

Evidentemente en una pequeña vecindad de la singularidad no existe un homeomorfismo que lleve trayectorias cerradas de tal sistema al sistema linealizado. Concluimos que el sistema no es topológicamente equivalente a su parte lineal, pues falla la condición de hiperbólicidad.

3. Linealización Diferenciable

En este capítulo presentaremos una serie de teoremas los cuales garantizan linealización diferenciable para un campos C^k , es decir, daremos condiciones suficientes para que un campo C^k sea C^r -linealizable con $0 < r \leq k$. En la primera sección presentaremos el caso de campos reales y mostraremos que todo campo hiperbólico C^k cuya k -ésima derivada satisface la condición de Hölder es C^k -linealizable. En la segunda sección exhibiremos ejemplos que muestran que el resultado anterior no ocurre para dimensiones mayores, presentando ejemplos de campos C^∞ los cuales su linealización tiene poca diferenciabilidad. Por último estudiaremos el teorema de Poincaré, el cual a partir de una condición algebraica y una condición geométrica de los autovalores de la matriz de la parte lineal de un campo C^∞ , nos permite garantizar la existencia de una linealización C^∞ .

El interés por estudiar linealizaciones continuamente diferenciables surge por la necesidad de conocer cuál es realmente la forma de las trayectorias en una vecindad de la singularidad de un campo no lineal. Como sabemos la linealización C^0 solo nos indica cual el comportamiento topológico de estas mismas a través de una equivalencia topológica con la parte lineal del campo. Para asegurar que se conserva la forma de las trayectorias de un campo lineal y su parte lineal es necesario que la aplicación H que conjuga los flujos no solamente sea continua si no también suave (con primera derivada continua), es decir que H sea un difeomorfismo.

El siguiente ejemplo propuesto por O. Perron [8] muestra lo dicho anteriormente.

Ejemplo 3.1. *Considere el sistema no lineal descrito por las siguientes ecuaciones*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - \frac{y}{2 \ln \sqrt{x^2 + y^2}} \\ \dot{y} = -y + \frac{x}{2 \ln \sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} . \quad (3.1)$$

La matriz jacobiana evaluada en el punto de equilibrio esta dada por

$$A = D\mathbb{X}_{(0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

*El diagrama de las trayectorias de la parte lineal del campo (3.1) en el plano de fase es un **nodo propio** (tipo estrella) estable como muestra la Figura 5.*

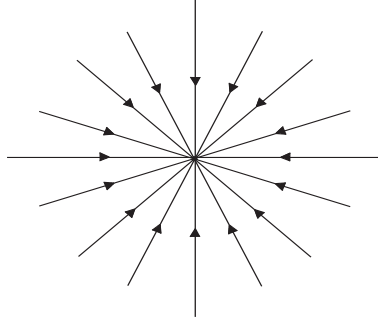


Figura 5: Retrato de fase para el sistema lineal asociado al sistema (3.1).

Para este ejemplo es sencillo calcular la solución analítica. Empleando coordenadas polares como en (2.15), el sistema (3.1) se puede expresar como

$$\begin{cases} \dot{r} = -r, & r(0) = r_0, \\ \dot{\theta} = (\ln r)^{-1}, & \theta(0) = \theta_0, \end{cases}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} r(t) &= r_0 e^{-t}, \\ \theta(t) &= \theta_0 - \ln \left(1 - \frac{t}{\ln r_0} \right), \end{aligned}$$

donde la condición inicial se elige en el intervalo $0 < \rho < 1$ para evitar singularidades. Una trayectoria solución en el plano de fase se muestra en la Figura 6.

Mientras que el sistema linealizado indica un comportamiento tipo **nodo propio** estable (Fig. 5), el sistema no lineal se comporta como un **foco** estable (Fig. 6). Esta discrepancia se debe, en este caso, a que no existe una linealización continuamente diferenciable para el sistema (3.1). Observemos que, el campo asociado a este sistema es de clase C^1 y además es un campo hiperbólico, por lo que el teorema de Hartman-Grobman nos garantiza que es C^0 -linealizable, esto es, que el campo (3.1) es topológicamente equivalente con su parte lineal, como lo podemos notar en el comportamiento de las trayectorias, sin embargo, las trayectorias son distintas. La siguiente proposición nos indica que en un campo C^r -linealizable, con $r > 0$, los nodos y los focos persisten bajo pequeñas perturbaciones del campo lineal.

La siguiente proposición generaliza lo observado anteriormente.

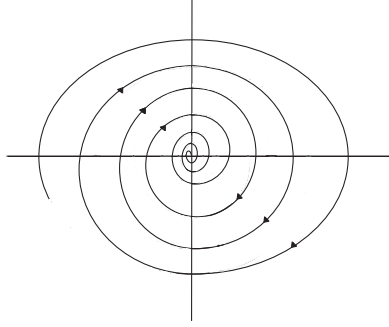


Figura 6: Retrato de fase asociado al sistema (3.1).

Proposición 3.2. Sean $\mathbb{X} \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{R}^m)$, ξ una singularidad hiperbólica del campo $\dot{x} = \mathbb{X}(x)$. Si $\mathbb{X}$ es C^r -linealizable, entonces ξ es

- Un nodo estable (inestable) del sistema $\dot{x} = \mathbb{X}(x)$, si y solo si, es un nodo estable (inestable) para el sistema lineal $\dot{x} = Ax$, donde $A = D\mathbb{X}_{(\xi)}$.
- Un foco estable (inestable) del sistema $\dot{x} = \mathbb{X}(x)$, si y solo si, es un foco estable (inestable) para el sistema lineal $\dot{x} = Ax$, donde $A = D\mathbb{X}_{(\xi)}$.

3.1. Caso unidimensional real

Al igual que en la demostración del teorema de Hartman-Grobman, en primer lugar estudiaremos que ocurre con difeomorfismos reales con variable real, para luego extender el resultado para campos reales aplicando el lema 2.22. La siguiente definición nos permite diferenciar funciones que son continuamente diferenciable con otras que tienen un poco mas de continuidad en su derivada.

Definición 3.3. Sea X un espacio de Banach. Para k entero y un $0 < \alpha < 1$. Una aplicación diferenciable $f : X \rightarrow X$ es una $C^{k,\alpha}$ contracción si existe $C > 0$ tal que para todo $x, y \in X$:

$$\|f^k(x) - f^k(y)\| \leq C\|x - y\|^\alpha \quad (3.2)$$

Proposición 3.4. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ un difeomorfismo $C^{1,\alpha}$ tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = \lambda$. Entonces existe un difeomorfismo C^1 tal que

$$hf = \lambda h. \quad (3.3)$$

Demostración Consideremos $0 < |\lambda| < 1$, de la ecuación (3.3) se tiene que

$$(hf^n)(x) = \lambda^n h(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Así

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(hf^n)(x)}{\lambda^n}. \quad (3.4)$$

Afirmación 3.5. Podemos suponer h tal que $h'(0) = 1$ y así reescribir la ecuación (3.4) en

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x)}{\lambda^n}. \quad (3.5)$$

En efecto, de la ecuación (3.4) se tiene

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x)}{\lambda^n} \cdot \frac{h(f^n(x))}{f^n(x)}. \quad (3.6)$$

Como $h(0) = 0$ y $f^n(x) \rightarrow 0, \forall x \in \mathbb{R}$, entonces

$$h'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(f^n(x))}{f^n(x)}.$$

Y así la ecuación (3.6) queda

$$h(x) = h'(0) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x)}{\lambda^n}.$$

Por lo tanto definiendo $\tilde{h}(x) = \frac{h(x)}{h'(0)}$ se prueba la afirmación.

Debemos probar que el límite (3.5) existe. Observemos que h así definida conjuga. En efecto,

$$\begin{aligned} (hf)(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(f(x))}{\lambda^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{n+1}(x)}{\lambda^n} \cdot \frac{\lambda}{\lambda} \\ &= \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{n+1}(x)}{\lambda^{n+1}} = \lambda h(x). \end{aligned}$$

Sea

$$G_n(x) = \frac{f'(f^{n-1}(x))f'(f^{n-2}(x)) \cdots f'(x)}{\lambda^n} = \frac{f'(f^{n-1}(x))}{\lambda} \cdot \frac{f'(f^{n-2}(x))}{\lambda} \cdots \frac{f'(x)}{\lambda}$$

Notemos que para $F_n(x) = \frac{f^n(x)}{\lambda^n}$ tenemos que $F_n(0) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y además que $((F_n)'(x))_n = (G_n(x))_n$. Así para probar la convergencia uniforme de la sucesión $(F_n(x))_n$ solo nos restaría probar la convergencia uniforme de la sucesión $(G_n(x))_n$. En efecto:

$$\begin{aligned} |\lg(G_n(x))| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \lg \left(\frac{f'(f^i(x))}{\lambda} \right) \right| \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left| \lg \left(\frac{f'(f^i(x))}{\lambda} \right) - \lg \left(\frac{f'(0)}{\lambda} \right) \right|. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Aplicando el teorema del valor medio en (3.7) tenemos que para cada $i = 0, \dots, n-1$, existe ξ_i entre $\frac{f'(f^i(x))}{\lambda}$ y $\frac{f'(0)}{\lambda}$ tal que

$$\left| \lg \left(\frac{f'(f^i(x))}{\lambda} \right) - \lg \left(\frac{f'(0)}{\lambda} \right) \right| = \frac{1}{|\xi_i|} \left| \frac{f'(f^i(x))}{\lambda} - \frac{f'(0)}{\lambda} \right|. \quad (3.8)$$

Donde $\frac{1}{|\xi_i|} \leq 2$ pues ξ_i esta en una pequeña vecindad de 1. Considerando lo dicho anteriormente y además que la función f es $C^{1,\alpha}$ contractible se tiene de (3.7) y (3.8) que

$$\begin{aligned} |\lg(G_n(x))| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{|\xi_i|} \left| \frac{f'(f^i(x))}{\lambda} - \frac{f'(0)}{\lambda} \right| \\ &\leq \frac{2}{\lambda} \sum_{i=0}^{n-1} |f'(f^i(x)) - f'(0)| \\ &\leq \frac{2K}{\lambda} \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(x)|^\alpha. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
|f^i(x)| &= |f^i(x) - f(0)| = |f(f^{i-1}(x)) - f(0)| \\
&= |f'(\tilde{\xi})||f^{i-1}(x)| = (\lambda + \epsilon)|f^{i-1}(x)| \\
&= (\lambda + \epsilon)^i|x| < (\lambda + \epsilon)^i.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Por lo tanto de (3.9) y (3.10) tenemos que:

$$|\lg(G_n(x))| \leq \frac{2K}{\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda + \epsilon)^{i\alpha}. \tag{3.11}$$

Como la serie en (3.11) es convergente, se concluye que $(\lg(G_n))_n$ converge uniformemente lo que implica que $(G_n(x))_n$ converge uniformemente. Así hemos probado que $(F_n(x))$ converge a una función de clase C^1 o equivalentemente que el límite (3.5) existe y además que h así definida es de clase C^1 . En el caso de $|\lambda| > 1$ la demostración es análoga utilizando f^{-n} . ■

La condición de $C^{1,\alpha}$ para f es fundamental en el teorema anterior, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.6. *Considere la función $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \lambda x \left(1 - \frac{1}{\ln(x)} \right). \tag{3.12}$$

Afirmamos que f es C^1 pero no es $C^{1,\alpha}$, por lo que no se asegura la existencia del difeomorfismo h tal que (3.3). En efecto, Notemos que la derivada para todo $x \neq 0$ esta dada por

$$f'(x) = \lambda \left(1 - \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{[\ln(x)]^2} \right). \tag{3.13}$$

y la derivada de f en 0

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda x (1 - 1/\lg(x))}{x} \\
&= \lambda
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Así de (3.13) y (3.14) podemos decir que f es C^1 . Además observemos que f no es $C^{1,\alpha}$, pues para $x = 0$ e $y = 1$ tenemos que

$$\frac{|f'(x) - f'(y)|}{|x - y|^\alpha} \rightarrow \infty,$$

por lo que es imposible hallar un $K > 0$ tal que se cumpla la condición (3.2). Bajo estas condiciones pasaremos a probar que para cada $x \in \mathbb{R}$, el límite definido en (3.5) no existe. En efecto, de (3.12) inductivamente obtenemos que

$$f^n(x) = \lambda^n x \prod_{k=0}^n \left(1 - \frac{1}{\ln(f^k(x))}\right),$$

luego

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x)}{\lambda^n} &= x \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n \left(1 - \frac{1}{\ln(f^k(x))}\right) \\ &= x \left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{\ln(f^k(x))}\right) \\ &= x \left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right) F_n(x), \end{aligned} \tag{3.15}$$

donde $F_n(x)$ esta dado por

$$F_n(x) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{\ln(f^k(x))}\right).$$

Notemos que de (3.10) podemos decir que $\ln(f^k(x)) \approx \ln(\lambda)^k = k \ln(\lambda)$, además si $0 < \lambda < 1$ tenemos que $\ln(f^k(x)) \approx k \left(\frac{-1}{s}\right)$ con $s > 1$, luego

$$F_n(x) \approx \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s}{k}\right),$$

donde la productoria a la derecha de la igualdad es divergente, por lo que el límite en (3.15) lo es también.

