



UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Matemáticas

**ESPECTROS DE GRAFOS
CIRCULANTES**

Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias Mención
Matemáticas

CLAUDIA ANDREA SOTO SILVA

Profesor Guía: Dr. Oscar Rojo J.

Antofagasta, Chile

2012

Índice

1. Introducción	3
1.1. Conceptos básicos	3
1.2. Matrices asociadas a grafos	5
1.3. Grafos Bipartitos	6
2. Grafos circulantes	9
3. Grafos Circulantes Enteros	15
4. Una familia infinita de grafos bipartitos enteros como copias de un grafo circulante entero bipartito	27
5. Grafos circulantes enteros hiperenergéticos y grafos circulantes enteros equienergéticos	31
6. Producto completo de grafos circulantes	34
6.1. Resultados generales del producto completo de grafos regulares	34
6.2. El producto completo de grafos circulantes	43
6.3. Producto completo de grafos circulantes enteros	45

1. Introducción

La Teoría de grafos estudia los espectros de matrices asociadas a un grafo y es una disciplina con una amplia gama de aplicaciones. Desde sus comienzos, tiene aplicaciones a la Química. También tiene aplicaciones, entre otras, en problemas de Física Teórica, Mecánica Cuántica, Ciencia de la Computación, Optimización Combinatorial y Biología. Entre las matrices asociadas a un grafo simple y no dirigido mencionamos la matriz de adyacencia, la matriz Laplaciana, la matriz Laplaciana sin signo, la matriz de Randić, etc. Dado el hecho que ellas están relacionadas con casi todos los invariantes más importantes de un grafo, sus espectros pueden dar información acerca del grafo o de una aplicación que es modelada por el grafo. La Teoría Espectral de Grafos se apoya fuertemente en los resultados de la Teoría de Matrices. Esta Tesis quiere relacionar el problema de grafos enteros con el tema de grafos circulantes. Más precisamente, el problema que esta Tesis estudiar es el relativo a los espectros de grafos circulantes, con énfasis en grafos circulantes enteros.

1.1. Conceptos básicos

En esta sección recordamos algunos conceptos de la Teoría de Grafos que serán usados en el desarrollo de esta Tesis. Esta tesis considera grafos simples no dirigidos.

Un grafo $G = (V(G), E(G))$ está formado por un conjunto $V(G)$ no vacío y un conjunto $E(G) \subset V(G) \times V(G)$. Los elementos de $V(G)$ y $E(G)$ son llamados vértices y lados, respectivamente. Asumimos que $\{i, i\} \notin E(G)$, para todo $i \in V(G)$. Dos vértices i, j de un grafo se dicen adyacentes si $\{i, j\} \in E(G)$, en tal caso se dice el lado $\{i, j\}$ es incidente a los vértices i y j . Si no hay lugar a confusión escribiremos V y E en lugar de $V(G)$ y $E(G)$, respectivamente.

El grado de un vértice $i \in V$ es denotado por d_i y es el número de vértices adyacentes a él.

La cardinalidad de V es llamada el orden de G . El orden de un grafo puede ser finito o infinito. En esta Tesis los grafos serán finitos.

Pasamos ahora a recordar conceptos que dicen relación a dos grafos. Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos grafos:

1. Los grafos G y G' se dicen isomorfos si existe una biyección $\varphi : V \rightarrow V'$ tal que

$$\{x, y\} \in E \Leftrightarrow \{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E'$$

para todo $x, y \in V$. En tal caso se escribe $G \simeq G'$.

2. Si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$ entonces se dice que G' es un subgrafo de G y se escribe $G' \subseteq G$.
3. Si $G' \subseteq G$ y para cada $\{x, y\} \in E$ con $x, y \in V'$ ocurre $\{x, y\} \in E'$ entonces se dice G' es un subgrafo inducido de G .
4. Si $G' \subseteq G$ y $V' = V$ entonces G' es llamado un subgrafo generado de G .

Un camino de n vértices en un grafo es una secuencia finita de n vértices donde cada par de vértices consecutivos están conectados por un lado.

Un ciclo en un grafo es un camino donde el primer y el último vértice de la secuencia coinciden.

Un grafo se dice conectado si para todo par de vértices distintos existe un camino que los ue.

Ahora pasamos a recordar otros conceptos sobre un grafo $G=(V, E)$.

Un grafo de n vértices tal que para todo par de vértices $\{u, v\} \in V \times V$ se tiene que $\{u, v\} \in E$ recibe el nombre de grafo completo y es denotado por K_n .

Un grafo donde $V = V_1 \cup V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \phi$ tal que para todo $\{u, v\} \in E$ se tiene $u \in V_1$ y $v \in V_2$ recibe el nombre de grafo bipartito.

Un grafo bipartito de n vértices donde $V = V_1 \cup V_2$ con $|V_1| = r$, $|V_2| = s$ tal que $r + s = n$ y donde cada vértice de V_1 es adyacente con cada vértice de V_2 recibe el nombre de grafo bipartito completo y es denotado por $K_{r,s}$.

Un grafo en el cual todos sus vértices tienen un grado igual a k recibe el nombre de grafo k -regular.

1.2. Matrices asociadas a grafos

A todo grafo se le pueden asociar ciertas matrices. A continuación mostraremos algunas de ellas.

Sea $G = (V, E)$ un grafo donde $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Sea

$$D(G) = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix}.$$

La matriz $D(G)$ es llamada la matriz de grados de G . La matriz de adyacencia $A(G) = (a_{i,j})$ de orden $n \times n$ está definida por

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & , \{i, j\} \in E(G) \\ 0 & , \{i, j\} \notin E(G) \end{cases}.$$

Los autovalores de la matriz de adyacencia son llamados autovalores del grafo. La matriz Laplaciana es definida como

$$L(G) = D(G) - A(G)$$

y la matriz Laplaciana sin signo como

$$Q(G) = D(G) + A(G).$$

Los autovalores de $L(G)$ y $Q(G)$ son llamados autovalores Laplacianos y autovalores Laplacianos sin signo, repectivamente.

Las matrices $A(G)$, $L(G)$ y $Q(G)$ son matrices reales simétricas. Entonces sus autovalores son números reales. Además observamos que los espectros son independientes del etiquetado de los vértices. En efecto, al cambiar el etiquetado se obtienen matrices similares via una matriz permutación.

1.3. Grafos Bipartitos

Aquí entregamos condiciones necesarias y suficientes para que un grafo sea bipartito.

Lema 1 [7, Proposition 3.4.1]

- i) Un grafo G es bipartito si y sólo si para cada autovalor no nulo λ de G se tiene que $-\lambda$ es también autovalor, con la misma multiplicidad.*
- ii) Sea G un grafo conectado donde λ_1 es su mayor autovalor. Entonces G es bipartito si y sólo si $-\lambda_1$ es un autovalor de G .*

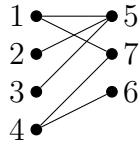
Sea $G = (V, E)$ un grafo conectado de orden n con $V = \{1, 2, \dots, n\}$ y sean

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$$

los autovalores de $A(G)$. Entonces $A(G)$ es una matriz irreducible no-negativa. Empleando la Teoría Perron-Frobenius obtenemos que λ_1 es un autovalor simple de $A(G)$ y que existe un autovector positivo \mathbf{x} asociado a λ_1 tal que $\sum_{i \in V} x_i^2 = 1$. El autovector \mathbf{x} es llamado autovector principal de G . En [10] se entrega una condición necesaria y suficiente para que G sea bipartito. Previamente recordamos el concepto de conjunto independiente de vértices.

Definición 1 Sea $S \subseteq V$. El conjunto S se dice independiente si para cada par de vértices en S se tiene que ellos no son adyacentes. Un conjunto independiente S se dice maximal si no es un subconjunto de otro conjunto independiente.

Ejemplo 1 En el grafo



tenemos que $S_1 = \{1, 2, 3\}$ es un conjunto independiente, $S_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ es un conjunto independiente maximal y $S_3 = \{5, 6, 7\}$ es también un conjunto independiente maximal.

Teorema 1 [10] Si S es un conjunto independiente de un grafo conectado G y si \mathbf{x} es un autovector principal de G entonces

$$\sum_{i \in S} x_i^2 \leq \frac{1}{2}$$

La igualdad ocurre si y sólo si G es bipartito donde S es un conjunto independiente maximal.

Corolario 1 Sea G un grafo conectado regular de orden n . Sea S un conjunto independiente maximal de G . Entonces G es bipartito si y sólo si $|S| = \frac{n}{2}$.

Demostración. Sea G un grafo r -regular. Entonces $\mathbf{x} = \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right]^T$ es el autovector principal. Del teorema tenemos

$$\sum_{i \in S} x_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i \in S} 1 = \frac{1}{n} |S| \leq \frac{1}{2}$$

Con igualdad si y sólo si $|S| = \frac{n}{2}$. ■

Observamos que todo grafo conectado regular bipartito debe ser de orden par.

2. Grafos circulantes

Un grafo es llamado grafo circulante si su matriz de adyacencia es una matriz circulante. Algunos resultados básicos sobre matrices circulantes son dados a continuación.

Una matriz circulante de orden n es una matriz de la forma

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_2 & \dots & c_{n-1} & c_0 & c_1 \\ c_1 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 \end{bmatrix}.$$

Observamos que C está totalmente definida por su primera fila. En efecto, toda fila posterior es obtenida como un desplazamiento a la derecha, en una posición, de la fila inmediatamente anterior. Entonces, basta escribir $C = circ(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$. Una matriz circulante especial es la matriz permutación

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

de orden n . Algunas propiedades de Π son

$$\Pi^n = I_n, \Pi^T = \Pi^* = \Pi^{-1} = \Pi^{n-1}$$

donde Π^T y Π^* indican la traspuesta y traspuesta conjugada de Π , respectivamente.

La importancia de la matriz Π queda en evidencia al observar que

$$C = circ(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) = c_0 I + c_1 \Pi + \dots + c_{n-1} \Pi^{n-1}. \quad (1)$$

Recíprocamente una matriz C es una matriz circulante si existe un polinomio P_C tal que $C=P_C(\Pi)$.

