



UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Linealización C^1 para contracciones en el plano.

Nelda Diana Jaque Tamblay

Tesis para optar el grado de:
Magister en ciencias mención matemática

Director de Tesis: Dr. Bernardo San Martín Rebolledo
Tesis parcialmente financiada por proyecto fondecyt número 1110717

Antofagasta - Chile
2013

A mis Padres...

Índice

1. Introducción	3
2. Una noción de Linealización	7
2.1. Algunos resultados de linealización C^1 para difeomorfismos que son contracciones.	7
2.2. Resultados de linealización con autovalores no resonantes.	13
3. Teorema de la Variedad Estable y Central	21
4. Linealización C^1 de F	33
5. Regularidad de la linealización	44
6. Nitidez de las estimaciones	51
7. Referencias	56

1. Introducción

Una herramienta muy útil para el análisis de la estructura de las órbitas en una vecindad de un punto fijo x_0 de un difeomorfismo, es la linealización. Una linealización para un punto fijo x_0 de un difeomorfismo $F : \Omega \rightarrow X$, donde X es un espacio de Banach y $\Omega \subset X$ es un conjunto abierto, es un cambio de coordenadas C^r diferenciable ($1 \leq r \leq \infty$) que conjugue el sistema con su parte lineal, es decir, es una aplicación $\phi : U \subset \Omega \rightarrow X$, donde U es una vecindad del punto fijo, tal que

$$\phi(F(x)) = S\phi(x), \text{ para todo } x \in U \quad (1.1)$$

con $S = DF(x_0)$.

El estudio de la linealización tiene una larga historia, que se remonta a trabajos de Poincaré [10] para difeomorfismos analíticos sobre $\mathbb{C}^n$, quien prueba que si todos los autovalores λ_i ($i = 1, \dots, n$) de la parte lineal del difeomorfismo tienen norma menor que uno (o todos norma mayor que uno) y satisfacen la condición de *no resonancia*, entonces es analíticamente conjugado a su parte lineal. Los autovalores de una transformación lineal satisfacen la condición de *no resonancia* si

$$\lambda_i \neq \prod_{j=1}^n \lambda_j^{m_j}$$

para todo $i \in [1, n]$ y para toda n -upla de enteros $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ tal que $m_1 + \dots + m_n \geq 2$.

Cuando todos los autovalores tienen norma igual a uno, Siegel (ver [14]) probó que la conclusión de Poincaré se cumple si el punto $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ es de tipo (c, ν) , es decir,

$$|\lambda_i - \prod_{j=1}^n \lambda_j^{m_j}| \geq c(\sum_{j=1}^n m_j)^{-\nu}$$

para todo $i \in [1, n]$ y para toda n -upla de enteros $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ tal que $m_1 + \dots + m_n \geq 2$, donde $c > 0$ y $\nu > 0$.

En el caso de puntos fijos para difeomorfismo sobre $\mathbb{R}^n$ un resultado en esta línea es el conocido Teorema de Hartman-Grobman [8], que garantiza que todo punto fijo hiperbólico para un difeomorfismo C^1 es linealizable C^0 . Este resultado fue generalizado a espacios de Banach por Pugh (ver [11]).

La linealización C^0 no es suficiente para distinguir comportamientos geométricos más finos, por ejemplo, el teorema Hartman-Grobman muestra que un nodo y un foco tienen la misma dinámica, no obstante su comportamiento geométrico es distinto. Esto motiva a buscar condiciones que garanticen la existencia de linealizaciones diferenciables, o más generalmente, conjugaciones diferenciables con otro difeomorfismo. Sternberg en [15] y [16] probó que todo punto fijo hiperbólico sin resonancias para difeomorfismo C^∞ es C^∞ linealizable en una vecindad de él, más generalmente, dado un entero $n > 0$ y una matriz hiperbólica, existe un entero $N \geq 2$ tal que si dicha matriz no tiene resonancias de orden menor N , entonces todo difeomorfismo cuya parte lineal es esta matriz es linealizable C^n .