En la proposición 3.4 garantizamos linealización C^1 para difeomorfismos $C^{1,\alpha}$. El siguiente resultado nos permite extenderlo a linealización C^k a partir de difeomorfismos $C^{k,\alpha}$.

Proposición 3.7. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un difeomorfismo $C^{k,\alpha}$ tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = \lambda$. Entonces existe un C^k -difeomorfismo h tal que

$$hf = \lambda h. \tag{3.16}$$

Notemos que si $\mathbb{X}$ es un campo $C^{k,\alpha}$, con parte lineal $\mathbb{L}$ y supongamos que $x_t = \phi(t, x)$ y $u_t = l(t, x)$ son las soluciones del sistema $\dot{x} = \mathbb{X}(x)$ y $\dot{u} = \mathbb{L}(u)$ respectivamente. El teorema de diferenciabilidad con respecto a las condiciones iniciales nos permite garantizar que la solución ϕ es $C^{k,\alpha}$, luego por la proposición 3.7 existe un difeomorfismo C^k tal que

$$hx_1 = u_1h.$$

Así por el Lema 2.22 tenemos que existe H definida en una vecindad de $x = 0$ a una vecindad $u = 0$ dada por

$$H(x) = \int_0^1 u_{-s} h x_s(x) ds \quad (3.17)$$

tal que

$$Hx_t = u_t H, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Por otra parte, observemos que H definida en (3.17) es una función C^k . Esto nos permite enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3.8. *Sean $\mathbb{X} \in \mathfrak{X}^{k,\alpha}(\mathbb{R})$ y 0 una singularidad hiperbólica de $\mathbb{X}$. Entonces $\mathbb{X}$ es C^k -linealizable.*

3.2. Ejemplos

El Teorema 3.8 no permite garantizar que un campo real $C^{k,\alpha}$ es C^k -linealizable alrededor de una singularidad hiperbólica. Para campos definidos en espacios de Banach de dimensión mayor que 1, no ocurre algo similar. En esta sección veremos dos ejemplos que muestran lo dicho anteriormente.

El siguiente ejemplo considera un difeomorfismo C^∞ , mostraremos que tal difeomorfismo no es C^2 -linealizable .

Ejemplo 3.9. *Sea $f(x, y) = (a^2x + y^2, ay)$, Notemos que:*

$$Df_{(0)} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Supongamos que existe una linealización $h : (x, y) \rightarrow (u, v) = (\psi(x, y), \varphi(x, y))$. Como $hf = Df_{(0)}$, entonces tenemos que:

$$(\psi(a^2x + y^2, ay), \varphi(a^2x + y^2, ay)) = (a^2\psi(x, y), a\varphi(x, y))$$

por lo que obtenemos que:

$$\psi(a^2x + y^2, ay) = a^2\psi(x, y).$$

Derivando con respecto a y esta última desigualdad se obtiene

$$2y\psi_x(a^2x + y^2, ay) + a\psi_y(a^2x + y^2, ay) = a^2\psi_y(x, y).$$

Haciendo $x = y = 0$ se concluye que $\psi_y(0, 0) = (0, 0)$. Ahora, si derivamos la última igualdad con respecto a y nuevamente, obtenemos

$$2\psi_x(a^2x + y^2, ay) + 2y[2y\psi_{xx}(a^2x + y^2, ay) + 2a\psi_{xy}(a^2x + y^2, ay)] + a^2\psi_{yy}(a^2x + y^2, ay) = a^2\psi_{yy}(x, y)$$

Haciendo $x = y = 0$ se obtiene que $\psi_x(0, 0) = 0$. Así podemos concluir que el jacobiano de h en $(0, 0)$ es nulo. Por lo que h no puede ser C^2 y lo que nos permite concluir que f no es C^2 -linealizable.

En el siguiente ejemplo propuesto por Hartman [4], se considera un campo C^∞ el cual no es C^1 linealizable.

Ejemplo 3.10. Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x \\ y' &= (\alpha - \gamma)y + \epsilon xz \\ z' &= -\gamma z, \end{aligned} \tag{3.18}$$

donde $\alpha > \gamma > 0$ y $\epsilon \neq 0$. Este sistema tiene como solución general

$$\begin{aligned} T_t : \quad x_t &= xe^{\alpha t} \\ y_t &= (y + \epsilon xzt)e^{(\alpha - \gamma)t} \\ z_t &= ze^{-\gamma t}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

Considere la aplicación analítica $T = T_1$, dada por

$$\begin{aligned} T : \quad x_1 &= ax \\ y_1 &= ac(y + \epsilon xz) \\ z_1 &= cz, \end{aligned} \tag{3.20}$$

donde $a = e^\alpha$ y $c = e^{-\gamma}$. Así tenemos que $a > 1 > c > 0$ y $ac > 1$. Se puede comprobar fácilmente que cada una de las aplicaciones

$$\begin{aligned} h : \quad u &= x \\ v &= y - \epsilon xz \frac{\lg |x|}{\lg a} \\ w &= z \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} h : \quad u &= x \\ v &= y - \epsilon x z \frac{\lg |z|}{\lg c} \\ w &= z, \end{aligned}$$

linealizan (3.20), de hecho (3.19) para todo t . Resulta que la no existencia de algunas derivadas de estas aplicaciones en $x = 0$ o $z = 0$ no se pueden evitar. Se demostrará que si

$$\begin{aligned} h^{-1} : \quad x &= f(u, v, w) \\ y &= g(u, v, w) \\ z &= r(u, v, w) \end{aligned} \tag{3.21}$$

es un homeomorfismo local que linealiza (3.20), entonces ya sea la derivada parcial $g_u(0, 0, w)$ no existe para todo $w \neq 0$ ó $g_w(u, 0, 0)$ no existe para todo $u \neq 0$.

Demostración Para nuestra demostración consideraremos siempre a $v = 0$ (y pequeños $|u|, |w|$), además denotaremos como $j(u, w)$ a $j(u, 0, w)$ para $j = f, g, r$. La relación $Th^{-1} = h^{-1}L$ (donde L es la parte lineal de (3.20) esta dada por

$$\begin{aligned} af &= f(au, cw) \\ ac[g + \epsilon fr] &= g(au, cw) \\ cr &= r(au, cw), \end{aligned}$$

donde los argumentos de f, g, r a la izquierda son (u, w) . Una simple inducción prueba que

$$\begin{aligned} a^n f &= f(a^n u, c^n w) \\ a^n c^n [g + n\epsilon fr] &= g(a^n u, c^n w) \\ c^n r &= r(a^n u, c^n w). \end{aligned} \tag{3.22}$$

La primera de estas relaciones implica que $f(0, w) = a^{-n} f(0, c^n w) \longrightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto $f(0, w) \equiv 0$. Análogamente se concluye que $r(u, 0) \equiv 0$. Se sigue entonces, de $ac > 1$, que $g(0, w) \equiv 0$.

Multiplicando la segunda igualdad de (3.22) por c^{-n} y reemplazando u por $\frac{u}{a^n}$ obtenemos

$$a^n g\left(\frac{u}{a^n}, w\right) + n\epsilon f(u, c^n w) r\left(\frac{u}{a^n}, w\right) = c^{-n} g(u, c^n w). \tag{3.23}$$

Supongamos que $g_u(0, w)$, $g_w(u, 0)$ existen (para u, w fijos), entonces

$$\begin{aligned} a^n g\left(\frac{u}{a^n}, w\right) &= a^n [g\left(\frac{u}{a^n}, w\right) - g(0, w)] \\ &= O(1) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} c^{-n} g(u, c^n w) &= c^{-n} [g(u, c^n w) - g(u, 0)] + c^{-n} g(u, 0) \\ &= O(1) + c^{-n} g(u, 0) \end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Así (3.23) muestra que $c^{-n} g(u, 0) = O(n)$. Como $c < 1$, se sigue que $g(u, 0) = 0$, pero entonces (3.23) implica que $f(u, 0)r(0, w) = 0$ lo cual es imposible para $uw \neq 0$. Por ejemplo, si $f(u, 0) = 0$ y $u \neq 0$, entonces $f = g = r = 0$ cuando (u, v, w) es el punto $(u, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$, y esto contradice el hecho de que h^{-1} es inyectiva. Se sigue que si $g_u(0, w)$ existe para algún $w \neq 0$ entonces $g_w(u, 0)$ no existe para todo $u \neq 0$.

3.3. Teoremas clásicos de linealización

El Teorema de Hartman-Grobman establece que el sistema

$$\dot{x} = Ax + f(x) \tag{3.24}$$

en una vecindad del origen, donde $f(0) = 0$ y $Df(0) = 0$, es conjugado al sistema linealizado

$$\dot{y} = Ay. \tag{3.25}$$

Poincaré fue uno de los primeros en preguntarse por linealización continuamente diferenciable, y se enfocó en el caso analítico. Observemos que un cambio de variables continuamente diferenciable preserva los autovalores $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ de la matriz A , además, cuando este cambio de variables es localmente cercano a la identidad, este preserva la matriz A en sí. Es por eso que Poincaré básicamente establece que bajo un cambio de variables continuamente diferenciable de la forma

$$\dot{y} = x + \varphi(x), \tag{3.26}$$

donde $\varphi(0) = 0$ y $D\varphi(0) = 0$ y bajo resonancia de los autovalores, el sistema original (3.24) se puede reducir al sistema (3.25).

La siguiente definición es la condición algebraica que descubrió Poincare para hacer válida el cambio de coordenadas que linealiza el sistema (3.24)

Definición 3.11. *El conjunto $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ de los autovalores de la matriz A es llamado un conjunto resonante si existe la relación lineal,*

$$\lambda_k = \sum_{j=1}^n m_j \lambda_j = (m, \lambda), \quad (3.27)$$

donde $m = (m_1, \dots, m_n)$ es la fila de enteros no negativos tal que $|m| = \sum_{j=1}^n m_j \geq 2$. La relación anterior es llamada resonancia y $|m|$ es llamada el orden de la resonancia.