Importantes propiedades de las matrices circulantes son inmediatas. Si C es una matriz circulante entonces su transpuesta conjugada es también una matriz circulante. Sean C y D dos matrices circulantes del mismo orden. Entonces,

$$CD = P_C(\Pi)P_D(\Pi) = P_D(\Pi)P_C(\Pi) = DC.$$

Esto nos dice que el producto de matrices circulantes es conmutativo. En particular, una matriz circulante conmuta con su transpuesta conjugada. Así se concluye que toda matriz circulante es una matriz normal. Después de hacer uso de las potencias de Π , se tiene que el producto $P_C(\Pi)P_D(\Pi)$ es un polinomio evaluado en Π . Vemos así que el producto de dos matrices circulantes es también una matriz circulante. De (1) tenemos que si λ es un autovalor de Π entonces

$$c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \dots + c_{n-1}\lambda^{n-1}$$

es un autovalor de C . Luego para encontrar los autovalores de C basta conocer los autovalores de Π . Tenemos

$$\Pi^n = I_n.$$

Entonces los autovalores de Π son las raíces n -ésimas de la unidad: $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$, donde $\omega = \exp(2\pi i/n)$. En consecuencia, los autovalores de C son

$$\lambda_j = c_0 + c_1\omega^j + c_2\omega^{2j} + \dots + c_{n-1}\omega^{(n-1)j} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\omega^{ij} \quad (2)$$

para $0 \leq j \leq n - 1$. Haciendo uso de las potencias de ω , fácilmente se puede probar

que un autovector asociado al autovector λ_j es la j -ésima columna de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(n-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \dots & \omega^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}.$$

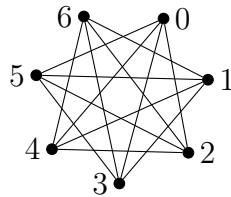
Una matriz circulante tiene sumas filas iguales. Como además, la suma de las entradas de la i -ésima fila de la matriz de adyacencia de un grafo es precisamente el grado del i -ésimo vértice, se sigue que todo grafo circulante de sumas filas iguales a k es un grafo k -regular.

Sea $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ un conjunto de k enteros, $1 \leq s_1, \dots, s_k < n$, tal que

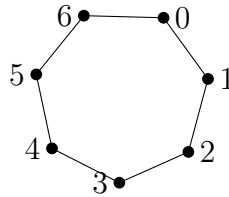
$$s \in S \Leftrightarrow n - s \in S. \quad (3)$$

Un grafo circulante $G(n, S)$ donde S cumple la propiedad (3) es un grafo con conjunto de vértices $V(G) = \{0, \dots, n - 1\}$ donde un lado es incidente con los vértices i y j siempre cuando $|i - j| \in S$; Ver [21]. El conjunto S es llamado el símbolo del grafo circulante G . Como la cardinalidad de S es $|S| = k$, el grafo $G(n, S)$ es k -regular.

Ejemplo 2 Sea $n = 7$. Si $S = \{2, 3, 4, 5\}$, entonces $G = G(7, S)$ es el siguiente grafo circulante 4-regular



Ahora si $S = \{1, 6\}$, entonces $G = G(7, S)$ es el grafo circulante 2-regular



En este punto queremos recordar el concepto de grafo Cayley. Sea \mathcal{B} un grupo finito de orden n . Sea S un subconjunto de \mathcal{B} tal que

$$w \in S \Leftrightarrow w^{-1} \in S$$

donde w^{-1} denota el inverso de w respecto a la operación del grupo. Un grafo G de orden n es llamado grafo Cayley con respecto al grupo \mathcal{B} y al subconjunto S si

$$\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow uv^{-1} \in S.$$

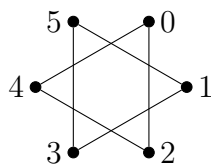
Notemos que un grafo circulante $G(n, S)$ es un grafo Cayley con respecto a $\mathcal{B} = \mathbb{Z}_n$ y S con la propiedad (3).

Lema 2 [6] *Un grafo circulante $G(n, S)$, con $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$, es conectado si y sólo si*

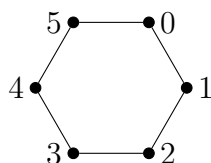
$$\text{mcd}\{n, s_1, s_2, \dots, s_k\} = 1.$$

donde $\text{mcd}\{u, v\}$ denota el máximo común divisor de u y v .

Ejemplo 3 *Sea $n = 6$ y $S = \{2, 4\}$. Entonces $\text{mcd}\{6, 2, 4\} = 2$ y el grafo $G = G(6, S)$*



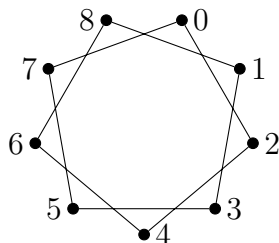
es no conectado. Ahora si escogemos $S = \{1, 5\}$. Entonces $\text{mcd}\{6, 1, 5\} = 1$ y el grafo $G = G(6, S)$ es



el cual es conectado.

Con el siguiente ejemplo observamos que no es necesario que $1 \in S$ para que el grafo sea conectado.

Ejemplo 4 Sea $n = 9$ y $S = \{2, 7\}$. Entonces $\text{mcd}\{9, 2, 7\} = 1$ y en este caso $G = G(9, S)$ es el grafo



el cual es conectado.

Ejemplo 5 Todo grafo circulante de orden primo es un grafo conectado.

Notamos que la primera fila de la matriz de adyacencia de un grafo circulante $G(n, S)$ tiene un 1 en la j -ésima posición si y sólo si $j \in S$, para $0 \leq j \leq n - 1$. Entonces de (2) tenemos que el j -ésimo autovalor de $G = G(n, S)$ es

$$\lambda_j = \sum_{s \in S} \omega^{sj}, \quad (4)$$

con autovector asociado $\mathbf{v}_j = [1, \omega^j, \dots, \omega^{(n-1)j}]^T$.

Ejemplo 6 Sea $n = 8$ y $S = \{1, 3, 4, 5, 7\}$. Entonces

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y el espectro de $G(8, S)$ es

$$\{\omega^j + \omega^{3j} + \omega^{4j} + \omega^{5j} + \omega^{7j} : 0 \leq j \leq 7, \omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}\}$$

3. Grafos Circulantes Enteros

Se denomina grafo entero a todo grafo para el cual todos los autovalores de su matriz de adyacencia son números enteros. A continuación daremos algunos resultados debidos a W. So [27] relativos a grafos circulantes enteros.

Los grafos circulantes enteros pueden ser caracterizados por sus símbolos como sigue.

Teorema 2 Sea $G = G(n, S)$ y $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{n})$. Entonces

$$G \text{ es entero} \iff \sum_{s \in S} \omega^{sj} \in \mathbb{Z}$$

para todo $0 \leq j \leq n - 1$.

Como ω^j para $0 \leq j \leq n - 1$ son todas las soluciones de la ecuación $x^n = 1$, la equivalencia anterior se puede escribir como

$$G \text{ es entero} \iff \sum_{s \in S} x^s \in \mathbb{Z}$$

para $x^n = 1$.

Lema 3 Si $x^n = 1$ y $n = dg$ para ciertos $d, g \in \mathbb{Z}$, entonces $\sum_{k=1}^{g-1} (x^d)^k \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Notemos que $0 = x^n - 1 = (x^d)^g - 1 = (x^d - 1)((x^d)^{g-1} + \dots + (x^d)^2 + x^d + 1)$. Si $x^d - 1 = 0$ entonces $x^d = 1$ y así $\sum_{k=1}^{g-1} (x^d)^k = \sum_{k=1}^{g-1} (1)^k = g - 1 \in \mathbb{Z}$. Ahora si $(x^d)^{g-1} + \dots + (x^d)^2 + x^d + 1 = 0$ entonces inmediatamente $\sum_{k=1}^{g-1} (x^d)^k = x^d + (x^d)^2 + \dots + (x^d)^{g-1} = -1$. ■

Usamos la notación $a|b$ para indicar que a es un divisor de b . Para d divisor de n , se definen los conjuntos

$$M_n(d) = \{d, 2d, \dots, n - d\}$$

de todos los posibles múltiplos de d menores que n y

$$G_n(d) = \{k : 1 \leq k \leq n - 1, \text{mcd}(k, n) = d\}$$

de todos los enteros menores que n cuyo máximo común divisor con n es igual a d . Como $\text{mcd}(k, n) = \text{mcd}(n - k, n)$ tenemos que $k \in G_n(d)$ si y sólo si $n - k \in G_n(d)$. Los conjuntos $M_n(d)$ y $G_n(d)$ satisfacen las siguientes propiedades

- $M_n(n) = G_n(n) = \phi$
- $M_n(d) = dM_{\frac{n}{d}}(1)$ y $G_n(d) = dG_{\frac{n}{d}}(1)$.
- La colección $\{G_n(d) : d|n\}$ es una partición de $\{1, 2, \dots, n - 1\}$
- $G_n(d) \subset M_n(d)$.
- $M_n(g) \subset M_n(f)$ si $f|g$ y $g|n$.

De estas propiedades se desprenden el siguiente lema y corolario.

Lema 4 Si $n = dg$ para ciertos $d, g \in \mathbb{Z}$ entonces $M_n(d) = \bigcup_{h|g} G_n(hd)$.

Demostración. Notemos que $G_n(hd) \subset M_n(hd) \subset M_n(d)$ para cualquier $h|g$. Luego $\bigcup_{h|g} G_n(hd) \subset M_n(d)$. Sea $x \in M_n(d)$. Entonces $d|x$. De la hipótesis, se sigue $d|n$. Luego $d|\text{mcd}(x, n)$. Sea $k = \text{mcd}(x, n)$. Entonces $k = dh$ para algún h y $n = ks$ para algún s . Así $dg = n = ks = dhs$. De donde se sigue que $h|g$. Además, $x \in G_n(k)$. En consecuencia $x \in G_n(k) = G_n(hd)$ con $h|g$. Por lo tanto, $M_n(d) \subset \bigcup_{h|g} G_n(hd)$. ■

Corolario 2 Si $n = dg$ para ciertos $d, g \in \mathbb{Z}$, entonces $M_n(d) = G_n(d)$ si y sólo si g es primo.