Un problema interesante es estudiar la linealización para difeomorfismos de clase $C^{k,\alpha}$ ($k \geq 0$ entero y $0 < \alpha \leq 1$ real), aplicaciones F que son C^k y cuya derivada $F^{(k)}$ satisface una α condición de Hölder, es decir

$$\sup_{(x,y), x \neq y} \left\{ \frac{\| F^{(k)}(x) - F^{(k)}(y) \|}{\| x - y \|^\alpha} \right\} < \infty.$$

En esta dirección Belitskii en [2] y [3] probó que un difeomorfismo $C^{k,1}$ puede ser C^k linealizado localmente si las q distintas normas de sus autovalores digamos $p_1 < p_2 < \dots < p_q$ satisfacen que $\bigcup_{i < k} [p_i^k p_j^+, p_j^k p_i^-]$ no contiene ninguna de las normas $p_1 < p_2 < \dots < p_q$ de sus autovalores, donde $p_i^+ = \max\{p_i, 1\}$ y $p_i^- = \min\{p_i, 1\}$. Particularmente todo difeomorfismo $C^{1,1}$ puede ser C^1 linealizado si los autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ satisfacen $|\lambda_i| \cdot |\lambda_j| \neq |\lambda_k|$ ($k = 1, \dots, n$) si $|\lambda_i| < 1 < |\lambda_j|$. Sell en [13] extendió los resultados de Sternberg y Belitskii dando hipótesis menos restrictivas para lograr la linealización C^r .

En el estudio de sistemas dinámicos, la linealización C^1 es de especial interés. Hartman en [7] mostró que toda contracción $C^{1,1}$ sobre $\mathbb{R}^n$ admite linealización $C^{1,\beta}$ con $\beta > 0$ pequeño que depende de los autovalores de su parte lineal en el punto fijo. El Bialy en [6] y Rodrigues y Sola-Morales en [12], de manera independiente generalizaron este resultado a espacios de Banach. Por otro lado Chaperon probó en [5] que una contracción $C^{1,\alpha}$, digamos F , en un espacio de Banach es $C^{1,\alpha}$ linealizable en una vecindad del punto fijo si se satisface que

$$1 + \alpha > \frac{\log \sigma(F'(0)^{-1})}{\log[\sigma(F'(0))]^{-1}}, \quad (1.2)$$

donde para una matriz A , $\sigma(A)$ denota el radio espectral de A que es el máximo del módulo de sus autovalores. Así, en el caso 2-dimensional podemos concluir que una $C^{1,\alpha}$ contracción en que $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, admite una $C^{1,\alpha}$ linealización. Observe que en una situación 2-dimensional en que $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ la condición (1.2) puede ser escrita como

$$\alpha > \alpha_1 = \frac{\log |\lambda_1|}{\log |\lambda_2|} - 1. \quad (1.3)$$

Otros resultados de linealización sobre puntos fijos en plano fueron obtenidos por Stowe en [17]. Particularmente, mostró que para expansiones C^k de la forma $F(x) = Sx + o(\|x\|^k)$, donde $k \geq 2$ es un entero, $S = F'(0)$ y a y b los módulos de los autovalores de S con $1 < a \leq b$, se obtienen los siguientes dos resultados:

1. Si $\log_a b < k$, entonces la sucesión $(S \circ F^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ converge uniformemente, es decir, F admite linealización C^k .
2. Si $\log_a b \geq k$, entonces F puede ser transformado a otra expansión C^k $\tilde{F}$, que satisface

$$(\tilde{F} - S)^{(j)}(x_1, 0) = 0, \text{ para todo } 0 \leq j \leq k, \quad (1.4)$$

para todo $x_1 \in \mathbb{R}$ pequeño, de modo que la sucesión $(S \circ \tilde{F}^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ converge uniformemente en la topología C^{k-1} , concluyendo que F admite linealización C^{k-1} . Además, se estima el exponente de Holder de la $k - 1$ -ésima derivada para la linealización ϕ .

En este trabajo de tesis presentamos el resultado de Zhang y Zhang en [20], acerca de linealización C^1 para contracciones $C^{1,\alpha}$ ($0 < \alpha \leq 1$) en el plano, cerca del punto fijo 0. Abordaremos el caso en que

$$0 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < 1, \quad (1.5)$$

pues el caso $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, como se mencionó anteriormente, fue ya resuelto. un número α_0 el cual es menor que $\min(1, \alpha_1)$ dado por Hartman en [7] y Chaperon en [5] y probaremos

que F puede ser linealizado por una transformación C^1 con tal que $\alpha > \alpha_0$. La demostración será similar al método usado por Stowe en [17], pero tiene que ser modificada porque el resultado dado en (1.4), de esta misma sección, no se puede obtener para aplicaciones $C^{1,\alpha}$. Además, probaremos que estas transformaciones ϕ para la linealización C^1 no son sólo C^1 sino también $C^{1,\beta}$ para algún $\beta > 0$ que depende de α . Daremos estimaciones para β en varios casos y mostraremos con un ejemplo que estas estimaciones no pueden mejorarse más.

2. Una noción de Linealización

Esta sección la dividiremos en dos sub secciones las cuales estan enfocadas en aprender trucos para hallar linealización. Además, veremos conceptos necesarios para hallar linealización, a lo menos, C^1 de contracciones en el plano, tanto para puntos fijos como para autovalores no resonantes.