Ejemplo 3.12. *Para el conjunto de autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2\}$,*

1. *La relación $\lambda_1 = 2\lambda_2$ es una resonancia de orden 2.*
2. *La relación $2\lambda_1 = 3\lambda_2$ no es una resonancia.*
3. *La relación $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ es una resonancia de orden 3. (Más precisamente, esta relación implica que $\lambda_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2$)*

Observación 3.13. *Sea $f(x)$ una función de clase C^N , entonces satisface la expansión,*

$$f(x) = f_2(x) + \dots + f_N(x) + o_N(x), \quad (3.28)$$

donde $f_l(x), l = 2, \dots, N$, es un polinomio homogéneo de grado l , y $o_N(x)$ representa los términos que se anulan en el origen a lo largo de las N derivadas.

Lema 3.14. (Poincaré) *Sea $f(x)$ una función de clase C^N y asumimos que no hay resonancia de orden $|m| \leq N$. Entonces hay un cambio de variable polinomial*

$$y = x + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_N(x), \quad (3.29)$$

donde $\varphi_l(x), l = 2, \dots, N$ es un polinomio homogéneo de grado l , el cual transforma el sistema (3.24) en

$$\dot{y} = Ay + o_N(y). \quad (3.30)$$

Demostración Derivando (3.29) y reemplazando (3.24) obtenemos,

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= \dot{x} + \sum_{l=2}^N \frac{\partial \varphi_l(x)}{\partial x} \dot{x} \\
&= Ax + f_2(x) + \cdots + f_N(x) + o_N(x) \\
&\quad + \sum_{l=2}^N \frac{\partial \varphi_l(x)}{\partial x} [Ax + f_2(x) + \cdots + f_N(x) + o_N(x)] \\
&= Ay - A\varphi_2(x) - \cdots - A\varphi_N(x) + f_2(x) + \cdots + f_N(x) \\
&\quad + \sum_{l=2}^N \frac{\partial \varphi_l(x)}{\partial x} [Ax + f_2(x) + \cdots + f_N(x)] + \cdots,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

donde los últimos sumando contiene términos de grado $N + 1$ y más grande. El resto de los términos (excepto Ay) se anulan entre si, por lo tanto debemos asumir que $\varphi_2(x)$ satisface la ecuación

$$-A\varphi_2(x) + f_2(x) + \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} Ax = 0; \tag{3.32}$$

$\varphi_3(x)$ satisface

$$-A\varphi_3(x) + f_3(x) + \frac{\partial \varphi_3(x)}{\partial x} Ax + \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} f_2(x) = 0; \tag{3.33}$$

y así sucesivamente hasta $\varphi_N(x)$, que satisface

$$-A\varphi_N(x) + f_N(x) + \frac{\partial \varphi_N(x)}{\partial x} Ax + \sum_{p+q=N+1} \frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial x} f_q(x) = 0. \tag{3.34}$$

Probaremos el Lema para los distintos casos para la matriz A . En efecto,

Caso 1: Cuando la matriz A es diagonal, es decir,

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Recordemos que $\varphi_l(x)$ y $f_l(x)$ son vectores polinomiales homogéneos de grado l , es decir,

$$\begin{aligned}\varphi_l(x) &= (\varphi_{l1}(x), \dots, \varphi_{lk}(x), \dots, \varphi_{ln}(x)) \\ f_l(x) &= (f_{l1}(x), \dots, f_{lk}(x), \dots, f_{ln}(x))\end{aligned}$$

$k = 1, \dots, n$. Para los cuales los polinomios $\varphi_{lk}(x)$ y $f_{lk}(x)$ son de la forma

$$\begin{aligned}\varphi_{lk} &= \sum_{m_1 + \dots + m_n = l} c_{(m)k} x^{(m)} \\ f_{lk} &= \sum_{m_1 + \dots + m_n = l} d_{(m)k} x^{(m)}\end{aligned}$$

donde $c_{(m)k}$, $d_{(m)k}$ y $x^{(m)} \in \mathbb{R}$ y denotan

$$\begin{aligned}c_{(m)k} &= c_{(m_1, m_2, \dots, m_n)k} \\ d_{(m)k} &= d_{(m_1, m_2, \dots, m_n)k} \\ x^{(m)} &= \prod_{i=1}^n x_i^{m_i}.\end{aligned}$$

Las ecuaciones (3.32)-(3.34) reescritas componente a componente quedan de la forma

$$-\lambda_k \varphi_{2k}(x) + \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial \varphi_{2k}(x)}{\partial x_j} x_j + f_{2k}(x) = 0, \quad (3.35)$$

$$-\lambda_k \varphi_{3k}(x) + \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial \varphi_{3k}(x)}{\partial x_j} x_j + f_{3k}(x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_{2k}(x)}{\partial x_j} f_{2j}(x) = 0, \quad (3.36)$$

$$\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

$$-\lambda_k \varphi_{Nk}(x) + \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial \varphi_{Nk}(x)}{\partial x_j} x_j + f_{Nk}(x) + \sum_{j=1}^n \sum_{p+q=N+1} \frac{\partial \varphi_{pk}(x)}{\partial x_j} f_{qj}(x) = 0, \quad (3.37)$$

donde $k = 1, \dots, n$.

Primero resolvamos (3.35). Igualando los coeficientes de los términos semejantes se obtiene la ecuación

$$[(m, \lambda) - \lambda_k]c_{(m)k} + d_{(m)k} = 0. \quad (3.38)$$

Es claro que esta ecuación la podemos resolver, pues no hay resonancia de orden 2, así podemos encontrar

$$c_{(m)k} = \frac{d_{(m)k}}{[\lambda_k - (m, \lambda)]}, \quad (3.39)$$

y, en consecuencia, la expresión para $\varphi_2(x)$. Substituyendo $\varphi_2(x)$ en la ecuación (3.36) y procediendo de manera análoga al anterior obtenemos la ecuación para los coeficientes desconocidos de $\varphi_3(x)$

$$[(m, \lambda) - \lambda_k]c_{(m)k} + \bar{d}_{(m)k} = 0 \quad (3.40)$$

con $\bar{d}_{(m)k} = d_{(m)k} + d'_{(m)k}$, donde $d'_{(m)k}$ son los coeficientes de $x^{(m)}$ en la segunda suma de (3.36) (todos conocidos). Como no hay resonancia de orden 3 podemos obtener todos los $c_{(m)k}$ deseados y en particular la expresión para $\varphi_3(x)$. Procediendo de manera sucesiva podemos obtener todos los $\varphi_l(x)$ ($l = 2, \dots, N$) satisfaciendo las ecuaciones (3.32)-(3.34). Esto prueba el lema cuando todos los autovalores de A son y distintos.

Caso 2: Cuando la matriz A tiene autovalores complejos simples, en este caso la matriz tiene una forma de diagonal por bloques dada por:

$$\begin{aligned} A_{kk} &= \lambda_k & \text{si } \lambda_k \text{ es real.} \\ A_{kk} &= A_{k+1,k+1} = \operatorname{Re} \lambda_k, & A_{k,k+1} = -A_{k+1,k} = \operatorname{Im} \lambda_k & \text{si } \lambda_k = \lambda_{k+1}^* \end{aligned}$$

donde $*$ denota la conjugación compleja. Esta matriz es llevada a su forma diagonal por el cambio de coordenadas complejos

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= x_k & \text{si } \lambda_k \text{ es real.} \\ \hat{x}_k &= x_k + ix_{k+1}, & \hat{x}_{k+1} &= x_k - ix_{k+1} & \text{si } \lambda_k = \lambda_{k+1}^*. \end{aligned}$$

Como $\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k^*$, se sigue que la nueva función f satisface

$$f_{l,k+1}(\hat{x}) = f_{l,k}(\hat{x})^*$$

para cada k tal que $\lambda_k = \lambda_{k+1}^*$. Luego podemos concluir que las coordenadas de la función φ definidas por (3.35)-(3.37) satisfacen

$$\varphi_{l,k+1}(\hat{x}) = \varphi_{l,k}(\hat{x})^*$$

para aquellos k . Entonces, claramente la transformación a coordenadas reales esta dada por

$$y_k = x_k + \sum_{l=2}^N \operatorname{Re} \varphi_{lk}(\hat{x})$$

$$y_{k+1} = x_{k+1} + \sum_{l=2}^N \operatorname{Im} \varphi_{lk}(\hat{x})$$

lleva el sistema a la forma (3.25).

Caso 3: Cuando existan autovalores repetidos, la matriz A puede ser escrita en la forma de Jordan (real o compleja); donde los autovalores λ_k están en la misma diagonal y algunos valores sobre la diagonal pueden ser distintos de cero, digamos

$$A_{k,k+1} = \delta_k$$

donde δ_k toma los valores de 0 ó 1. Así los términos adicionales

$$\delta_k \varphi_{k+1}(x) \quad y \quad \delta_j \frac{\partial \varphi_{lk}}{\partial x_j} x_{j+1}$$

pueden aparecer en (3.35)-(3.37). Obviamente este hecho no cambia la conclusión del lema; la relación (3.40), para el cual los coeficientes buscados $c_{(m)k}$ son definidos inductivamente, sigue siendo la misma con la única diferencia que los coeficientes $\bar{d}_{(m)k}$ se expresan ahora en términos de una gama más amplia de coeficientes $c_{(m')k'}$. Es decir, $\bar{d}_{(m)k}$ es función de los coeficientes $c_{(m')k'}$ tal que:

$$\begin{aligned} (1) \quad & |m'| < |m|, \quad \text{ó} \\ (2) \quad & (m') = (m) \text{ y } k' > k, \quad \text{ó} \\ (3) \quad & |m'| = |m| \text{ y } \sum_{j=1}^n j \cdot m'_j < \sum_{j=1}^n j \cdot m_j \end{aligned} \tag{3.41}$$

(el caso 1 es posible solo si los autovalores de la matriz A son simples). Se puede introducir un orden parcial entre los vectores monomiales $x^{(m)} e_k$ (donde $e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ es un

vector con puros ceros excepto en la k -ésima posición que tiene el valor 1) de la siguiente manera:

$x^{(m)}e_k$ es de un orden superior que $x^{(m')}e_{k'}$
si una de las tres opciones de (3.41) se cumple.

Así la fórmula (3.40) nos permite determinar los coeficientes c_{mk} secuencialmente por monomiales de mas y más alto orden. ■

Observación 3.15. 1. *El Lema 3.14 nos permite afirmar que a través de un cambio de coordenadas podemos hacer nuestro campo tan proximo a su parte lineal en una vecindad de la singularidad hasta que el orden de la resonancia nos permita, en el sentido de que las coordenadas del campo y su parte lineal difieren en una función cuyo desarrollo de taylor es nulo hasta el orden de resonancia.*

2. *A partir de (3.38) podemos observar que en el caso que existan resonancias $\lambda_k = (m, \lambda)$ se hace imposible eliminar los monomios $d_{(m)k}x^{(m)}e_k$, luego no podemos hallar una linealización suave.*

El siguiente resultado puede ser demostrado de manera analoga al Lemma 3.14.

Lema 3.16. *Sea $f(x)$ una función de clase $\mathbb{C}^N$. Entonces, existe un cambio de variable polinomial, el cual transforma el sistema (3.24) en el sistema*

$$\dot{y} = Ay + R(y) + o_N(y) \quad (3.42)$$

con

$$R(y) = \sum_{\substack{2 \leq |m| \leq N \\ (m, \lambda) = \lambda_k}} b_{(m)k} y^{(m)} e^k. \quad (3.43)$$

Donde los coeficientes $b_{(m)k}$ de los monomios resonantes $y^{(m)}e_k$ son encontrados en términos de los coeficientes de los polinomiales $f_l(x)$ con $l = |m|$.