Demostración. Sea $h|g$. Supongamos g primo. Entonces $h = 1$ o $h = g$. Para $h = 1$ o $h = g$

$$\begin{aligned}
M_n(d) &= \bigcup_{h|g} G_n(hd) \\
&= G_n(d) \cup G_n(gd) \\
&= G_n(d) \cup G_n(n) \\
&= G_n(d) \cup \phi \\
&= G_n(d).
\end{aligned}$$

Recíprocamente, sea $M_n(d) = G_n(d)$. Usando el lema anterior $G_n(d) = \bigcup_{h|g} G_n(hd)$. De donde, se sigue que g no puede tener divisores distintos de g y 1 . Entonces g es primo. ■

El siguiente teorema puede ser demostrado mediante inducción haciendo uso del Lema 3 y Corolario 2.

Teorema 3 Sean $n > d_1 > d_2 > \dots > d_s = 1$ todos los divisores propios de n . Si $x^n = 1$ entonces $\sum_{k \in G_n(d_i)} x^k \in \mathbb{Z}$ para cada $i = 1, 2, \dots, s$.

Demostración. Para cualquier d_i divisor de n , del Lema 3 tenemos que

$$\sum_{k \in M_n(d_i)} x^k = \sum_{k \in \{d_i, 2d_i, \dots, n-d_i\}} x^k = \sum_{l=1}^{g_i-1} (x^{d_i})^l \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

donde $n = d_i g_i$. Como d_1 es el divisor propio más grande de n , $g_1 = n/d_1$ es primo. Del Corolario anterior tenemos $\sum_{k \in G_n(d_1)} x^k = \sum_{k \in M_n(d_1)} x^k = \sum_{k \in \{d_1, 2d_1, \dots, n-d_1\}} x^k = \sum_{l=1}^{g_1-1} (x^{d_1})^l \in \mathbb{Z}$. Supongamos $\sum_{k \in G_n(d_1)} x^k, \dots, \sum_{k \in G_n(d_i)} x^k \in \mathbb{Z}$ para $i < s$. Por demostrar

$$\sum_{k \in G_n(d_{i+1})} x^k \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Como $n = d_{i+1}g_{i+1}$ para algún g_{i+1} , del corolario anterior tenemos que

$$M_n(d_{i+1}) = \bigcup_{h|g_{i+1}} G_n(hd_{i+1})$$

Sea $h|g_{i+1}$ con $h > 1$. Entonces $n = d_{i+1}g_{i+1} = d_{i+1}ht$ para cierto entero t . Luego $d_{i+1}h$ divide a n . Así entonces $hd_{i+1} = d_j$ para algún $j < i + 1$. Luego, usando la hipótesis de inducción, tenemos

$$\sum_{h>1, h|g_{i+1}} \left[\sum_{k \in G_n(hd_{i+1})} x^k \right] \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

De la igualdad

$$\sum_{k \in M_n(d_{i+1})} x^k = \sum_{k \in G_n(1 \cdot d_{i+1})} x^k + \sum_{h>1, h|g_{i+1}} \left[\sum_{k \in G_n(hd_{i+1})} x^k \right]$$

podemos escribir

$$\sum_{k \in G_n(d_{i+1})} x^k = \sum_{k \in M_n(d_{i+1})} x^k - \sum_{h>1, h|g_{i+1}} \left[\sum_{k \in G_n(hd_{i+1})} x^k \right].$$

Usando (5) y (7) se sigue (6). ■

Un resultado inmediato del teorema anterior es

Corolario 3 *Si S es la unión de conjuntos $G_n(d)$ donde $d|n$ y $d < n$ entonces G es un grafo circulante entero.*

El corolario anterior nos da una condición suficiente para que un grafo circulante sea entero.

Las sumas de Ramanujan son definidas como

$$c(n, j) = \sum_{s \in G_n(1)} \omega^{js}$$

para $j \in \mathbb{Z}$.

Recordamos que la función de Euler de un entero positivo m es la cardinalidad del conjunto

$$\varphi(m) = |G_m(1)|$$

de todos los primos relativos con m . Además recordamos que la función de Möbius $\mu(m)$ de un entero positivo m está definida por

$$\mu(m) = \begin{cases} 0, & m \text{ tiene factores primos repetidos;} \\ 1, & m = 1; \\ (-1)^k, & m \text{ es un producto de } k \text{ factores primos distintos} \end{cases}$$

Es importante observar que $c(n, 0) = |G_n(1)| = \varphi(n)$.

La suma de Ramanujan satisface la siguiente igualdad

$$c(n, j) = \sum_{r|mcd(n,j)} r \mu\left(\frac{n}{r}\right) = \frac{\varphi(n)}{\varphi(n/mcd(n,j))} \mu\left(\frac{n}{mcd(n,j)}\right) \in \mathbb{Z}.$$

La importancia de las sumas de Ramanujan radica en el hecho que ellas permiten expresar explícitamente el espectro de los grafos circulares enteros.

Teorema 4 *Sea G un grafo circular de n vértices con símbolo $S = G_n(d)$ donde d es un divisor propio de n . Entonces*

$$\lambda_j(G) = c(n/d, j)$$

para $1 \leq j \leq n - 1$.

Demostración. Recordemos que $G_n(d) = dG_{n/d}(1)$. Luego, para $1 \leq t \leq n-1$,

$$\begin{aligned}
\lambda_j(G) &= \sum_{k \in G_n(d)} (\omega^j)^k = \sum_{k \in dG_{n/d}(1)} (\omega^j)^k \\
&= \sum_{k \in G_{n/d}(1)} (\omega^j)^{dk} = \sum_{k \in G_{n/d}(1)} ((\omega^d)^j)^k \\
&= \sum_{k \in G_{n/d}(1)} ((\alpha)^j)^k \\
&= c(n/d, j)
\end{aligned}$$

donde $\alpha = \omega^d = e^{\frac{2\pi id}{n}} = e^{\frac{2\pi i}{n/d}}$ ■

Para $n \geq 2$ fijo, sea $d|n$ y $d < n$. Denotamos por \mathbf{v}_d al vector $(n-1)$ -dimensional con 1 en la j -ésima entrada para todo $j \in G_n(d)$ y 0 en el resto de las entradas. Sea F la matriz de orden $n-1$ con entradas $F_{st} = \omega^{st}$ donde $\omega = e^{2\pi i/n}$. Notamos que F es invertible. Además, usando (4), podemos concluir $F\mathbf{v}_d = [\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}]^T \in \mathbb{Z}^{n-1}$. Entonces $\mathbf{v}_d \in \mathcal{A}$ donde \mathcal{A} es el espacio vectorial $\mathcal{A} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{Q}^{n-1} : F\mathbf{v} \in \mathbb{Q}^{n-1}\}$ sobre \mathbb{Q} .

Ejemplo 7 Para $n = 10$, $D_{10} = \{1, 2, 5\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= [1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1]^T \\
\mathbf{v}_2 &= [0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0]^T \\
\mathbf{v}_5 &= [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]^T
\end{aligned}$$

Este ejemplo ilustra un resultado general: Si d_1 y d_2 son divisores distintos de n entonces \mathbf{v}_{d_1} y \mathbf{v}_{d_2} no tienen entradas iguales a 1 en las mismas componentes. Este resultado general es una consecuencia inmediata de $G_n(d_1) \cap G_n(d_2) = \phi$.

Recordamos que el polinomio ciclotómico $\Phi_n(x)$ es el polinomio irreducible en \mathbb{Q} cuyas raíces son las soluciones de la ecuación $x^n = 1$.

Lema 5 Si $\mathbf{v} \in \mathcal{A}$, entonces $F\mathbf{v} \in \text{Span}\{\mathbf{v}_d : d|n, d < n\}$.

Demostración. Sean $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_{n-1}]^T$ y $\mathbf{u} = F\mathbf{v} = [u_1, u_2, \dots, u_{n-1}]^T$. Es suficiente probar que $u_s = u_t$ para $\text{mcd}(s, n) = \text{mcd}(t, n)$. Sea $d = \text{mcd}(s, n) = \text{mcd}(t, n)$. Entonces $1 = \text{mcd}(s/d, n/d) = \text{mcd}(t/d, n/d)$. Luego ω^s y ω^t son raíces de la ecuación $x^{\frac{n}{d}} = 1$. De la hipótesis, $u_s = \sum_{j=1}^{n-1} v_j \omega^{sj} \in \mathbb{Q}$. De donde ω^s es raíz del polinomio con coeficientes racionales

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n-1} v_j x^j - u_s.$$

Luego del Teorema de irreducibilidad de Abel, $p(x)$ es un múltiplo del polinomio

$$\Phi_{n/d}(x)$$

y así, ω^t también es raíz de $p(x)$. Es decir, $p(\omega^t) = u_t - u_s = 0$. ■

Lema 6 $\mathcal{A} = \text{Span}\{\mathbf{v}_d : d|n, d < n\}$

Demostración. Por el lema anterior

$$F(\mathcal{A}) \subset \text{Span}\{\mathbf{v}_d : d|n, d < n\} \subset \mathcal{A}.$$

Como F es invertible, $\dim F(\mathcal{A}) = \dim \mathcal{A}$. En consecuencia,

$$F(\mathcal{A}) = \text{Span}\{\mathbf{v}_d : d|n, d < n\} = \mathcal{A}.$$

■

Se sigue que $\{\mathbf{v}_d : d|n, d < n\}$ es un conjunto generador de \mathcal{A} . Además $\{\mathbf{v}_d : d|n, d < n\}$ es un conjunto linealmente independiente en \mathcal{A} ya que los conjuntos $G_n(d)$ son disjuntos. Luego tenemos

Corolario 4 $\{\mathbf{v}_d : d|n, d < n\}$ es una base del espacio vectorial \mathcal{A} .

Estamos en condiciones de probar una condición necesaria y suficiente para que un grafo circulante sea entero. Recordamos que la suficiencia ya fue probada en el Corolario 3.

Teorema 5 Un grafo circulante $G = G(n; S)$ sobre n vértices con símbolo S es entero si y sólo si

$$S = \bigcup_{d \in D} G_n(d)$$

para algún conjunto divisor $D \subseteq D_n$, donde D_n es el conjunto de todos los divisores propios d del entero n .

