



UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Matemáticas

**ESTADÍSTICAS DE POISSON Y DIMENSIÓN ESPECTRAL
PARA EL MODELO DE ANDERSON JERÁRQUICO**

Tesis para optar al grado de Magister en Ciencias Mención Matemática

ARIEL ALONZO PÉREZ CONTRERAS

Profesor Tutor: Dr. JORGE LITTIN CURINAO

ANTOFAGASTA, CHILE

2017

Tabla de contenido

Resumen	V
Introducción	VI
1. Laplaciano jerárquico	1
1.1. Estructuras Jerárquicas	1
1.2. Laplaciano jerárquico	4
1.3. Dimensión espectral	9
1.4. La densidad de estados	13
2. Localización espectral	17
2.1. Definición del modelo	17
2.2. Teoremas de localización espectral	22
2.3. Criterio para la localización espectral	25
2.3.1. Demostración del teorema de localización espectral	31
2.3.2. Demostración del teorema de Molchanov.	34

3. Estadísticas de Poisson	37
3.1. Modelo de Anderson	37
3.1.1. Corolarios del teorema del limite de Grigelionis	44
3.2. Densidad de estados en el modelo de Anderson jerárquico	47
3.3. Estadísticas de Poisson de autovalores en el modelo jerárquico de Anderson	50
Conclusión	57
Bibliografía	59

Universidad Católica del Norte
 Facultad de Ciencias
 Maestría en Ciencias Mención Matemática

**ESTADÍSTICAS DE POISSON Y DIMENSIÓN ESPECTRAL PARA EL
 MODELO DE ANDERSON JERÁRQUICO**

Autor: Pérez Contreras, Ariel Alonzo

Tutor: Curinao, Jorgue Littin

Fecha: , 2017

Resumen

En la presente tesis se estudian las propiedades espectrales del modelo de Anderson jerárquico. Este modelo es una aproximación del modelo tight-binding de Anderson sobre \mathbb{Z}^d . En el modelo jerárquico de Anderson consideramos un conjunto numerable \mathbb{X} y una métrica d , con la cual le damos una estructura jerárquica a X . El Laplaciano jerárquico libre es un operador autoadjunto H_0 actuando sobre el espacio de Hilbert $l^2(\mathbb{X})$. El espectro de H_0 consiste en infinitos autovalores aislados degenerados. Estudiamos perturbaciones del operador H_0 mediante el potencial aleatorio V_ω definido por $(V_\omega\phi)(x) = \omega(x)\phi(x)$, para ϕ perteneciendo a $l^2(\mathbb{X})$. Los números $\omega(x)$ son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con densidad acotada. El modelo jerárquico de Anderson es el operador aleatorio autoadjunto $H_\omega = H_0 + V_\omega$. En la tesis se estudiaron, entre otros, los siguientes resultados:

1. Si el modelo tiene dimensión espectral menor a igual a cuatro entonces, casi seguramente, el espectro de H_ω es denso puntual puro.
2. Si la dimensión espectral es menor estricta que uno, los niveles de energía para H_ω son asintóticamente un proceso puntual de Poisson, luego de un reescalamiento apropiado.

Palabras claves: Modelo jerárquico de Anderson, Laplaciano jerárquico, localización espectral, estadísticas de Poisson.

Introducción

La noción del operador aleatorio discreto de Schrodinger puede ser formulado de la siguiente manera: Sea \mathbb{X} un conjunto numerable y sea H_0 un operador autoadjunto actuando sobre $l^2(\mathbb{X})$. H_0 es el operador energía del sistema cuántico no perturbado, y es usualmente tomado como el Laplaciano. Sea $\omega = \{\omega(x)\}_{x \in \mathbb{X}}$ una familia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. El desorden es modelado por el potencial aleatorio V_ω actuando diagonalmente sobre $l^2(\mathbb{X})$:

$$(V_\omega \varphi)(x) = \omega(x)\varphi(x), \quad \varphi \in l^2(\mathbb{X}), x \in \mathbb{X}.$$

El sistema cuántico desordenado es entonces descrito por el operador aleatorio autoadjunto

$$H_\omega = H_0 + cV_\omega,$$

donde $c > 0$ es una constante de acoplamiento que mide la fuerza del desorden. Las propiedades espectrales de H_ω reflejan las propiedades físicas del sistema desordenado. Localización corresponde a un espectro puntual puro, y mientras que transporte corresponde a un espectro absolutamente continuo.

En el primer capítulo daremos la definición del Laplaciano jerárquico y sus propiedades espectrales básicas. Los resultados de éste capítulo están presentes en los trabajos [8] y [3]. El segundo capítulo está basado en los trabajos [3] y [4], dedicado al estudio de las propiedades espectrales genéricas de H_ω . Se demostrará que para dimensión espectral menor o igual a cuatro, el modelo jerárquico de Anderson presenta localización. En el tercer capítulo, basado en el trabajo [5], nos dedicaremos al comportamiento asintótico de los autovalores para nuestro modelo. En el cual se probará que para dimensión espectral menor estricta a uno, los autovalores se comportan como procesos puntuales de Poisson.

Laplaciano jerárquico

1.1. Estructuras Jerárquicas

Sea \mathbb{X} un conjunto numerable y $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{N}$ una métrica sobre \mathbb{X} . Para $x \in \mathbb{X}$ y $r \in \mathbb{N}$, denotamos por $B(x, r)$ la bola cerrada con centro x y radio r ,

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{X} \mid d(x, y) \leq r\}.$$

Diremos que la métrica d es jerárquica sobre \mathbb{X} si valen las siguientes condiciones:

1. Dados $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ y $r \in \mathbb{N}$ se tiene $B(x_1, r) \cap B(x_2, r) = \emptyset$ o $B(x_1, r) = B(x_2, r)$, es decir, dos bolas con el mismo radio son disjuntas o iguales.
2. Dado $x \in \mathbb{X}$ y $r \geq 1$, existe $n_r(x) \in \{1, 2, \dots\}$ e $y_1(x), \dots, y_{n_r(x)} \in \mathbb{X}$ tales que

$$B(x, r) = \bigcup_{j=1}^{n_r(x)} B(y_j(x), r-1),$$

es decir, toda bola de radio $r \geq 1$ es la unión disjunta de bolas de radio $r-1$.

3. Para cada $x \in \mathbb{X}$, $\mathbb{X} = \bigcup_{r=0}^{\infty} B(x, r)$.

Si d es una métrica jerárquica sobre \mathbb{X} , diremos que (\mathbb{X}, d) es una estructura jerárquica. En adelante consideraremos $n_0(x) = 1$. Además $|B(x, r)|$ denotará la cardinalidad de $B(x, r)$.

Una estructura jerárquica puede ser descrita equivalentemente en términos de un sistema de particiones incrustadas. Una partición \mathcal{P} de \mathbb{X} es una colección finita de subconjuntos disjuntos de \mathbb{X} cuya unión es igual a \mathbb{X} , es decir, $\mathcal{P} = \{B_i\}_{i \in I}$, $\mathbb{X} = \bigcup_{i \in I} B_i$ y $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Dadas dos particiones \mathcal{P} y \mathcal{P}' , escribiremos $\mathcal{P} > \mathcal{P}'$ si cada $B \in \mathcal{P}$ es

un subconjunto de algún $B' \in \mathcal{P}'$. Una estructura jerárquica (\mathbb{X}, d) induce un sistema incrustado de particiones sobre \mathbb{X} . Ya que por las propiedades (1) y (3), para todo $r \geq 1$, las bolas de radio r forman una partición \mathcal{P}_r de \mathbb{X} , y por la propiedad (2), \mathcal{P}_r es más fina que \mathcal{P}_{r+1} . Recíprocamente, si consideramos la partición $\mathcal{P}_0 = \{\{x\}\}_{x \in \mathbb{X}}$ y supongamos que $\mathcal{P}_1 > \mathcal{P}_2 > \dots$ es un sistema particiones incrustada sobre \mathbb{X} tal que para cada $x, y \in \mathbb{X}$, existe $r \geq 0$ y $B \in \mathcal{P}_r$ conteniendo a x e y . Si definimos $d(x, y)$ como mínimo de dichos r , entonces (\mathbb{X}, d) es una estructura jerárquica.

Si para cada $r \geq 1$, el número $n_r(x)$ es independiente de x , $n_r(x) = n_r$, diremos que (\mathbb{X}, d) es una estructura jerárquica regular. En este caso, tenemos

$$|B(x, r)| = N_r = \prod_{s=0}^r n_s.$$

para cada $x \in \mathbb{X}$. Más aún, si $n_r = n$ para $r \geq 1$, diremos que (\mathbb{X}, d) es una estructura jerárquica homogénea de grado n . En el caso de un estructura jerárquica homogénea claramente se tiene $N_r = n^r$.

Ejemplo 1.1.1. *El dinero posee una estructura jerárquica regular, por lo general no homogénea.*

Ejemplo 1.1.2. *Sea $\mathbb{X} = \{0, 1, 2, \dots\}$ y consideremos sobre este espacio la métrica*

$$d(j, k) = \min\{r \geq 0 \mid j \text{ y } k \text{ pertenecen al mismo elemento de } \mathcal{P}_r\},$$

donde $\{\mathcal{P}_r\}$ es la sucesión de particiones incrustada

$$\begin{aligned} \mathbb{X} &= \{0\} \cup \{1\} \cup \dots \\ \mathbb{X} &= \{0, 1\} \cup \{2, 3\} \cup \dots \\ &\dots \\ \mathbb{X} &= \{0, \dots, 2^r - 1\} \cup \{2^r, \dots, 2 \cdot 2^r - 1\} \cup \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Así, la bola $B_r(j) = \{k \in \mathbb{N}_0 \mid d(j, k) \geq r\}$ es el elemento de \mathcal{P}_r conteniendo a $j \in \mathbb{N}_0$. De ésta forma (\mathbb{X}, d) es una estructura jerárquica regular no homogénea.

Ejemplo 1.1.3. *Un caso más general es considerar \mathbb{X} como reticulado \mathbb{Z}^d . Los elementos de \mathbb{X} son del tipo $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, con $x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathbb{Z}$. Sea $m \geq 2$ un entero fijo. Para $r \geq 0$ y $x \in \mathbb{Z}^d$, consideremos el cubo*

$$Q_{x,r} = \{y \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq y_k - x_k < m^r \text{ para } 1 \leq k \leq d\}.$$

Sea \mathcal{P}_r la partición

$$\mathcal{P}_r = \{Q_{x,r}\}_{x \in (m^r \mathbb{Z})^d},$$

de \mathbb{Z}^d . Entonces el sistema de particiones $(\mathcal{P}_r)_{r \geq 0}$ define una estructura jerárquica homogénea de grado $n = m^d$.

1.2. Laplaciano jerárquico

En esta sección definiremos al Laplaciano jerárquico, la medida espectral asociada a un operador. Además caracterizaremos el espectro del Laplaciano jerárquico y la medida espectral asociada al mismo.

Sea (\mathbb{X}, d) una estructura jerárquica. Consideremos el espacio de Hilbert $l^2(\mathbb{X})$ de las funciones $\phi : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{C}$ tales que

$$\sum_{x \in \mathbb{X}} |\phi(x)|^2 < \infty.$$

El producto interno sobre $l^2(\mathbb{X})$ es dado por:

$$\langle \phi | \varphi \rangle := \sum_{x \in \mathbb{X}} \overline{\phi(x)} \varphi(x).$$

Para $r \geq 0$, definimos el operador promedio $E_r : l^2(\mathbb{X}) \rightarrow l^2(\mathbb{X})$ por

$$(E_r \phi)(x) := \frac{1}{|B(x, r)|} \sum_{y \in B(x, r)} \phi(y).$$

Consideremos \mathcal{H}_r como es espacio de todas las funciones $\phi \in l^2(\mathbb{X})$ tales que son constantes sobre $B(x, r)$. Notar que \mathcal{H}_r es cerrado luego, por teoría clásica de espacios de Hilbert, cada $\varphi \in l^2(\mathbb{X})$ se puede escribir únicamente como $\varphi = \phi_1 + \phi_2$, donde $\phi_1 \in \mathcal{H}_r$ y $\phi_2 \in \mathcal{H}_r^\perp$. Además los elementos $\phi_2 \in \mathcal{H}_r^\perp$ son tales que $\sum_{y \in B(x, r)} \phi_2(y) = 0$. Luego

$$(E_r \varphi)(x) = (E_r(\phi_1 + \phi_2))(x) = \frac{1}{|B(x, r)|} \sum_{y \in B(x, r)} \phi_1(y) = \phi_1(x), \quad \forall \phi_1 \in \mathcal{H}_r.$$

Vale decir $E_r \phi_1 = \phi_1$, lo que implica que E_r es la proyección ortogonal sobre el espacio cerrado $\mathcal{H}_r \subset l^2(\mathbb{X})$ de las funciones que son constantes sobre cada bola de radio r .

Sea $(p_r)_{r \geq 1}$ una sucesión de números reales tales que $p_r > 0$ y $\sum_{r=1}^{\infty} p_r := 1$. Consideremos $p_0 := 0$ y

$$\lambda_r := \sum_{s=0}^r p_s, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \infty.$$

El Laplaciano jerárquico $\Delta : l^2(\mathbb{X}) \rightarrow l^2(\mathbb{X})$ es definido por:

$$\Delta := \sum_{r=0}^{\infty} p_r E_r.$$

De ésta forma, (\mathbb{X}, d, Δ) es llamado modelo jerárquico. Si (\mathbb{X}, d) es regular (resp. homogéneo) entonces diremos que (\mathbb{X}, d, Δ) es regular (resp. homogéneo).

Observación 1.2.1. *Notar que Δ es un operador acotado autoadjunto. En efecto, como $\ker E_r \perp \text{Im } E_r$, se sigue que la proyección E_r es autoadjunta y por consiguiente Δ es un operador autoadjunto. Además*

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\Delta\| &\leq \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \sum_{r=0}^{\infty} p_r |E_r \varphi| \\ &\leq \sum_{r=0}^{\infty} p_r \left(\sup_{\|\varphi\| \leq 1} |E_r \varphi| \right) \\ &\leq \sum_{r=0}^{\infty} p_r = 1. \end{aligned}$$

Definición 1.2.2. *Sea $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$ un operador lineal, donde $\mathcal{D}(A)$ es un subespacio denso del espacio de Hilbert \mathcal{H} . El **conjunto resolvente** del operador A viene dado por:*

$$\varrho(A) := \{z \in \mathbb{C} \mid (A - z) : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H} \text{ es biyectivo}\}.$$

Para $z \in \varrho(A)$ es operador $(A - z)$ es invertible y su inversa $(A - z)^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{D}(A)$ es llamado el resolvente. Llamamos al espectro de A al conjunto

$$sp(A) = \mathbb{C} \setminus \varrho(A),$$

el cual siempre es cerrado.

Recordemos que si A es acotado, entonces $sp(A)$ es compacto. En el caso de que A es autoadjunto, $sp(A) \subset \mathbb{R}$ y más aún, para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subseteq \varrho(A)$, se tiene la desigualdad

$$\|(A - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{\text{dist}(z, sp(A))} \leq \frac{1}{|\text{Im } z|}. \quad (1.2.1)$$

Permitamos introducir algunas identidades que se utilizarán en adelante:

Proposición 1.2.3. *Para $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$ operador lineal y z_1, z_2 pertenecientes a $\varrho(A)$ se sigue que*

$$(A - z_1)^{-1} - (A - z_2)^{-1} = (z_1 - z_2)(A - z_1)^{-1}(A - z_2)^{-1}. \quad (1.2.2)$$

Si además $B : \mathcal{D}(B) \rightarrow \mathcal{H}$ es definido en un dominio común, $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A)$, entonces

$$(A - z)^{-1} - (B - z)^{-1} = (A - z)^{-1}(B - A)(B - z)^{-1}. \quad (1.2.3)$$

La demostración de la proposición (1.2.3) puede ser consultada en [11].

Como ya sabemos el espectro del Laplaciano jerárquico Δ es un subconjunto de los números reales. La siguiente proposición indica que más aún, dicho espectro es bien conocido:

Proposición 1.2.4. *Sea Δ el Laplaciano jerárquico, entonces:*

1. *El espectro de Δ está dado por*

$$sp(\Delta) = \{\lambda_r \mid r = 0, \dots, \infty\}. \quad (1.2.4)$$

Cada $\lambda_r := \sum_{s=0}^r p_s$, con $r < \infty$, es un autovalor de Δ de multiplicidad infinita. El punto $\lambda_\infty = 1$ no es un autovalor.