Sea $f(x)$ expandida en serie de Taylor. Como N crece, el tamaño de la vecindad del punto 0, donde el cambio de variables es válido, decrece. Además, la vecindad puede reducirse al estado de equilibrio cuando $N \rightarrow \infty$. Por lo tanto, los siguientes dos teoremas solo se refieren a la serie formal.

Teorema 3.17. (*Poincaré*) Si los autovalores de la matriz A son no resonantes, entonces el cambio de coordenadas

$$y = x + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_l + \cdots \quad (3.44)$$

transforma el sistema (3.24) a la forma lineal (3.25).

Teorema 3.18. (*Dulac*) Un cambio formal de variables transforma el sistema (3.24) en el sistema

$$\dot{y} = Ay + R(y), \quad (3.45)$$

donde $R(y)$ es la serie formal

$$R(y) = \sum_{(m,\lambda)=\lambda_k}^{\infty} b_{(m)k} y^{(m)} e^k. \quad (3.46)$$

Ejemplo 3.19. Consideraremos el siguiente sistema no lineal

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_1 + 3x_1^2 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 + 3x_1x_2 + 8x_2^2 \end{aligned} \quad (3.47)$$

Afirmamos que tiene un cambio de coordenadas que lo linealiza. En efecto, considere el sistema (3.47) en la forma (3.24)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3x_1^2 - x_2^2 \\ 3x_1x_2 + 8x_2^2 \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

donde $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$ son los autovalores de la parte lineal del sistema (3.47). Para calcular su resonancia vemos si existen enteros no negativos m_1, m_2 tal que

$$\lambda_1 = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2, \quad \text{donde } m_1 + m_2 = r. \quad (3.49)$$

. Siendo así

$$\begin{aligned} 3 &= 3m_1 + m_2 \\ &= 3m_1 + 2(r - m_1) \\ &= m_1 + 2r, \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde

$$m_1 = 3 - 2r.$$

Luego como $r \geq 2$, no existen enteros no negativos tal que $\lambda_1 = 3$ se puede escribir como en (3.49).

Análogamente para $\lambda_2 = 2$

$$\begin{aligned} 2 &= 3m_1 + 2(r - m_1) \\ &= m_1 + 2r, \end{aligned}$$

luego

$$m_1 = 2 - 2r.$$

Por tanto no existen tales enteros, pues $r \geq 2$. Por lo tanto los autovalores no son resonantes y aplicando el teorema de Poincaré, existe un cambio de coordenadas de la forma

$$y = x + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \cdots,$$

Tal que el sistema (3.48) se reduce al sistema lineal

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y.$$

Hallamos entonces $\varphi_2(x) = (\varphi_{21}(x), \varphi_{22}(x))$ donde

$$\varphi_{2k}(x) = \sum_{m_1+m_2=2} c_{mk} x^m, \quad k = 1, 2.$$

Para esto debemos calcular las constantes C_{mk} , dadas por la formula (3.39). En efecto, sabemos que

$$f_2(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - x_2^2 \\ 3x_1x_2 + 8x_2^2 \end{pmatrix}$$

Así

$$\begin{aligned} c_{(2,0)1} &= \frac{d_{(2,0)1}}{\lambda_1 - ((2,0), \lambda)} = \frac{3}{3-6} = -1 \\ c_{(1,1)1} &= \frac{0}{3-5} = 0 \\ c_{(0,2)1} &= \frac{-1}{0-4} = 1. \end{aligned}$$

Luego $\varphi_{21}(x) = (-x_1^2 + x_2^2)$, de manera análoga se obtiene que $\varphi_{22}(x) = (-x_1x_2 - 4x_2^2)$. Por lo tanto

$$\varphi_2(x) = \begin{pmatrix} -x_1^2 + x_2^2 \\ -x_1x_2 - 4x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Entonces al aplicar el cambio de coordenadas

$$y = x + \varphi_2(x) \quad (3.51)$$

obtenemos el sistema

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -6y_1^3 + 8y_1y_2^2 + 8y_2^3 \\ -6y_2y_1^2 - 28y_1y_2^2 + 61y_2^3 \end{pmatrix} + \dots, \quad (3.52)$$

en el cual no aparecen términos cuadráticos, en general el cambio de coordenadas (3.51) puede introducir términos cúbicos en el nuevo sistema, como ocurrió en (3.52). Como vimos anteriormente, los autovalores son no resonantes, entonces podemos encontrar un $\varphi_3(y)$, tal que el nuevo sistema no contenga términos cúbicos, y así sucesivamente hasta lograr dejar el sistema (3.48) en su forma lineal.

Ejemplo 3.20. Considere el sistema no lineal

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2^2 \\ x_2 + 8x_1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_2^2 \\ 8x_1x_2 \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Afirmamos que es imposible encontrar un cambio de coordenadas que linealiza el sistema (3.53). En efecto, notemos que por el ejemplo (3.19-1) tenemos que los autovalores $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ son resonantes de orden 2, calcularemos entonces los monomios resonantes. Para $\lambda_1 = 2$, verificamos si existen enteros no negativos m_1, m_2 tal que (3.49), así análogamente como en (3.50) tenemos la ecuación

$$m_1 = 2 - r. \quad (3.54)$$

Como $r \geq 2$ obtenemos que la única solución que satisface (3.54) es $r = 2$, es decir, para $m = (0, 2)$ se tiene que $\lambda_1 = (m, \lambda)$, por lo que el término resonante es

$$\begin{pmatrix} y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Del mismo para el autovalor $\lambda_2 = 1$ obtenemos la ecuación

$$m_1 = 1 - r,$$

así tenemos que no existe resonancia. Luego por el teorema de Dulac (3.18) podemos hallar un cambio de coordenadas que transforme el sistema (3.53) en el sistema

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y + c \begin{pmatrix} y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para algún $c \in \mathbb{R}$. Calcularemos entonces de manera análoga al ejemplo (3.19) la función $\varphi_2(x)$; el cual está dado por

$$\varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

Entonces al aplicar el cambio de coordenadas $y = x + \varphi_2(x)$ obtenemos el sistema

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 3y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -32y_1^2y_2 + 12y_2^3 \end{pmatrix} + \cdots,$$

luego como no existe resonancia de orden $r > 2$ podemos hallar φ_r con $r > 2$ para así lograr dejar el sistema de la forma

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 3y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos ahora el espacio n -dimensional $\mathbb{C}^n$. Para cada k y m el conjunto

$$E_{k,m} = \{\lambda_k = (m, \lambda) : \sum_{j=1}^n m_j \geq 2 \text{ con } m_j \geq 0\},$$

donde los m_j son enteros, es llamado (hiper)plano resonante. Observemos que variando $1 \leq k \leq n$ y m podemos obtener una cantidad numerable de estos planos.

Definición 3.21. Diremos que la n -upla $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ están en la región de Poincaré si la envolvente convexa $\mathcal{C}(\lambda)$ no contiene al cero, donde

$$\mathcal{C}(\lambda) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R}_0^+ \text{ y } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}.$$

En el caso de que $\mathcal{C}(\lambda)$ contenga al cero diremos que λ pertenece a la región de Siegel.

Observación 3.22. *Cada punto en la región de Poincaré satisface a lo más un número finito de resonancias y están en una vecindad la cual no intersecta con otros planos resonantes. En otras palabras, los planos resonantes se encuentran discretamente en la región de Poincaré. En contraste a ello, podemos decir que los planos resonantes son densos en la región de Siegel.*

Teorema 3.23. (Poincaré) *Si los autovalores de la matriz A son no resonantes y están en la región de Poincaré, el sistema (3.24) con $f(x)$ analítico puede ser reducido a su parte lineal a través de un cambio de coordenadas analítico.*

Poincaré demostró este teorema utilizando series mayorantes. El principal requerimiento de su formulación es la condición de existencia de una línea recta pasando por el origen en el plano complejo tal que los n autovalores se encuentren a un lado de esta línea.

En el caso en el que hay resonancias en la región de Poincaré, la serie formal cual define el cambio de variables en el teorema de Dulac (3.18) es convergente, además el siguiente resultado se mantiene.

Teorema 3.24. (Dulac) *Si los autovalores de la matriz A están en la región de Poincaré, entonces un cambio de coordenadas analítico transforma el sistema (3.24) con $f(x)$ analítico en la forma*

$$\dot{y} = Ay + R(y),$$

donde $R(y)$ es una serie finita compuesta por los monomios resonantes.

4. Teorema de Sternberg

A continuación presentaremos el teorema de Sternberg, al igual que en el capítulo anterior mostraremos el resultado para difeomorfismos y luego para campos.

Teorema 4.1. *Sea $n > 0$ un entero (o $n = \infty$). Entonces existe un entero $N = N(n) \geq 2$ (o $N = \infty$) con las siguientes propiedades:*

Si $P \in M_{d \times d}(\mathbb{R})$ es no singular, con autovalores $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_d$ tales que

$$\gamma_1^{m_1} \gamma_2^{m_2} \cdots \gamma_d^{m_d} \neq \gamma_k \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, d \quad \text{y} \quad 2 \leq \sum_{j=1}^d m_j \leq N, \quad (4.1)$$

para todo el conjunto de enteros no-negativos $m_1, \dots, m_d$ y si en la aplicación

$$Tx = Px + F(x), \quad (4.2)$$

$F(x)$ es de clase C^N en una vecindad del origen, satisfaciendo $F(0) = 0$, $DF_{(0)} = 0$. Entonces existe una aplicación h de clase C^n en una vecindad del origen tal que

$$h(0) = 0, \quad Dh_{(0)} = I, \quad (4.3)$$

$$hT = Ph \quad (4.4)$$

Observación 4.2. 1. *La condición donde se supone que la función F en (4.2) es tal que $F(0) = 0$ y $DF_{(0)} = 0$ es análoga a decir que la parte lineal de (4.2) está dada por*

$$Lx = Px.$$

2. *Notemos que (4.1) implica que $|\gamma_k| \neq 1$ para $k = 1, \dots, d$, pues como P es real los autovalores son reales o son un par de complejos conjugados, es decir, si $|\gamma_1| = 1$ y $\gamma_2 = \bar{\gamma}_1$; entonces $\gamma_1^2 \gamma_2 = \gamma_1$.*
3. *La condición de (4.1) es la relación de no resonancia para los autovalores con parte lineal de un difeomorfismo. Cuando T_t es el grupo de aplicaciones asociada a la ecuación diferencial (3.24) y T en (4.2) es $T = T_1$, entonces $P = e^A$, así, si $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ son los autovalores de A , entonces $\gamma_j = e^{\lambda_j}$ y (4.1) es equivalente a la condición de no resonancia dada en (3.11).*

Observación 4.3. La demostración del Teorema 4.7 agrega una elección del $N(n)$ o, equivalentemente, de $\lambda = N - n$. Consideraremos $0 < \alpha < a < 1$ de manera que los autovalores de P satisfacen $0 < \alpha < \min\{|\gamma_k|, 1/|\gamma_k|\} < a < 1$ para $k = 1, \dots, d$ (En particular un adecuado sistema de coordenadas, donde las normas de P y P^{-1} son menores que $c = 1/\alpha$. Además $P = P_1$ ó $P = \text{diag}\{P_1, P_2\}$, donde las normas P y P^{-1} satisfacen $\alpha < |P_1| < |P_2^{-1}| < a$). Entonces N puede ser escogido como $n + \lambda$ si λ es un entero tal que

$$\frac{A_{n,d} d^2 a^\lambda}{\alpha^{n+2}} < 1 \quad \text{donde} \quad A_{n,d} = \frac{(d+n-1)!}{n!(d-1)!}$$

es el número de derivadas parciales de orden n de una función de d variables; para mas detalles ver (4.44), dado más adelante, y los pasos (l) y (m) de la demostración del Teorema 4.7

El Teorema 4.1 podría ser obtenido de un resultado mas general, el Teorema 4.7. El hecho de que el Teorema 4.1 este contenido en el Teorema 4.7 esta implicado por el siguiente lema el cual depende de un simple calculo formal.