Demostración. Consideremos un vector \mathbf{v} de orden $n-1$ con 1 en la j -ésima entrada si $j \in S$ y 0 en otro caso. Como G es circulante entero, $F\mathbf{v} = [\lambda_1(G) \cdots \lambda_{n-1}(G)]^T \in \mathbb{Z}^{n-1}$ y entonces $\mathbf{v} \in \mathcal{A}$. Del Corolario 4,

$$\mathbf{v} = \sum_{d|n, d < n} c_d \mathbf{v}_d.$$

Como \mathbf{v} y \mathbf{v}_d son vectores con entradas 1 ó 0 y los vectores \mathbf{v}_d no tienen entradas iguales a 1 en las mismas componentes, las constantes c_d deben ser 1 ó 0. En consecuencia, S es unión de $G_n(d)$ para aquellos $c_d = 1$. ■

Entonces usando el Teorema 4 los autovalores λ_j , $0 \leq j \leq n-1$ de grafos circulantes enteros pueden ser expresados usando la función de Ramanujam como sigue

$$\lambda_j = \sum_{f \in F} c(f, j).$$

donde $F = \{n/d : d \in D\}$. De la fórmula de Ramanujan concluimos que los autovalores de $G = G(n; S)$ son,

$$\lambda_j = \sum_{f \in F} \varphi(f) \frac{\mu(f/\text{mcd}(f, j))}{\varphi(f/\text{mcd}(f, j))} \quad (8)$$

para $0 \leq j \leq n - 1$. Además, como $\text{mcd}(f, i) = \text{mcd}(f, n - i)$, tenemos

$$\frac{f}{\text{mcd}(f, i)} = \frac{f}{\text{mcd}(f, n - i)}$$

para $f \in F$, $1 \leq i \leq n - 1$. De (8) se sigue que los autovalores λ_i y λ_{n-i} son iguales para $1 \leq i \leq n - 1$.

La cardinalidad del conjunto $G_n(d)$ es

$$|G_n(d)| = |dG_{n/d}(1)| = |G_{n/d}(1)| = \varphi(n/d).$$

Usando este resultado en el Teorema 5 obtenemos

$$k = \sum_{f \in F} \varphi(f) \quad (9)$$

donde $k = |S|$ y $F = \{n/d : d \in D\}$.

Ejemplo 8 Sea $n = 8$. Entonces $D_8 = \{1, 2, 4\}$, $G_8(1) = \{k : \text{mcd}(8, k) = 1\} = \{1, 3, 5, 7\}$, $G_8(2) = \{k : \text{mcd}(8, k) = 2\} = \{2, 6\}$, $G_8(4) = \{k : \text{mcd}(8, k) = 4\} = \{4\}$. El conjunto $S = \{1, 4, 7\}$ no genera un grafo circulante entero puesto que no se puede formar como una unión de los conjuntos dados anteriormente. En cambio $S = \{1, 3, 4, 5, 7\}$ define un grafo circulante entero pues $S = G_8(1) \cup G_8(4)$ para $D = \{1, 4\}$. Además este grafo es 5-regular pues $F = \{8/1, 8/4\} = \{8, 2\}$ y

$$k = \varphi(8) + \varphi(2) = |\{1, 3, 5, 7\}| + |\{1\}| = 5.$$

En este punto recordamos que si M es una matriz no negativa e irreducible, entonces su radio espectral es un autovalor simple de M . Por lo tanto, si G es un grafo conectado entonces $\rho(A(G))$ es un autovalor de $A(G)$. Estamos en condiciones de recordar que un grafo conectado es bipartito si y sólo si $-\rho(A(G))$ es también un autovalor de $A(G)$.

El uso de la ecuación (8) nos permitirá encontrar una condición necesaria y suficiente para que un grafo circulante entero sea bipartito.

Teorema 6 [26, Theorem 3] *Un grafo circulante entero $G = G(n; S)$ sobre n vértices con símbolo S es bipartito si y sólo si n es par y $S = \bigcup_{f \in F} G_n(n/f)$, donde para algún número l_0 , el conjunto $\{2l_0/f : f \in F\}$ contiene solo enteros impares.*

Demostración. Podemos suponer que G es un grafo k -regular. Entonces el radio espectral de $A(G)$ es igual a k . Supongamos G bipartito. Entonces $-k$ es un autovalor de G , esto es,

$$-k = \sum_{f \in F} \varphi(f) \frac{\mu(f/\text{mcd}(f, l))}{\varphi(f/\text{mcd}(f, l))} \quad (10)$$

para algún l . Usando (9) vemos que la ecuación (10) ocurre sólo si

$$\mu\left(\frac{f}{\text{mcd}(f, l)}\right) = -1 \quad (11)$$

y

$$\varphi\left(\frac{f}{\text{mcd}(f, l)}\right) = 1 \quad (12)$$

para todo $f \in F$. De (12)

$$\frac{f}{\text{mcd}(f, l)} \in \{1, 2\} \quad (13)$$

para todo $f \in F$. Además de (11) se sigue

$$\frac{f}{\text{mcd}(f, l)} = 2$$

para todo $f \in F$. Supongamos $2l/f = 2t$ para algún t . Entonces $l = tf$. Luego $\frac{f}{\text{mcd}(f, l)} = 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $2l/f$ es impar para algún l .

Por otro lado, supongamos $2l_0/f$ impar para cierto l_0 y $f \in F$. Es decir, $2l_0/f = 2s + 1$ para algún s . Luego f es par. Entonces

$$\frac{f}{\text{mcd}(f, l_0)} = \frac{f}{f/2} = 2.$$

En consecuencia, el l_0 -ésimo autovalor es:

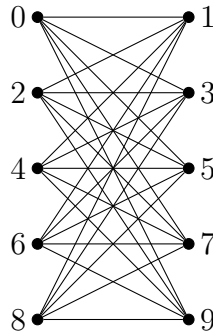
$$\begin{aligned} \lambda_{l_0} &= \sum_{f \in F} \varphi(f) \frac{\mu(f/\text{mcd}(f, l_0))}{\varphi(f/\text{mcd}(f, l_0))} \\ &= \sum_{f \in F} \varphi(f) \frac{\mu(2)}{\varphi(2)} = \sum_{f \in F} \varphi(f)(-1) = -k \end{aligned}$$

Luego, G es bipartito y el teorema está probado. ■

Ejemplo 9 Sea $n = 10$. Entonces $D_{10} = \{1, 2, 5\}$. Sea $D = \{1, 5\}$. Luego $F = \{10, 2\}$ y

$$S = G_{10}(10/10) \cup G_{10}(10/2) = \{1, 3, 7, 9\} \cup \{5\}$$

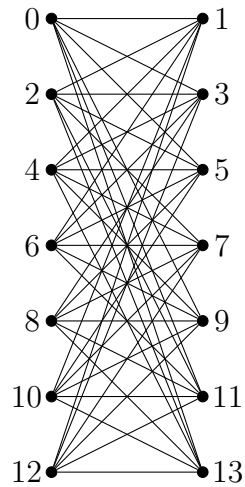
Para $l_0 = 15$ el conjunto $\{2l_0/10, 2l_0/2\} = \{l_0/5, l_0\}$ es igual a $\{3, 15\}$ el cual contiene solo enteros impares. Así entonces S nos define un grafo circulante entero bipartito:



Ejemplo 10 Sea $n = 14$. Entonces $D_{14} = \{1, 2, 7\}$ y escogemos $D = \{1\}$. Luego $F = \{14\}$ y

$$S = G_{14}(14/14) = \{1, 3, 5, 9, 11, 13\}$$

Para $l_0 = 21$ tenemos $\{2(21)/14\} = 3$. Por lo tanto, el siguiente grafo es circulante entero bipartito.



4. Una familia infinita de grafos bipartitos enteros como copias de un grafo circulante entero bipartito

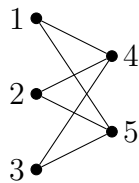
En esta sección comenzamos presentando un procedimiento sugerido por el profesor Oscar Rojo, para construir una sucesión infinita de grafos enteros bipartitos a partir de un grafo entero bipartito dado. En particular, aplicamos este procedimiento a un grafo circulante entero bipartito para obtener una nueva familia de grafos enteros semi-regulares.

Sea 0 la matriz con entradas iguales a cero de orden apropiado. Sea G un grafo bipartito de n vértices y sea $r \geq 2$ un entero. El conjunto de vértices de G puede ser dividido en dos conjuntos disjuntos V_1 con n_1 vértices y V_2 con n_2 vértices tal que cada lado del grafo conecta un vértice en V_1 con uno en V_2 . Claramente $n = n_1 + n_2$. Etiquetando los vértices en V_1 por $1, 2, \dots, n_1$ y los vértices en V_2 por $n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2$, la matriz de adyacencia de G es de la forma

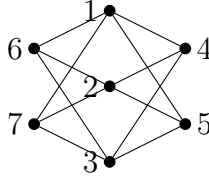
$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$$

donde B es una matriz de orden $n_1 \times n_2$. Sea G_r el grafo obtenido de r copias de G identificando los vértices en el conjunto V_1 .

Ejemplo 11 Para el grafo G



tenemos $V_1(G) = \{1, 2, 3\}$ y $V_2(G) = \{4, 5\}$. Entonces el grafo G_2 es



con matriz de adyacencia

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observemos que G_2 es un grafo bipartito semi-regular con $3 + 2 \cdot 2$ vértices.

El teorema principal en esta sección es

Teorema 7 λ es un autovalor no nulo de G si y sólo si $\mu = \sqrt{r}\lambda$ es un autovalor no nulo de G_r .