2. *$E_r - E_{r+1}$ es la proyección ortogonal sobre el autoespacio asociado a λ_r y*

$$\Delta = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda_r (E_r - E_{r+1}).$$

Demostración. Notar que

$$l^2(\mathbb{X}) = \mathcal{H}_0 \supset \mathcal{H}_1 \supset \mathcal{H}_2 \supset \dots,$$

y que $\bigcap_{r=0}^{\infty} \mathcal{H}_r = \{0\}$, pues una función no nula constante sobre cada bola tendría que ser constante sobre \mathbb{X} y por lo tanto tendría norma l^2 infinita. Luego podemos escribir

$$l^2(\mathbb{X}) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} L_r,$$

donde $L_r = \mathcal{H}_{r+1}^\perp \cap \mathcal{H}_r$. Notar que L_r es el subespacio de dimensión infinita de las funciones φ tales que

$$E_s \varphi = \begin{cases} \varphi & \text{para } 0 \leq s \leq r, \\ 0 & \text{para } s > r. \end{cases}$$

Por lo tanto, para cada $\varphi \in L_r$,

$$\Delta \varphi = \sum_{s=0}^{\infty} p_s E_s(\varphi) = \sum_{s=0}^r p_s \varphi = \lambda_r \varphi.$$

Así, λ_r es autovalor de Δ . Por último notar que para $\varphi \in l^2(\mathbb{X})$ se sigue: $(E_r - E_{r+1})(\varphi) = 0$ sobre las bolas de radio $r+1$ y es una función constante sobre bolas de radio r , por lo que $(E_r - E_{r+1})\varphi \in L_r$. Así $(E_r - E_{r+1})$ proyecta sobre el autoespacio asociado a λ_r . \square

Para $x \in \mathbb{X}$, denotamos por δ_x el delta de Kronecker en x : $\delta_x(y) = 1 \iff y = x$. Recordemos que cualquier medida μ sobre \mathbb{R} posee una única decomposición de la forma:

$$\mu = \mu_{pp} + \mu_{ac} + \mu_{sing}.$$

donde μ_{pp} es una medida puntual pura, μ_{ac} es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue y μ_{sing} es continua y singular respecto a la medida de Lebesgue.

Definición 1.2.5. *Sea A un operador autoadjunto sobre el espacio de Hilbert \mathcal{H} . Definimos:*

$$\mathcal{H}_{pp} = \{\varphi \mid \mu_\varphi \text{ es puntual pura}\}.$$

$$\mathcal{H}_{ac} = \{\varphi \mid \mu_\varphi \text{ es absolutamente continua}\}.$$

$$\mathcal{H}_{sing} = \{\varphi \mid \mu_\varphi \text{ es continua singular}\}.$$

Como también:

$$sp_{pp}(A) = \{\lambda \mid \lambda \text{ es autovalor de } A\}.$$

$$sp_{cont}(A) = sp(A \upharpoonright \mathcal{H}_{cont} \equiv \mathcal{H}_{sing} \oplus \mathcal{H}_{ac}).$$

$$sp_{ac}(A) = sp(A \upharpoonright \mathcal{H}_{ac}).$$

$$sp_{sing}(A) = sp(A \upharpoonright \mathcal{H}_{sing}).$$

Estos conjuntos son llamados *espectro puntual puro, continuo, absolutamente continuo y singular (o continuo singular) respectivamente.*

Consideremos un operador autoadjunto A y $\varphi \in l^2(\mathbb{X})$. Luego $f \mapsto \langle \varphi, f(A)\varphi \rangle$ es un funcional lineal positivo sobre $C(sp(A))$. De ésta forma tenemos:

Teorema 1.2.6. (Riesz-Markov) *Existe una única medida sobre el conjunto compacto $sp(A)$ tal que*

$$\langle \varphi, f(A)\varphi \rangle = \int_{sp(A)} f(\lambda) d\mu_\varphi,$$

donde μ_φ es llamada la **medida espectral** asociada al vector φ .

Para los detalles de la definición (1.2.5) y la demostración del teorema (1.2.6) puede consultar [9].

Observación 1.2.7. *En nuestro caso la medida espectral para δ_x y Δ es la medida de probabilidad μ_x sobre \mathbb{R} tal que*

$$\langle \delta_x \mid f(\Delta)\delta_x \rangle = \int f d\mu_x,$$

para cada función Borel medible $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

Dado que conocemos explícitamente el espectro de Δ , podemos obtener una expresión para la medida espectral del Laplaciano jerárquico.

Proposición 1.2.8. *Tenemos*

$$\mu_x = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} - \frac{1}{|B(x, r-1)|} \right) \delta(\lambda_r), \quad (1.2.5)$$

donde $\delta(\lambda_r)$ denota la delta de Dirac en λ_r .

Demostración. Por linealidad basta conocer $\langle \delta_x, f(\Delta)\delta_x \rangle$. En efecto, usando la descomposición espectral de Δ dada por la proposición (1.2.4), tenemos

$$\begin{aligned} \langle \delta_x | f(\Delta)\delta_x \rangle &= \sum_{r=0}^{\infty} f(\lambda_r) \langle \delta_x | (E_r - E_{r+1})\delta_x \rangle \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} f(\lambda_r) \left\langle \delta_x \left| \frac{\mathbf{1}_{B(x, r)}}{|B(x, r)|} - \frac{\mathbf{1}_{B(x, r+1)}}{|B(x, r+1)|} \right. \right\rangle \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} f(\lambda_r) \left(\frac{1}{|B(x, r)|} - \frac{1}{|B(x, r+1)|} \right), \end{aligned}$$

donde $\mathbf{1}_{B(x, r)}(y) = 1$ si $y \in B(x, r)$ y 0 en otro caso. □

Observación 1.2.9. *Para un estructura jerárquica regular, μ_x es independiente de x y*

$$\mu_x = \mu = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{N_r} - \frac{1}{N_{r+1}} \right) \delta(\lambda_r). \quad (1.2.6)$$

En este caso, diremos que μ es la medida espectral para Δ .

1.3. Dimensión espectral

En esta sección consideraremos modelos jerárquicos regulares. La dimensión espectral es una medida de acoplamiento de regiones distantes de \mathbb{X} . Una dimensión espectral pequeña significa un acoplamiento débil y una dimensión espectral grande significa un acoplamiento fuerte.

Definición 1.3.1. *La dimensión espectral de un modelo jerárquico es número d_{sp} , el cual viene dada por la expresión*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log \mu([1-t, 1])}{\log t} = \frac{d_{sp}}{2},$$

siempre que el límite exista.

La definición anterior tiene estrecha relación con el paseo aleatorio generado por el Laplaciano jerárquico sobre \mathbb{X} dado que

$$\sum_{y \in \mathbb{X}} \langle \delta_x | \Delta \delta_y \rangle = 1,$$

para todo $x \in \mathbb{X}$, con probabilidad de transición $p_{xy} = \langle \delta_x | \Delta \delta_y \rangle$. Antes de los detalles recordemos las siguientes definiciones:

Definición 1.3.2. *Un estado x_0 se dice recurrente si con probabilidad uno $Z_k = x_0$, dado que $Z_0 = x_0$, para algún $k \in \mathbb{N}$.*

Definición 1.3.3. *Una cadena de Markov se dice irreducible si dado cualquier par de puntos x e y , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$p_{xy}^{(n)} = \mathbb{P}(Z_n = y | Z_0 = x) > 0.$$

Observación 1.3.4. *Si una cadena es recurrente, todos los estados son transcientes o bien recurrentes. En cuyo caso diremos que la cadena es transciente(respect. recurrente).*

El camino aleatorio, generado por Δ , puede ser definido de la siguiente manera; comenzamos en el punto $x_0 \in \mathbb{X}$, el camino aleatorio (x_0, x_1, x_2, \dots) en \mathbb{X} , los puntos $x_k, k \geq 1$ son elegidos de la siguiente manera: Dado $x_k, k \geq 0$, elegimos un radio aleatorio r con probabilidad p_r . Después de eso, elegimos un punto aleatorio $x_{k+1} \in B(x_k, r)$ de acuerdo

a la distribución uniforme. Todas estas elecciones son realizadas de manera independiente de x_j , $j \leq k$.

Recordemos el siguiente criterio para la recurrencia para una cadena de Markov: Sea $(Z_k)_{k \geq 0}$ una cadena de Markov con matriz de transición $[p_{xy}] = \Delta$. Consideremos

$$\mathbb{I}_k = \begin{cases} 1, & \text{si } Z_k = x_0 \\ 0, & \text{si } Z_k \neq x_0 \end{cases}.$$

Entonces el número de visitas al estado x_0 es $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{I}_k$. Por lo que el valor esperado de veces en el que la cadena está en el instante x_0 es

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{I}_k \mid Z_0 = x_0 \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(Z_k = x_0 \mid Z_0 = x_0) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_k = x_0 \mid Z_0 = x_0) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{x_0 x_0}^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle \delta_{x_0} \mid \Delta^k \delta_{x_0} \rangle \\ &= \langle \delta_{x_0} \mid (1 - \Delta)^{-1} \delta_{x_0} \rangle = R. \end{aligned}$$

El camino aleatorio comenzando el x_0 es recurrente para $R = \infty$ y transiente para $R < \infty$.

Polya también nos entrega un criterio para caminos aleatorios sobre \mathbb{Z}^d generado por el Laplaciano discreto $\Delta_{\mathbb{Z}^d}$ usual, el cual nos dice que el camino aleatorio es recurrente si $d = 1, 2$ y transiente si $d > 2$.

El correspondiente criterio para el Laplaciano jerárquico es:

Proposición 1.3.5. Consideremos un modelo jerárquico homogéneo de grado $n \geq 2$.

Supongamos que existen constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ y $\rho > 1$ tales que

$$C_1 \rho^{-r} \leq p_r \leq C_2 \rho^{-r},$$

para r suficientemente grande. Entonces:

(1) La dimensión espectral es

$$d_{sp}(n, \rho) = 2 \frac{\log(n)}{\log(\rho)}. \quad (1.3.1)$$

Por lo tanto $0 < d_{sp}(n, \rho) \leq 2$ si y sólo si $n \leq \rho$.

(2) El camino aleatorio generado por Δ es recurrente si $0 < d_{sp}(n, \rho) \leq 2$ y transiente si $d_{sp}(n, \rho) > 2$.

Demostración. Notar que $\mu([1-t, 1])$ es una función por pedazos de t con saltos de discontinuidad en los puntos $1 - \lambda_r$. Además

$$\mu([\lambda_{r_0}, 1]) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{N_r} - \frac{1}{N_{r+1}} \right) \delta_{\lambda_r}([\lambda_{r_0}, 1]),$$

donde

$$\delta_{\lambda_r}([\lambda_{r_0}, 1]) = \begin{cases} 1 & , \text{si } \lambda_{r_0} \leq \lambda_r \\ 0 & , \text{caso contrario} \end{cases}.$$

Como λ_r es monótona respecto a r , se sigue que

$$\delta_{\lambda_r}([\lambda_{r_0}, 1]) = \begin{cases} 1 & , \text{si } r_0 \leq r \\ 0 & , \text{caso contrario} \end{cases}.$$

Por lo tanto

$$\mu([\lambda_{r_0}, 1]) = \sum_{r=r_0}^{\infty} \frac{1}{N_r} - \frac{1}{N_{r+1}} = \frac{1}{N_{r_0}} \quad (1.3.2)$$

Luego, como

$$C_1(\rho-1)^{-1}\rho^{-r} = C_1 \sum_{s=r+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho} \right)^r \leq 1 - \lambda_r = \sum_{s=r+1}^{\infty} p_s \leq C_2 \sum_{s=r+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho} \right)^r = C_2(\rho-1)^{-1}\rho^{-r}.$$

Se tiene para $t = 1 - \lambda_r$

$$\frac{\log(n^{-r})}{\log(C_2(\rho-1)^{-1}\rho^{-r})} \leq \frac{\log \mu([1-t, 1])}{\log t} \leq \frac{\log(n^{-r})}{\log(C_1(\rho-1)^{-1}\rho^{-r})}, \quad (1.3.3)$$

como $\lambda_r \rightarrow 1$ cuando $r \rightarrow \infty$, se sigue que $t \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$, por lo tanto de (1.3.3) obtenemos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log \mu([1-t, 1])}{\log t} = \frac{\log(n)}{\log(\rho)}.$$

Para el caso general, sea $(t_k)_{k \geq 0}$ es tal que $t_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Como 1 es punto de acumulación de λ_{r_k} , con $(r_k)_{k \geq 0}$ tal que $r_k \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$; podemos hallar $k \in \mathbb{N}$ de tal forma que $1 - \lambda_{r_{k+1}} \leq t_k \leq 1 - \lambda_{r_k}$, donde $r_k = \sup\{j \mid t_j \leq 1 - \lambda_{r_j}\}$. Luego vale (1.3.3) para $(t_k)_{k \geq 0}$ y $(r_k)_{k \geq 1}$. Por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log \mu([1-t, 1])}{\log t} = \frac{\log(n)}{\log(\rho)}.$$

Concluyendo (1).

Para la parte (2), tenemos para un modelo jerárquico regular $N_r = n^r$ y $N_{r+1} = n^{r+1}$.

Luego

$$R = \langle \delta_{x_0}, (1 - \Delta)^{-1} \delta_{x_0} \rangle = \int \frac{d\mu(\xi)}{1 - \xi} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{N_r^{-1} - N_{r+1}^{-1}}{1 - \lambda_r} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{n^{-r} - n^{-r-1}}{1 - \lambda_r}.$$

Las cotas

$$C_2^{-1}(\rho - 1)(1 - 1/n) \sum_{r=0}^{\infty} (\rho/n)^r \leq R \leq C_1^{-1}(\rho - 1)(1 - 1/n) \sum_{r=0}^{\infty} (\rho/n)^r$$

nos dicen que $R < \infty$ para $\rho < n$ y que $R = \infty$ para $\rho \geq n$. □

1.4. La densidad de estados

En esta sección consideraremos a (\mathbb{X}, d) como una estructura jerárquica regular por los parámetros n_r y Δ es el Laplaciano jerárquico definido por los parámetros p_r . Demostraremos que la medida espectral μ es igual a los estados de densidad medidos por Δ .

Definición 1.4.1. *La densidad de estados es la medida de probabilidad que describe distribución asintótica de los autovalores de una aproximación grande de volumen finito de Δ .*

Denotemos por $C_0(\mathbb{R})$ el espacio de las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que se anulan en el infinito, es decir, $\lim_{|t| \rightarrow \infty} |f(t)| = 0$. Si $(\mu_k)_{k \geq 1}$ y μ son medidas de probabilidad de Borel sobre \mathbb{R} , decimos que μ_k converge en la topología débil estrella a μ si, para toda $f \in C_0(\mathbb{R})$, se cumple

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f(t) d\mu_k(t) = \int f(t) d\mu(t).$$

Sea $G \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ un subconjunto denso numerable. Como cualquier función $f \in C_0(\mathbb{R})$ puede ser escrita como combinación lineal de funciones $t \mapsto (t - z)^{-1}$, con $z \in G$, entonces una condición suficiente para la convergencia débil estrella de la sucesión (μ_k) es:

Proposición 1.4.2. *Sean $(\mu_k)_{k \geq 1}$ y μ medidas de probabilidad sobre \mathbb{R} , si*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \frac{d\mu_k(t)}{t - z} = \int \frac{d\mu(t)}{t - z}, \quad (1.4.1)$$

donde $z \in G$; entonces $(\mu_k)_{k \geq 1}$ converge en la topología débil estrella a μ .

Demostración. La idea de la demostración es usar el hecho que la familia de funciones $f_{a,\varepsilon} = \frac{1}{(t-\varepsilon)^2 + a^2}$, con $a, \varepsilon \in \mathbb{R}$, son densas en $L^2(\mathbb{R})$ y por tanto en $C_b(\mathbb{R})$. Como podemos escribir

$$f_{a,\varepsilon} = \frac{1}{2ia} \left[\frac{1}{(t-\varepsilon) - ia} - \frac{1}{(t-\varepsilon) + ia} \right],$$

entonces se puede probar que la familia de funciones $\left\{ \frac{1}{t-\varepsilon \pm ia} \right\}$ son densas en $C_b(\mathbb{R})$. Por dicho argumento de densidad se sigue el resultado. \square

Existen varias aproximaciones de volumen finito de Δ . Consideraremos dos de éstas aproximaciones y mostraremos que poseen el mismo límite de densidad de estados, igual a μ . Sea $x_0 \in \mathbb{X}$ un elemento fijo y consideremos la sucesión creciente de bolas

$$B_k = B(x_0, k), \text{ con } k \geq 0.$$

Cada B_k tiene cardinalidad $|B_k| = N_k$. Para $k \geq 0$, definimos Δ_k como el Laplaciano jerárquico truncado

$$\Delta_k = \sum_{s=0}^k p_s E_s. \quad (1.4.2)$$

Notemos que el subespacio

$$l^2(B_k) = \{\phi \in l^2(\mathbb{X}) \mid \phi(x) = 0 \text{ para } x \notin B_k\}, \quad (1.4.3)$$

es invariante para Δ_k . Sea e_j^k , con $k = 1, \dots, N_r$, los autovalores del operador restringido $\Delta_k \upharpoonright l^2(B_k)$ y sea μ_k la correspondiente medida de conteo de autovalores normalizada,

$$\mu_k = \frac{1}{N_r} \sum_{j=1}^{N_r} \delta(e_j^k). \quad (1.4.4)$$

Proposición 1.4.3. *La sucesión μ_k converge a la medida espectral μ en la topología débil estrella cuando $k \rightarrow \infty$.*

Demostración. Por la proposición (1.2.4), podemos diagonalizar Δ_k . Sumando por partes, tenemos la descomposición espectral

$$\begin{aligned} \Delta_k &= p_0 E_0 + p_1 E_1 + \dots + p_k E_k \\ &= p_0(E_0 - E_1) + (p_0 + p_1)(E_1 - E_2) + \dots \\ &\quad + (p_0 + p_1 + p_{k-1})(E_{k-1} - E_k) + (p_0 + \dots + p_k)E_k. \end{aligned}$$

Luego, usando la misma idea de la proposición (1.2.8) se sigue que

$$\mu_k = \frac{1}{N_r} \delta(\lambda_k) + \sum_{r=0}^{k-1} \left(\frac{1}{N_r} - \frac{1}{N_{r+1}} \right) \delta(\lambda_r), \quad (1.4.5)$$

Así cuando $k \rightarrow \infty$ se sigue que $\mu_k \rightarrow \mu$. □

Supongamos que $\tilde{\Delta}_k$ es otra sucesión de operadores acotados autoadjuntos aproximando a Δ y que $l^2(B_k)$ es un subespacio invariante de $\tilde{\Delta}_k$. Si $\tilde{\mu}_k$ es la medida de conteo de autovalores normalizada correspondiente a $\tilde{\Delta}_k$, entonces

$$\int f d\tilde{\mu}_k = \frac{1}{N_r} \sum_{x \in B_k} \langle \delta_x | f(\tilde{\Delta}_k) \delta_x \rangle,$$

para toda función de Borel acotada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

Proposición 1.4.4. *Supongamos que $\|\Delta_k - \tilde{\Delta}_k\| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Entonces $\tilde{\mu}_k$ converge a μ en la topología débil estrella.*

Demostración. Ya que μ_k converge a μ en la topología débil estrella, por la proposición (1.4.2) es suficiente mostrar que para cada $\text{Im } z \neq 0$, la diferencia

$$D_k(z) = \int \frac{d\mu_k(t)}{t-z} - \int \frac{d\tilde{\mu}_k(t)}{t-z},$$

converge a 0 cuando $k \rightarrow \infty$. Note que por (1.2.1) y (1.2.3) se sigue que

$$\|(\Delta_k - z)^{-1} - (\tilde{\Delta}_k - z)^{-1}\| \leq \frac{\|(\Delta_k - \tilde{\Delta}_k)\|}{|\text{Im } z|^2},$$

y por lo tanto

$$|D_k(z)| = \left| \frac{1}{N_r} \sum_{x \in B_k} \langle \delta_x | ((\Delta_k - z)^{-1} - (\tilde{\Delta}_k - z)^{-1}) \delta_x \rangle \right| \leq \frac{\|\Delta_k - \tilde{\Delta}_k\|}{|\text{Im } z|^2}.$$

Lo cual converge a cero cuando $k \rightarrow \infty$. □

Denotemos por P_k la proyección ortogonal sobre $l^2(B_k)$ y consideremos

$$\tilde{\Delta}_k = P_k \Delta P_k.$$

Luego $\|\Delta_k - \tilde{\Delta}_k\| \leq \sum_{r=k+1}^{\infty} p_r$ y la sucesión verifica las hipótesis de la proposición anterior. Por lo que el límite de la medida de conteo de autovalores normalizada es igual a μ . Entre las diferentes aproximaciones de volumen finito de Δ , el Laplaciano truncado Δ_k es el más conveniente. Por lo que la medida espectral μ puede ser interpretada como la densidad de estados de Δ .