Lema 4.4. Sea $N \geq 2$ un entero (o $N = \infty$). Sea $P \in M_{d \times d}(\mathbb{R})$ no singular con autovalores que satisfacen (4.1) y sea $F(x)$ de clases C^N en una vecindad de el origen que satisface $F(0) = 0$ y $DF_{(0)} = 0$. Entonces existe una aplicación h_1 de clase C^N en una vecindad de el origen satisfaciendo $h_1(0) = 0$ y $(Dh_1)_{(0)} = I$; y $G(x)$ en

$$Sy = Py + G(y) \tag{4.5}$$

donde $S = h_1 Th_1^{-1}$ tiene la propiedad de que todas las derivadas parciales de $G(y)$ de orden menor o igual a N se anulan en $y = 0$.

Demostración

Caso 1: $(2 \leq N < \infty)$

Después de un adecuado cambio de variables se puede suponer que P está en una forma similar a la de Jordan excepto que en la subdiagonal los elementos son 0 ó $\epsilon > 0$. Así la transformación (4.2) puede ser escrita componente a componente como sigue

$$(Tx)_j = \gamma_j x_j + \epsilon_j x_{j-1} + \sum_{2 \leq |i| \leq N} c_{(i)j} x^{(i)} + o_n(x), \tag{4.6}$$

donde $j = 1, \dots, d$ y ϵ_j es 0 o ϵ . En (4.6) (i) es la d -upla $(i_1, \dots, i_d)$ de enteros no negativos. La aplicación h_1 podría ser determinada de modo que cada componente de $h_1(x)$ es un polinomio de $(x_1, \dots, x_d)$, digamos

$$(h_1 x)_j = x_j + \sum_{2 \leq |m| \leq N} r_{(m)j} x^{(m)}, \quad \text{para } j = 1, \dots, d. \quad (4.7)$$

El objetivo es determinar h_1 de manera que

$$h_1 T h_1^{-1} x = P x + o_N(x)$$

o equivalentemente

$$h_1 T x = T h_1 x + o_N(x) \quad (4.8)$$

cuando $x \rightarrow 0$. Hasta los términos de orden $o_N(x)$, la j -ésima componente del lado izquierdo de (4.8) es

$$\gamma_j x_j + \epsilon_j + \sum_{(i)} c_{(i)j} x^{(i)} + \sum_{(m)} r_{(m)j} \prod_{\alpha=1}^d (\gamma_\alpha x_\alpha + \epsilon_\alpha x_{\alpha-1} + \sum_{(i)} c_{(i)\alpha} x^{(i)})^{m_\alpha},$$

mientras que el lado derecho es

$$\gamma_j x_j + \gamma_j \sum_{(m)} r_{(m)j} x^{(m)} + \epsilon_j x_{j-1} + \epsilon_j \sum_{(m)} r_{(m)j-1} x^{(m)}.$$

Así (4.8) es equivalente a

$$\begin{aligned} \sum_{2 \leq |m| \leq N} r_{(m)j} \left[\gamma_j x^{(m)} - \prod_{\alpha=1}^d \left(\gamma_\alpha x_\alpha + \epsilon_\alpha x_{\alpha-1} + \sum_{(k)} c_{(k)\alpha} x^{(k)} \right)^{m_\alpha} \right] + \epsilon_j \sum_{(m)} r_{(m)j-1} x^{(m)} \\ = \sum_{2 \leq |i| \leq N} c_{(i)j} x^{(i)} + o_N(x). \end{aligned}$$

Comparando los coeficientes dados en un sistema lineal de ecuaciones para $r_{(m)j}$. Es fácil ver de (4.1) que estas ecuaciones lineales determinan la forma única de los números $r_{(m)j}$ para $j = 1, \dots, d$ y $2 \leq |m| \leq N$ si $\epsilon_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, d$. De hecho la parte principal del factor $r_{(m)j}$ en la izquierda (o la parte menor) es $(\gamma_k - \prod \gamma_\alpha^{m_\alpha}) x^{(m)}$,

así podemos determinar sucesivamente $r_{(m)j}$ primero para $|m| = 2$, $|m| = 3$, etc. Esto prueba que si $\epsilon_1 = \dots = \epsilon_d = 0$, entonces el determinante de la matriz de los coeficientes de $r_{(m)j}$ es distinto de cero.

Se sigue que si $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, donde ϵ_j es 0 o ϵ , entonces la matriz de coeficientes es no singular. Esto prueba el Lema 4.4 cuando $2 \leq N < \infty$.

Observación 4.5. *Con el propósito de tratar el caso $N = \infty$, observe el siguiente corolario de la prueba recién completada: Si $2 \leq N < \infty$, entonces existe una aplicación h_1 de la forma (4.7) satisfaciendo las condiciones del lema (4.4). Actualmente la demostración muestra que h_1 es única después de un cierto cambio lineal de variables (el cual deja la forma (4.7) sin cambios) y por lo tanto es única antes de la variable del cambio lineal.*

Caso 2: ($N = \infty$)

Como T es de clase C^∞ tiene una expansión (no necesariamente convergente) formal de Taylor en $x = 0$;

$$(Tx)_j = \sum_{k=1}^d \gamma_{jk} x^k + \sum_{|i| \geq 2} C_{(i)j} x^{(i)}, \quad \text{para } j = 1, \dots, d.$$

Donde $P = (\gamma_{jk})$. La demostración acaba de terminar y el comentario que sigue indica que existe una única aplicación en serie formal de potencias

$$(h_1 x)_j = x_j + \sum_{|m| \geq 2} r_{(m)j} x^{(m)}, \quad \text{para } j = 1, \dots, d; \quad (4.9)$$

tal que $h_1 T = P h_1$ formalmente.

Con el fin de completar la prueba asumimos por el momento el siguiente resultado:

Lema 4.6. *Correspondiente a cualquier serie formal de potencia*

$$\sum_{|m|=0}^{\infty} r_{(m)} x^{(m)} \quad (4.10)$$

con coeficientes reales, existe una función $h(x)$ de clase C^∞ teniendo (4.10) como un desarrollo en serie formal de Taylor.

Si el Lema 4.6 cumple, una deseada función h_1 es obtenida como $h_1x = (r_1(x), r_2(x), \dots, r_d(x))$, donde cada $r_j(x)$ es de clase C^∞ y tiene una serie formal de Taylor a la derecha de (4.9). Por lo tanto con el fin de completar la demostración del Lema 4.4 sólo nos resta verificar el Lema 4.6.

Demostración Demostración del Lema 4.6

Sea $\phi(t)$ una función real de variable real de clase C^∞ definida por

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1/4; \\ 0 < \alpha < 1, & 1/4 < |t| < 3/4; \\ 0, & |t| \geq 3/4. \end{cases}$$

Es fácil ver que

$$r(x) = \sum_{|m|=0}^{\infty} r_{(m)} x^{(m)} \phi \left(m_1! \dots m_d! \left(\sum_{|i|=|m|} |r_{(i)}| \right) \|x\|^2 \right) \quad (4.11)$$

es una serie uniformemente convergente para $\|x\| \leq 1$ y representa una función C^∞ con la propiedad deseada. En efecto, observemos que el término (m) -ésimo es cero o menos que

$$m_1! m_2! \dots m_d! \left(\sum |r_{(i)}| \right) \|x\|^2 \leq \frac{3}{4};$$

en cuyo caso el (m) -ésimo término de (4.11) es mayorizado por

$$|r_{(m)}| \cdot \|x^{(m)}\| \leq \left(\sum |r_{(i)}| \right) \|x\|^2 \leq \frac{3}{4m_1! \dots m_d!}$$

si $|m| \geq 2$. Por lo tanto la serie (4.11) es uniformemente convergente para $\|x\| \leq 1$ y $r(0) = r_{(0)}$. Análogamente, la serie (4.11) puede ser derivada formalmente un número cualquiera de veces para dar una serie uniforme convergente y además $\partial^{|m|} r(x) / \partial x_1^{m_1} \dots \partial x_d^{m_d} = r_{(m)}$ en $x = 0$. Esto prueba el Lema 4.6. ■

Teorema 4.7. *Sea (4.5) una aplicación de clase C^N en una vecindad de el origen, donde $2 \leq N \leq \infty$ y $G(0) = 0$, $DG(0) = 0$. Suponga que los autovalores γ_k de P satisfacen $|\gamma_k| \neq 0, 1$. Sea n un entero, entonces existe un entero $\lambda = \lambda(n) > 0$ que depende de n y P con la siguiente propiedad: Si $N \geq n + \lambda$ y T en (4.2) es de clase C^N tal que todas las derivadas parciales de $F(x) - G(x)$ de orden menor o igual a N se anulan en $x = 0$,*

entonces existe una aplicación h de clase C^n en una vecindad del origen satisfaciendo (4.3) y

$$hT = Sh. \quad (4.12)$$

Observación 4.8. 1. En el Teorema 4.7 se garantiza bajo ciertas condiciones la conjugación diferenciable entre dos difeomorfismos T y S que **no necesariamente son lineales**.

2. En la demostración de este teorema la definición de h podría no depender de n , así h es de clase C^n para todo n aplicable. En particular si $N = \infty$, entonces $h \in C^\infty$.

Comenzaremos la prueba del Teorema 4.7.

Demostración De la hipótesis que T, S son de clase C^N , se obtiene que existe una constante c_N tal que

$$\|D_{(m)}(T - S)x\| \leq c_N \|x\|^{N-|m|}, \quad (4.13)$$

para pequeños $\|x\|$ y $|m| = 0, 1, \dots, N$. Donde $D_{(m)} = \partial^{|m|} / \partial(x_1)^{m_1} \dots \partial(x_d)^{m_d}$. En lo que sigue solo consideraremos $\|x\| \leq r_0 < 1$ tal que $\|x\|^j \leq \|x\|^k$ si $j \geq k$. Sin pérdida de generalidad supondremos que T, S son definidos en todo $\mathbb{R}^d$, son uno a uno, y que se reducen a la aplicación lineal Px para grandes $\|x\|$, con $P = \text{diag}\{P_1, P_2\}$ y $x = (x_-, x_+)$, además que T es de la forma

$$\begin{aligned} T : (Tx)_- &= P_1 x_- + Y(x_-, x_+), \\ (Tx)_+ &= P_2 x_+ + Z(x_-, x_+); \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde $Y(0, x_+) = 0$ y $Z(x_-, 0) = 0$, es decir, que

$$M^+ : x_- = 0 \quad y \quad M^- : x_+ = 0 \quad (4.15)$$

son variedades invariantes, y que existen constantes

$$0 < \alpha < a < 1 \quad (4.16)$$

tal que

$$\begin{aligned} \alpha \|x\|_- &\leq \|Tx\|_- \leq a \|x\|_-, \\ \alpha \|Tx\|_+ &\leq \|x\|_+ \leq a \|Tx\|_+; \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde $\|x_{\pm}\| = \|x\|_{\pm}$. Estas desigualdades podrían ser usadas de forma equivalente como

$$\begin{aligned} \alpha\|T^{-1}x\|_- &\leq \|x\|_- \leq a\|T^{-1}x\|_-, \\ \alpha\|x\|_+ &\leq \|T^{-1}x\|_+ \leq a\|x\|_+; \end{aligned} \quad (4.18)$$

Estos conjuntos de desigualdades son ilustrados en la Figura 7.