Demostración. Etiquetando los vértices en V_1 por $1, 2, \dots, n_1$ y los restantes vértices por $n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + r \cdot n_2$, la matriz de adyacencia de G_r es

$$A(G_r) = \begin{bmatrix} 0 & B & \cdots & B \\ B^T & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B^T & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea μ un autovalor no nulo de G_r . Entonces

$$\begin{bmatrix} 0 & B & \cdots & B \\ B^T & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B^T & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_r \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_r \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ó $\mathbf{y}_i \neq \mathbf{0}$ para algún i . Luego

$$\begin{aligned} B\mathbf{y}_1 + B\mathbf{y}_2 + \dots + B\mathbf{y}_r &= \mu\mathbf{x} \\ B^T\mathbf{x} &= \mu\mathbf{y}_i \quad (1 \leq i \leq r). \end{aligned}$$

Se sigue

$$\mu(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j) = \mathbf{0} \text{ para } i \neq j.$$

Luego, como $\mu \neq 0$, $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 = \dots = \mathbf{y}_r = \mathbf{y}$. Por lo tanto, $rB\mathbf{y} = \mu\mathbf{x}$. Afirmamos $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. En efecto, si $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $\mu\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Como $\mu \neq 0$, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, lo cual es una contradicción. En consecuencia

$$\begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \sqrt{r}\mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{r}B\mathbf{y} \\ B^T\mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r}}\mu\mathbf{x} \\ \mu\mathbf{y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{r}}\mu \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \sqrt{r}\mathbf{y} \end{bmatrix}.$$

Esto prueba que $\lambda = \frac{1}{\sqrt{r}}\mu$ es un autovalor de G . Por otro lado, sea λ un autovalor no nulo de G . Entonces existe $[\mathbf{x} \ \mathbf{z}]^T \neq [\mathbf{0} \ \mathbf{0}]^T$ tal que

$$\begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}.$$

Afirmamos $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. En efecto si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Además, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ implica $B\mathbf{z} = \mathbf{0}$ y $\lambda\mathbf{z} = \mathbf{0}$. De esta última igualdad se sigue $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ pues $\lambda \neq 0$, lo

cual es una contradicción. Luego $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Además si $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $B\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Como $\lambda \neq 0$, la última ecuación implica $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, lo cual es una contradicción. Luego

$$\begin{bmatrix} 0 & B & \cdots & B \\ B^T & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B^T & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{z} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{r}B\mathbf{z} \\ B^T\mathbf{x} \\ \vdots \\ B^T\mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\sqrt{r}\mathbf{x} \\ \lambda\mathbf{z} \\ \vdots \\ \lambda\mathbf{z} \end{bmatrix} = \sqrt{r}\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{z} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{z} \end{bmatrix}.$$

y así $\mu = \sqrt{r}\lambda$ es un autovalor no nulo de G_r . ■

Los siguientes corolarios son consecuencias inmediatas del Teorema 7.

Corolario 5 *Si G es un grafo entero bipartito y r es un cuadrado perfecto entonces G_r es un grafo entero bipartito.*

Sea G un grafo bipartito s -regular. Claramente los grados de los vértices en V_1 como vértices de G_r tienen un grado igual a rs y los restantes vértices de G_r tienen un grado igual a s . Esto es, si G es un grafo bipartito regular entonces G_r es un grafo bipartito semi-regular.

Corolario 6 *Si G es un grafo circulante entero bipartito entonces $\{G_{k^2}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión infinita de grafos enteros bipartitos semi-regulares.*

5. Grafos circulantes enteros hiperenergéticos y grafos circulantes enteros equienergéticos

Definición 2 La energía de un grafo G fue definida como la suma de los valores absolutos de sus autovalores. Esto es,

$$E(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$$

Este concepto fue introducido por Ivan Gutman en 1978 [18] y es un parámetro derivado de la aproximación orbital molecular de Hückel para la energía π -electron total.

Claramente la energía del grafo completo de orden n es $2n - 2$. De esto surge la pregunta: ¿Existen grafos de orden n cuya energía sea mayor a $2n - 2$? En un comienzo se pensó que no existían tales grafos y se propuso la conjetura que todo grafo tiene energía a lo más de $2n - 2$ en [18]. Pero en el artículo [30] se refutó tal conjetura. En los argumentos usados para refutar esta conjetura, los grafos circulantes enteros juegan un papel crucial.

Un grafo G se dice hiperenergético si su energía $E(G) > 2n - 2$. En el corolario 7, de más abajo, se muestran algunos grafos con esta característica. A continuación mostramos algunos resultados referidos a la energía de grafos circulantes enteros extraídos de los artículos [22] y [23].

Sea $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, donde $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ son primos distintos, y $\alpha_i \geq 1$.

Teorema 8 La energía de $G(n, S)$ donde $S = G_n(1)$ es igual a $2^k \varphi(n)$.

Ejemplo 12 Sea $n = 12 = 2^2 \cdot 3$. Entonces $k = 2$ y

$$E(G(12, G_{12}(1))) = 2^2 \varphi(12) = 2^2 \cdot 4 = 16.$$

De hecho, los autovalores de este grafo son $\{-4, -2, -2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 4\}$, luego su energía es 16.

Lema 7 Si $k > 2$ ó $k = 2$ y $p_1 > 2$, la siguiente desigualdad se cumple

$$2^{k-1}\varphi(n) > n.$$

El uso del Teorema 8 y del Lema 7 permite obtener una condición necesaria y suficiente para que un grafo circulante entero con $S = G_n(1)$ sea hiperenergético.

Corolario 7 El grafo $G(n, S)$ donde $S = G_n(1)$ es hiperenergético si y solo si $k > 2$ o $k = 2$ y $p_1 > 2$, donde k es el número de factores primos distintos que dividen a n .

Demostración. Del Teorema 8 y del Lema 7, tenemos

$$\begin{aligned} E(G(n, S)) &= 2^k\varphi(n) \\ &= 2 \cdot 2^{k-1}\varphi(n) \\ &> 2n > 2(n-1). \end{aligned}$$

■

Ejemplo 13 Sea $n = 15 = 3 \cdot 5$. Entonces $p_1 = 3$ y $k = 2$. Así tenemos

$$E(15, G_{15}(1)) = 2^2\varphi(15) = 32,$$

lo cual es mayor que $2(15 - 1) = 28$.

Los siguientes resultados nos entregan información acerca de grafos circulantes enteros, no coespectrales, con la misma energía.

Teorema 9 *Sea n un entero sin cuadrados, $n = p_1 p_2 \dots p_k$. Entonces la energía del grafo circulante entero $G(n, S)$ donde $S = G_n(p_i) \cup G_n(p_j)$ no depende de la elección de p_i y p_j ,*

$$E(G(n, S)) = 2^k \varphi(n) = 2^k \prod_{i=1}^k (p_i - 1)$$

Los teoremas anteriores permiten construir al menos k grafos circulantes enteros, no coespectrales, equienergéticos de n vértices:

$$G(n; G_n(1)), G(n; G_n(p_1) \cup G_n(p_2)), \dots, G(n; G_n(p_1) \cup G_n(p_k)).$$

Uno puede verificar después de un trabajo laborioso que si $n = 2pq$ donde $p > q > 2$ son números primos arbitrarios entonces los grafos

$$G_n = G(2pq, S), S = G_n(1) \cup G_n(2).$$

$$H_n = G(2pq, S), S = G_n(p) \cup G_n(2p) \cup G_n(q) \cup G_n(2q).$$

son equienergéticos con energía igual a $8(p-1)(q-1)$.

6. Producto completo de grafos circulantes

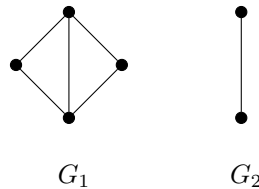
A lo largo de esta sección consideramos \mathbf{e}_n como el vector de unos de orden n .

6.1. Resultados generales del producto completo de grafos regulares

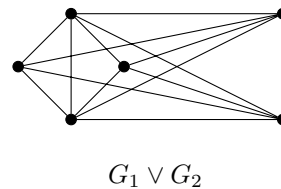
La siguiente definición de producto completo se puede encontrar en [14].

Definición 3 Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos con $V_1 \cap V_2 = \phi$. El producto completo de G_1 y G_2 es el grafo $G_1 \vee G_2$ definido por $G_1 \cup G_2$ más los lados que unen cada vértice de G_1 con cada vértice de G_2 .

Ejemplo 14 Consideremos los siguientes grafos



El producto completo de estos grafos es



con matriz de adyacencia

$$A(G_1 \vee G_2) = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A(G_1) & \mathbf{e}_4 \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_4^T & A(G_2) \end{bmatrix}$$

En general etiquetando los vértices de $G_1 \vee G_2$ con $1, 2, \dots, n_1$ para los vértices de G_1 y con $n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2$ para los vértices de G_2 , la matriz de adyacencia de $G_1 \vee G_2$ está dada por

$$\begin{bmatrix} A(G_1) & \mathbf{e}_{n_1} \mathbf{e}_{n_2}^T \\ \mathbf{e}_{n_2} \mathbf{e}_{n_1}^T & A(G_2) \end{bmatrix}.$$

Lema 8 Sean G_1 un grafo r_1 -regular y G_2 un grafo r_2 -regular. Entonces

$$(\sigma(A(G_1)) - \{r_1\}) \cup (\sigma(A(G_2)) - \{r_2\}) \subseteq \sigma(A(G_1 \vee G_2))$$

Demostración. Sea $(\lambda_1, \mathbf{u}_1)$ un autopar de $A(G_1)$ con $\lambda_1 \neq r_1$ y $(\lambda_2, \mathbf{u}_2)$ un autopar de $A(G_2)$ con $\lambda_2 \neq r_2$. Entonces $\mathbf{e}_{n_1}^T \mathbf{u}_1 = 0$ y $\mathbf{e}_{n_2}^T \mathbf{u}_2 = 0$. Luego

$$\begin{aligned} A(G_1 \vee G_2) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A(G_1) & \mathbf{e}_{n_1} \mathbf{e}_{n_2}^T \\ \mathbf{e}_{n_2} \mathbf{e}_{n_1}^T & A(G_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A(G_1) \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Luego λ_1 es un autovalor de $G_1 \vee G_2$. Similarmente,

$$A(G_1 \vee G_2) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix},$$

lo cual demuestra que λ_2 es un autovalor de $G_1 \vee G_2$. ■

Definamos la siguiente matriz simétrica

$$F_2 = \begin{bmatrix} r_1 & \sqrt{n_1 n_2} \\ \sqrt{n_1 n_2} & r_2 \end{bmatrix}.$$

Los autovalores de F_2 son

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{(r_1 + r_2) + \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + 4n_1 n_2}}{2} \\ \beta_2 &= \frac{(r_1 + r_2) - \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + 4n_1 n_2}}{2}. \end{aligned}$$