2.1. Algunos resultados de linealización C^1 para difeomorfismos que son contracciones.

Como lo comentamos anteriormente, conseguir linealización C^1 es de especial interes. En esta sub sección veremos un resultado que dice que difeomorfismos reales con variable real de clase $C^{1,\alpha}$ se puede linealizar C^1 cerca de un punto fijo y mostraremos un ejemplos donde se verá que si el difeomorfismo carece de esta hipótesis fundamental el candidato a linealización no es C^1 . Además haremos mención de una extensión de este resultado, pero para contracciones en el plano y para difeomorfismos de clase $C^{k,\alpha}$, análogamente demostraremos con un ejemplo que esa hipótesis es fundamental para conseguir linealización C^1 .

La siguiente definición nos permite diferenciar funciones que son continuamente diferenciable con otras que tienen un poco mas de continuidad en su derivada.

Definición 2.1. Sea X un espacio de Banach. Una aplicación $F : X \rightarrow X$ es una $C^{k,\alpha}$ contracción si existe $0 < K < 1$ y $0 < \alpha < 1$ tal que para todo $x, y \in X$:

$$\|F^{(k)}(x) - F^{(k)}(y)\| \leq K\|x - y\|^\alpha, \quad (2.1)$$

donde $F^{(k)}$ representa la k – esima derivada.

Proposición 2.2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una contracción $C^{1,\alpha}$ tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = \lambda$. Entonces existe un difeomorfismo $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que

$$\phi \circ f = \lambda\phi \quad (2.2)$$

Demostración Consideremos $0 < \lambda < 1$, de la ecuación (2.2) se tiene que

$$(\phi \circ f^n)(x) = \lambda^n \phi(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Así

$$\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\phi \circ f^n)(x)}{\lambda^n}. \quad (2.3)$$

Afirmación 2.3. *Siempre podemos suponer ϕ tal que $\phi'(0) = 1$ y así*

$$\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x)}{\lambda^n}. \quad (2.4)$$

En efecto, sea

$$\phi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x - 0}$$

Como $\phi(0) = 0$, pues 0 es un punto fijo y además $f^n(x) \rightarrow 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces

$$\begin{aligned} \phi'(0) &= \lim_{f^n(x) \rightarrow 0} \frac{\phi(f^n(x))}{f^n(x)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(f^n(x))}{f^n(x)}. \end{aligned}$$

Luego de la ecuación (2.3)

$$\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x)}{\lambda^n} \cdot \frac{\phi(f^n(x))}{f^n(x)}. \quad (2.5)$$

además como $\phi'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(f^n(x))}{f^n(x)}$. Entonces podemos escribir (2.5) como

$$\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi'(0) \frac{f^n(x)}{\lambda^n}.$$

Por otro lado haciendo $\tilde{\phi}(x) = \frac{\phi(x)}{\phi'(0)}$ se prueba la afirmación. $\diamond$

Observemos que ϕ así definida conjuga, en efecto,

$$\begin{aligned}
(\phi \circ f)(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(f(x))}{\lambda^n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{n+1}(x)}{\lambda^n} \cdot \frac{\lambda}{\lambda} \\
&= \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{n+1}(x)}{\lambda^{n+1}} \\
&= \lambda \phi(x).
\end{aligned}$$

Debemos probar que el límite (2.4) existe. Sea

$$\begin{aligned}
G_n(x) &= \frac{f'(f^{n-1}(x))f'(f^{n-2}(x)) \cdots f'(x)}{\lambda^n} \\
&= \frac{f'(f^{n-1}(x))}{\lambda} \cdot \frac{f'(f^{n-2}(x))}{\lambda} \cdots \frac{f'(x)}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Notemos que para $F_n(x) = \frac{f^n(x)}{\lambda^n}$ tenemos que $F_n(0) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, es decir, la sucesión $(F_n(x))_n$ converge puntualmente en 0. Además que $((F_n)'(x))_n = (G_n(x))_n$. Luego para probar la convergencia uniforme de $(F_n(x))_n$ solo nos restaría probar la convergencia uniforme de la sucesión $(G_n(x))_n$. En efecto:

$$\begin{aligned}
|\lg(G_n(x))| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \lg \left(\frac{f'(f^i(x))}{\lambda} \right) \right| \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left| \lg \left(\frac{f'(f^i(x))}{\lambda} \right) - \lg \left(\frac{f'(0)}{\lambda} \right) \right|.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Aplicando el teorema del valor medio en (2.6) tenemos que para cada $i = 0, \dots, n-1$, existe ξ_i entre $\frac{f'(f^i(x))}{\lambda}$ y $\frac{f'(0)}{\lambda}$ tal que

$$\left| \lg \left(\frac{f'(f^i(x))}{\lambda} \right) - \lg \left(\frac{f'(0)}{\lambda} \right) \right| = \frac{1}{|\xi_i|} \left| \frac{f'(f^i(x))}{\lambda} - \frac{f'(0)}{\lambda} \right| \tag{2.7}$$