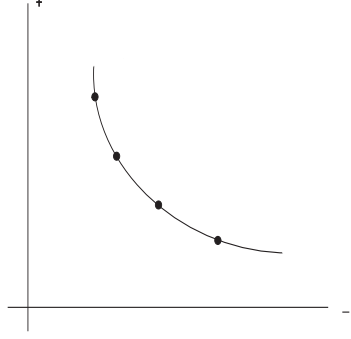


Figura 7: Dinámica de x bajo la aplicación T .

Sean K^+, K^0, K^- los conjuntos dados por

$$\begin{aligned} K^+ &= \{x : \|x\|_- \leq \|x\|_+\}, \\ K^0 &= \{x : \|x\|_- = \|x\|_+\}, \\ K^- &= \{x : \|x\|_- > \|x\|_+\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Así K^0 es una hipersuperficie cónica. Sea $K^j = T^j K^0$ para $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ tal que $T^{-j} K^j = K^0$ y en vista de (4.17), $K^j \subset K^+$ si $j \geq 0$ y $K^j \subset K^-$ si $j < 0$. Sea Q^0 el conjunto entre K^0 y K^1 incluyendo K^0 pero no a K^1 , es decir:

$$Q^0 = \{x : x \in K^+, T^{-1}x \notin K^+\}.$$

De manera análoga definimos $Q^j = T^j Q^0$ el conjunto entre K^j y K^{j+1} incluyendo a K^j pero no a K^{j+1} , es decir;

$$Q^j = \{x : x \in K^+, T^{-j-1}x \notin K^+\};$$

ver Figura 8.

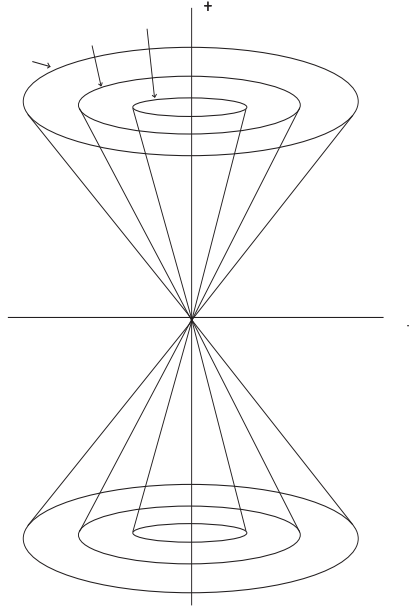


Figura 8:

Es claro que

$$K^j \longrightarrow M^\pm \text{ cuando } j \longrightarrow \infty,$$

que los conjuntos Q^j son disjuntos entre si, y además se tiene que

$$K^+ - M^+ = \bigcup_{j \geq 0} Q^j \text{ y } K^- - M^- = \bigcup_{j < 0} Q^j.$$

Para $x \notin M^+ \cup M^-$, definamos $k(x)$ como el único entero k tal que $x \in Q^k$. Para $r > 0$, sea $B(r) = \{x : \|x\| \leq r\}$, $K^\pm(r) = K^\pm \cap B(r)$, $K^0(r) = K^0 \cap B(r)$, $Q^j(r) = Q^j \cap B(r)$. Las desigualdades (4.17) y/o (4.18) nos permiten afirmar que para un $r_0 > 0$ dado, existe $r_1 = r_1(r_0) > 0$ con $0 < r_1 < r_0$ tal que si $x \in Q^k(r_1)$ para $k > 0$ [o $k < 0$], entonces $T^{-j}x \in B(r_0)$ para $j = 0, 1, \dots, k$ [o $-j = 0, 1, \dots, k$].

La demostración sera dividida en los pasos del (a)-(m). En gran parte de la prueba se supondrá que $x \in K^+$; pues para $x \in K^-$ será análogo.

(a) Si $k(x) \geq 0$, entonces,

$$\alpha^j \|x\|_+ \leq \|T^{-j}x\|_+ \leq \alpha^j \|x\|_+, \quad (4.20)$$

$$\|T^{-j}x\| \leq 2\|T^{-j}x\|_+ \leq 2a^j\|x\|_+ \leq 2a^j\|x\|. \quad (4.21)$$

para $j = 0, \dots, k(x)$. Estas desigualdades son inmediatas utilizando (4.17) y el hecho de que $T^{-j}x \in K^+$ para $j = 0, \dots, k(x)$.

(b) Sea $k(x) \geq 0$. Entonces

$$a^{-2k(x)} \leq \frac{\|x\|_+}{\|x\|_-} \leq \alpha^{-2(k(x)+1)}. \quad (4.22)$$

Con el fin de verificar esta afirmación $z = T^{-k(x)}x$, de modo que $z \in Q^0 \subset K^+$ y $T^{-1}z \in K^-$. Luego utilizando (4.17) obtenemos

$$\begin{aligned} \|z\|_+ &\leq a^k\|x\|_+, & a^{-k}\|x\|_- &\leq \|z\|_-, \\ \alpha^{k+1}\|x\|_+ &\leq \|T^{-1}z\|_+, & \|T^{-1}z\|_- &\leq \alpha^{-k+1}\|x\|_-, \end{aligned}$$

donde $k = k(x)$, luego (4.22) se verifica del hecho de que $\|z\|_- \leq \|z\|_+$ y $\|T^{-1}z\|_- > \|T^{-1}z\|_+$.

(c) Existe una constante $C < 1$ y $k > 1$ tal que si $k(x) > k$, entonces

$$\|T^{-1}x\| \leq C\|x\|. \quad (4.23)$$

(De hecho, C se puede elegir arbitrariamente cerca de a si k es suficientemente grande.) De (4.17) y (4.22) se obtiene que

$$\begin{aligned} \|T^{-1}x\|^2 &\leq \|T^{-1}x\|_-^2 + \|T^{-1}x\|_+^2 \\ &\leq \alpha^{-2}\|x\|_-^2 + a^2\|x\|_+^2 \\ &\leq (\alpha^{-2}\|x\|_-^2/\|x\|_+^2 + a^2)\|x\|_+^2 \\ &\leq (\alpha^{-2}a^{4k(x)} + a^2)\|x\|_+^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto si k es tal que $\alpha^{-2}a^{4k} + a^2 < 1$, el resultado se sigue con $C = \sqrt{\alpha^{-2}a^{4k} + a^2}$.

(d) Sea $\|Sx\| \leq C\|x\|$ para $\|x\| \leq r_0$ y sea $S^jx, S^jz \in B(r_0)$ para $j = 0, 1, \dots, d$. Entonces

$$\|S^jx - S^jz\| \leq C^j\|x - z\|, \text{ para } j = 0, \dots, d. \quad (4.24)$$

Sea $\rho(j) = S^j x - S^j z$, luego $\rho(j) = S\rho(j-1)$ para $j = 1, \dots, d$. Así $\|\rho(j)\| \leq C\|\rho(j-1)\|$ y (4.24) se verifica.

(e) Considere $r_0 > 0$ fijo, $r_1 = r_1(r_0)$ como en la afirmación dada antes de la parte (a) ($0 < r_1 < r_0$). Sea $C \geq 1$ una constante tal que $\|Tx\|, \|Sx\| \leq C\|x\|$ para $\|x\| \leq r_0$. Sean λ, N enteros tal que

$$\lambda \geq 2, \quad Ca^\lambda < 1 \quad y \quad N \geq \lambda. \quad (4.25)$$

Sea c_N tal que (4.13) se cumpla para $\|x\| \leq r_0$. Entonces existe un $r_2 = r_2(\lambda)$, $0 < r_2 < r_1$, tal que

(i) para $j = 0, \dots, k(x)$ se satisface

$$\|S^j T^{-k(x)} x\| \leq r_1 \quad \text{para } x \in K^+(r_2) - M^+; \quad (4.26)$$

ii) Existe una constante C_N tal que

$$\|S^{k(x)} T^{-k(x)} x - x\| \leq C_N \|x\|^N \quad \text{para } x \in K^+(r_2) - M^+. \quad (4.27)$$

Sea $z \in K^+(r_1)$ y supongamos que $T^j z$, S^j son definidos para $j = 0, \dots, d$ para algún $d \leq k(x)$. Denotar

$$\rho(j) = S^j z - T^j z. \quad (4.28)$$

Entonces $\rho(j) = S[S^{j-1} z - T^{j-1} z] + (S - T)T^{j-1} z$; es decir

$$\rho(j) = S\rho(j-1) + (S - T)T^{j-1} z.$$

Como $\rho(0) = 0$, una simple inducción muestra que

$$\rho(j) = \sum_{i=0}^{j-1} S^{j-1-i} (S - T) T^i z, \quad \text{para } j = 1, \dots, d.$$

luego por (4.13);

$$\|\rho(j)\| \leq c_N \sum_{i=0}^{j-1} C^{j-1-i} \|T^i z\|^N.$$

Escogiendo $z = T^{-k(x)}x$, de modo que

$$\|\rho(j)\| \leq c_N \sum_{i=0}^{j-1} C^{j-1-i} \|T^{i-k}z\|^N,$$

donde $k = k(x)$. La desigualdad (4.21) nos permite concluir que para $j = 0, \dots, d$;

$$\|\rho(j)\| \leq 2^N c_N \|x\|^N C^{-1} a^{(k-j)N} \sum_{i=0}^{j-1} (Ca^N)^{j-1}.$$

Por lo tanto, si $Ca^N < 1$, obtenemos

$$\|\rho(j)\| \leq \frac{2^N c_N a^{(k-j)N}}{C(1 - Ca^N)} \|x\|^N,$$

de modo que, si $C_N = \frac{2^N c_N a^{(k-j)N}}{C(1 - Ca^N)}$; entonces

$$\|\rho(j)\| \leq C_N \|x\|^N, \quad \text{para } j = 0, \dots, d. \quad (4.29)$$

De la definición de $\rho(j)$ y z , tenemos que

$$S^j T^{-k(x)}x = \rho(j) + T^{j-k(x)}x;$$

por lo tanto

$$\|S^j T^{-k(x)}x\| \leq \|\rho(j)\| + \|T^{j-k(x)}x\|.$$

Las desigualdades (4.21) y (4.29) hacen evidente la afirmación (i). La definición de $\rho(j)$ y la elección de $j = k(x)$ en (4.21) nos permite probar (4.27).

(f) Definición de h . Sea $h^{(0)}$ una aplicación de la clausura de Q^0 al x -espacio tal que $h^{(0)}$ es de clase C^N , reducida a la identidad I en K^0 , y a ST^{-1} en K^1 , satisfaciendo la desigualdad

$$\|D_{(m)}(h^{(0)}x - x)\| \leq b_N \|x\|^{N-|m|} \quad \text{para } m = 0, \dots, N, \quad (4.30)$$

para pequeños $\|x\|$, y alguna constante b_N . Definamos la aplicación $h^{(k)}$ en $\overline{Q^k}$, la clausura de Q^k , poniendo

$$h^{(k)}x = S^k h^{(0)} T^{-k}x \quad \text{para } x \in \overline{Q^k} \quad (4.31)$$

y $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Si $x \notin M^\pm$ se define

$$hx = h^{(k)}x \text{ para } x \in \overline{Q^k}. \quad (4.32)$$

La condiciones $h^{(0)} = ST^{-1}$ en K^1 , $h^{(0)} = I$ en K^0 implican que h es continua en $x \in K^1$ y por lo tanto para todo $x \notin M^\pm$. También se supone que $h^{(0)}$ es elegido de manera que

$$hx \text{ es de clase } C^N \text{ para } x \notin M^\pm. \quad (4.33)$$

Tal elección de $h^{(0)}$ es claramente posible; es suficiente elegir $h^{(0)}x = x$ para $x \neq 0$ cerca de K^0 , y $h^{(0)}x = ST^{-1}x$ para $x \neq 0$ cerca de K^1 .