Lema 9

$$\sigma(F_2) \subseteq \sigma(A(G_1 \vee G_2)).$$

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma(F_2)$. Entonces

$$\begin{bmatrix} r_1 & \sqrt{n_1 n_2} \\ \sqrt{n_1 n_2} & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

para algún $[\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2]^T \neq [\mathbf{0} \ \mathbf{0}]^T$. Afirmamos que $\lambda \in \sigma(A(G))$ con autovector asociado $[\mathbf{x}_1 \mathbf{e}_{n_1} \ \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \mathbf{x}_2 \mathbf{e}_{n_2}]^T$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} A(G_1) & \mathbf{e}_{n_1}\mathbf{e}_{n_2}^T \\ \mathbf{e}_{n_2}\mathbf{e}_{n_1}^T & A(G_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1\mathbf{e}_{n_1} \\ \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}x_2\mathbf{e}_{n_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r_1x_1\mathbf{e}_{n_1} + n_2\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}x_2\mathbf{e}_{n_1} \\ n_1x_1\mathbf{e}_{n_2} + r_2\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}x_2\mathbf{e}_{n_2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (r_1x_1 + \sqrt{n_1n_2}x_2)\mathbf{e}_{n_1} \\ \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}(\sqrt{n_1n_2}x_1 + r_2x_2)\mathbf{e}_{n_2} \end{bmatrix} \\
&= \lambda \begin{bmatrix} x_1\mathbf{e}_{n_1} \\ \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}x_2\mathbf{e}_{n_2} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de (14). ■

Del Lema 8 y Lema 9 se sigue

Teorema 10 Sean G_1 un grafo r_1 -regular y G_2 un grafo r_2 -regular. Entonces

$$\sigma(A(G_1 \vee G_2)) = (\sigma(A(G_1)) - \{r_1\}) \cup (\sigma(A(G_2)) - \{r_2\}) \cup \sigma(F_2)$$

Buscamos una base de autovectores ortogonales de $A(G_1 \vee G_2)$. Comenzamos buscando los autovectores de F_2 . Tenemos que

$$\beta_1 + \beta_2 = r_1 + r_2 \quad y \quad \beta_1\beta_2 = r_1r_2 - n_1n_2 \quad (15)$$

De la ecuación

$$\begin{bmatrix} r_1 & \sqrt{n_1n_2} \\ \sqrt{n_1n_2} & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$$

Obtenemos $x = \frac{\beta_1 - r_1}{\sqrt{n_1n_2}}$. Entonces $\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\beta_1 - r_1}{\sqrt{n_1n_2}} \end{bmatrix}^T$ es un autovector para el autovalor β_1 de F_2 . Similarmente $\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\beta_2 - r_1}{\sqrt{n_1n_2}} \end{bmatrix}^T$ es un autovector para el autovalor β_2 de F_2 .

Usando (15)

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1^T \mathbf{f}_2 &= 1 + \frac{(\beta_1 - r_1)(\beta_2 - r_1)}{n_1 n_2} \\ &= \frac{n_1 n_2 + \beta_1 \beta_2 - r_1(\beta_1 + \beta_2) + r_1^2}{n_1 n_2} = 0\end{aligned}$$

Luego \mathbf{f}_1 y \mathbf{f}_2 son autovectores ortogonales de F_2 . Para $i = 1, 2$, sean

$$\mathbf{u}_1^{(i)} = \mathbf{e}_{n_i}, \mathbf{u}_2^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{n_i}^{(i)}$$

vectores ortogonales de la matriz $A(G_i)$. De las demostraciones de los lemas anteriores tenemos que las columnas de la matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_2^{(1)} & \dots & \mathbf{u}_{n_1}^{(1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{e}_{n_1} & \mathbf{e}_{n_1} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{u}_2^{(2)} & \dots & \mathbf{u}_{n_2}^{(2)} & \frac{\beta_1 - r_1}{\sqrt{n_1 n_2}} \mathbf{e}_{n_2} & \frac{\beta_2 - r_1}{\sqrt{n_1 n_2}} \mathbf{e}_{n_2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

son los autovectores ortogonales de $A(G_1 \vee G_2)$.

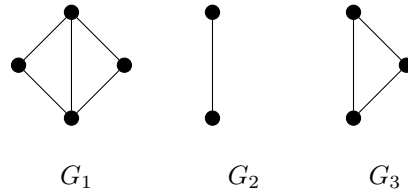
En general el producto completo se define como

Definición 4 Sea $k \geq 2$. Sea H un grafo de orden k . Sean G_1, G_2, \dots, G_k grafos disjuntos simples no dirigidos. El producto completo sobre H de G_1, G_2, \dots, G_k es el grafo $G = \bigvee_H \{G_j : 1 \leq j \leq k\}$ obtenido de los grafos G_1, G_2, \dots, G_k al conectar los vértices de G_i con los vértices de G_j para todo $\{i, j\} \in E(H)$. Es decir, $V(G) = \bigcup_{i=1}^k V(G_i)$ y

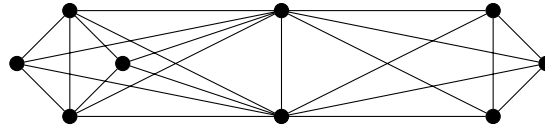
$$E(G) = \left(\bigcup_{i=1}^k E(G_i) \right) \cup \left(\bigcup_{\{i,j\} \in E(H)} \{\{u, v\} : u \in V(G_i), v \in V(G_j)\} \right)$$

Ejemplo 15 Sea $k = 3$. Sea H el grafo de orden 3 con $E(H) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$.

Consideremos los siguientes grafos



El producto completo sobre H está dado por



cuya matriz de adyacencia asociada es

$$A(G) = \begin{bmatrix} A(G_1) & \mathbf{e}_4 \mathbf{e}_2^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_4^T & A(G_2) & \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2^T & A(G_3) \end{bmatrix}.$$

Etiquetamos los vértices del producto completo sobre H con la etiquetas $1, 2, \dots, \sum_{i=1}^k n_i$ comenzando con los vértices de G_1 continuando con los vértices de G_2, G_3, \dots, G_{k-1} y finalizando con G_k . Sea

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \{i, j\} \in E(H) \\ 0 & , \text{ otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 16 Para el ejemplo anterior, tenemos que $\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{32} = 1$, $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$

En general, la matriz de adyacencia del producto completo sobre H es

$$A(G) = \begin{bmatrix} A(G_1) & \delta_{12}\mathbf{e}_{n_1}\mathbf{e}_{n_2}^T & \delta_{13}\mathbf{e}_{n_1}\mathbf{e}_{n_3}^T & \dots & \delta_{1k}\mathbf{e}_{n_1}\mathbf{e}_{n_k}^T \\ \delta_{12}\mathbf{e}_{n_2}\mathbf{e}_{n_1}^T & A(G_2) & \delta_{23}\mathbf{e}_{n_2}\mathbf{e}_{n_3}^T & \dots & \delta_{2k}\mathbf{e}_{n_2}\mathbf{e}_{n_k}^T \\ \delta_{13}\mathbf{e}_{n_3}\mathbf{e}_{n_1}^T & \delta_{23}\mathbf{e}_{n_3}\mathbf{e}_{n_2}^T & A(G_3) & \dots & \delta_{3k}\mathbf{e}_{n_3}\mathbf{e}_{n_k}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{1k}\mathbf{e}_{n_k}\mathbf{e}_{n_1}^T & \delta_{2k}\mathbf{e}_{n_k}\mathbf{e}_{n_2}^T & \delta_{3k}\mathbf{e}_{n_k}\mathbf{e}_{n_3}^T & \dots & A(G_k) \end{bmatrix} \quad (17)$$

Los siguientes resultados son dados para grafos G_i cada uno de ellos r_i -regular. Entonces r_i es un autovalor de $A(G_i)$ con autovector asociado \mathbf{e}_{n_i} .

Lema 10

$$\bigcup_{i=1}^k (\sigma(A(G_i)) - \{r_i\}) \subseteq \sigma(A(G))$$

Demostración. Sea $(\lambda_i, \mathbf{u}_i)$ un autopar de $A(G_i)$ con $\lambda_i \neq r_i$. Entonces $\mathbf{e}_{n_i}^T \mathbf{u}_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$. Recordemos que $A(G)$ tiene la forma (17). Tenemos

$$A(G) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(G_1)\mathbf{u}_1 \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Luego $\lambda_1 \in \sigma(A(G))$. Similarmente, $\lambda_i \in \sigma(A(G))$ para todo $i = 2, 3, \dots, k$. ■

Definamos la siguiente matriz simétrica

$$F_k = \begin{bmatrix} r_1 & \delta_{12}\sqrt{n_1n_2} & \delta_{13}\sqrt{n_1n_3} & \dots & \delta_{1k}\sqrt{n_1n_k} \\ \delta_{12}\sqrt{n_1n_2} & r_2 & \delta_{23}\sqrt{n_2n_3} & \dots & \delta_{2k}\sqrt{n_2n_k} \\ \delta_{13}\sqrt{n_1n_3} & \delta_{23}\sqrt{n_2n_3} & r_3 & \dots & \delta_{3k}\sqrt{n_3n_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{1k}\sqrt{n_1n_k} & \delta_{2k}\sqrt{n_2n_k} & \delta_{3k}\sqrt{n_3n_k} & \dots & r_k \end{bmatrix}$$

Lema 11

$$\sigma(F_k) \subseteq \sigma(A(G)).$$

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma(F_k)$ con autovector asociado $[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_k]^T$. Afirmamos que $\lambda \in \sigma(A(G))$ con autovector asociado $\left[x_1 \mathbf{e}_{n_1} \ \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} x_2 \mathbf{e}_{n_2} \ \dots \ \sqrt{\frac{n_1}{n_k}} x_k \mathbf{e}_{n_k} \right]^T$. En efecto,

$$\begin{aligned} A(G) \begin{bmatrix} x_1 \mathbf{e}_{n_1} \\ \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} x_2 \mathbf{e}_{n_2} \\ \vdots \\ \sqrt{\frac{n_1}{n_k}} x_k \mathbf{e}_{n_k} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r_1 x_1 \mathbf{e}_{n_1} + \delta_{12} \sqrt{n_1 n_2} x_2 \mathbf{e}_{n_1} + \delta_{13} \sqrt{n_1 n_3} x_3 \mathbf{e}_{n_1} + \dots + \delta_{1k} \sqrt{n_1 n_k} x_k \mathbf{e}_{n_1} \\ \delta_{12} n_1 x_1 \mathbf{e}_{n_2} + \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} r_2 x_2 \mathbf{e}_{n_2} + \delta_{23} \sqrt{n_1 n_3} x_3 \mathbf{e}_{n_2} + \dots + \delta_{2k} \sqrt{n_1 n_k} x_k \mathbf{e}_{n_2} \\ \vdots \\ \delta_{1k} n_1 x_1 \mathbf{e}_{n_k} - \delta_{2k} \sqrt{n_1 n_2} x_2 \mathbf{e}_{n_k} + \delta_{3k} \sqrt{n_1 n_3} x_3 \mathbf{e}_{n_k} + \dots + \sqrt{\frac{n_1}{n_k}} r_k x_k \mathbf{e}_{n_k} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (r_1 x_1 + \delta_{12} \sqrt{n_1 n_2} x_2 + \delta_{13} \sqrt{n_1 n_3} x_3 + \dots + \delta_{1k} \sqrt{n_1 n_k} x_k) \mathbf{e}_{n_1} \\ \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} (\delta_{12} \sqrt{n_1 n_2} x_1 + r_2 x_2 + \delta_{23} \sqrt{n_2 n_3} x_3 + \dots + \delta_{2k} \sqrt{n_2 n_k} x_k) \mathbf{e}_{n_2} \\ \vdots \\ \sqrt{\frac{n_1}{n_k}} (\delta_{1k} \sqrt{n_1 n_k} x_1 + \delta_{2k} \sqrt{n_2 n_k} x_2 + \delta_{3k} \sqrt{n_3 n_k} x_3 + \dots + r_k x_k) \mathbf{e}_{n_k} \end{bmatrix} \\ &= \lambda \begin{bmatrix} x_1 \mathbf{e}_{n_1} \\ \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} x_2 \mathbf{e}_{n_2} \\ \vdots \\ \sqrt{\frac{n_1}{n_k}} x_k \mathbf{e}_{n_k} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hemos probado que $\sigma(F_k) \subseteq \sigma(A(G))$. ■