Localización espectral

Nuestro objetivo en este capítulo es entender propiedades genéricas del operador H_ω , que a continuación definiremos. Por propiedades genéricas, nos referimos a que debe existir un conjunto $\tilde{\Omega} \in \mathcal{F}$, con $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 1$, tal que para todo $\omega \in \tilde{\Omega}$; H_ω tiene cierta la propiedad deseada. En este caso diremos que para casi todo $\omega \in \Omega$, H_ω posee la propiedad deseada. Comenzaremos describiendo el espectro de H_ω , el cual denotaremos por $sp(H_\omega)$.

2.1. Definición del modelo

Sea (\mathbb{X}, d, Δ) un modelo jerárquico regular. Consideremos el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ donde $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{X}}$, \mathcal{F} la σ -álgebra medida producto de Borel sobre Ω , y \mathbb{P} es una medida de probabilidad dada sobre (Ω, \mathcal{F}) . Para cada $\omega \in \Omega$, consideremos el operador

$$H_\omega := \Delta + V_\omega \tag{2.1.1}$$

donde V_ω viene dado por

$$V_\omega := \sum_{x \in \mathbb{X}} \omega(x) \langle \delta_x | \cdot \rangle \delta_x, \tag{2.1.2}$$

aquí el conjunto $\{\omega(x) \mid x \in \mathbb{X}\}$ es una colección de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Notamos que, a priori, el operador V_ω puede ser no acotado (dependerá de la distribución de $\omega(x)$, $x \in \mathbb{X}$), y por lo tanto los operadores V_ω y H_ω son no acotados (autoadjuntos) con dominio

$$\mathcal{D}_\omega = \left\{ \varphi \mid \sum_{x \in \mathbb{X}} |\varphi(x)|^2 (1 + |\omega(x)|^2) < \infty \right\}.$$

La familia de operadores autoadjuntos $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ indexado por los eventos del espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es llamado el **modelo jerárquico de Anderson**. La idea

es dar resultados, con cierta precisión, sobre el espectro de $sp(H_\omega)$. Para ello, damos a continuación algunos resultados preliminares que apuntan en este sentido:

Proposición 2.1.1. *Sea A un operador autoadjunto sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} .*

- *Si B es un operador autoadjunto acotado sobre \mathcal{H} , $b_1 = \inf sp(B)$ y $b_2 = \sup sp(B)$, entonces $sp(A + B) \subset sp(A) + [b_1, b_2]$.*
- *Si A es un operador acotado y B es acotado inferiormente, entonces $sp(A + B) \subset [\inf sp(A) + \inf sp(B), \infty]$.*
- *Si A es acotado y B es acotado superiormente, entonces $sp(A + B) \subset (-\infty, \sup sp(A) + \sup sp(B)]$.*

Demostración. Supongamos que B es acotado. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $b_1 = -\|B\|$ y $b_2 = \|B\|$ (basta considerar $\theta_1 B + \theta_2 I$, para θ_1 y θ_2 apropiados). Si $z \notin sp(A) + [-\|B\|, \|B\|]$, entonces $dist(z, sp(A)) > \|B\|$ y por tanto $\|(z - A)^{-1}\| < \|B\|^{-1}$. Luego

$$\|(z - A)^{-1}B\| \leq \|(z - A)^{-1}\| \cdot \|B\| < 1,$$

por lo que el operador

$$z - A - B = (z - A)(1 - (z - A)^{-1}B),$$

tiene inversa acotada. Supongamos ahora que B es acotado inferiormente, digamos $\inf sp(B) = b \in \mathbb{R}$. Sea $a = \inf sp(A)$. Luego para cualquier vector φ ,

$$\langle (A + B)\varphi \mid \varphi \rangle \geq a + b,$$

y por lo tanto $sp(A + B) \subset [a + b, \infty)$. El caso en que B es acotado superiormente se demuestra de manera similar. \square

Proposición 2.1.2. (Criterio de Weyl) *Sea $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$ un operador autoadjunto sobre el espacio de Hilbert \mathcal{H} . Entonces*

$$sp(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \exists (\varphi_n) \subset \mathcal{D}(A), \|\varphi_n\| = 1 : \lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - \lambda)\varphi_n\| = 0 \right\}.$$

Demostración. La demostración puede ser consultada en [10]. \square

Proposición 2.1.3. Sean S^V el soporte de μ^V , $S = sp(\Delta) + S^V$ y $S_\omega = sp(H_\omega)$. Para los números racionales $r_1 < r_2$, consideremos el evento

$$\mathcal{Q}_{r_1, r_2} = \{S_\omega \cap (r_1, r_2) \neq \emptyset\}.$$

Si $(r_1, r_2) \cap S \neq \emptyset$ entonces $\mathbb{P}(\mathcal{Q}_{r_1, r_2}) = 1$.

Demostración. Supongamos que $(r_1, r_2) \cap S \neq \emptyset$ y sea $u \in (r_1, r_2)$. Luego podemos escribir $u = \lambda_s + e$ donde $e \in S^V$ y $s \in \{1, 2, \dots, \infty\}$. Para cada $\varepsilon > 0$ y una bola B_r de radio r consideremos el evento

$$\mathcal{E}(B_r, \varepsilon) := \left\{ \omega \mid \max_{x \in B_r} |\omega(x) - e| < \varepsilon \right\}.$$

Ya que $\mu^V((e-\varepsilon, e+\varepsilon)) > 0$ y las variables aleatorias $\{\omega(x) \mid x \in B_r\}$ son independientes, tenemos que

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}(B_r, \varepsilon)) = (\mu^V((e-\varepsilon, e+\varepsilon)))^{N_r} > 0.$$

Por la construcción de la estructura jerárquica, \mathbb{X} se puede escribir como la unión numerable de bolas disjuntas de radio r , esto es: $\mathbb{X} = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{r,j}$. Sea

$$\mathcal{E}_{r,\varepsilon} = \limsup_j \mathcal{E}(B_{r,j}, \varepsilon).$$

Ya que los eventos $\{\mathcal{E}(B_{r,j}, \varepsilon), j = 1, \dots, \infty\}$ son independientes y $\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(\mathcal{E}(B_{r,j}, \varepsilon)) = \infty$, el teorema de Borel-Cantelli nos asegura que $\mathbb{P}(\mathcal{E}_{r,\varepsilon}) = 1$. Luego el evento

$$\mathcal{E} = \bigcap_{r \geq 0} \mathcal{E}_{r, 1/(r+1)},$$

también tiene probabilidad 1. Por construcción, para $\omega \in \mathcal{E}$, existe una sucesión $(B_{r,j_r})_{r \geq 0}$ de bolas de radio creciente tales que

$$(*) \quad \max_{x \in B_{r,j_r}} |\omega(x) - e| < \frac{1}{r+1},$$

para todo $r \geq 0$.

Para $r \geq 1$, consideremos $q_r = \min(r-1, s)$. Note que para cada $r \geq 1$ podemos tomar una función normalizada φ_r constante sobre cada bola de radio q_r , subbola de B_{r,j_r} , nula fuera de B_{r,j_r} y tal que $E_{q_r+1} \varphi_r = 0$ (como lo realizado en la demostración del teorema (1.2.4)). Luego φ_r es autofunción de Δ asociada a λ_{q_r} . Entonces

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|\Delta \varphi_r - \lambda_s \varphi_r\| = 0,$$

y, por (*),

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|H_\omega \varphi_r - (\lambda_s - e)\varphi_r\| = 0,$$

para $\omega \in \mathcal{E}$. Por lo tanto φ_r es una sucesión de Weyl para el operador H_ω y $u = \lambda_s + e \in sp(H_\omega)$. De ésta forma $u \in (r_1, r_2) \cap S_\omega$ y

$$(r_1, r_2) \cap S_\omega \neq \emptyset,$$

es decir, $\omega \in \mathcal{Q}_{r_1, r_2}$. Hemos mostrado que $\mathcal{E} \subset \mathcal{Q}_{r_1, r_2}$. Ya que $\mathbb{P}(\mathcal{E}) = 1$, podemos concluir que $\mathbb{P}(\mathcal{Q}_{r_1, r_2}) = 1$. \square

El siguiente teorema es un resultado análogo al de H. Kunz y B. Souillard, el cual puede ser consultado en [6].

Teorema 2.1.4. *Supongamos que las variables aleatorias $\{\omega(x)\}_{x \in \mathbb{X}}$ son i.i.d. con distribución μ^V , es decir, $\mathbb{P} \times_{x \in \mathbb{X}} \mu^V$. Sea S^V el soporte de μ^V y I^V el intervalo cerrado más pequeño (clausura convexa) conteniendo a S^V . Entonces para casi todo $\omega \in \Omega$, respecto a \mathbb{P} , tenemos que*

$$sp(\Delta) + S^V \subset sp(H_\omega) \subset (sp(\Delta) + I^V) \cap ([0, 1] + S^V).$$

En particular, si S^V es conexo, entonces $S^V = I^V$ y

$$sp(H_\omega) = sp(\Delta) + S^V,$$

para casi todo $\omega \in \Omega$, respecto a \mathbb{P} .

Demostración. Para la contención $sp(H_\omega) \subset (sp(\Delta) + I^V) \cap ([0, 1] + S^V)$ consideremos el subconjunto aleatorio real $S_\omega = sp(H_\omega)$. Para casi todo $\omega \in \Omega$, respecto a \mathbb{P} , tenemos que $\omega(x) \in S^V$ y por lo tanto $sp(V_\omega) \subset S^V$. Para cada $\omega \in \Omega$ fijo, usamos la proposición (2.1.1) primero con $A = \Delta$ y $B = V_\omega$ obteniendo $sp(H_\omega) \subset sp(\Delta) + I^V$. Luego con $A = V_\omega$ y $B = \Delta$ obteniendo $sp(H_\omega) \subset [0, 1] + S^V$. Por lo que $S_\omega \subset (sp(\Delta) + I^V) \cap ([0, 1] + S^V)$. Por otro lado, para $sp(\Delta) + S^V \subset S_\omega$, consideremos el evento

$$\mathcal{Q} = \bigcap_{r_1 < r_2: (r_1, r_2) \cap S \neq \emptyset} \mathcal{Q}_{r_1, r_2}.$$

entonces $\mathbb{P}(\mathcal{Q}) = 1$, ya que su complemento es la unión numerable de conjuntos cuya probabilidad es nula. Afirmamos que

$$\omega \in \mathcal{Q} \implies S \subset S_\omega.$$

En efecto, sea $\omega \in \mathcal{Q}$. Supongamos que $u \in S$. Para los racionales $r_1 < u < r_2$, tenemos que $(r_1, r_2) \cap S \neq \emptyset$ y por lo tanto $\omega \in \mathcal{Q}_{r_1, r_2}$. Luego $S_\omega \cap (r_1, r_2) \neq \emptyset$. Ya que S_ω es un conjunto cerrado, podemos concluir, luego de $r_1 \uparrow u$ y $r_2 \downarrow u$, que $u \in S_\omega$. \square

2.2. Teoremas de localización espectral

Denotemos por $sp_{ac}(H_\omega)$ a la parte absolutamente continua del espectro de H_ω y por $sp_{cont}(H_\omega)$ a la parte continua. En esta sección enunciaremos los dos resultados más importantes del presente trabajo. El primero es debido a Molchanov [7], el cual nos entrega condiciones suficientes para que $sp_{cont}(H_\omega) = \emptyset$, siempre que las variables aleatorias posean distribución de Cauchy. El segundo resultado trata de replicar la misma conclusión independiente de la distribución de las variables aleatorias, no sin antes imponer condiciones sobre la dimensión espectral del modelo. En [7], se probó el siguiente teorema:

Teorema 2.2.1. (Molchanov) *Sea (\mathbb{X}, d, Δ) un modelo jerárquico regular. Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\sum_{r=1}^{\infty} p_r r^{1+\varepsilon} < \infty, \quad (2.2.1)$$

Si las variables aleatorias $\{\omega(x) : x \in \mathbb{X}\}$ son i.i.d con distribución de Cauchy,

$$k_{a,h}(e)de = \frac{1}{\pi} \frac{h}{(e-a)^2 + h^2} de, \quad e > 0,$$

para los parámetros $a \in \mathbb{R}$ y $h > 0$, entonces $sp_{cont}(H_\omega) = \emptyset$ para casi todo ω respecto a \mathbb{P} .

Observación 2.2.2. *Notar que el teorema anterior es valido para cualquier desorden. Dada una constante de acoplamiento $c > 0$, el operador aleatorio puede ser escrito como $\Delta + \sum_{x \in \mathbb{X}} c\omega(x) \langle \delta_x | \cdot \rangle \delta_x$. Si $\omega(x)$ tiene distribución de Cauchy $k_{a,h}$, entonces $c\omega(x)$ tiene distribución de Cauchy $k_{ca,ch}$. Por lo tanto, bajo las hipótesis del teorema, $\Delta + cV_\omega$ posee espectro puramente puntual para casi todo ω , respecto a \mathbb{P} . Notar que la condición (2.2.1) es bastante débil, pues no depende de las particiones, sino sólo de p_r . Esto nos dice que el teorema (2.2.1) vale en dimensión espectral arbitraria. En efecto, dado $n \geq 2$ y d_{sp} un número real positivo. Notar que existe un único $\rho > 1$ tal que $d_{sp} = d_{sp}(n, \rho)$. Ahora bien, si consideramos $p_r = C\rho^{-r}$, donde C es una constante de normalización de tal forma que $\sum_{r=1}^{\infty} p_r = 1$. Luego los p_r satisfacen (2.2.1). Por lo tanto, podemos construir modelos jerárquicos de Anderson de dimensión espectral arbitraria para los cuales el teorema (2.2.1) vale.*

Respecto a la medida de probabilidad \mathbb{P} , denotamos por \mathcal{L} la medida de Lebesgue sobre \mathbb{R} . Para cualquier $x \in \mathbb{X}$, Ω puede ser descompuesto a lo largo de la coordenada x -ésima como $\Omega = \mathbb{R} \times \tilde{\Omega}$, donde $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}^{\mathbb{X}-\{x\}}$. Sea $\tilde{\mathbb{P}}_x$ la correspondiente marginal de \mathbb{P} definida por $\tilde{\mathbb{P}}_x(\tilde{\mathcal{B}}) = \mathbb{P}(\mathbb{R} \times \tilde{\mathcal{B}})$, donde $\tilde{\mathcal{B}} \subset \tilde{\Omega}$ es un conjunto de Borel. Entonces para casi todo $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$, respecto a $\tilde{\mathbb{P}}$, existe una medida de probabilidad $\mathbb{P}_x^{\tilde{\omega}}$ sobre \mathbb{R} tal que el teorema condicional de Fubini vale: Para todo $f \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$ tenemos

$$\int_{\Omega} f(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\tilde{\Omega}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(\xi, \tilde{\omega}) d\mathbb{P}_x^{\tilde{\omega}}(\xi) \right) d\tilde{\mathbb{P}}_x(\tilde{\omega})$$

Si para casi todo $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$, respecto a $\tilde{\mathbb{P}}_x$, es absolutamente continua con respecto a \mathcal{L} , entonces decimos que \mathbb{P} posee una densidad condicional a lo largo de la coordenada x -ésima. \mathbb{P} es llamada **condicionalmente absolutamente continua** si para cada $x \in \mathbb{X}$, \mathbb{P} posee una densidad condicional a lo largo de la coordenada x -ésima. Un caso especial de una medida de probabilidad condicionalmente continua es la medida producto $\mathbb{P} = \otimes_{x \in \mathbb{X}} \mathbb{P}_x$, donde cada \mathbb{P}_x es una medida de probabilidad sobre \mathbb{R} absolutamente continua respecto a \mathcal{L} .