Donde $\frac{1}{|\xi_i|} \leq 2$ pues ξ_i esta en una pequeña vecindad de 1. Considerando lo dicho anteriormente y además que la función f es $C^{1,\alpha}$ contractible se tiene de (2.6) y (2.7) que

$$\begin{aligned}
|\lg(G_n(x))| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{|\xi_i|} \left| \frac{f'(f^i(x))}{\lambda} - \frac{f'(0)}{\lambda} \right| \\
&\leq \frac{2}{\lambda} \sum_{i=0}^{n-1} |f'(f^i(x)) - f'(0)| \\
&\leq \frac{2K}{\lambda} \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(x)|^\alpha.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
|f^i(x)| &= |f^i(x) - f(0)| \\
&= |f(f^{i-1}(x)) - f(0)| \\
&= |f'(\tilde{\xi})| |f^{i-1}(x)| \\
&= (\lambda + \epsilon) |f^{i-1}(x)| \\
&= (\lambda + \epsilon)^i |x| \\
&< (\lambda + \epsilon)^i.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Por lo tanto de (2.8) y (2.9) tenemos que:

$$|\lg(G_n(x))| \leq \frac{2K}{\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda + \epsilon)^{i\alpha}. \tag{2.10}$$

Como la serie en (2.10) es convergente, se concluye que $(\lg(G_n))_n$ converge uniformemente lo que implica que $(G_n(x))_n$ converge uniformemente. Así hemos probado que $(F_n(x))$ converge a una función de clase C^1 o equivalentemente que el límite (2.4) existe y además que ϕ así definida es de clase C^1 . En el caso de $\lambda > 1$ la demostración es análoga utilizando f^{-n} . ♣

La condición de $C^{1,\alpha}$ para f es fundamental en el teorema anterior, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4. Considere la función $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \lambda x \left(1 - \frac{1}{\lg(x)} \right). \quad (2.11)$$

Afirmamos que f es C^1 pero no es $C^{1,\alpha}$, por lo que no se asegura la existencia del difeomorfismo ϕ tal que se cumpla (2.2). En efecto, notemos que la derivada para todo $x \neq 0$ esta dada por

$$f'(x) = \lambda \left(1 - \frac{1}{\lg(x)} - \frac{1}{[\lg(x)]^2} \right). \quad (2.12)$$

y la derivada de f en 0

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda x (1 - 1/\lg(x))}{x} \\ &= \lambda \end{aligned} \quad (2.13)$$

Así de (2.12) y (2.13) podemos decir que f es C^1 . Además observemos que f no es $C^{1,\alpha}$, pues para $x = 0$ e $y = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{|f'(x) - f'(y)|}{|x - y|^\alpha} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\left| \frac{-\lambda}{\lg(x)} + \frac{\lambda}{\lg(y)} + \frac{\lambda}{\lg^2(x)} - \frac{\lambda}{\lg^2(y)} \right|}{|x - y|^\alpha} \\ &= \infty \end{aligned}$$

por lo que es imposible hallar un $0 < K < 1$ tal que se cumpla la condición (2.1). Bajo estas condiciones pasaremos a probar que para cada numero real x el límite definido en (2.4) no existe. En efecto, de (2.11) inductivamente obtenemos que

$$f^n(x) = \lambda^n x \prod_{k=0}^n \left(1 - \frac{1}{\lg(f^k(x))} \right),$$

luego

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x)}{\lambda^n} &= x \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n \left(1 - \frac{1}{\lg(f^k(x))}\right) \\
&= x \left(1 - \frac{1}{\lg(x)}\right) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{\lg(f^k(x))}\right) \\
&= x \left(1 - \frac{1}{\lg(x)}\right) F_n(x),
\end{aligned} \tag{2.14}$$

donde $F_n(x)$ esta dado por

$$F_n(x) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{\lg(f^k(x))}\right).$$

Notemos que de (2.9) podemos decir que $\lg(f^k(x)) \approx \lg(\lambda)^k = k \lg(\lambda)$, además si $0 < \lambda < 1$ tenemos que $\lg(f^k(x)) \approx k \left(\frac{-1}{s}\right)$ con $s > 1$, luego

$$F_n(x) \approx \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s}{k}\right),$$

donde el producto a la derecha de la igualdad es divergente, entonces el límite dado en (2.14) lo es. Luego no existe tal ϕ que linealice (2.11).