Teorema 11 [9, Theorem 5] Sea G_i grafo r_i -regular para $i = 1, 2, \dots, k$. Sea $R = \bigvee_H \{G_j : j \in V(H)\}$. Entonces el espectro de G es

$$\sigma(R) = \bigcup_{i=1}^k (\sigma(A(G_i)) - \{r_i\}) \cup \sigma(F_k)$$

donde F_k es la matriz simétrica de orden $k \times k$

$$F = \begin{bmatrix} r_1 & \delta_{12}\sqrt{n_1n_2} & \dots & \delta_{1k}\sqrt{n_1n_k} \\ \delta_{12}\sqrt{n_1n_2} & r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \delta_{(k-1)k}\sqrt{n_{k-1}n_k} \\ \delta_{1k}\sqrt{n_1n_k} & \dots & \delta_{(k-1)k}\sqrt{n_{k-1}n_k} & r_k \end{bmatrix}.$$

Demostración. Es inmediata de los lemas 3 y 4. ■

Buscamos autovectores ortogonales de $A(G)$. Para $i = 1, 2, \dots, k$, sean

$$\mathbf{u}_1^{(i)} = \mathbf{e}_{n_i}, \mathbf{u}_2^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{n_i}^{(i)}$$

autovectores ortogonales de $A(G_i)$. Sean las columnas de la matriz

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & \dots & f_{1k} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & \dots & f_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{k1} & f_{k2} & \dots & \dots & f_{kk} \end{bmatrix}$$

autovectores ortogonales de la matriz F_k . De las demostraciones de los lemas anteriores obtenemos

Teorema 12 *Las columnas de las matrices*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_2^{(1)} & \dots & \mathbf{u}_{n_1}^{(1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{u}_2^{(2)} & \dots & \mathbf{u}_{n_2}^{(2)} & \dots & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{u}_2^{(k)} & \dots & \mathbf{u}_{n_k}^{(k)} \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} f_{11}\mathbf{e}_{n_1} & f_{12}\mathbf{e}_{n_1} & \cdots & \cdots & f_{1k}\mathbf{e}_{n_1} \\ f_{21}\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\mathbf{e}_{n_2} & f_{22}\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\mathbf{e}_{n_2} & \cdots & \cdots & f_{2k}\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\mathbf{e}_{n_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{k1}\sqrt{\frac{n_1}{n_k}}\mathbf{e}_{n_k} & f_{k2}\sqrt{\frac{n_1}{n_k}}\mathbf{e}_{n_k} & \cdots & \cdots & f_{kk}\sqrt{\frac{n_1}{n_k}}\mathbf{e}_{n_k} \end{bmatrix}$$

son autovectores ortogonales de $A(G)$.

6.2. El producto completo de grafos circulantes

Posemos bastante información acerca de los autovectores y autovalores de un grafo circulante. Queremos aprovechar esta información para obtener resultados acerca de los autovalores y autovectores del producto completo de grafos circulantes.

Sea $G_1 = G(n_1, S_1)$ un grafo circulante r_1 -regular y $G_2 = G(n_2, S_2)$ un grafo circulante r_2 -regular. Entonces los autovalores de G_1 son

$$\lambda_{1,j} = \sum_{s \in S_1} \omega_1^s, \omega_1 = \exp(2\pi i/n_1)$$

con autovectores asociados $\mathbf{v}_{1,j} = \left[1 \quad \omega_1^j \quad \dots \quad \omega_1^{(n_1-1)j} \right]^T$ donde $0 \leq j \leq n_1 - 1$ y los autovalores de G_2 son

$$\lambda_{2,j} = \sum_{s \in S_2} \omega_2^s, \omega_2 = \exp(2\pi i/n_2)$$

con autovectores asociados $\mathbf{v}_{2,j} = \left[1 \quad \omega_2^j \quad \dots \quad \omega_2^{(n_2-1)j} \right]^T$ donde $0 \leq j \leq n_2 - 1$.

En particular para $j = 0$ se tiene $\lambda_{1,0} = r_1$ y $\lambda_{2,0} = r_2$.

Aplicando el Teorema 10, los autovalores del producto completo $G_1 \vee G_2$ son

$$\{\lambda_{1j}\}_{j=1}^{n_1-1} \cup \{\lambda_{2j}\}_{j=1}^{n_2-1} \cup \{\beta_1, \beta_2\}$$

con

$$\beta_1 = \frac{(r_1 + r_2) + \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + 4n_1n_2}}{2}$$

$$\beta_2 = \frac{(r_1 + r_2) - \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + 4n_1n_2}}{2}$$

Además, de (16), tenemos que los autovectores del producto completo $G_1 \vee G_2$ están dados por las columnas de la matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{11} & \dots & \mathbf{v}_{1(n_1-1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{e}_{n_1} & \mathbf{e}_{n_1} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{v}_{21} & \dots & \mathbf{v}_{2(n_2-1)} & \frac{\beta_1 - r_1}{\sqrt{n_1n_2}}\mathbf{e}_{n_2} & \frac{\beta_2 - r_1}{\sqrt{n_1n_2}}\mathbf{e}_{n_2} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 17 Sean $G_1 = G(6, \{2, 3, 4\})$ y $G_2 = G(4, \{1, 3\})$. Entonces

$$\beta_1 = \frac{(r_1 + r_2) + \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + 4n_1n_2}}{2} = \frac{5 + 4\sqrt{6}}{2}$$

$$\beta_2 = \frac{(r_1 + r_2) - \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + 4n_1n_2}}{2} = \frac{5 - 4\sqrt{6}}{2}$$

y

$$\frac{\beta_1 - r_1}{\sqrt{n_1n_2}} = \frac{4\sqrt{6} - 1}{4\sqrt{6}}$$

$$\frac{\beta_2 - r_1}{\sqrt{n_1n_2}} = \frac{-4\sqrt{6} - 1}{4\sqrt{6}}$$

Entonces $G_1 \vee G_2$ tiene por autovalores y autovectores a

<i>autovalor</i>	<i>autovector</i>
$\lambda_{1,1} = \omega_1^2 + \omega_1^3 + \omega_1^4$	$\begin{bmatrix} 1 & \omega_1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 & \omega_1^4 & \omega_1^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
$\lambda_{1,2} = \omega_1^4 + \omega_1^6 + \omega_1^8$	$\begin{bmatrix} 1 & \omega_1^2 & \omega_1^4 & \omega_1^6 & \omega_1^8 & \omega_1^{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
$\lambda_{1,3} = \omega_1^6 + \omega_1^9 + \omega_1^{12}$	$\begin{bmatrix} 1 & \omega_1^3 & \omega_1^6 & \omega_1^9 & \omega_1^{12} & \omega_1^{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
$\lambda_{1,4} = \omega_1^8 + \omega_1^{12} + \omega_1^{16}$	$\begin{bmatrix} 1 & \omega_1^4 & \omega_1^8 & \omega_1^{12} & \omega_1^{16} & \omega_1^{20} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
$\lambda_{1,5} = \omega_1^{10} + \omega_1^{15} + \omega_1^{20}$	$\begin{bmatrix} 1 & \omega_1^5 & \omega_1^{10} & \omega_1^{15} & \omega_1^{20} & \omega_1^{25} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
$\lambda_{2,1} = \omega_2^1 + \omega_2^3$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 \end{bmatrix}^T$
$\lambda_{2,2} = \omega_2^2 + \omega_2^6$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \omega_2^2 & \omega_2^4 & \omega_2^6 \end{bmatrix}^T$
$\lambda_{2,3} = \omega_2^3 + \omega_2^9$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \omega_2^3 & \omega_2^6 & \omega_2^9 \end{bmatrix}^T$
$\beta_1 = \frac{5+4\sqrt{6}}{2}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{4\sqrt{6}-1}{4\sqrt{6}} & \frac{4\sqrt{6}-1}{4\sqrt{6}} & \frac{4\sqrt{6}-1}{4\sqrt{6}} & \frac{4\sqrt{6}-1}{4\sqrt{6}} \end{bmatrix}^T$
$\beta_2 = \frac{5-4\sqrt{6}}{2}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{-4\sqrt{6}-1}{4\sqrt{6}} & \frac{-4\sqrt{6}-1}{4\sqrt{6}} & \frac{-4\sqrt{6}-1}{4\sqrt{6}} & \frac{-4\sqrt{6}-1}{4\sqrt{6}} \end{bmatrix}^T$

Aplicando Teorema 10 y Teorema 11 podemos obtener los autovalores y autovectores del producto completo para 3 ó más grafos.

6.3. Producto completo de grafos circulantes enteros

En esta sección queremos obtener grafos enteros como producto de grafos circulantes enteros. Si G_1 y G_2 son grafos enteros, usando el Teorema 10, podemos concluir que $G_1 \vee G_2$ es un grafo entero si y sólo si los autovalores de la matriz F_2 son enteros. Lo cual ocurre si y sólo si $r_1 = r_2$ y $n_1 = n_2$. Esto es, si y sólo si $G_1 = G_2$.