Una posible construcción de $h^{(0)}$ se sigue como:

Note que si $x \in K^1 = TK^0$, $x \neq 0$, entonces $\alpha^4 \leq \|x\|_- / \|x\|_+ \leq \alpha^2$ y si $x \in Q^0$, $x \neq 0$, entonces $\alpha^2 \leq \|x\|_- / \|x\|_+ \leq 1$.

Considere entonces $0 < a^2 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < 1$, tal que el conjunto

$$\{x : \epsilon_1 \|x\|_+ \leq \|x\|_- \leq \epsilon_2 \|x\|_+, x \neq 0\}$$

esta en el interior de Q^0 , mientras que el conjunto

$$\{x : \alpha^2 \|x\|_+ \leq \|x\|_- \leq \|x\|_+\}$$

contiene a $\overline{Q^0}$. Sea $\phi(t)$ una aplicación C^∞ para $\alpha^2 \leq t \leq 1$ tal que $\phi(t) = 0$ para $\alpha^2 \leq t \leq \epsilon_1$ y $\phi(t) = 1$ para $\epsilon_2 \leq t \leq 1$. Luego para $x \in \overline{Q^0}$, $x \neq 0$, definir

$$h^{(0)}x = \phi\left(\frac{\|x\|_-}{\|x\|_+}\right)x + \left[1 - \phi\left(\frac{\|x\|_-}{\|x\|_+}\right)\right]ST^{-1}x,$$

y $h^{(0)}x = 0$ si $x = 0$. Note que $h^{(0)} = I$ en K^0 , $h^{(0)} = ST^{-1}$ en K^1 y

$$h^{(0)}x - x = \left[1 - \phi\left(\frac{\|x\|_-}{\|x\|_+}\right)\right](S - T)T^{-1}x.$$

A partir del cual (4.30) se sigue inmediatamente.

(g) La aplicación h satisface, para $x \notin M^\pm$

$$hTx = Shx. \quad (4.34)$$

Esto es claro de (4.31) y (4.32), pues si $x \in \overline{Q^k}$ entonces $Tx \in \overline{Q^{k+1}}$ y así

$$\begin{aligned}
hTx &= S^{k+1}h^{(0)}T^{-(k+1)}(Tx) \\
&= S^{k+1}h^{(0)}T^{-k}x \\
&= S(S^k h^{(0)}T^{-k}x) \\
&= Sh^{(k)}x \\
&= Shx.
\end{aligned}$$

(h) La afirmación (e) sigue siendo válida si (4.26), (4.27) son reemplazadas por

$$\|S^j h^{(0)}T^{-k(x)}x\| \leq r_1 \quad \text{para } x \in K^+(r_2) - M^+ \quad (4.35)$$

$$\|hx - x\| \leq C_N \|x\|^N \quad \text{para } x \in K^+(r_2) - M^+, \quad (4.36)$$

respectivamente.

Utilizando las desigualdades (4.30) y (4.21) respectivamente obtenemos

$$\begin{aligned}
\|S^j h^{(0)}T^{-k(x)}x - S^j T^{-k(x)}x\| &\leq C^j \|h^{(0)}T^{-k(x)}x - T^{-k(x)}x\| \\
&\leq C^j b_N \|T^{-k(x)}x\|^N \\
&\leq 2^N b_N C^j \|x\|^N a^{k(x)N}.
\end{aligned}$$

Asumiendo que $C \geq 1$, se sigue que para $j = 0, \dots, k(x)$.

$$\begin{aligned}
\|S^j h^{(0)}T^{-k(x)}x - S^j T^{-k(x)}x\| &\leq 2^N b_N (Ca^N)^{k(x)} \|x\|^N \\
&\leq 2^N b_N \|x\|^N.
\end{aligned}$$

En vista de (e), queda claro la afirmación (h).

El objetivo del resto de la demostración es obtener estimaciones de la derivada de $hx - x$ para $x \notin M^\pm$. Con este fin, introduciremos la siguiente notación para evitar la confusión con otros superíndices:

El índice de la coordenada de un vector sera escrito antes, en lugar de de después; es decir $f = ({}^1f, \dots, {}^d f)$ y $x = ({}^1x, \dots, {}^d x)$. Para una función $f(x)$, sea $f_j = \frac{\partial f}{\partial ({}^j x)}$. Si $(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ es la d -upla de enteros no negativos, escribir $f_{(\alpha)} = D_{(\alpha)}f = \partial^{|\alpha|} f / \partial ({}^1x)^{\alpha_1} \dots \partial ({}^d x)^{\alpha_d}$. Sea $f_{(\alpha)} \circ z, f_j \circ z$ el valor de la correspondiente derivada de

f evaluada en el punto $x = z$. Similarmente para la aplicación T , las abreviaciones $T_j x$ ó $T_{(\alpha)} x$ significan $\frac{\partial(Tx)}{\partial(jx)}$ ó $(Tx)_{(\alpha)}$.

Se mostrará que si $\lambda = \lambda(n)$ en (e) es suficientemente grande, entonces para una adecuada constante $C_N(|\alpha|)$

$$\|(hx - x)_{(\alpha)}\| \leq C_N(|\alpha|) \|x\|^{N-|\alpha|} \text{ para } x \in K^+(r_2) - M^+ \text{ y } |\alpha| \leq n. \quad (4.37)$$

La prueba se hará por inducción sobre $|\alpha|$. La relación (4.36) corresponde al caso $\|\alpha\| = 0$. Para $x \in Q^k$, $x \neq 0$, definamos

$$R^{(k)} x = h^{(k)} x - x. \quad (4.38)$$

Así por (4.31),

$$h^{(k+1)} x = Sh^{(k)} T^{-1} x \text{ para } x \in Q^{k+1}, x \neq 0;$$

por lo tanto

$$R^{(k+1)} x = Sh^{(k)} T^{-1} x - TT^{-1} x,$$

ó

$$R^{(k+1)} x = Sh^{(k)} T^{-1} x - ST^{-1} x + Gx \text{ para } x \in Q^{k+1}, x \neq 0, \quad (4.39)$$

donde

$$G = (S - T)T^{-1}. \quad (4.40)$$

Luego, aplicando regla de la cadena para la derivada obtenemos que:

$$h_j^{(k+1)} x = \sum_{m=1}^d \sum_{p=1}^d (S_m \circ h^{(k)} T^{-1} x) ({}^m h_p^{(k)} \circ T^{-1} x) [{}^p (T^{-1})_j x].$$

Volviendo a derivar repetidas veces obtenemos la formula general

$${}^i h_{(\alpha)}^{(k+1)} x = \sum_{m=1}^d \sum_{|\beta|=|\alpha|} ({}^i S_m \circ h^{(k)} T^{-1} x) ({}^m h_{(\beta)}^{(k)} \circ T^{-1} x) \Phi^{\alpha, \beta} + \Psi^{i, \alpha, k}, \quad (4.41)$$

donde la segunda suma es sobre todas las d -uplas $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$ con $|\beta| = |\alpha|$; $\Phi^{\alpha, \beta}$ es el producto de $|\alpha|$ factores de la forma ${}^p (T^{-1})_j x$; $\Psi^{i, \alpha, k}$ es un polinomio (independiente

de k) en las componentes de $S_{(\beta)} \circ h^{(k)} T^{-1} x$, $(T^{-1})_{(\beta)} x$ para $|\beta| \leq |\alpha|$ y $h_{(\gamma)}^{(k)} \circ T^{-1} x$ para $|\gamma| < |\alpha|$. Note que el polinomio $\Psi^{i,\alpha,k}$ no depende de k , la dependencia de k surge en los argumentos $S_{(\beta)} \circ h^{(k)} T^{-1} x$ y $h_{(\gamma)}^{(k)} \circ T^{-1} x$.

Si el segundo término de la derecha de (4.39) es escrito como $ST^{-1}x = SIT^{-1}x$, donde I es el operador identidad, se deduce que el análogo de (4.41) se mantiene, es decir,

$${}^i(ST^{-1})_{(\alpha)}^{(k+1)} x = \sum_{m=1}^d \sum_{|\beta|=|\alpha|} ({}^i S_m \circ T^{-1} x) ({}^m I_{(\beta)} \circ T^{-1} x) \Phi^{\alpha,\beta} + \tilde{\Psi}^{i,\alpha,k},$$

donde $\tilde{\Psi}^{i,\alpha,k}$ es obtenido reemplazando $S_{(\beta)} \circ h^{(k)} T^{-1} x$, $h_{(\gamma)}^{(k)} T^{-1} x$ por $S_{(\beta)} \circ T^{-1} x$, $I_{(\gamma)} \circ T^{-1} x$, respectivamente. En consecuencia, (4.39) implica que

$${}^i R_{(\alpha)}^{(k+1)} = \sum_I + \sum_{II} + \Psi^{i,\alpha,k} - \tilde{\Psi}^{i,\alpha,k} + {}^i G_{(\alpha)} x, \quad (4.42)$$

donde

$$\sum_I = \sum_{m=1}^d \sum_{|\beta|=|\alpha|} ({}^i S_m \circ h^{(k)} T^{-1} x) ({}^m R_{(\beta)}^{(k)} \circ T^{-1} x) \Phi^{\alpha,\beta},$$

y

$$\sum_{II} = \sum_{m=1}^d \sum_{|\beta|=|\alpha|} ({}^i S_m \circ h^{(k)} T^{-1} x - {}^i S_m \circ T^{-1} x) ({}^m I_{(\beta)} \circ T^{-1} x) \Phi^{\alpha,\beta}, \quad (4.43)$$

(i) *La suma*

$$\sum_{p=1}^d \sum_{m=1}^d \sum_{|\beta|=|\alpha|} |{}^p S_m \circ h^{(k)} T^{-1} x| \cdot |\Phi^{\alpha,\beta}|$$

que esta definida para $x \in Q^{k+1}(r_2)$, $x \neq 0$, tiene una cota $L_{|\alpha|}$ independiente de $k \geq 0$.

Suponga que C es la cota de las derivadas de primer orden de Sx , $T^{-1}x$ en $\|x\| \leq r_0$, entonces $|\Phi^{\alpha,\beta}| \leq C^{|\alpha|}$ y $\|S_m \circ h^{(k)} T^{-1} x\| \leq C$. Por lo tanto un mayorante para la suma en (i) es

$$L_{|\alpha|} = C^{1+|\alpha|} d^2 \sum_{|\beta|=|\alpha|} 1, \quad \text{donde} \quad \sum_{|\beta|=|\alpha|} 1 = \frac{(d+|\alpha|-1)!}{(|\alpha|)!(d-1)!}. \quad (4.44)$$

Observación 4.9. Al considerar r_0 suficientemente pequeño, el número C , por consiguiente $L_{|\alpha|}$, pueden hacerse que sólo dependan de las normas de P y P^{-1} .

(j) Existe una constante C_0 , tal que

$$\sum_{p=1}^d \sum_{|\alpha|=|\beta|} |{}^p G_{(\beta)} x| \leq C_0 \|T^{-1}x\|^{N-|\alpha|} \text{ para } 0 \leq |\alpha| \leq N \text{ y } \|x\| \leq r_0.$$

Por (4.40); la derivada parcial de Gx esta dada por:

$$G_j x = \sum_{m=1}^d [(S - T)_m \circ T^{-1}x] ({}^m T^{-1})_j x.$$

Repitiendo diferenciación se muestra que ${}^p G_{(\beta)} x$ es un polinomio en ${}^p (S - T)_{(\gamma)} \circ T^{-1}x$ y ${}^m (T^{-1}x)_{(\gamma)}$ para $|\gamma| \leq |\beta|$ y $m = 1, \dots, d$, y que cada término contiene un factor de primer tipo. Como existe una constante $\widehat{C}_0$, tal que

$$|{}^p (S - T)_{(\gamma)} \circ T^{-1}x| \leq \widehat{C}_0 \|T^{-1}x\|^{N-|\gamma|}$$

para $0 \leq |\gamma| \leq N$ y $\|x\|$ pequeño, la afirmación (j) se sigue.