El resultado principal sobre localización espectral es:

Teorema 2.2.3. *Sea (\mathbb{X}, d, Δ) un modelo jerárquico regular. Supongamos que existe un suceción $u_r > 0$ tal que $\sum_{r=1}^{\infty} u_r^{-1} < \infty$ y*

$$\sum_{r=1}^{\infty} p_r u_r \sqrt{N_r} < \infty. \quad (2.2.2)$$

Entonces:

- (1) *Para todo $\omega \in \Omega$, $sp_{ac}(H_\omega) = \emptyset$.*
- (2) *Si \mathbb{P} es condicionalmente absolutamente continua, entonces $sp_{cont}(H_w) = \emptyset$ para casi todo w ; respecto a \mathbb{P} .*

Observación 2.2.4. *La condición (2.2.2) es más restrictiva que la condición (2.2.1). El requerimiento sobre el decaimiento de p_r impone una cota superior sobre la dimensión espectral de Δ . El teorema (2.2.3) y la proposición (1.3.5) nos permiten construir modelos jerárquicos de dimensión espectral $d_{sp} \leq 4$ que exhibe localización en desórdenes arbitrarios. Si (\mathbb{X}, d) es una estructura jerárquica homogénea de grado $n \geq 2$ y $p_r = C\rho^{-r}$ con $\rho > \sqrt{n}$, entonces la hipótesis (2.2.2) se verifica para $u_r = r^{1+\varepsilon}$. Dada $0 < d_{sp} < 4$ podemos ajustar $\rho > \sqrt{n}$ de tal forma que $d_{sp}(n, \rho) = d_{sp}$. Si $p_r = Cr^{-2-\varepsilon}n^{-r/2}$, enton-*

ces el modelo tiene dimensión espectral $d_{sp} = 4$ y (2.2.2) se verifica para $u_r = r^{1+\varepsilon/2}$. También se pueden construir modelos triviales con $d_{sp} = 0$ tomando p_r de tal forma que decrezca más rápido que ρ^{-r} para cualquier ρ . Notar además que la que homogeneidad de la estructura jerárquica no es necesaria para el teorema (2.2.3).

2.3. Criterio para la localización espectral

En esta sección formularemos una condición suficiente para que H_ω posea $sp_{ac}(H_\omega) = \emptyset$ para todo $\omega \in \Omega$, y una condición suficiente para que H_ω posea $sp_{cont}(H_\omega) = \emptyset$ para casi todo ω , respecto a \mathbb{P} .

Consideremos el operador truncado

$$H_{\omega,r} = \sum_{s=0}^r p_s E_s + V_\omega, \quad r \geq 0, \quad (2.3.1)$$

donde $(E_r \varphi)(x) := |B(x, r)|^{-1} \sum_{y \in B(x, r)} \varphi(y)$ y $\omega \in \Omega$ fijo. Para cualquier bola B_r de radio r , el subespacio $l^2(B_r)$ es invariante bajo $H_{\omega,r}$. Para cada r fijo, definimos $\sigma(\omega, B_r)$ como el conjunto de los autovalores del operador $H_{\omega,r}$ restringido a $l^2(B_r)$ y $\sigma_\omega = \bigcup \sigma(\omega, B_r)$, la unión es sobre de todos los posibles radios. Notar que σ_ω es un subconjunto numerable de \mathbb{R} , y por tanto con medida de Lebesgue cero. Para $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_\omega$, $r \geq 0$, y $x, y \in \mathbb{X}$, consideremos

$$G_{\omega,r}(x, y; z) = \langle \delta_x | (H_{\omega,r} - z)^{-1} \delta_y \rangle.$$

Para $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_r$, $r \geq 0$ y $t \in \mathbb{X}$, consideremos

$$g_{\omega,r}(t; z) = \frac{1}{N_r} \sum_{d(t', t) \leq r} G_{\omega,r}(t', t; z),$$

es decir, $g_{\omega,r}$ es el promedio de $G_{\omega,r}(\cdot, t; z)$ sobre las bolas $B(t, r)$.

Claramente $G_{\omega,r}(t', t; z) = G_{\omega,r}(t, t'; z)$, pues la medida espectral adjunta para $\delta_t, \delta_{t'}$ y $H_{\omega,r}$ es real. Notar que

$$g_{\omega,r}(t; z) = \frac{1}{N_r} \sum_{d(t', t) \leq r} G_{\omega,r}(t, t'; z) = \frac{1}{N_r} \langle \delta_t | (H_{\omega,r} - z)^{-1} \mathbf{1}_{B(t,r)} \rangle. \quad (2.3.2)$$

Para $B_r \in \mathcal{P}_r$, denotamos

$$\gamma_\omega(B_r; z) = \frac{1}{N_r} \langle \mathbf{1}_{B_r} | (H_{\omega,r} - z)^{-1} \mathbf{1}_{B_r} \rangle.$$

Ahora bien, para $x \in \mathbb{X}$ y $\omega \in \Omega$ fijos, denotamos por μ_x^ω la medida espectral para H_ω y δ_x , por $\mu_{x,cont}^\omega$ la parte continua de μ_x^ω y por $\mu_{x,ac}^\omega$ la parte absolutamente continua. El criterio principal de localización espectral para el modelo jerárquico de Anderson es:

Teorema 2.3.1. *Supongamos que existe una sucesión $u_r > 0$ con $\sum_{r=1}^{\infty} u_r^{-1} < \infty$ y*

$$\sum_{r=1}^{\infty} p_r u_r < \infty. \quad (2.3.3)$$

Sean $x \in \mathbb{X}$ y $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ conjunto de Borel dados. Entonces:

(1) *Si para $\omega \in \Omega$ fijo,*

$$\sum_{s=1}^{\infty} p_s |\gamma(B(x, s); e)| < \infty, \quad (2.3.4)$$

para casi todo $e \in \mathcal{B}$, respecto a \mathcal{L} , entonces $\mu_{x,ac}^{\omega}(\mathcal{B}) = 0$.

(2) *Si \mathbb{P} posee densidad condicional a lo largo de la coordenada x -ésima, y (2.3.4) vale para casi todo $(\omega, e) \in \Omega \times \mathcal{B}$, respecto a $\mathbb{P} \otimes \mathcal{L}$, entonces $\mu_{x,cont}^{\omega}(\mathcal{B}) = 0$ para casi todo $\omega \in \Omega$.*

(3) *Supongamos que para casi todo $(\omega, e) \in \Omega \times \mathcal{B}$, respecto a $\mathbb{P} \times \mathcal{L}$, existe una constante finita $C_{\omega,e,x}$ tal que*

$$|\gamma_{\omega}(B_{x,r}; e)| \leq C_{\omega,e,x} u_r, \quad (2.3.5)$$

para todo r . Si \mathbb{P} posee densidad condicional a lo largo de la coordenada x -ésima, entonces $\mu_{x,cont}(\mathcal{B}) = 0$ para casi todo $\omega \in \Omega$, respecto a \mathbb{P} .

Probaremos las proposiciones (2.3.2), (2.3.4) y (2.3.5) y luego demostraremos el teorema (2.3.1).

Proposición 2.3.2. *Sea $\omega \in \Omega$, $x, y \in \mathbb{X}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\omega}$ y $r \geq 0$ dados. Entonces*

$$G_{\omega,r}(x, y; z) = G_{\omega,0}(x, y; z) - \sum_{s=d(x,y)}^r p_s N_{s-1} g_{\omega,s-1}(x; z) g_{\omega,s}(y; z), \quad (2.3.6)$$

y

$$g_{\omega,r}(x; z) = \frac{1}{N_r} G_{\omega,0}(x, y; z) \prod_{s=1}^r (1 - p_s \gamma_{\omega}(B(x, s); z)). \quad (2.3.7)$$

Demostración. La fórmula (2.3.6) vale para $r = 0$ ya que $p_0 = 0$. Para $s \geq 1$, la identidad del resolvente nos dice que

$$(H_{\omega,s} - z)^{-1} \delta_y - (H_{\omega,s-1} - z)^{-1} \delta_y = -(H_{\omega,s-1} - z)^{-1} p_s E_s (H_{\omega,s} - z)^{-1} \delta_y.$$

Notar que $E_s (H_{\omega,s} - z)^{-1} \delta_y = g_{\omega,s}(y; z) \mathbf{1}_{B(y,s)}$. Tomando $\langle \delta_x | \cdot \rangle$ en la ecuación anterior

obtenemos

$$G_{\omega,s}(x, y; z) - G_{\omega,s-1}(x, y; z) = -p_s g_{\omega,s}(y; z) \langle \delta_x | (H_{\omega,s-1} - z)^{-1} \mathbf{1}_{B(y,s)} \rangle. \quad (2.3.8)$$

Notar que por la ecuación (2.3.2),

$$\langle \delta_x | (H_{\omega,s-1} - z)^{-1} \mathbf{1}_{B(y,s)} \rangle = \begin{cases} N_{s-1} g_{\omega,s-1}(x; z), & \text{si } d(x, y) \leq s, \\ 0, & \text{si } d(x, y) > s. \end{cases}$$

La fórmula (2.3.6) se sigue directamente resolviendo la recurrencia (2.3.8).

La demostración de (2.3.7) es similar. La identidad del resolvente nos dice que

$$\langle \delta_x | (H_{\omega,r} - z)^{-1} \mathbf{1}_{B(x,r)} \rangle = (1 - p_r \gamma_{\omega}(B(x, r); z)) \langle \delta_x | (H_{\omega,r-1} - z)^{-1} \mathbf{1}_{B(x,r-1)} \rangle.$$

y (2.3.7) se sigue luego de iterar la fórmula anterior. \square

Para la demostración de la proposición (2.3.4) necesitamos el siguiente lema:

Lema 2.3.3. *Sea A una matriz Hermitiana de $N \times N$ y $v \in \mathbb{C}^N$. Entonces para todo $M > 0$*

$$\mathcal{L} \left(\left\{ e : \|(A - e)^{-1} v\|_2^2 \geq M \right\} \right) \leq 4 \sqrt{\frac{N}{M}} \|v\|_2.$$

Demostración. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ los autovalores de A y $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ la correspondiente base ortonormal de autovalores. En éste caso tenemos, $v = \sum_{i=1}^N v_i \varphi_i$, $\|v\|_2^2 = \sum_{i=1}^N |v_i|^2$ y $(A - e)^{-1} v = \sum_{i=1}^N (\lambda_i - e)^{-1} v_i \varphi_i$. Para cada $i = 1, \dots, N$, consideremos el intervalo abierto $D_i = (\lambda_i - v_i/\sqrt{M}, \lambda_i + v_i/\sqrt{M})$. El largo total de los N intervalos es

$$\mathcal{L} \left(\bigcup_{i=1}^N D_i \right) \leq \sum_{i=1}^N m(D_i) = \frac{2}{\sqrt{M} \sum_{i=1}^N |v_i|} \leq \frac{2}{\sqrt{M}} \sqrt{N} \|v\|_2.$$

De la desigualdad de Chebyshev tenemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \left(\left\{ e \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^N D_i : \|(A - e)^{-1}v\|_2^2 \geq M \right\} \right) &\leq \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^N D_i} \|(A - e)^{-1}v\|_2^2 de \\
 &= \leq \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^N D_i} \sum_{i=1}^N \left| \frac{v_i}{\lambda_i - e} \right|^2 de \\
 &\leq \leq \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^N D_i} \left| \frac{v_i}{\lambda_i - e} \right|^2 de \\
 &= \leq \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N 2 \int_{|v_i/\sqrt{M}|}^{\infty} \frac{|v_i|^2}{t^2} dt \\
 &= \frac{2}{M} \sqrt{M} \sum_{i=1}^N |v_i| \\
 &\leq \frac{2}{\sqrt{M}} \sqrt{N} \|v\|_2
 \end{aligned}$$

Lo cual prueba el resultado. \square

Proposición 2.3.4. *Sea $u_r > 0$ una sucesión con $\sum_{r=1}^{\infty} u_r^{-1} < \infty$. Sea $\omega \in \Omega$ y $x \in \mathbb{X}$ fijos. Entonces para casi todo $e \in \mathbb{R}$, respecto a \mathcal{L} , existe una constante $C_e < \infty$ tal que*

$$\left(\sum_{d(x,y) \leq s} |g_{\omega,s}(y; e)|^2 \right)^{1/2} \leq C_e u_s, \quad (2.3.9)$$

para todo $s \geq 0$.

Demostración. Ya que $l^2(B(x, r))$ es un subespacio de dimensión N_r invariante bajo $H_{\omega,r}$ y como $\|\mathbf{1}_{B(x,r)}\|_2 = \sqrt{N_r}$, tenemos por el lema (2.3.3) que para $M_r > 0$,

$$\mathcal{L} \left(\left\{ e \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{\omega} : \|(H_{\omega,r} - e)^{-1} \mathbf{1}_{B(x,r)}\|_2^2 \geq M_r \right\} \right) \leq \frac{4N_r}{\sqrt{M_r}}.$$

Sea $M_r = (u_r N_r)^2$. Entonces $\sum_{r=1}^{\infty} N_r M_r^{-1/2} < \infty$. Por el lema de Borel-Cantelli, para casi todo $e \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{\omega}$, respecto a \mathcal{L} ; existe una constante $C_e < \infty$ tal que

$$\|(H_{\omega,r} - e)^{-1} \mathbf{1}_{B(x,r)}\|_2 < C_e \sqrt{M_r}, \quad (2.3.10)$$

para todo $r \geq 0$. Notemos que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{d(x,y) \geq s} |g_{\omega,s}(y; e)|^2 \right)^{1/2} &= \left(\sum_{d(x,y) \geq s} \left| \frac{1}{N_s} \langle \delta_y | (H_{\omega,s} - e)^{-1} \mathbf{1}_{B(y,s)} \rangle \right|^2 \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{N_s} \left(\sum_{d(x,y) \geq s} |\langle \delta_y | (H_{\omega,s} - e)^{-1} \mathbf{1}_{B(x,s)} \rangle|^2 \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{N_s} \| (H_{\omega,s} - e)^{-1} \mathbf{1}_{B(x,s)} \| \quad (*). \end{aligned}$$

Reemplazando en (*) la desigualdad (2.3.10) se concluye la demostración. \square

Proposición 2.3.5. *Asumamos que existe una sucesión $u_r > 0$ tal que $\sum_{r=1}^{\infty} u_r^{-1} < \infty$ y $\sum_{r=1}^{\infty} p_r u_r < \infty$. Sea $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ un conjunto de Borel y $\omega \in \Omega$, $x \in \mathbb{X}$ fijos.*

Supongamos que

$$\sum_{s=1}^{\infty} p_s |\gamma_{\omega}(B(x, s); e)| < \infty, \quad (2.3.11)$$

para casi todo $s \in \mathcal{B}$, respecto a \mathcal{L} . Entonces, para casi todo $e \in \mathcal{B}$, respecto a \mathcal{L} ;

$$\sup_{r \geq 0} \sum_{y \in \mathbb{X}} |G_{\omega,r}(x, y; e)|^2 < \infty. \quad (2.3.12)$$

Demostración. Para todo $e \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\omega}$, la representación de la fórmula (2.3.6) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos permiten obtener

$$\begin{aligned} \left(\sum_{y \in \mathbb{X}} |G_{\omega,r}(x, y; e)|^2 \right)^{1/2} &\leq |G_{\omega,0}(x, x; e)| \\ &\quad + \sum_{s=1}^r p_s N_{s-1} |g_{\omega,s-1}(x; e)| \left(\sum_{d(x,y) \leq s} |g_{\omega,s}(y; e)|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Usando la proposición (2.3.9), para casi todo $e \in \mathbb{R}$, respecto a \mathcal{L} ;

$$\left(\sum_{y \in \mathbb{X}} |G_{\omega,r}(x, y; e)|^2 \right)^{1/2} \leq |G_{\omega,0}(x, x; e)| + C_e \sum_{s=1}^r p_s u_s N_{s-1} |g_{\omega,s-1}(x; e)|. \quad (2.3.13)$$

La hipótesis (2.3.11) implica que para casi todo $e \in \mathcal{B}$, respecto a \mathcal{L} , el producto $\prod_{s=1}^{\infty} (1 - p_s \gamma(B(x, s); e))$ converge. Por otro lado, para dicho e , se tiene de (2.3.7) que existe una constante $C'_e < \infty$ tal que para todo $s \geq 0$

$$N_s |g_{\omega,s}(x; e)| \leq C'_e. \quad (2.3.14)$$

Reemplazando (2.3.14) en (2.3.13) se tiene

$$\left(\sum_{y \in \mathbb{X}} |G_{\omega,r}(x, y; e)|^2 \right)^{1/2} \leq |G_{\omega,0}(x, x; e)| + C_e C'_e \sum_{s=1}^r p_s u_s.$$

demostrando el resultado. \square

Antes de probar el teorema (2.3.1) recordemos el criterio de localización de Simon-Wolff:

Teorema 2.3.6. *Asumamos que \mathbb{P} pose densidad condicional a lo largo de la coordenada x -ésima. Sea \mathcal{B} un conjunto de Borel tal que $\mathcal{G}_{\omega,x}(e) := \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_x^\omega}{(e-\lambda)^2} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|(\Delta + V_\omega - e - i\varepsilon)^{-1} \delta_x\|^2 < \infty$ para casi todo $(\omega, e) \in \Omega \times \mathcal{B}$, respecto a $\mathbb{P} \otimes \mathcal{B}$. Entonces $\mu_{x,cont}^\omega(\mathcal{B}) = 0$ para casi todo $\omega \in \Omega$, respecto a \mathbb{P} .*

Demostración. El resultado se sigue del hecho que

$$d\mu_{x,ac}^\omega(e) = \pi^{-1} \left(\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|(\Delta + V_\omega - e - i\varepsilon)^{-1} \delta_x\|^2 \right).$$

Para los detalles ver [1]. \square

Ahora, desarrollaremos la demostración del teorema (2.3.1)

Demostración. **(Del teorema 2.3.1)** Sea $\omega \in \Omega$ y $e \in \mathbb{R} \setminus \sigma_\omega$ fijos y la sucesión $u_r > 0$ tal que $\sum_{r=1}^\infty p_r u_r < \infty$. La proposición (2.3.5) nos dice que

$$\sup_{r \geq 0} \sum_{y \in \mathbb{X}} |G_{\omega,r}(x, y; e)|^2 < \infty$$

. Por el teorema de convergencia monótona tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_x^\omega(\lambda)}{(e-\lambda)^2} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{d\mu_x^\omega(\lambda)}{(e-\lambda)^2 + \varepsilon^2} = \sup_{\varepsilon > 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_x^\omega(\lambda)}{(e-\lambda)^2 + \varepsilon^2}.$$

Ya que $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|(H_{\omega,r} - z)^{-1} - (H_\omega - z)^{-1}\| = 0,$$

tenemos que el límite en la topología débil estrella $\lim_{r \rightarrow \infty} \mu_{x,r}^\omega$ es igual a μ_x^ω , donde $\mu_{x,r}^\omega$ es la medida espectral para $H_{\omega,r}$ y δ_x . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_x^\omega(\lambda)}{(e-\lambda)^2} &= \sup_{\varepsilon > 0} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_x^{\omega,r}(\lambda)}{(e-\lambda)^2 + \varepsilon^2} \leq \sup_{\varepsilon > 0, r \geq 1} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_x^{\omega,r}(\lambda)}{(e-\lambda)^2 + \varepsilon^2} \\ &= \sup_{r \geq 1} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_x^{\omega,r}(\lambda)}{(e-\lambda)^2} \\ &= \sup_{r \geq 1} \|(H_{\omega,r} - e)^{-1} \delta_x\|^2 \\ &= \sup_{r \geq 1} \sum_{y \in \mathbb{X}} |G_{\omega,r}(x, y; e)|^2 < \infty. \end{aligned}$$

En la igualdad final usamos el hecho que $\{\delta_y\}_{y \in \mathbb{X}}$ es una base ortonormal para $l^2(\mathbb{X})$. Ya que $\mathcal{L}(\sigma_\omega) = 0$ y que la cota (2.3.12) vale para casi todo $e \in \mathbb{R} \setminus \sigma_\omega$, respecto a \mathcal{L} ; tenemos que para cada $\omega \in \Omega$, $\mathcal{G}_{\omega,x}(e) < \infty$ para casi todo $e \in \mathbb{R}$ respecto de \mathcal{L} . Esto prueba (1). La parte (2) se sigue del hecho que $\mathcal{G}_{\omega,x}(e) < \infty$ para casi todo $(\omega, e) \in \Omega \times \mathbb{R}$, respecto a $\mathbb{P} \otimes \mathcal{L}$ y el criterio de Simon-Wolff. La parte (3) es consecuencia de la parte (2) y la hipótesis (2.3.11). \square

2.3.1. Demostración del teorema de localización espectral

Aplicaremos el teorema (2.3.1) para demostrar los teoremas (2.2.1) y (2.2.3).

Demostración. (Del teorema 2.2.3) Ya que $\gamma_\omega(B(x, s); e) = \sum_{d(x,y) \leq s} g_{\omega,s}(y; e)$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la proposición (2.3.4) permiten decir que para casi todo $e \in \mathbb{R}$, respecto a \mathcal{L} ,

$$|\gamma_\omega(B(x, s); e)| \leq C_e u_s \sqrt{n_s}. \quad (2.3.15)$$

Por lo tanto $\sum_{s \geq 0} p_s |\gamma_\omega(B(x, s); e)| < \infty$ y el resultado se sigue por el teorema (2.3.1). \square

La demostración del teorema (2.2.1) de Molchanov requiere más trabajo. Debemos primero introducir algunas notaciones.

Preliminares.

Es conveniente considerar el complejo $v = a + ih \in \mathbb{C}_+$ (en el semiplano superior) y denotar por k_v la distribución de Cauchy con densidad $k_{a,h}$. Si ν es una medida de probabilidad de Borel sobre la esfera de Riemann $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, y $\tau : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ es una aplicación de Borel, entonces $\tau\nu$ denotará la medida de probabilidad inducida de Borel sobre \mathbb{S} :

$$(\tau\nu)(\mathcal{B}) := \nu(\tau^{-1}(\mathcal{B})),$$

para los conjuntos de $\mathcal{B} \subset \mathbb{S}$. Si $n \geq 2$ es un entero, y ν es una medida de probabilidad sobre \mathbb{S} , consideremos

$$A_n\nu = \tau(\underbrace{\nu \star \cdots \star \nu}_{n \text{ veces}})$$

donde $\tau(z) = z/n$, y \star es la convolución de medidas usual. Por lo tanto, si Y_1, \dots, Y_n son variables aleatorias i.i.d. sobre \mathbb{S} con distribución ν , entonces $A_n\nu$ es la distribución de $(Y_1 + \cdots + Y_n)/n$. La siguiente proposición resume algunas de las propiedades básicas de la distribuciones de Cauchy.

Proposición 2.3.7. *Las distribuciones de Cauchy tienen las siguientes propiedades:*

1. Si $v_1, v_2 \in \mathbb{C}_+$, entonces

$$k_{v_1} \star k_{v_2} = k_{v_1+v_2}$$

2. Si $\tau(z) = -\bar{z}$ o $\tau(z) = (az+b)/(cz+d)$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad-bc > 0$, entonces

$$\tau k_v = k_{\tau v},$$

para todo $v \in \mathbb{C}_+$

3. Para todo $v \in \mathbb{C}_+$ y enteros $n \geq 2$,

$$A_n k_v = k_{nv}.$$

Demostración. La demostración usa hechos básicos de la teoría de funciones armónicas. Para funciones continuas acotadas $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sea $U_h : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $U_h(v) = \int_{\mathbb{R}} h(t) dk_v(t)$. Luego $U_h(v)$ es la única función armónica acotada en \mathbb{C}_+ que extiende continuamente sobre \mathbb{R} con $\lim_{y \downarrow 0} U_h(x+iy) = h(x)$. Si X es una variable

aleatoria con distribución de Cauchy k_v , $X_1 \sim k_v$, entonces $\mathbb{E}h(X) = U_h(v)$. Sea $X_1 \sim k_{v_1}$ y $X_2 \sim k_{v_2}$. Para $t \in \mathbb{R}$ fijo, sea $h_t(s) = h(s+t)$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}h(X_1 + X_2) &= \int \int h(s+t) dk_{v_1}(s) dk_{v_2}(t) \\ &= \int \left\{ \int h_t(s) dk_{v_1}(s) \right\} dk_{v_2}(t) \\ &= \int \{U_{h_t}(v_1)(s)\} dk_{v_2}(t) \\ &= \int \{U_h(t+v_1)(s)\} dk_{v_2}(t) \\ &= U_h(v_1 + v_2). \end{aligned}$$

Ya que h es arbitrario, concluimos que $X_1 + X_2 \sim k_{v_1+v_2}$. Esto prueba (1). Para la demostración de (2), consideremos el caso $\tau(z) = (az+b)/(cz+d)$. La aplicación τ es una biyección analítica $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ con inversa analítica. Tenemos

$$\operatorname{Im} \tau(z) = \frac{(ad-bc) \operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}.$$

Por lo tanto τ mapea $\mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}_-$, $\mathbb{C}_- \rightarrow \mathbb{C}_+$, $\mathbb{R} \setminus \{-d/c\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{a/c\}$. Sea $X \sim k_v$ y $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua acotada cuyo soporte no contiene a a/c y sea $f(s) = h(\tau(s))$. Entonces

$$U_f(v) = U_h(\tau(v)), \quad \operatorname{Im} v > 0.$$

Por lo tanto

$$\int h dk_{\tau(v)} = U_h(\tau(v)) = U_f(v) = \mathbb{E}f(X) = \mathbb{E}h(\tau(X)).$$

Ya que h es arbitraria, esto implica que $\tau(X) \sim k_{\tau(v)}$. El caso $\tau(z) = -\overline{z}$ es probado usando el hecho que τ preserva armonicidad. (3) se sigue de (1) y (2). \square

Usaremos transformaciones lineales fraccionales de la forma

$$\tau_p(z) = \frac{z}{1+pz},$$

donde $p \geq 0$. Notar que $\tau_{p+p'} = \tau_p \circ \tau_{p'}$. La transformación τ_p es importante en el modelo jerárquico de Anderson por la siguiente relación de recursividad, probada por Molchanov en [?].

Proposición 2.3.8. Sea $\omega \in \Omega$ y $z \in \mathbb{C} \setminus \{\sigma_\omega\}$ dado. Entonces para todo $x \in \mathbb{X}$,

$$\gamma_\omega(B(x, 0); z) = \frac{1}{\omega(x) - z}. \quad (2.3.16)$$

Para todo $r \geq 1$ y $B_r \in \mathcal{P}_r$, tenemos la fórmula de recurrencia

$$\gamma_\omega(B_r; z) = \tau_{p_r} \left(\frac{1}{N_r} \sum_{B_{r-1,j} \subset B_r} \gamma_\omega(B_{r-1,j}; z) \right), \quad (2.3.17)$$

donde la suma contiene N_r términos, correspondiente a las N_r bolas $B_{r-1,j}$ de radio $r - 1$ contenidas en B_r .

Demostración. La fórmula (2.3.16) es clara ya que $G_{\omega,0}(x, y; z) = (\omega(x) - z)^{-1} \langle \delta_x | \delta_y \rangle$. Para $r \geq 1$ la identidad del resolvente nos dice que

$$(H_{\omega,r} - z)^{-1} \mathbf{1}_{B_r} - (H_{\omega,r-1} - z)^{-1} \mathbf{1}_{B_r} = -p_r \gamma_\omega(B_r; z) (H_{\omega,r-1} - z)^{-1} \mathbf{1}_{B_r}.$$

Tomando $\langle \mathbf{1}_{B_r} | \cdot \rangle$ en la ecuación anterior obtenemos

$$N_r \gamma_\omega(B_r; z) - \sum_{B_{r-1,j} \subset B_r} N_{r-1} \gamma_\omega(B_{r-1,j}; z) = -p_r \gamma_\omega(B_r; z) \sum_{B_{r-1,j} \subset B_r} N_{r-1} \gamma_\omega(B_{r-1,j}; z).$$

La fórmula (2.3.17) se sigue luego de dividir por N_r la ecuación anterior y resolverla para $\gamma_\omega(B_r; z)$. \square

2.3.2. Demostración del teorema de Molchanov.

Demostración. (**Teorema de Molchanov**) Ya que para cada ω fijo, $\mathcal{L}(\sigma) = 0$, tenemos $e \notin \sigma_\omega$ para casi todo $(\omega, e) \in \Omega \times \mathbb{R}$ respecto a $\mathbb{P} \times \mathcal{L}$.

Por lo tanto existe un conjunto Borel medible $E \subset \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{L}(\mathbb{R} \setminus E) = 0$.
2. Para cada $e \in E$ fijo, existe un conjunto $\Omega_e \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(\Omega_e) = 1$ y tal que $e \notin \sigma_\omega$ para casi todo $\omega \in \Omega_e$.

Sea $e \in E$ fijo. Entonces para casi todo $\omega \in \Omega_e$, y por tanto para casi todo $\omega \in \Omega$ respecto a \mathbb{P} , todas las fórmulas de representación de las proposiciones (2.3.2) y (2.3.8) valen. Se

sigue de (2.3.16) y de la proposición (2.3.7) $\{\gamma_\omega(B_r; e)\}_{x \in \mathbb{X}}$ son variables aleatorias de Cauchy i.i.d. con distribución k_{v_0} , donde $v_0(e) = -(e - a + ih)^{-1}$. Más aún, (2.3.17) y la proposición (2.3.7) nos dicen que para $r \geq 1$, $\{\gamma_\omega(B_r; e)\}_{B_r \in \mathcal{P}_r}$ son variables aleatorias de Cauchy i.i.d con distribución, donde $v_r(e) = \tau_{\lambda_r} v_0(e)$. Ya que $\lambda_r \rightarrow \lambda_\infty = 1$ cuando $r \rightarrow \infty$, la clausura de la órbita

$$V(e) = \bigcup_{r \geq 0} \{v_r(e)\},$$

es igual a $V(e) \cup \{\tau_1 v_0(e)\}$, un compacto en \mathbb{C}_+ . Ya que $\sup_{r \geq 0} |v_r(e)| < \infty$, existe una constante $K(e) < \infty$, tal que

$$\mathbb{P}(|\gamma_\omega(B_r; e)| > u) \leq \frac{K(e)}{u},$$

para todo número real $u > 0$, entero $r \geq 0$ y $B_r \in \mathcal{P}$. Fijando $x \in \mathbb{X}$ y tomando $u_r = r^{1+\varepsilon}$. Por el lema de Borel-Cantelli, para casi todo $\omega \in \Omega_e$ respecto a \mathbb{P} , existe una constante $L_\omega(e) < \infty$, tal que

$$|\gamma_\omega(B(x, r); e)| \leq L_\omega(e) u_r, \tag{2.3.18}$$

para todo $r \geq 0$. La parte (3) del teorema (2.3.1) nos dice que $\mu_{x, cont}^\omega = 0$ para casi todo $\omega \in \Omega$, respecto a \mathbb{P} . Ya que $x \in \mathbb{X}$ es arbitrario, el resultado vale. \square

Estadísticas de Poisson

En este capítulo probaremos que para $d_{sp} < 1$, los niveles de energía para H_ω son, asintóticamente, un proceso puntual de Poisson; luego de un reajuste adecuado.

3.1. Modelo de Anderson

Sea (\mathbb{X}, d, Δ) un modelo jerárquico regular. Consideremos el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ donde $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{X}}$, \mathcal{F} la σ -álgebra medida producto de Borel sobre Ω , y \mathbb{P} es una medida de probabilidad dada sobre (Ω, \mathcal{F}) . Para $\omega \in \Omega$, consideremos

$$V_\omega := \sum_{x \in \mathbb{X}} \omega(x) \langle \delta_x | \cdot \rangle \delta_x, \quad (3.1.1)$$

y

$$H_\omega := \Delta + V_\omega \quad (3.1.2)$$

La familia de operadores autoadjuntos $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ indexada por el parámetro aleatorio ω del espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es llamado el **modelo de Anderson jerárquico**. Lo anterior es un caso particular del operador de Schrodinger

$$H_\omega = H_0 + V_\omega,$$

donde H_0 es un operador autoadjunto actuando sobre $l^2(\mathbb{X})$ y V_ω es un potencial aleatorio que actúa diagonalmente sobre $l^2(\mathbb{X})$, es decir,

$$(V_\omega \varphi)(x) = \omega(x) \varphi(x), \quad \varphi \in l^2(\mathbb{X}), x \in \mathbb{X};$$

con $\{\omega(x)\}_{x \in \mathbb{X}}$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con densidad acotada γ , condición fundamental para el desarrollo de los resultados de este capítulo. Aquí $\mathbb{P} = \times_{x \in \mathbb{X}} \gamma(t) dt$. Como vimos en el capítulo dos, las aproximaciones de volumen finito a H_ω están dadas por la sucesión $(B_k)_{k \geq 1}$ de subconjuntos finitos de \mathbb{X} , $\bigcup_{k \geq 1} B_k = \mathbb{X}$, y

la correspondiente sucesión de operadores $(H_k^\omega)_{k \geq 1}$ aproximando a H_ω , tal que el subespacio $l^2(B_k)$ es invariante para H_k^ω . En este capítulo, la idea es estudiar el comportamiento asintótico de los autovalores

$$e_1^{\omega,k} \leq e_2^{\omega,k} \leq \dots \leq e_{|B_k|}^{\omega,k},$$

de H_k^ω , restringido a $l^2(B_k)$, cuando k tiende a infinito. El primer paso es probar que existe una medida de probabilidad no aleatoria μ^{av} sobre \mathbb{R} tal que, con probabilidad uno, la medida de conteo de autovalores aleatoria normalizada

$$\mu_k^\omega = \frac{1}{|B_k|} \sum_{j=1}^{|B_k|} \delta(e_j^{\omega,k}), \quad (3.1.3)$$

converge a μ^{av} en la topología débil estrella, cuando k tiende a infinito. Específicamente la medida μ^{av} es llamada la densidad de estados para H_ω . Para k suficientemente grande y dado $\varepsilon > 0$, el número de autovalores en un intervalo pequeño $(e - \varepsilon, e + \varepsilon)$ alrededor del punto $e \in \mathbb{R}$ es del orden de $|B_k| \mu^{av}((e + \varepsilon, e - \varepsilon))$. Por lo tanto, es conveniente considerar la medida puntual reajustada

$$\xi_k^{\omega,e} = \sum_{i=1}^{|B_k|} \delta(|B_k| (e_i^{\omega,k} - e)). \quad (3.1.4)$$

Ejemplo 3.1.1. Si $\mathbb{X} = \{1, 2, \dots\}$, $H_0 = 0$ y los volúmenes finitos de aproximaciones son $B_k = \{1, 2, \dots, k\}$, H_k^ω es la restricción de H_ω sobre $l^2(B_k)$. Luego H_k^ω posee autovalores estadísticamente independientes $\{\omega(x)\}_{x \in B_k}$ y se sigue de la ley fuerte de los grandes números de Kolmogorov que para cada conjunto de Borel $A \subset \mathbb{R}$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k^\omega(A) = \mu^{av}(A) = \int_A \gamma(t) dt,$$

para casi todo $\omega \in \Omega$, respecto a \mathbb{P} .