Un resultado análogo que nos permite extender el teorema 2.2 es hallar una linealización C^k a partir de difeomorfismos $C^{k,\alpha}$ en el plano, es decir, para difeomorfismos $C^{k,\alpha}$ podemos hallar linealización C^1 .

En el siguiente ejemplo consideremos un difeomorfismo C^∞ (más que C^2) el cual no puede ser linealizable C^2 debido a que no es $C^{2,\alpha}$.

Ejemplo 2.5. Sea $f(x, y) = (a^2x + y^2, ay)$, Notemos que

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Supongamos que existe una linealización $\phi : (x, y) \rightarrow (u, v) = (\psi(x, y), \varphi(x, y))$. Como $\phi \circ f(x, y) = Df(0, 0) \circ \phi(x, y)$, entonces tenemos que:

$$(\psi(a^2x + y^2, ay), \varphi(ax^2 + y^2, ay)) = (a^2\psi(x, y), a\varphi(x, y))$$

por lo que obtenemos que:

$$\psi(a^2x + y^2, ay) = a^2\psi(x, y).$$

Derivando con respecto a y esto último se obtiene:

$$2y\psi_x(a^2x + y^2, ay) + a\psi_y(a^2x + y^2, ay) = a^2\psi_y(x, y)$$

Haciendo $x = y = 0$ se concluye que si $a \neq 0 \neq 1$ entonces $\psi_y(0, 0) = (0, 0)$. Ahora si derivamos la ultima igualdad con respecto a y nuevamente obtenemos

$$2\psi_x(ax^2 + y^2, ay) + 2y[2y\psi_{xx}(ax^2 + y^2, ay) + 2a\psi_{xy}(ax^2 + y^2, ay)] + a^2\psi_{yy}(ax^2 + y^2, ay) = a^2\psi_{yy}(x, y).$$

Haciendo $x = y = 0$ se obtiene que $\psi_x(0, 0) = 0$, Así podemos concluir que el jacobiano de ϕ en $(0, 0)$ está dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_z & \varphi_y \end{pmatrix} = 0,$$

luego ϕ no puede ser C^2 . Por lo tanto f no es C^2 -linealizable.

2.2. Resultados de linealización con autovalores no resonantes.

El problema de reducción de un difeomorfismo no lineal a su forma lineal en una vecindad del punto fijo es esencialmente idéntica a el problema en el caso de campos vectoriales. El mayor obstáculo en ambas situaciones es la resonancia. Además, en contraste a la resonancia de campos vectoriales la resonancia de difeomorfismos tiene un carácter multiplicativo. En esta sub sección veremos los resultados de linealización para autovalores no resonantes más importantes y daremos algunos ejemplos para su aplicación.

Considere un difeomorfismo n -dimensional

$$\bar{x} = Ax + f(x), \tag{2.15}$$

donde $f(0) = 0$ y $f'(0) = 0$. Denotaremos por $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ los autovalores de la matriz A . Entonces, la resonancia es definida por la relación

$$\lambda_k = \lambda^m, \quad (2.16)$$

donde $\lambda^m = (\lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \dots \lambda_n^{m_n})$, m_k ($k = 1, \dots, n$) son cualquier entero no negativo tal que $|m| = \sum_{k=1}^n m_k \geq 2$. El número $|m|$ es llamado el orden de la resonancia.

Lema 2.6. *Sea la función $f(x) \in \mathbb{C}^n$ y suponga que existe no resonancia de orden $|m| \geq N$. Entonces, el cambio de variable*

$$y = x + \varphi_1(x) + \dots + \varphi_n(x), \quad (2.17)$$

donde φ_l ($l = 2, \dots, N$) es un polinomio homogéneo de grado l , transforma el difeomorfismo (2.15) en

$$\bar{y} = Ay + o_n(y), \quad (2.18)$$

donde o_n junto con sus derivadas sobre el orden N se acumulan en el origen.

Es obvio que los cambios de variables son locales, es decir, que son válidos sólo en alguna vecindad pequeña de un punto fijo del difeomorfismo.