(k) Existe una constante C_0 tal que

$$\left| \sum_{II} \right| \leq C_0 \|T^{-1}x\|^N \text{ para } 0 \leq |\alpha| \leq N \text{ y } \|x\| \leq r_0 \text{ y } k \geq 0.$$

Si C' es una cota de las derivadas de segundo orden de Sx para pequeños $\|x\|$, por el teorema del valor medio tenemos que

$$\left| \sum_{II} \right| \leq C' C^{|\alpha|} d \left(\sum_{|\alpha|=|\beta|} 1 \right) \|h^{(k)} T^{-1}x - T^{-1}x\|.$$

En vista de (4.36), la afirmación (k) se cumple con $C_0 = C' C^{|\alpha|} d(\sum 1) C_N$.

(l) Sea $1 \leq n \leq N - \lambda$. Considere todas las hipótesis de (e), y además, sea λ suficientemente grande tal que $L_\nu a^\lambda < 1$ para $\nu = 1, \dots, n$. Donde L_ν esta definido

en la parte (i). Entonces existe una constante $C_N(|\lambda|)$ tal que (4.37) se cumple para $x \in K^+(r_2) - M^+$ si $0 \leq |\alpha| \leq n$.

Sea

$$R^{(k,\mu)}x = \sum_{m=1}^d \sum_{|\beta|=\mu} |^m R_{(\beta)}^{(k)}x|. \quad (4.45)$$

La afirmación a probar es equivalente a

$$R^{(k,\mu)}x \leq C_N(\mu)\|x\|^{N-\mu} \quad \text{para } \mu \leq n, \quad x \in Q^k(r_2), \quad x \neq 0 \text{ y } k \geq 0. \quad (4.46)$$

La prueba se hará por inducción en n . En efecto, el caso $n = 0$ esta contenido en (4.36) en la afirmación (h). Supongamos que $0 \leq n \leq N - \lambda$ y además que se cumple el resultado para $0, 1, \dots, n - 1$.

Primero se mostrará que existe una constante $C_{N_0}(n)$, independiente de k , tal que

$$|\Psi^{i,\alpha,k} - \tilde{\Psi}^{i,\alpha}| \leq C_{N_0}(n)\|T^{-1}x\|^{N-n} \quad \text{para } |\alpha| = n \text{ y } x \in Q^{k+1}(r_2), \quad x \neq 0. \quad (4.47)$$

Note que las descripciones de $\Psi^{i,\alpha,k}$, y $\tilde{\Psi}^{i,\alpha}$ en (4.41) implican que la expresión en la izquierda de (4.47) es mayorizada por

$$\begin{aligned} & C_1 \left\{ \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \|S_{(\beta)} \circ h^{(k)}T^{-1}x - S_{(\beta)} \circ T^{-1}x\| + \sum_{|\gamma| < |\alpha|} \|h_{(\gamma)}^{(k)} - I_{(\gamma)}T^{-1}x\| \right\} \\ &= C_1 \left\{ \sum_{|\beta| \leq n} \|S_{(\beta)} \circ h^{(k)}T^{-1}x - S_{(\beta)} \circ T^{-1}x\| + \sum_{|\gamma| < n} \|R_{(\gamma)}^{(k)} \circ T^{-1}x\| \right\}. \end{aligned}$$

Donde C_1 es una constante es independiente de k . Como $N > n$, el argumento usado en la parte (k) muestra que existe una constante $K_N(n)$ dependiendo de n pero no de k , tal que el primer sumando no excede de $K_N(n)\|T^{-1}x\|^N$. Luego la existencia de $C_{N_0}(n)$ en (4.47) se sigue de la hipótesis de inducción.

En vista de (4.42) e (i), (j), (k), (4.47) y (4.45) obtenemos que

$$R^{(k+1)}x \leq L_n R^{(k,n)}T^{-1}x + [C_{N_0}(n) + 2C_0]\|T^{-1}x\|^{N-n}. \quad (4.48)$$

Es evidente de (4.30) que existe una constante C_2 tal que

$$R^{(0,n)}x \leq C_2\|x\|^{N-n} \quad x \in Q^0(r_2), \quad x \neq 0.$$

Se desprende de (4.48) y una simple inducción en k que estas desigualdades se mantienen si $R^{(0,n)}, Q^0$ son reemplazados por $R^{(k,n)}, Q^k$. Así, si κ esta dado como en el paso (c), entonces para un conjunto finito de k , $k = 0, 1, \dots, \kappa$ existe una constante $C_N(n)$ tal que

$$R^{(k,n)}x \leq C_N(n)\|x\|^{N-n} \quad \text{para } x \in Q^k(r_2), \quad x \neq 0, \quad (4.49)$$

$$C_N(n) \geq \frac{[C_{N_0}(n) + 2C_0]c^{N-n}}{1 - L_n c^{N-n}}. \quad (4.50)$$

Note que por (c), $L_n c^{N-n} \leq L_n c^\lambda < 1$ si κ es fijo y suficientemente grande.

Una inducción en k , nos permite mostrar que (4.49) se mantiene para algún $k \geq \kappa$. Entonces, por (4.48) para $x \in Q^{k+1}(r_2)$, $x \neq 0$,

$$R^{(k+1,n)} \leq [L_n C_N(n) + C_{N_0}(n) + 2C_0] \|T^{-1}x\|^{N-n}.$$

Pero $\|T^{-1}x\| \leq c\|x\|$ por (c), de modo que el lado derecho es mayorizado por

$$[L_n C_N(n) + C_{N_0}(n) + 2C_0] c^{N-n} \|x\|^{N-n}.$$

Como (4.50) implica que el factor de $\|x\|^{N-n}$ es como máximo $C_N(n)$, la desigualdad (4.49) se mantiene si k es reemplazado por $k + 1$. Esto completa la inducción en k y también sobre n .

(m) *Supongamos que las condiciones de (e) y (l) se mantienen. Entonces h puede definirse sobre $M^\pm$ tal que h es de clase C^{n-1} en $\|x\| \leq r_2$.*

Se ha demostrado que h , considerada en $K^+(r_2) - M^+$, es de clase C^N y que las derivadas parciales de orden menor o igual a n son acotadas si $N - n \geq \lambda$. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que la $\dim M^+ < d - 1$ (es decir, aumentando a d , mediante coordenadas ficticias para x_+). Por lo tanto los puntos de $K^+(r_2) - M^+$ que están cerca pueden ser unidos por caminos cortos rectificables en $K^+(r_2)$. Se sigue que h y sus derivadas parciales de orden menos o igual a $n - 1$ son uniformemente continuas en $K^+(r_2) - M^+$. Por lo tanto h tiene una extensión a $K^+(r_2)$ de clase C^{n-1} . Esto prueba (m).

En vista de (g) y la continuidad de h , (4.34) se mantienen para $\|x\| \leq r_2$. Como h es cercano a la identidad para pequeños $\|x\|$, podemos afirmar que h tiene una inversa de

clase C^{n-1} . Esto prueba el teorema 4.7. ■

El siguiente Teorema es análogo al Teorema 4.7 para ecuaciones diferenciales.

Teorema 4.10. *Sea la ecuación diferencial*

$$\dot{y} = Ay + g(y), \quad (4.51)$$

con $g(y)$ de clase C^N en una vecindad de $y = 0$, donde $2 \leq N \leq \infty$ y g cumpliendo (2.5), y suponga que los autovalores de A tienen parte real no nula. Sea $N > 0$ un entero. Entonces existe un entero $\lambda = \lambda(n) > 0$ dependiendo solo de n y de la matriz A con la siguiente propiedad: Si $N \geq n + \lambda(n)$ y $f(x)$ en

$$\dot{x} = Ax + f(x) \quad (4.52)$$

es de clase C^N tal que todas las derivadas parciales de $f(x) - g(x)$ de orden menor o igual a N se anulan en $x = 0$, entonces existe una aplicación h de clase C^n en una vecindad del origen satisfaciendo (4.3) y transformando (4.51) en (4.52)

Demostración La demostración depende solo de una simple modificación de la demostración del Teorema 4.7. En efecto, para el conjunto de grupos de aplicaciones S^t, T^t (flujos de los sistemas (4.51) y (4.52) respectivamente) debemos encontrar una aplicación h satisfaciendo $HT^t = S^tH$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Definamos entonces para $x \notin M^\pm$, $t(x)$ tal que $T^{-t(x)}x \in K^0$ y poner $hx = S^{t(x)}T^{-t(x)}x$. La restricción de este h en $\overline{Q^0}$ esta dada como $h^{(0)}$ de manera análoga como se hizo en (f), luego solo es necesario verificar (4.30), pero esto puede ser deducido de (e). ■

Para terminar enunciaremos el Teorema de Sternberg para campos, el cual se demuestra utilizando el Teorema 4.7 y el Lema 2.22.

Teorema 4.11. *Sea $n > 0$ un entero [ó $n = \infty$]. Entonces existe un entero $N = N(n) \geq 2$ [ó $N = \infty$] con las siguientes propiedades: Si $A \in M_{d \times d}(\mathbb{R})$ es no singular con autovalores no resonantes (ver (3.11)), y si en la ecuación diferencial (4.52) la aplicación $f(x)$ es de clase C^N en una vecindad del origen satisfaciendo $f(0) = 0, Df_{(0)} = 0$. Entonces existe una aplicación h de clase C^n en una vecindad del origen satisfaciendo (4.3), que conjuga el sistema (4.52) con su parte lineal.*

5. Bibliografia

- [1] V.I. Arnold, Geometric Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations, Springer, New York, (1983).
- [2] D.K. Arrowsmith, C.M. Place, Ordinary Differential Equations, Chapman and Hall, London New York (1982).
- [3] P. Hartman, Ordinary Differential Equations, Jhon Wiley and Sons, New York, (1964).
- [4] P. Hartman, A lemma in the theory of structural stability of differential equations, Proc. Amer. Math. Soc 11 (1960) 610-620
- [5] P. Hartman, On local homomorphisms of Euclidean spaces, Bol. Soc. Mat Mexicana 5 (1960) 220-241.
- [6] J. Palis, W. de Melo, Geometric theory of dynamical systems, an introduction. Springer-Verlag, New York, (1982).
- [7] J. Palis, W. de Melo, Introdução aos sistemas dinâmicos, IMPA do C.N.Pq, Rio de Janeiro, (1978).
- [8] O. Perron, “Über Stabilität und Asymptotisches verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystem”, Math. Z., 29 (1928), pp. 129-160.
- [9] H. Poincaré, Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles. Oeuvres, 1, Gauthier-Villars, Paris, (1879).
- [10] C. Pugh, On a theorem of P. Hartamn, Amer. J. 91 (1969).
- [11] G. R. Sell, Smooth linearization near a fixed point, Amer. J. Math. 107 (1985) 1035-

1091.

[12] L.P Shilnikov, A.L. Shilnikov, D.V. Turaev, Methods of qualitative theor in nonlinear dynamics: Part I, world cientific, California (1998)

[13] M. Shub, Global stability of dynamical systems. S. MATH de France, (1978).

[14] S. Sternberg, Local C^n transformations of the real line, Amer. J. Math. 80 (1958) 809-824.

[15] S. Sternberg, Local contractions and a theorem of Poincaré, Amer. J. Math. 80 (1958) 809-824.

[16] S. Sternberg, On the structure of local homeomorphisms of Euclidean n-space, Amer. J. Math. 80 (1958) 623-631.