Denotemos por \mathcal{L} la medida de Lebesgue sobre \mathbb{R} . Asumamos que γ es continua en el punto $e \in \mathbb{R}$ y que $\gamma(e) > 0$. Si $A_1, A_2, \dots, A_m \subset \mathbb{R}$ son conjuntos de Borel acotados, entonces el vector aleatorio

$$[\xi_k^{\omega,e}(A_1), \xi_k^{\omega,e}(A_2), \dots, \xi_k^{\omega,e}(A_m)],$$

posee distribución multinomial, por lo que

$$\mathbb{P} \{ \xi_k^{\omega,e}(A_1) = r_1, \xi_k^{\omega,e}(A_2) = r_2, \dots, \xi_k^{\omega,e}(A_m) = r_m \} = \frac{k!}{r_1! r_2! \dots r_{m+1}!} q_{k,1}^{r_1} q_{k,2}^{r_2} \dots q_{k,m+1}^{r_{m+1}},$$

con $r_s = 0, \dots, k$ y $\sum_{s=1}^{m+1} r_s = k$, donde

$$q_{k,s} = \mathbb{P}\{(k\omega(1) - e) \in A_s\} = \int_{e+k^{-1}A_s} \gamma(t)dt, \quad s = 1, \dots, m+1.$$

y $A_{m+1} = \mathbb{R} \setminus (\cup_{s=1}^m A_s)$. La continuidad de γ en e nos permite concluir que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} kq_{k,s} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{e+k^{-1}A_s} k\gamma(t)dt \quad (3.1.5)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_s} \gamma\left(\frac{u}{k} + e\right)du \quad (3.1.6)$$

$$= \gamma(e)\mathcal{L}(A_s). \quad (3.1.7)$$

Además recordemos que la función generadora de momentos para dicho vector aleatorio es:

$$\varphi_{t_1, \dots, t_m}(\xi_k^{\omega, e}(A_1), \dots, \xi_k^{\omega, e}(A_m)) = \left(\sum_{j=1}^m q_{k,j} e^{t_j} \right)^k.$$

Luego

$$\begin{aligned} \varphi_{t_1, \dots, t_m}(\xi_k^{\omega, e}(A_1), \dots, \xi_k^{\omega, e}(A_m)) &= \left(\sum_{j=1}^m q_{k,j} e^{t_j} \right)^k \\ &= \left(\sum_{j=1}^m q_{k,j} (e^{t_j} - 1) + 1 \right)^k \\ &= \left(\sum_{j=1}^m \frac{kq_{k,j}}{k} (e^{t_j} - 1) + 1 \right)^k, \end{aligned}$$

pues $\sum_{j=1}^m q_{k,j} = 1$. Usando la ecuación (3.1.7) se obtiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{t_1, \dots, t_m}(\xi_k^{\omega, e}(A_1), \dots, \xi_k^{\omega, e}(A_m)) = \exp\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j (e^{t_j} - 1) \right),$$

con $\lambda_j = \gamma(e)\mathcal{L}(A_j)$, que corresponde a la función generadora de momentos de la distribución de Poisson multivariable. Así, las variables aleatorias $\xi_k^{\omega, e}(A_s)$, $s = 1, \dots, m$, son asintóticamente independientes y poseen distribución de Poisson $\mathbb{P}_{\lambda_s} := e^{-\lambda_s} \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\lambda_s^r}{r!} \delta(r)$.

Observación 3.1.2. Usando el mismo argumento y el formalismo adecuado en variable compleja se puede hacer para función característica.

En lo sucesivo consideraremos al espacio métrico S equipado con σ -álgebra de Borel \mathcal{B}_S , es decir, la σ -álgebra de Borel generada por los conjunto abiertos de S . Denotemos por \mathcal{M} el conjunto de todas las medidas no negativas de Borel μ sobre (S, \mathcal{B}_S) tales que $\mu(A) < \infty$ para cada conjunto de Borel acotado $A \subset S$.

Definición 3.1.3. Una medida $\mu \in \mathcal{M}$ es llamada puntual si μ puede ser escrita como

$$\mu = \sum_{j \in J} \delta(x_j), \quad x_j \in S,$$

donde J es un conjunto numerable. Denotaremos por \mathcal{M}_p el conjunto de todas las medidas puntuales sobre (S, \mathcal{B}_S) .

Si $\mu \in \mathcal{M}_p$, entonces tenemos que $\mu(A) \in \mathbb{N}$ para cada conjunto de Borel acotado $A \subset S$. Un proceso puntual sobre S es la aplicación $\omega \mapsto \mu^\omega$ del espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ al espacio \mathcal{M}_p tal que para cada conjunto de Borel acotado $A \subset S$, la aplicación $\omega \mapsto \mu^\omega(A)$ es medible. Si μ^ω es un proceso puntual, la aplicación

$$\nu(B) = \mathbb{E}\mu^\omega(B), \quad B \in \mathcal{B}_S,$$

define una medida sobre (S, \mathcal{B}_S) . La medida ν es llamada la medida de intensidad del proceso puntual μ^ω .

Definición 3.1.4. Sea $\nu \in \mathcal{M}$. Un proceso puntual de Poisson sobre S con intensidad ν es una proceso puntual ξ^ω con las siguientes propiedades:

- Para cada conjunto de Borel acotado $A \subset S$, la variable aleatoria $\xi^\omega(A)$ se distribuye Poisson con parámetro $\nu(A)$.
- Dados los conjuntos disjuntos de Borel A_1, A_2, \dots, A_m en S , las variables aleatorias $\xi^\omega(A_1), \xi^\omega(A_2), \dots, \xi^\omega(A_m)$ son independientes.

Definición 3.1.5. Una sucesión ξ_k^ω de procesos puntuales en S , definidos en el mismo espacio de probabilidad, se dice que converge a un proceso puntual de Poisson en S con intensidad $\nu \in \mathcal{M}$ si cada conjunto disjunto de Borel acotado $A_1, A_2, \dots, A_m \in S$, tenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\xi_k^\omega(A_1) = r_1, \xi_k^\omega(A_2) = r_2, \dots, \xi_k^\omega(A_m) = r_m\} = \prod_{s=1}^m \mathbb{P}_{\nu(A_s)}(\{r_s\}), \quad (3.1.8)$$

para todo $r_1, r_2, \dots, r_m \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, en el ejemplo (3.1.1) vimos que la sucesión de procesos puntuales $\xi_k^{\omega, e}$ sobre \mathbb{R} converge a un proceso de Poisson sobre \mathbb{R} con intensidad $\gamma(e)\mathcal{L}$. Es bien sabido que la convergencia de las funciones características es suficiente para caracterizar la medida de probabilidad, como recordamos en la siguiente proposición:

Proposición 3.1.6. *Sean X e Y dos vectores aleatorios. Denotemos por $F_X(x)$ y $F_Y(y)$ sus distribuciones adjuntas y, por $\varphi_X(t)$ y $\varphi_Y(t)$ sus correspondientes funciones características. Entonces,*

$$F_X(x) = F_Y(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \iff \varphi_X(t) = \varphi_Y(t) \forall t \in \mathbb{R}^n.$$

En nuestro contexto de distribuciones de Poisson tenemos que la condición (3.1.8) es equivalente, en termino de las funciones características, a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} e^{i \sum_{s=1}^m t_s \xi_k^\omega(A_s)} = \prod_{s=1}^m \exp(\nu(A_s)(e^{it_s} - 1)), \quad (3.1.9)$$

para todo $t_1, t_2, \dots, t_m \in \mathbb{R}$. Ambas (3.1.8) y (3.1.9) son equivalentes a la definición usual de convergencia en la ley de vectores aleatorios en \mathbb{N}^m .

No obstante, a menudo es complejo obtener explícitamente el límite (3.1.8) o la función característica (3.1.9). En este sentido un resultado conocido es el teorema de Grigelionis [?], el cual entrega condiciones suficientes para garantizar (??)

Teorema 3.1.7. (Grigelionis) *Sea $(n_k)_{k \geq 1}$ una sucesión de números naturales, sean para cada $k \geq 1$, $\xi_{k,1}^\omega, \xi_{k,2}^\omega, \dots, \xi_{k,n_k}^\omega$ procesos puntuales independientes sobre S y sea*

$$\xi_k^\omega = \sum_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j}^\omega$$

Sea $\nu \in \mathcal{M}$ y suponga que para cada conjunto de Borel acotado $A \subset S$, tenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq n_k} \mathbb{P}\{\xi_{k,j}^\omega(A) \geq 1\} = 0, \quad (3.1.10)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{P}\{\xi_{k,j}^\omega(A) \geq 1\} = \nu(A), \quad (3.1.11)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{P}\{\xi_{k,j}^\omega(A) \geq 2\} = 0 \quad (3.1.12)$$

Entonces ξ_k^ω converge a un proceso puntual de Poisson sobre S con intensidad ν .

Demostración. Utilizaremos la notación estándar $ab = \sum_{s=1}^m a_s b_s$, para $a, b \in \mathbb{R}^m$ y $|\alpha| = \sum_{s=1}^m \alpha_s$ para $\alpha \in \mathbb{N}^m$. Denotamos por $\{e_s\}_{s=1}^m$ la base usual de \mathbb{R}^m . Sean A_1, A_2, \dots, A_m conjuntos de Borel acotados disjuntos en S . Sea X_k^ω el vector aleatorio,

$$X_k^\omega = [\xi_k^\omega(A_1), \xi_k^\omega(A_2), \dots, \xi_k^\omega(A_m)],$$

y sea $\phi_k : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ la correspondiente función característica

$$\phi_k(t) = \mathbb{E}e^{itX_k^\omega}, \quad t \in \mathbb{R}^m.$$

La idea es probar que se cumple (3.1.9), es decir, para todo $t \in \mathbb{R}^m$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k(t) = \prod_{s=1}^m \exp(\nu(A_s)(e^{it_s} - 1)) \quad (3.1.13)$$

Para ello, consideramos

$$X_{k,j}^\omega = [\xi_{k,j}^\omega(A_1), \xi_{k,j}^\omega(A_2), \dots, \xi_{k,j}^\omega(A_m)],$$

$$\phi_{k,j}(t) = \mathbb{E}e^{itX_{k,j}^\omega}, \quad t \in \mathbb{R}^m$$

y el conjunto

$$A = \bigcup_{s=1}^m A_s.$$

De la ecuación (3.1.10) existe k_0 tal que para todo $k \geq k_0$,

$$\max_{1 \leq j \leq n_k} \mathbb{P}\{\xi_{k,j}^\omega(A) \geq 1\} < 1/4$$

Por lo tanto para $k \geq k_0$ y $1 \leq j \leq n_k$,

$$\left| \sum_{|\alpha| \geq 1} \mathbb{P}\{X_{k,j}^\omega = \alpha\}(e^{i\alpha t} - 1) \right| \leq 2 \sum_{|\alpha| \geq 1} \mathbb{P}\{X_{k,j}^\omega = \alpha\} = 2\mathbb{P}\{\xi_{k,j}^\omega(A) \geq 1\} < 1/2$$

y podemos escribir

$$\begin{aligned} \phi_{k,j}(t) &= 1 + \sum_{|\alpha| \geq 1} \mathbb{P}\{X_{k,j}^\omega = \alpha\}(e^{i\alpha t} - 1) \\ &= \exp\left(\sum_{|\alpha| \geq 1} \mathbb{P}\{X_{k,j}^\omega = \alpha\}(e^{i\alpha t} - 1) + E_{k,j}\right), \end{aligned}$$

donde

$$E_{k,j} = f\left(\sum_{|\alpha| \geq 1} \mathbb{P}\{X_{k,j}^\omega = \alpha\}(e^{i\alpha t} - 1)\right),$$

y $f(z) = \log(1+z) - z$. La función f es analítica en el disco abierto $\{|z| < 1\}$ y

$$|f(z)| \leq C|z|^2 \text{ para } |z| < 1/2, \quad (3.1.14)$$

donde $0 < C < \infty$ es una constante. Luego, escribimos

$$\sum_{|\alpha| \geq 1} \mathbb{P}\{X_{k,j}^\omega = \alpha\}(e^{i\alpha t} - 1) = \sum_{|\alpha|=1} \mathbb{P}\{X_{k,j}^\omega = \alpha\}(e^{i\alpha t} - 1) + F_{k,j} \quad (3.1.15)$$

$$= \sum_{s=1}^m \mathbb{P}\{X_{k,j}^\omega = e_s\}(e^{it_s} - 1) + F_{k,j} \quad (3.1.16)$$

$$= \sum_{s=1}^m \mathbb{P}\{\xi_{k,j}^\omega(A_s) = 1\}(e^{it_s} - 1) + G_{k,j} + F_{k,j} \quad (3.1.17)$$

donde

$$F_{k,j} = \sum_{|\alpha| \geq 2} \mathbb{P}\{X_{k,j}^\omega = \alpha\}(e^{i\alpha t} - 1),$$

y

$$G_{k,j} = \sum_{s=1}^m (\mathbb{P}\{X_{k,j}^\omega = e_s\} - \mathbb{P}\{\xi_{k,j}^\omega(A_s) = 1\})(e^{it_s} - 1).$$

Por lo tanto,

$$\phi_{k,j}(t) = \exp\left(\sum_{s=1}^m \mathbb{P}\{\xi_{k,j}^\omega(A_s) = 1\}(e^{it_s} - 1) + H_{k,j}\right),$$

donde

$$H_{k,j} = E_{k,j} + F_{k,j} + G_{k,j}.$$

Luego tenemos, por independencia que,

$$\phi_k(t) = \prod_{j=1}^{n_k} \phi_{k,j}(t) \quad (3.1.18)$$

$$= \exp\left(\sum_{s=1}^m \left(\sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{P}\{\xi_{k,j}^\omega(A_s) = 1\}\right)(e^{it_s} - 1) + \sum_{j=1}^{n_k} H_{k,j}\right) \quad (3.1.19)$$

De los supuestos (3.1.10) y (3.1.11) implica que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{P}\{\xi_{k,j}^\omega(A_s) = 1\} = \nu(A_s) \quad (3.1.20)$$

Es suficiente demostrar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} H_{k,j} = 0 \quad (3.1.21)$$

Para ello, notamos primero que de (3.1.21)

$$|F_{k,j}| \leq 2\mathbb{P}\{\xi_{k,j}^\omega(A) \geq 2\} \quad (3.1.22)$$

Por otra parte, de la desigualdad (3.1.14) se deduce

$$|E_{k,j}| \leq C \left(2 \sum_{|\alpha| \geq 1} \mathbb{P}\{X_{k,j}^\omega = \alpha\} \right)^2 = 4C (\mathbb{P}\{\xi_{k,j}^\omega(A) \geq 1\})^2. \quad (3.1.23)$$

Finalmente para estimar $|G_{k,j}|$, notamos

$$\{X_{k,j}^\omega = e_s\} \subseteq \{\xi_{k,j}^\omega(A_s) = 1\},$$

y

$$(\{\xi_{k,j}^\omega(A_s) = 1\} \setminus \{X_{k,j}^\omega = e_s\}) \subset \{\xi_{k,j}^\omega(A) \geq 2\}$$

Por lo tanto,

$$|G_{k,j}| \leq 2m\mathbb{P}\{\xi_{k,j}^\omega(A) \geq 2\}. \quad (3.1.24)$$

Por la ecuación (3.1.12), se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |G_{k,j}| \leq 2m \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\xi_{k,j}^\omega(A) \geq 2) = 0.$$

Concluyendo la demostración. \square

3.1.1. Corolarios del teorema del limite de Grigelionis

El objetivo de esta subsección es estudiar condiciones suficientes sobre un proceso puntual que sean más fáciles de verificar en comparación a las del teorema de Grigelionis (3.1.7). En el contexto de nuestro problema, es más natural considerar las integrales de Poisson

$$\int_{\mathbb{R}} \text{Im}(t - z)^{-1} d\xi^\omega(t), \quad \text{Im } z > 0,$$

en lugar de los eventos $\{\xi^\omega(A) \geq 1\}$ y $\{\xi^\omega(A) \geq 2\}$. Para ello definimos la integral

$$\mathcal{I}(\mu, f) = \int_{t \neq t'} f(t)f(t')d\mu(t)d\mu(t').$$

Donde $\mu \in S$ es una medida positiva de Borel y $f : S \rightarrow [0, \infty)$ una función de Borel.