El lema 2.6 es bien conocido y es válido incluso cuando A tiene autovalores multiples. Aquí, discutiremos sólo el caso de autovalores simples. La matriz A puede entonces ser representada de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Por conveniencia diremos que la función $f(x)$ está dada de la siguiente forma

$$f(x) = f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_N(x) + o_N(x),$$

donde $f_l(x)$, $l = 1, \dots, N$, son polinomios homogéneos de grado l . Tenemos

$$f_l(x) = \sum_k \sum_{l_1+\dots+l_n=l} d_{k,l_1 l_2 \dots l_n} x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n} e_k$$

,

donde $d_{k,l_1 l_2 \dots l_n}$ con $k = 1, 2, \dots, n$ y $l_1 + \dots + l_n = l$ son constantes y $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ con 1 en la entrada k -ésima, es decir, $f_l(x)$ es una suma de monomios $d_{kl} x^l e_k$. por el cambio de variable (2.17) obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \dot{x} + \sum_{l=2}^N \varphi_l(\dot{x}) \\ &= Ax + f(x) + \sum_{l=2}^N \varphi_l(Ax + \sum_{j=1}^n f_j(x)) \\ &= y - \sum_{l=2}^N \varphi_l(x) + \sum_{l=2}^N f_l(x) + o_N(x) + \sum_{l=2}^N \varphi_l(Ax + \sum_{j=1}^n f_j(x)) \\ &= Ax + o_N(x) - \sum_{l=2}^N \varphi_l(x) + \sum_{l=2}^N f_l(x) + \sum_{l=2}^N \varphi_l(Ax + \sum_{j=1}^n f_j(x)). \end{aligned} \tag{2.19}$$

El proceso de eliminación de excesivos términos comienza con el término cuadrático. En virtud de encontrar $\varphi_2(x)$ escribimos la siguiente ecuación

$$-A\varphi_2(x) + f_2(x) + \varphi_2(Ax) = 0. \tag{2.20}$$

Representando $\varphi_2(x)$ en la forma

$$\varphi_2(x) = \sum_k \sum_{m_1+\dots+m_n=2} c_{km} x^m e_k, \quad x^m = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$$

reemplazando en (2.20) tenemos

$$-A \sum_k \sum_{m_1+\dots+m_n=2} c_{km} x^m e_k + \sum_k \sum_{l_1+\dots+l_n=2} d_{k,l_1 l_2 \dots l_n} x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n} e_k + \sum_k \sum_{m_1+\dots+m_n=2} c_{km} (Ax)^m e_k = 0,$$

luego para conocer los coeficientes c_{km} obtenemos

$$(-\lambda_k + \lambda^m) c_{km} + d_{km} = 0, \tag{2.21}$$

donde $m = 2$ y $k = (1, \dots, n)$. Ya que no existe resonancia, podemos despejar

$$c_{km} = \frac{d_{km}}{\lambda_k - \lambda^m}. \quad (2.22)$$

Con el fin de obtener $\varphi_3(x)$ escribimos la siguiente ecuación

$$-A\varphi_3(x) + \varphi_3(Ax) + f_3(x) + \{\varphi_2(Ax + f_2(x))\} = 0,$$

donde $\{\}$ encierra los términos cúbicos. Puesto que ya hemos encontrado $\varphi_2(x)$ tenemos la siguiente ecuación para conocer los coeficientes de $\varphi_3(x)$:

$$(-\lambda_k + \lambda^m)c_{km} + \tilde{d}_{km} = 0. \quad (2.23)$$

Aquí, $\tilde{d}_{km} = d_{km} + d'_{km}$, donde d'_{km} es el coeficiente de x^m en la k -ésima componente de el vector polinomial $\varphi_2(Ax + f_2(x))$. Repitiendo este proceso eliminamos todos los términos hasta el grado N .

En el caso que exista resonancia de la forma $\lambda_k = \lambda^m$ uno no puede eliminar los monomios de el tipo $\tilde{d}_{km}x^me_k$. Para este caso tenemos que conocer el siguiente lema.

Lema 2.7. *Sea $f(x) \in \mathbb{C}^n$, entonces el cambio de variables*

$$y = x + \varphi(x),$$

donde $\varphi(x)$ es un polinomio tal que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi'(0) = 0$, transforma el difeomorfismo (2.15) en la forma

$$\bar{x} = Ax + R_N(x) + o_N(x), \quad (2.24)$$

donde

$$R_N(x) = \sum_{\substack{|m| \geq 2 \\ \lambda^m = \lambda_k}} b_{km} x^m e_k. \quad (2.25)$$

Ahora, sea la función $f(x)$ analítica. Tomando $N \rightarrow \infty$ reducimos el difeomorfismo original tanto a su forma lineal o a la siguiente forma:

$$\bar{y} = Ay + R(y), \quad (2.26)$$

donde

$$R(y) = \sum_{\lambda^m = \lambda_k} b_{km} y^m e_k. \quad (2.27)$$

Sin embargo el cambio de variables

$$y = x + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_m(x) + \dots \quad (2.28)$$

es, en general, mas que una serie formal, así como el término en la derecha de (2.27).