En general, consideramos $G_1 = G_2 = \dots = G_k = G$ donde G es un grafo circulante entero. En este caso, escribiremos el producto completo de estos grafos como $R = \bigvee_H \{G\}$. Como corolario del Teorema 11 tenemos

Corolario 8 Sea $G_1 = G_2 = \dots = G_k = G$ un grafo r -regular de orden n . Entonces
(a) los autovalores de $R = \bigvee_H \{G\}$ son los autovalores de $A(G)$ diferentes de r , cada uno con multiplicidad k , y los autovalores de

$$F = rI_k + nA(H).$$

(b) Si, además, G y H son grafos enteros entonces $R = \bigvee_H \{G\}$ es un grafo entero.

Demostración. (a) Sea $G_1 = G_2 = \dots = G_k = G$ grafo de orden n y r -regular. Del Teorema 11, tenemos

$$\sigma(R) = \cup_{i=1}^k (\sigma(A(G)) - \{r\}) \cup \sigma(F)$$

donde

$$\begin{aligned} F &= \begin{bmatrix} r & \delta_{12}n & \dots & \delta_{1k}n \\ \delta_{12}n & r & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \delta_{(k-1)k}n \\ \delta_{1k}n & \dots & \delta_{(k-1)k}n & r \end{bmatrix} \\ &= rI_k + n \begin{bmatrix} 0 & \delta_{12} & \dots & \delta_{1k} \\ \delta_{12} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \delta_{(k-1)k} \\ \delta_{1k} & \dots & \delta_{(k-1)k} & 0 \end{bmatrix} = rI_k + nA(H). \end{aligned}$$

(b) Es un resultado inmediato de la hipótesis de la parte (a). ■

Si en el Corolario agregamos la condición que G y H sean grafos circulares enteros entonces todos los autovalores de $R = \bigvee_H \{G\}$ son enteros y son conocidos.

En efecto, sea $G = G(n, S)$ un grafo circulante entero r -regular con $S = \bigcup_{n/d} G_n(d)$ y $d \in D \subseteq D_n$. Entonces los autovalores de $G(n, S)$ son

$$\lambda_j = \sum_{f \in F} c(f, j),$$

con $F = \{n/d : d \in D\}$ $0 \leq j \leq n - 1$. Sea $H = G(k, S_H)$ un grafo circulante entero de orden k con $S_H = \bigcup_{k/d} G_k(d)$ y $d \in D_H \subseteq D_{H,k}$ entonces sus autovalores son

$$\lambda_{H,j} = \sum_{f \in F_H} c(f, j),$$

con $F_H = \{k/d : d \in D_H\}$ y $0 \leq j \leq k - 1$.

De la parte (a) del Corolario 8 tenemos que los autovalores de $R = \bigvee_H \{G\}$ son

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}\}$$

con multiplicidad k y los autovalores de la matriz $F = rI_k + nA(H)$:

$$\{r + n\lambda_{H,0}, r + n\lambda_{H,1}, \dots, r + n\lambda_{H,(k-1)}\}$$

Ejemplo 18 Sean $G = G(8, S)$ con $S = \{1, 3, 4, 5, 7\} = G_8(1) \cup G_8(4)$ un grafo 5-regular y $H = G(6, S_H)$ con $S_H = \{1, 3, 5\} = G_6(1) \cup G_6(3)$. Entonces $F = \{8/1, 8/4\} = \{8, 2\}$ y $F_H = \{6/1, 6/3\} = \{6, 2\}$. Por lo tanto los autovalores de

$R = \bigvee_H \{G\}$ son

$$\lambda_1 = c(8, 1) + c(2, 1) = 0 + -1 = -1$$

$$\lambda_2 = c(8, 2) + c(2, 2) = 0 + 1 = 1$$

$$\lambda_3 = c(8, 3) + c(2, 3) = 0 + -1 = -1$$

$$\lambda_4 = c(8, 4) + c(2, 4) = -4 + 1 = -3$$

$$\lambda_5 = c(8, 5) + c(2, 5) = 0 + -1 = -1$$

$$\lambda_6 = c(8, 6) + c(2, 6) = 0 + 1 = 1$$

$$\lambda_7 = c(8, 7) + c(2, 7) = 0 + -1 = -1$$

con multiplicidad 6 y los autovalores de la matriz $F = 5I_k + 8A(H)$:

$$5 + 8\lambda_{H,0} = 5 + 8(c(6, 0) + c(2, 0)) = 5 + 8(2 + 1) = 29$$

$$5 + 8\lambda_{H,1} = 5 + 8(c(6, 1) + c(2, 1)) = 5 + 8(1 + -1) = 5$$

$$5 + 8\lambda_{H,2} = 5 + 8(c(6, 2) + c(2, 2)) = 5 + 8(-1 + 1) = 5$$

$$5 + 8\lambda_{H,3} = 5 + 8(c(6, 3) + c(2, 3)) = 5 + 8(-2 + -1) = -19$$

$$5 + 8\lambda_{H,4} = 5 + 8(c(6, 4) + c(2, 4)) = 5 + 8(-1 + 1) = 5$$

$$5 + 8\lambda_{H,5} = 5 + 8(c(6, 5) + c(2, 5)) = 5 + 8(1 + -1) = 5$$

Observamos que la energía del grafo en el ejemplo anterior es 137 y la energía del grafo completo de 48 vértices es $2 \cdot 48 - 2 = 94$. Por lo tanto, el grafo es un grafo hiperenergético.

Referencias

- [1] K. T. Balinska, D. Cvetkovic, C. Radosavljevic, D. Stevanovic, A survey on integral graphs, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat., v. 13, pp. 42-65, 2002.
- [2] K. Balińska, D. Cevtković, Z. Radosavljević, S. Simić and D. Stevanović, A survey on integral graphs, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat.* **13** (2003) 42–65.
- [3] Milan Basic, Marko D. Petkovic, Perfect state transfer in integral circulant graphs of non-square-free order Original Research Article Linear Algebra and its Applications, Volume 433, Issue 1, 15 July 2010, Pages 149-163
- [4] J.C. Bermond, F. Comellas, D.F. Hsu, Distributed loop computer networks: a survey, J. Parallel Distributed Comput. 24 (1995) 2–10.
- [5] N.L. Biggs, Algebraic Graph Theory, second ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [6] F. Boesch and R. Tindell. Circulants and their connectivities. *J. Graph Theory*, Vol.8:487–499, 1984.
- [7] A.E. Brouwer and W.H. Haemwens. *Spectra of Graphs*, Springer.
- [8] F.C. Bussemaker, D. Cvetkovic, There are exactly 13 connected, cubic, integral graphs, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. 544 (1976) 43–48.

- [9] D. Cardoso and E. Andrade, M. Agueiras, M. Robbiano. Spectra of graphs obtained by a generalization of the join graph operation, *Discrete Mathematics* 313 (2013) 733–741.
- [10] Sebastian M. Cioba, *A necessary and sufficient eigenvector condition for a connected graph to be bipartite*. ELA, 2010
- [11] D. Cvetković, M. Doob and H. Sachs, *Spectra of graphs – Theory and Application* (Academic Press, New York, 1980).
- [12] P. J. Davis, *Circulant Matrices*, AMS Chelsea Publishing, 1994.
- [13] B. Elspas, J. Turner, Graphs with circulant adjacency matrices, *J. Combin. Theory* 9 (1970) 297–307.
- [14] M. A. A. de Freitas, *Grafos Integrais, Grafos Laplacianos Integrais, Grafos Q-Integrais*, Tese de Doutorado, Programa COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009.
- [15] I. Gutman, The energy of a graph: Old and new results, in: A. Betten, A. Kohnert, R. Laue, A. Wassermann (Eds.), *Algebraic Combinatorics and Applications*, Springer–Verlag, Berlin, 2001, 196 – 211.
- [16] I. Gutman, The energy of a graph, *Ber. Math. Stat. Sect. Forschungszent. Graz* 103(1978) 1 – 22.
- [17] I. Gutman, Hyperenergetic and Hypoenergetic,
- [18] I. Gutman, *The energy of a graph*, *Ber. Math. Statist. Sect. Forschungszen-tram Graz. 103 (1978) 1-22* .

- [19] F. Harary, A. J. Schwenk, Which graphs have integral spectra?, R. Bari, F. Harary, F.(Eds), Graphs and Combinatorics, Springer, Berlin, 1974, p.p. 45-51.
- [20] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the Theory of Numbers, 5th edn.* (Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1979).
- [21] F.K. Hwang, A survey on multi-loop networks, *Theor. Comput. Sci.* **299**(1-3) (2003) 107–121.
- [22] Aleksandar Ilić, Distance spectra and distance energy of integral circulant graphs, *Linear Algebra and its Applications*, Volume 433, Issue 5, 15 October 2010, Pages 1005-1014
- [23] Aleksandar Ilić, The energy of unitary cayley graphs, *Linear Algebra and its Applications*, Volume 431, Issue 10, 15 October 2009, Pages 1881-1889.
- [24] S. Ramanujan, On certain trigonometrical sums and their applications in the theory of numbers, *Cambridge Phil. Trans.* 22 (1918) 259–276.
- [25] O. Rojo, L. Medina, Constructing graphs with energy $\sqrt{r}E(G)$ where G is a bipartite graph, *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry* 62 (2009) No. 3, 465-472.
- [26] N. Saxena, S. Severini, I. Shparlinski, Parameters of circulant integral graphs and periodic quantum dynamics, *Int. J. Quantum Info* 5, 417–430 (2007).
- [27] W. So, Integral circulant graphs, *Discrete Math.* 306(2006) 153 – 158.
- [28] H.B. Walikar, I. Gutman, P.R. Hampiholi, H.S. Ramane, *Graph Theory Notes New York Acad. Sci.* 41 (2001) 14-16

- [29] L. Wang, A survey of results on integral trees and integral graphs, Memorandum No. 1763, Department of Applied Math., Faculty of EEMCS, Univ. of Twente, The Netherlands, 2005.
- [30] *H.B. Walikar, I. Gutman, P.R. Hampiholi, H.S. Ramane, Graph Theory Notes New York Acad. Sci. 41 (2001) 14-16.*