Si $\mu = \sum_j \delta(t_j)$ es una medida puntual sobre S y $f(t) = \mathbf{1}_A(t)$ es la función indicatriz de un conjunto de Borel acotado $A \in S$, entonces tenemos:

$$\mathcal{I}(\mu, \mathbf{1}_A) = \sum_{i \neq j} \mathbf{1}_A(t_i)\mathbf{1}_A(t_j) = \mu(A)(\mu(A) - 1),$$

y por lo tanto $\mathcal{I}(\mu, \mathbf{1}_A) \neq 0 \Leftrightarrow \mu(A) \geq 2$. Si ξ^ω es un proceso puntual sobre S , entonces

$$\begin{aligned} \sum_{l \geq 2} \mathbb{P}\{\xi^\omega(A) \geq l\} &= \sum_{l \geq 2} (l-1) \mathbb{P}\{\xi^\omega(A) = l\} \\ &\leq \sum_{l \geq 2} l(l-1) \mathbb{P}\{\xi^\omega(A) = l\} \\ &= \mathbb{E}\mathcal{I}(\xi^\omega, \mathbf{1}_A) \end{aligned}$$

Ya que,

$$\mathbb{P}\{\xi^\omega(A) \geq 1\} = \mathbb{E}\xi^\omega(A) - \sum_{l \geq 2} \mathbb{P}\{\xi^\omega(A) \geq l\},$$

se tiene claramente que si

$$(2') \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{E}\xi_{k,j}^\omega(A) = \nu(A),$$

y

$$(3') \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{E}\mathcal{I}(\xi_{k,j}^\omega, \mathbf{1}_A) = 0,$$

entonces las condiciones (3.1.11) y (3.1.12) del teorema (3.1.7) se cumplen. El siguiente paso es escribir (2') y (3'), en función de $\mathbb{E} \int f d\xi_{k,j}^\omega$, donde f pertenece a una familia F de funciones suficientemente adecuada.

Teorema 3.1.8. *Para cada $k \geq 1$, sean $\xi_{k,1}^\omega, \xi_{k,2}^\omega, \dots, \xi_{k,n_k}^\omega$ procesos puntuales sobre S y sea $\xi_k^{av} = \sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{E}\xi_{k,j}^\omega$. Sea $\nu \in \mathcal{M}$. Supongamos que existe $0 < C < \infty$ tal que $\nu \leq C\mu$ y $\xi_k^{av} \leq C\mu$ ra alguna medida $\mu \in \mathcal{M}$ y para todo conjunto Boreliano $A \subseteq S$. Suponga que $F \subset L^1(S, \mu)$ es una familia de funciones de manera que las combinaciones lineales de funciones en F son densas en $L^1(S, \mu)$ y tal que para cada conjunto acotado de Borel $A \subset S$, existe $f \in F$ tal que $f \geq \mathbf{1}_A$. Suponga que para todo $f \in F$, tenemos*

$$(2'') \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int f d\xi_k^{av} = \int f d\nu,$$

y

$$(3'') \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{E}\mathcal{I}(\xi_{k,j}^\omega, f) = 0.$$

Entonces (2') y (3') valen para todos los conjuntos acotados de Borel $A \subset S$.

Demostración. Sea A un conjunto acotado de Borel. Sea $\varepsilon > 0$. Existe combinación lineal $g = \sum_i c_i f_i$, $f_i \in F$, con $\int |g - \mathbf{1}_A| d\mu < \varepsilon$. Entonces $|\int g d\nu - \nu(A)| < C\varepsilon$ y

$|\int g d\xi_k^{av} - \xi_k^{av}(A)| < C\varepsilon$. Ya que $\lim_{k \rightarrow \infty} \int g d\xi_k^{av} = \int g d\nu$, tenemos

$$\nu(A) - 2C\varepsilon \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k^{av}(A) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k^{av}(A) \leq \nu(A) + 2C\varepsilon,$$

y (2') se obtiene después de hacer $\varepsilon \downarrow 0$. Ahora, sea $f \in F$ tal que $f \geq \mathbf{1}_A$. Ya que, $\mathcal{I}(\xi_{k,j}^\omega, \mathbf{1}_A) \geq \mathcal{I}(\xi_{k,j}^\omega, f)$, (3') sigue desde (3''), por el teorema de la convergencia dominada.

□

Observación 3.1.9. Si consideramos el caso cuando $S = \mathbb{R}$, $\mu = \mathcal{L}$ la medida de Lebesgue en \mathbb{R} , $\nu = \lambda\mathcal{L}$ para $\lambda > 0$ y F como la familia de funciones $\{\text{Im}(t-z)^{-1}\}_{\text{Im } z > 0}$, la cual es densa sobre en $L^1(\mathbb{R})$ como vimos en la proposición (1.4.2), entonces con la ayuda del teorema anterior podemos escribir el teorema (3.1.7) en la siguiente versión:

Teorema 3.1.10. Sea $(n_k)_{k \geq 1}$ una sucesión de números naturales; sean, para cada $k \geq 1$, $\xi_{k,1}^\omega, \xi_{k,2}^\omega, \dots, \xi_{k,n_k}^\omega$ procesos puntuales independientes sobre \mathbb{R} y sea

$$\xi_k^\omega = \sum_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j}^\omega.$$

Supongamos que valen las siguientes hipótesis:

(H0): Existe una constante $0 < C < \infty$ tal que para todo $k \geq 1$ y cada conjunto de Borel acotado $A \subset \mathbb{R}$,

$$\sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{E} \xi_{k,j}^\omega(A) \leq C\mathcal{L}(A)$$

(H1): Para cada conjunto de Borel acotado $A \subset \mathbb{R}$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq n_k} \mathbb{P}\{\xi_{j,k}^\omega(A) \geq 1\} = 0.$$

(H2): Existe una constante $0 < \lambda < \infty$ tal que para $\text{Im } z > 0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} \text{Im}(t-z)^{-1} d\xi_{k,j}^\omega(t) = \pi\lambda.$$

(H3): Para $\text{Im } z > 0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{E} \int_{t \neq t'} \text{Im}(t-z)^{-1} \text{Im}(t'-z)^{-1} d\xi_{k,j}^\omega(t) d\xi_{k,j}^\omega(t') = 0$$

Entonces, ξ_k^ω converge a un proceso puntual Poisson sobre \mathbb{R} con intensidad $\lambda\mathcal{L}$.

Este teorema será fundamental en el desarrollo de la siguiente sección.

3.2. Densidad de estados en el modelo de Anderson jerárquico

En esta sección (\mathbb{X}, d, Δ) es un modelo de Anderson jerárquico homogéneo de grado n . No se impondrán condiciones de decaimiento sobre la sucesión $(p_r)_{r \geq 1}$. En particular, Δ tendrá dimensión espectral arbitraria d_{sp} . Las variables aleatorias $\{\omega(x)\}_{x \in \mathbb{X}}$ las consideraremos independientes e idénticamente distribuidas con distribución de probabilidad común μ^V . Por lo tanto la medida de probabilidad \mathbb{P} sobre $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{X}}$ es la medida producto

$$\mathbb{P} = \times_{x \in \mathbb{X}} \mu^V.$$

Las aproximaciones de volumen finito a H_ω son definidas como sigue: Fijamos $x_0 \in \mathbb{X}$ y consideraremos la sucesión creciente de las bolas

$$B_k = B(x_0, k), \quad k > 0.$$

Cada B_k tiene cardinalidad $|B_k| = n^k$. Consideramos el operador truncado H_k^ω dado por

$$H_k^\omega = \sum_{s=1}^k p_s E_s + V_\omega,$$

El subespacio $l^2(B_k)$ es invariante para H_k^ω . Recordar que la medida de conteo de autovalores normalizada μ_k^ω para H_k^ω es definida como:

$$\mu_k^\omega = \frac{1}{n^k} \sum_{j=1}^{n^k} \delta(\epsilon_j^{\omega, k}). \quad (3.2.1)$$

La medida espectral promedio para H_ω es la única medida de Borel μ^{av} sobre \mathbb{R} definida por

$$\int f(t) d\mu^{av}(t) = \mathbb{E} \langle \delta_{x_0} | f(H_\omega) \delta_{x_0} \rangle, \quad f \in C_0(\mathbb{R}) \quad (3.2.2)$$

Por simetría, $\int f(t) d\mu^{av}(t) = \mathbb{E} \langle \delta_x | f(H_\omega) \delta_x \rangle$ para todo $x \in \mathbb{X}$. De ésta forma la medida espectral promedio μ^{av} la podemos interpretar como la densidad de estados para H_ω .

Para la demostración de dicha afirmación necesitamos el siguiente resultado:

Proposición 3.2.1. *Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ existe un conjunto $\Omega_z \in \mathcal{F}$, con $\mathbb{P}(\Omega_z) = 1$ y tal que para todo $\omega \in \Omega_z$, la diferencia*

$$D_{k, \omega} = \int (t - z)^{-1} d\mu_k^w(t) - \int (t - z)^{-1} d\mu^{av}(t),$$

converge a cero cuando k tiende a infinito.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ dado. Como $\sum_{s \geq 0} p_s = 1$, $p_s \geq 0$, podemos elegir $r = r(\varepsilon, z)$ tal que:

$$\frac{1}{|\operatorname{Im} z|^2} \sum_{s=r+1}^{\infty} p_s < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.2.3)$$

Entonces para $k > r$,

$$D_{k,\omega} = \frac{1}{|B_k|} \sum_{x \in B_k} \langle \delta_x | (H_k^\omega - z)^{-1} \delta_x \rangle - \mathbb{E} \langle \delta_{x_0} | (H_\omega - z)^{-1} \delta_{x_0} \rangle \quad (3.2.4)$$

$$= \frac{1}{|B_k|} \sum_{x \in B_k} \langle \delta_x | ((H_k^\omega - z)^{-1} - (H_r^\omega - z)^{-1}) \delta_x \rangle \quad (3.2.5)$$

$$+ \frac{1}{|B_k|} \sum_{x \in B_k} \langle \delta_x | (H_r^\omega - z)^{-1} \delta_x \rangle - \mathbb{E} \langle \delta_{x_0} | (H_\omega - z)^{-1} \delta_{x_0} \rangle \quad (3.2.6)$$

Ya que $H_r^\omega = H_{r-1}^\omega + p_r E_r$, las identidades del resolvente nos dicen que para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$(H_{r-1}^\omega - z)^{-1} - (H_r^\omega - z)^{-1} = p_r (H_{r-1}^\omega - z)^{-1} E_r (H_r^\omega - z)^{-1},$$

por lo tanto

$$\|(H_{r-1}^\omega - z)^{-1} - (H_r^\omega - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} z|} p_r, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \quad (3.2.7)$$

Iterando (3.2.7) obtenemos para $k > r$ y $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ que

$$\|(H_r^\omega - z)^{-1} - (H_k^\omega - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} z|^2} \sum_{s=r+1}^k p_s < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.2.8)$$

De ésta forma por (3.2.8) obtenemos que

$$\left| \frac{1}{|B_k|} \sum_{x \in B_k} \langle \delta_x | ((H_k^\omega - z)^{-1} - (H_r^\omega - z)^{-1}) \delta_x \rangle \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.2.9)$$

Recordando que B_k es la unión disjunta de bolas de radio n^{k-r}

$$B_k = \bigcup_{j=1}^{n^{k-r}} B_{k,j},$$

y por lo tanto

$$l^2(B_k) = \bigoplus_{j=1}^{n^{k-r}} l^2(B_{k,j}).$$

Luego, como cada subespacio es invariante bajo H_r^ω , podemos escribir

$$\frac{1}{|B_k|} \sum_{x \in B_k} \langle \delta_x | (H_r^\omega - z)^{-1} \delta_x \rangle = \frac{1}{n^{k-r}} \sum_{j=1}^{n^{k-r}} n^{-r} \sum_{x \in B_{k,j}} \langle \delta_x | (H_r^\omega - z)^{-1} \delta_x \rangle,$$

Notar que el lado derecho es el promedio de n^{k-r} variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Por lo tanto, la ley de los grandes números de Kolmogorov nos dice que existe un conjunto $\Omega_{z,\varepsilon} \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(\Omega_{z,\varepsilon}) = 1$ y tal que para todo $\omega \in \Omega_{z,\varepsilon}$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_k|} \sum_{x \in B_k} \langle \delta_x | (H_r^\omega - z)^{-1} \delta_x \rangle = \frac{1}{n^r} \sum_{x \in \tilde{B}} \mathbb{E} \langle \delta_x | (H_r^\omega - z)^{-1} \delta_x \rangle, \quad (3.2.10)$$

donde \tilde{B} es alguna bola de radio r fija. De las cotas (3.2.7) y (3.2.3) obtenemos

$$|\langle \delta_x | (H_r^\omega - z)^{-1} \delta_x \rangle - \langle \delta_x | (H_\omega - z)^{-1} \delta_x \rangle| < \frac{\varepsilon}{2}$$

combinando ésto último con (3.2.10) obtenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \left| \frac{1}{|B_k|} \sum_{x \in B_k} \langle \delta_x | (H_r^\omega - z)^{-1} \delta_x \rangle - \mathbb{E} \langle \delta_{x_0} | (H_\omega - z)^{-1} \delta_{x_0} \rangle \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto para $\omega \in \Omega_{z,\varepsilon}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup |D_{k,\omega}| < \varepsilon$, El argumento no depende del valor de $\varepsilon > 0$ escogido, por lo tanto la demostración concluye tomando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. \square

Usando la proposición anterior y la proposición (1.4.2), se obtiene el teorema principal de la sección:

Teorema 3.2.2. *Existe un conjunto $\tilde{\Omega} \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 1$ tal que para todo $\omega \in \tilde{\Omega}$ y $f \in C_0(\mathbb{R})$ tenemos*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f(t) d\mu_k^\omega(t) = \int f(t) d\mu^{av}.$$

Demostración. Sea G un conjunto numerable denso en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Recordar que por la proposición (1.4.2) cualquier función $f \in C_0(\mathbb{R})$ puede ser aproximada uniformemente por combinaciones lineales de funciones $t \mapsto (t-z)^{-1}$, con $z \in G$, el resultado se sigue tomando $\tilde{\Omega} = \bigcap_{z \in G} \Omega_z$. \square

3.3. Estadísticas de Poisson de autovalores en el modelo jerárquico de Anderson

Recordar que existen $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ y $\rho > 1$ tales que

$$C_1 \rho^{-r} \leq p_r \leq C_2 \rho^{-r},$$

para r suficientemente grande. Entonces la dimensión espectral de Δ es igual a

$$d_{sp} = 2 \frac{\log n}{\log \rho} \quad (3.3.1)$$

En esta sección asumiremos que

$$0 < d_{sp} < 1. \quad (3.3.2)$$

Respecto a la distribución de probabilidad μ^V , supondremos que μ^V posee densidad acotada

$$d\mu^V(t) = \gamma(t)dt \text{ y } \|\gamma\|_\infty < \infty. \quad (3.3.3)$$

Previo a la presentación del resultado principal de la sección, introduciremos dos estimaciones para el caso general de operadores de Schrodinger discretos. En ambos casos, la suposición (3.3.3) juega un rol importante.

Lema 3.3.1. (*Wegner*) Sea M_0 un operador autoadjunto sobre $l^2(\mathbb{X})$ y

$$M_\omega = M_0 + V_\omega$$

Entonces para cada función de Borel medible $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ y $x \in \mathbb{X}$, tenemos

$$\mathbb{E} \langle \delta_x | h(M_\omega) \delta_x \rangle \leq \|\gamma\|_\infty \int h(t) dt. \quad (3.3.4)$$

Por lo tanto, si v_ω es la medida espectral para δ_x y M_ω , y $v^{av} = \mathbb{E} v_\omega$ es la correspondiente medida promedio; entonces v^{av} es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue,

$$dv^{av}(t) = v(t)dt$$

y

$$\|v\|_\infty \leq \|\gamma\|_\infty.$$

Para un operador acotado A sobre un espacio de Hilbert, denotamos por $\text{Im } A$ al operador autoadjunto $\frac{1}{2i}(A - A^*)$.

Lema 3.3.2. (Minami) Sea M_0 un operador autoadjunto sobre $l^2(\mathbb{X})$ y

$$M_\omega = M_0 + V_\omega.$$

Entonces para cada $x, y \in \mathbb{X}$ y $\text{Im } z > 0$, tenemos

$$\mathbb{E} \det \begin{pmatrix} \langle \delta_x | \text{Im}(M_\omega - z)^{-1} \delta_x \rangle & \langle \delta_x | \text{Im}(M_\omega - z)^{-1} \delta_y \rangle \\ \langle \delta_y | \text{Im}(M_\omega - z)^{-1} \delta_x \rangle & \langle \delta_y | \text{Im}(M_\omega - z)^{-1} \delta_y \rangle \end{pmatrix} \leq \pi^2 \|\gamma\|_\infty \quad (3.3.5)$$

Demostración. Ver la demostración en [2]. □

La estimación de Wegner nos dice que μ^{av} es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue,

$$d\mu^{av}(t) = \eta(t)dt,$$

y

$$\|\eta(t)\|_\infty \leq \|\gamma\|_\infty.$$

Si $e \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ son dados, entonces en vista del teorema (3.2.2) esperamos que el número de autovalores de H_k^ω restringido al conjunto $l^2(B_k)$ en el intervalo $(e - \varepsilon, e + \varepsilon)$,

$$\#\left\{i \mid e_i^{\omega,k} \in (e - \varepsilon, e + \varepsilon)\right\},$$

tenga tamaño típico $|B_k| \mu^{av}(e - \varepsilon, e + \varepsilon)$ para k grande. El comportamiento estadísticos de los autovalores $e_j^{\omega,k}$ cercanos a e es capturado por la medida reajustada $\xi_k^{\omega,e}$ dada por

$$\xi_k^{\omega,e} = \sum_{i=1}^{|B_k|} \delta(|B_k|(e_i^{\omega,k} - e)). \quad (3.3.6)$$

Realizaremos la siguiente condición de regularidad sobre e : Para $\text{Im } z > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int \text{Im}(t - e - \varepsilon z)^{-1} \eta(t) dt = \pi \eta(e). \quad (3.3.7)$$

y asumimos que

$$\eta(e) > 0. \quad (3.3.8)$$

La condición (3.3.8) vale para casi todo $e \in \text{supp}(\mu^{av})$, respecto a la medida de Lebesgue.