Teorema 2.8. *(Teorema de Poincaré-Dulac) Sea $|\lambda_i| < 1$ ($|\lambda_i| > 1$), $i = 1, \dots, n$. Entonces existe un cambio de variables analítico el cual transforma el difeomorfismo (2.15) en*

$$\bar{y} = Ay + R(y), \quad (2.29)$$

donde $R(y)$ es un polinomio compuesto de monomios resonantes. En la ausencia de resonancia $R(y) \equiv 0$.

La situación cuando el punto fijo 0 es de tipo silla, es decir, sus autovalores tienen norma mayor y menor que uno, es más complicada. La razón es que, incluso cuando el conjunto $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ es no resonante, el cero es un punto límite para el conjunto

$$\{\lambda^m - \lambda_k\}_{m=2}^{\infty}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.30)$$

Aquí, el problema de la convergencia de la serie (2.28) se convierte en mucho mas incierto debido a los "pequeños denominadores" que aparecen en (2.22). Esto está establecido en el trabajo de Siegel y Brjuno que en el caso de silla ambas posibilidades son realizadas, es decir, cambios de variables en la forma de serie pueden converger y divergir también.

La situación se clarifica en el caso de cambios de variables suaves C^∞ .

Teorema 2.9. *(Teorema de Sternberg) un cambio de variable suave C^∞ reduce el difeomorfismo n -dimensional*

$$\bar{x} = Ax + f(x)$$

en su forma lineal si la función $f(x) \in C^\infty$ y si existe no resonancia.

En el caso de que exista resonancia, el tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.10. *si $f(x) \in C^\infty$, entonces un cambio de variables suave C^∞ transforma el difeomorfismo (2.15) en*

$$\bar{y} = Ay + R(y), \quad (2.31)$$

donde $R(y)$ es una función suave C^∞ cuya serie de Taylor formal es compuesta por monomios resonantes.

Se desprende de estos dos teoremas que la dependencia de la forma normal en la colección $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ tiene un carácter discontinuo.

Teorema 2.11. *(Teorema de Belitskii) Sea $f \in C^{N+1}$ y sea q el número de diferentes valores absolutos en multiplicadores $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Asumimos también que existe no resonancia de orden menor o igual que N . Entonces, existe un cambio de variables suave $C^{\lfloor \frac{N}{q} \rfloor}$ el cual transforma el sistema (2.15) en su forma lineal.*

Se desprende de este teorema que un difeomorfismo no lineal puede ser transformado a su forma lineal por un cambio de variables C^r siempre que existan no resonancias de orden $|m| \leq N$, donde $N \geq rn$.

Teorema 2.12. *(Teorema de Belitskii) Sea $f \in C^2$, $|\lambda_k| \neq 1$ ($k = 1, \dots, n$) y asumimos que la siguiente condición se cumple*

$$|\lambda_i| \neq |\lambda_j| |\lambda_k|, \quad |\lambda_i| < 1 < |\lambda_k|, \quad (2.32)$$

donde $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$. Entonces el sistema (2.15) puede ser transformado en su forma lineal por un cambio de variables C^1 .

Ejemplo 2.13. *Consideraremos el difeomorfismo 2-dimensional*

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_1^2 - x_2^2 \\ 3x_1x_2 + 9x_2^2 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

y encontraremos un cambio de variable continuo como en (2.17) que transforma este sistema en (2.18).

Calculamos resonancia para $\lambda_1 = 3$

$$3 = 3^{m_1} 2^{m_2} \quad \text{donde,} \quad m_1 + m_2 = N,$$

luego

$$3 = 3^{m_1} 2^{N-m_1}$$

$$\frac{3}{2^N} = \left(\frac{3}{2}\right)^{m_1},$$

entonces

$$m_1 = \frac{\ln 3 - N \ln 2}{\ln 3 - \ln 2}$$

y como $N \geq 2$ y $m_1 \in \mathbb{N}$ no existe resonancia para $\lambda = 3$.

Análogamente para $\lambda = 2$ tenemos

$$2 = 3^{m_1} 2^{m_2} \quad \text{donde,} \quad m_1 + m_2 = N,$$

luego

$$2 = 3^{m_1} 2^{N-m_1}$$

$$\frac{2}{2^N} = \left(\frac{3}{2}\right)^{m_1},$$

entonces

$$m_1 = \frac{(1-N) \ln 2}{\ln 3 - \ln 2}.$$

Como $N \geq 2$ y $m_1 \in \mathbb{N}$ no existe resonancia para $\lambda = 2$.