El resultado respecto a los autovalores de Poisson es:

Teorema 3.3.3. *Bajo las condiciones consideradas en la presente sección, $\xi_k^{\omega,e}$ converge a un proceso puntual de Poisson sobre \mathbb{R} con intensidad $\eta(e)\mathcal{L}$.*

La idea principal es aproximar H_k^ω con H_r^ω para $r < k$, como en la demostración del teorema (3.2.2). Consideremos r dependiendo de k , $r = r_k$, tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_k}{k} = c, \quad (3.3.9)$$

con

$$0 < d_{sp} < c < 1. \quad (3.3.10)$$

Sean

$$\tilde{e}_1^{\omega,k} \leq \tilde{e}_2^{\omega,k} \leq \dots \leq \tilde{e}_{|B_k|}^{\omega,k},$$

los autovalores de $H_{r_k}^\omega$ restringido a $l^2(B_k)$ y sea

$$\tilde{\xi}_k^{\omega,e} = \sum_{i=1}^{|B_k|} \delta(|B_k|(\tilde{e}_i^{\omega,k} - e)),$$

la correspondiente medida reajustada cercana a e . Ya que B_k es la unión disjunta de n^{k-r_k} bolas de radio r_k ,

$$B_k = \bigcup_{j=1}^{n^{k-r_k}} B_{k,j},$$

tenemos la correspondiente descomposición en suma directa

$$H_{r_k}^\omega \upharpoonright l^2(B_k) = \bigoplus_{j=1}^{n^{k-r_k}} H_{r_k}^\omega \upharpoonright l^2(B_{k,j}).$$

Por lo tanto, el proceso puntual $\tilde{\xi}_k^{\omega,e}$ es la suma de n^{k-r_k} procesos puntuales independientes,

$$\tilde{\xi}_k^{\omega,e} = \sum_{j=1}^{n^{k-r_k}} \tilde{\xi}_{k,j}^{\omega,e},$$

donde

$$\tilde{\xi}_{k,j}^{\omega,e} = \sum_{l=1}^{n^{r_k}} \delta(|B_k|(\tilde{e}_l^{\omega,k,j} - e)),$$

y $\tilde{e}_l^{\omega,k,j}$, $l = 1, \dots, n^{r_k}$ son los autovalores de $H_{r_k}^\omega$ restringido a $l^2(B_{k,j})$. La demostración del teorema (3.3.3) se realizará de la siguiente manera. Primero estableceremos que los procesos puntuales $\xi_k^{\omega,e}$ y $\tilde{\xi}_k^{\omega,e}$ son asintóticamente cercanos en el siguiente sentido:

Proposición 3.3.4. Para cada $f \in L_1(\mathbb{R}, dt)$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left| \int f d\tilde{\xi}_k^{\omega, e} - \int f d\xi_k^{\omega, e} \right| = 0. \quad (3.3.11)$$

Demostración. Primero probaremos que (3.3.11) vale para la familia de funciones

$$g_z(t) = \text{Im}(t - z)^{-1}, \quad \text{Im } z > 0.$$

Tomando

$$z_k = e + \frac{z}{|B_k|}, \quad (3.3.12)$$

Tenemos

$$\int g_z d\tilde{\xi}_k^{\omega, e} - \int g_z d\xi_k^{\omega, e} = \frac{1}{|B_k|} \text{Im} \sum \langle \delta_x | ((H_{r_k}^\omega - z_k)^{-1} - (H_k^\omega - z_k)^{-1}) \delta_x \rangle.$$

Por lo tanto

$$\left| \int g_z d\tilde{\xi}_k^{\omega, e} - \int g_z d\xi_k^{\omega, e} \right| \leq \frac{1}{|\text{Im } z_k|^2} \sum_{s=r_k+1}^{\infty} p_s = \text{const} \frac{1}{|\text{Im } z|^2} \left(\frac{n^{2k}}{\rho^{r_k}} \right).$$

□

Las formulas (3.3.9) y (3.3.10) implican que para k suficientemente grande, $\rho^{r_k} \geq \rho^{c'k}$ donde $d_{sp} < c' < c < 1$. Por lo tanto

$$\frac{n^{2k}}{\rho^{r_k}} \leq \left(\frac{n^2}{\rho^{c'}} \right)^k,$$

y $\frac{n^2}{\rho^{c'}} < 1$ por la fórmula (3.3.1). Por lo tanto vale (3.3.11).

Por otro lado, notemos que para cada conjunto de Borel acotado $A \subset \mathbb{R}$, tenemos que

$$\xi_k^{\omega, e}(A) = \sum_{x \in B_k} \langle \delta_x | f(H_k^\omega) \delta_x \rangle,$$

donde $f(t) = 1_A(|B_k|(t - e))$. La estimación de Wegner (3.3.4) nos dice que para cada $x \in B_k$,

$$\mathbb{E} \langle \delta_x | f(H_k^\omega) \delta \rangle \leq \|\gamma\|_\infty \int f(t) dt = \frac{\|\gamma\|_\infty}{|B_k|} \mathcal{L}(A). \quad (3.3.13)$$

Sumando (3.3.13) sobre todos los $x \in B_k$ obtenemos

$$\mathbb{E} \xi_k^{\omega, e}(A) \leq \|\gamma\|_\infty \mathcal{L}(A). \quad (3.3.14)$$

Similarmente

$$\mathbb{E}\tilde{\xi}_k^{\omega,e}(A) \leq \|\gamma\|_\infty \mathcal{L}(A). \quad (3.3.15)$$

Finalmente, para probar (3.3.11), con $f \in L_1(\mathbb{R}, dt)$, recordemos que por la proposición (1.4.2) las combinaciones lineales de funciones $\{g_z\}_{\text{Im } z > 0}$ son densas en $L_1(\mathbb{R}, dt)$. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe una combinación lineal

$$g(t) = \sum_{j=1}^P a_j \text{Im}(t - z^{(j)})^{-1}, \quad \text{Im } z^{(j)} > 0,$$

con

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t) - g(t)| dt \leq \varepsilon.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \int f d\xi_k^{\omega,e} - \int f d\tilde{\xi}_k^{\omega,e}(t) \right| &\leq \mathbb{E} \int |f - g| d\xi_k^{\omega,e} \\ &\quad + \mathbb{E} \left| g d\xi_k - \int g d\tilde{\xi}_k^{\omega,e} \right| + \mathbb{E} \int |g - f| d\tilde{\xi}_k^{\omega,e}, \end{aligned}$$

Usando las cotas (3.3.14) y (3.3.15) y que el resultado vale para la familia de funciones g , se sigue que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left| \int f d\xi_k^{\omega,e} - \int f d\tilde{\xi}_k^{\omega,e}(t) \right| \leq 2 \|\gamma\|_\infty \varepsilon.$$

Así (3.3.11) se obtiene al hacer $\varepsilon \downarrow 0$.

Corolario 3.3.5. Sean A_1, A_2, \dots, A_m conjunto de Borel disjuntos en \mathbb{R} . sean X_k^ω y \tilde{X}_k^ω los vectores aleatorios

$$\begin{aligned} X_k^\omega &= [\xi_k^{\omega,e}(A_1), \xi_k^{\omega,e}(A_2), \dots, \xi_k^{\omega,e}(A_m)], \\ \tilde{X}_k^\omega &= [\tilde{\xi}_k^{\omega,e}(A_1), \dots, \tilde{\xi}_k^{\omega,e}(A_m)]. \end{aligned}$$

y sean $\phi_k, \tilde{\phi}_k : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ las correspondientes funciones características

$$\phi_k(t) = \mathbb{E} e^{itX_k^\omega}, \quad \tilde{\phi}_k = \mathbb{E} e^{it\tilde{X}_k^\omega}, \quad t \in \mathbb{R}^m.$$

Entonces para todo $t \in \mathbb{R}^m$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\phi_k(t) - \tilde{\phi}_k(t)| = 0.$$

Proposición 3.3.6. El proceso puntual $\tilde{\xi}_k^{\omega,e}$ converge a un proceso puntual de Poisson sobre \mathbb{R} con intensidad $\eta(e)\mathcal{L}$.

Demostración. Debido al corolario (3.3.5) basta probar que $\tilde{\xi}_k^{\omega,e}$ y $\tilde{\xi}_k^{\omega,e}$ verifican las cuatro hipótesis del teorema (3.1.10)

(H0) De la demostración de la proposición (3.3.4) tenemos $\mathbb{E}\tilde{\xi}_k^{\omega,e}(A) \leq \|\gamma\|_\infty \mathcal{L}(A)$. Luego vale la hipótesis (H0).

(H1) Debemos verificar que para cada conjunto de Borel acotado $A \subset \mathbb{R}$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq n^{k-r_k}} \mathbb{P}\left(\tilde{\xi}_{k,j}^{\omega,e}(A) \geq 1\right) = 0 \quad (3.3.16)$$

En efecto, de la desigualdad de Chebyshev, la cota (3.3.13) y la definición de $\tilde{\xi}_{k,j}^{\omega,e}$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\tilde{\xi}_{k,j}^{\omega,e}(A) \geq 1\right) &\leq \mathbb{E}\tilde{\xi}_{k,j}^{\omega,e}(A) \\ &\leq \frac{|B_{k,j}|}{|B_k|} \|\gamma\|_\infty \mathcal{L}(A) \\ &= n^{r_k-k} \|\gamma\|_\infty \mathcal{L}(A) \end{aligned}$$

Como $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_k}{k} = c$, con $0 < c < 1$, necesariamente n^{r_k-k} tiende a cero si k tiende a infinito, obteniendo (3.3.16).

(H2) Debemos probar que para todo $\text{Im } z > 0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int \text{Im}(t-z)^{-1} d\tilde{\xi}_k^{\omega,e}(t) = \pi\eta(e).$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int \text{Im}(t-z)^{-1} d\tilde{\xi}_k^{\omega,e}(t) &= \frac{1}{|B_k|} \mathbb{E} \text{Im} \sum_{x \in B_k} \langle \delta_x | (H_{r_k}^\omega - z_k)^{-1} \delta_x \rangle \\ &= \frac{1}{|B_k|} \mathbb{E} \text{Im} \sum_{x \in B_k} \langle \delta_x | ((H_{r_k}^\omega - z_k)^{-1} - (H_\omega - z_k)^{-1}) \delta_x \rangle \\ &\quad + \mathbb{E} \text{Im} \langle \delta_{x_0} | (H^\omega - z_k)^{-1} \delta_{x_0} \rangle \\ &= I_{k,\omega} + II_{k,\omega} \end{aligned}$$

Notar que $II_{k,\omega} \rightarrow \pi\eta(e)$ por la condición de regularidad (3.3.7) y mientras que el término $I_{k,\omega}$ tiende a cero si k tiende a infinito, como vimos en la demostración de la proposición (3.3.4).

(H3) Debemos probar que para cada función del tipo $g_z(t) = \text{Im}(t-z)^{-1}$, $\text{Im } z > 0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n^{k-r_k}} \mathbb{E}\mathcal{I}(\tilde{\xi}_{k,j}^{\omega,e}, g_z) = 0. \quad (3.3.17)$$

Recordando que $\int_{t \neq t'} g(t)g(t')d\tilde{\xi}_{k,j}^{\omega,e}(t)\tilde{\xi}_{k,j}^{\omega,e}(t')$. En efecto,

$$\begin{aligned} |B_k|^2 \mathcal{I}(\tilde{\xi}_{k,j}^{\omega,e}, g_z) &= \left(\sum_{x \in B_{k,j}} \langle \delta_x | \text{Im}(H_{r_k} - z_k)^{-1} \delta_x \rangle \right)^2 \\ &\quad - \sum_{x \in B_{k,j}} \langle \delta_x | (\text{Im}(H_{r_k}^\omega - z_k)^{-1})^2 \delta_x \rangle \\ &= \sum_{x,y \in B_{k,j}} \det \begin{pmatrix} \langle \delta_x | \text{Im}(H_{r_k} - z_k)^{-1} \delta_x \rangle & \langle \delta_x | \text{Im}(H_{r_k} - z_k)^{-1} \delta_y \rangle \\ \langle \delta_y | \text{Im}(H_{r_k} - z_k)^{-1} \delta_x \rangle & \langle \delta_y | \text{Im}(H_{r_k} - z_k)^{-1} \delta_y \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Usando la estimación de Minami (3.3.5) obtenemos la cota

$$|B_k|^2 \mathbb{E} \mathcal{I}(\tilde{\xi}_{k,j}^{\omega,e}, g_z) \leq \pi^2 \|\gamma\|_\infty^2 |B_{k,j}|^2,$$

y por lo tanto

$$\sum_{j=1}^{n^{k-r_k}} \mathbb{E} \mathcal{I}(\tilde{\xi}_{k,j}^{\omega,e}, g_z) \leq \pi^2 \|\gamma\|_\infty^2 n^{-r_k}$$

Como $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = +\infty$, se concluye la demostración.

□

Conclusión

En esta tesis estudiamos el modelo jerárquico de Anderson. Vimos las propiedades espectrales de el Laplaciano jerárquico y las propiedades espectrales genéricas del modelo jerárquico de Anderson. Los resultados más relevantes fueron:

1. Si el modelo tiene dimensión espectral menor o igual a cuatro entonces, con probabilidad uno, el espectro de H_ω es denso puntual puro.
2. Si la dimensión espectral es menor estricta que uno, los niveles de energía para H_ω son asintóticamente un proceso puntual de Poisson, luego de un ajuste apropiado.

Las preguntas naturales que surgen, y que perfectamente podrían ser proyecto de tesis de doctorado, son las siguientes:

1. ¿La localización espectral vale para una densidad arbitraria del operador aleatorio?
2. ¿Los autovalores seguirán comportándose, asintóticamente, como un proceso puntual de Poisson para dimensión espectral mayor o igual a uno?
3. La conjetura de Anderson. Ésta nos dice que en dimensión tres existe transición de fase en el modelo Anderson, es decir, existe una constante c_0 tal que el modelo $H = H_0 + cV_\omega$, con H_0 el Laplaciano discreto usual sobre Z^d , tiene el siguiente comportamiento: Para $c > c_0$: H , con probabilidad uno, posee espectro puntual puro. Para $c < c_0$: H , con probabilidad uno, posee espectro absolutamente continuo. A la fecha, en dimensión tres, no existe respuesta si el modelo de Anderson posee espectro absolutamente continuo.

Las variables aleatorias de Cauchy juegan un rol muy especial en la teoría de operadores discretos de Shrodinger y una pregunta natural es si podríamos extender el teorema (2.2.1) a distribuciones distintas a las de Cauchy. El teorema (2.2.3) es una respuesta parcial a dicha pregunta, es decir, el teorema nos dice que se verifica localización para distribuciones generales de $\omega(x)$, en cualquier desorden, no sin antes imponer condiciones sobre el decaimiento de p_r más restrictiva que (2.2.1); lo cual se traduce en acotar la dimensión espectral del modelo.

Bibliografía

- [1] M. Aizenman and S. Warzel. *Random Operators: Disorder Effects on Quantum Spectra and Dynamics*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2015.
- [2] V. Jakšić. Topics in spectral theory. In *Open quantum systems. I*, volume 1880 of *Lecture Notes in Math.*, pages 235–312. Springer, Berlin, 2006.
- [3] E. Kritchevski. Hierarchical Anderson model. In *Probability and mathematical physics*, volume 42 of *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 309–322. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [4] E. Kritchevski. Spectral localization in the hierarchical anderson model. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 135, 05 2007.
- [5] E. Kritchevski. Poisson statistics of eigenvalues in the hierarchical anderson model. *Annales Henri Poincaré*, 9, 06 2008.
- [6] H. Kunz and B. Souillard. Sur le spectre des opérateurs aux différences finies alatoires. *Communications in Mathematical Physics*, 78, 12 1980.
- [7] S. Molchanov. Lectures on random media. In *Lectures on probability theory (Saint-Flour, 1992)*, volume 1581 of *Lecture Notes in Math.*, pages 242–411. Springer, Berlin, 1994.
- [8] S. Molchanov. Hierarchical random matrices and operators. Application to Anderson model. In *Multidimensional statistical analysis and theory of random matrices (Bowling Green, OH, 1996)*, pages 179–194. VSP, Utrecht, 1996.

Bibliografia

- [9] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics - Volume 1: Functional Analysis*. Academic Press, rev and enl edition, 1981.
- [10] G. Teschl. *Mathematical methods in quantum mechanics*. Graduate Studies in Mathematics 099. AMS, 2009.
- [11] J. Weidmann. *Linear Operators in Hilbert Spaces*. Graduate Texts in Mathematics 68. Springer-Verlag New York, 1980.