Ya que los autovalores son no resonantes, entonces existe un cambio de variable

$$y = x + \varphi_2(x),$$

donde

$$\varphi_2(x) = \begin{pmatrix} d_{1(2,0)}x_1^2 + d_{1(1,1)}x_1x_2 + d_{1(0,2)}x_2^2 \\ d_{2(2,0)}x_1^2 + d_{2(1,1)}x_1x_2 + d_{2(0,2)}x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Además como

$$f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - x_2^2 \\ 3x_1x_2 + 9x_2^2 \end{pmatrix},$$

entonces $d_{1(2,0)} = 3$, $d_{1(1,1)} = 0$, $d_{1(0,2)} = -1$, $d_{2(2,0)} = 0$, $d_{2(1,1)} = 3$ y $d_{2(0,2)} = 9$, también $\lambda_{(2,0)} = 3^2 2^0$, $\lambda_{(1,1)} = 3^1 2^1$ y $\lambda_{(0,2)} = 3^0 2^2$.

Por lo tanto

$$y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{x_1^2}{2} + x_2^2 \\ -\frac{3}{4}x_1x_2 - \frac{9}{2}x_2 \end{pmatrix},$$

luego como

$$\bar{y} = \bar{x} + \varphi_2(\bar{x})$$

con

$$\varphi_2(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2}x_1^2 + 4x_2^2 - 3x_1^3 + 7x_1x_2^2 + 36x_2^3 - \frac{9}{2}x_1^4 + 12x_1^2x_2^2 + 54x_1x_2^3 + \frac{161}{2}x_2^4 \\ -\frac{9}{2}x_1x_2 - 18x_2^2 - \frac{45}{4}x_1^2x_2 - \frac{243}{4}x_1x_2^2 - \frac{639}{4}x_2^3 - \frac{27}{4}x_1^3x_2 - \frac{243}{4}x_1^2x_2^2 - \frac{963}{4}x_1x_2^3 - \frac{621}{4}x_2^4 \end{pmatrix},$$

reemplazando obtenemos

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_1(x) \\ o_2(x) \end{pmatrix},$$

donde

$$o(x) = \begin{pmatrix} -3x_1^3 + 7x_1x_2^2 + 36x_2^3 - \frac{9}{2}x_1^4 + 12x_1^2x_2^2 + 54x_1x_2^3 + \frac{161}{2}x_2^4 \\ -\frac{45}{4}x_1^2x_2 - \frac{243}{4}x_1x_2^2 - \frac{639}{4}x_2^3 - \frac{27}{4}x_1^3x_2 - \frac{243}{4}x_1^2x_2^2 - \frac{963}{4}x_1x_2^3 - \frac{621}{4}x_2^4 \end{pmatrix}.$$

3. Teorema de la Variedad Estable y Central

En esta sección mostraremos la demostración del teorema de la variedad estable de Irwin expuesta en [19]. También presentaremos el Teorema de la Variedad Central para difeomorfismos que son contracciones en el plano. El Teorema de la Variedad Central es una herramienta fundamental para hacer la demostración del Teorema de Zhang-Zhang en [20].

Se sabe que para demostrar el teorema de la variedad estable son importantes dos cosas; primero que se debe conocer la existencia de la variedad inestable y segundo que el difeomorfismo que se da sea invertible. La demostración que daremos en esta sección, que fue propuesta por Irwin, no se necesita conocer de ante mano ninguna de esas dos hipótesis.

Sea $E = E_1 \oplus E_2$ espacio de Banach con un automorfismo T el cual preserva la descomposición. Suponemos que T es hiperbólica, en particular, que contrae en E_1 y expande en E_2 . En otras palabras, para algún λ , $0 < \lambda < 1$ tenemos

$$\|T_1\| < \lambda, \quad \|T_2^{-1}\| < \lambda, \quad \text{donde, } T_i = T|_{E_i}. \quad (3.1)$$

Diremos que E está dotado por la norma $\|\cdot\|$ dada por

$$\|x\| = \sup\{x\}, \quad \text{para todo } x \in E$$

y que $p_i = p|_{E_i}$, $f_i = p_i \circ f$ y que $E_i(r) = \{x \in E_i / \|x\| < r\}$.

Definición 3.1. Una función $f : X \rightarrow X$, donde X es un espacio de Banach dotado de la norma $\|\cdot\|$, es una función Lipschitz si existe $K > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

K se dirá constante de Lipschitz.

Observación 3.2. Dada dos funciones Lipschitz cualquiera F y G tal que si la constante de Lipschitz de F es menor que la de G , daremos como notación que:

$$Lip(F) < Lip(G)$$

Lema 3.3. Sea F un espacio de Banach, X un espacio métrico y f, g dos aplicaciones continuas desde X a F . Suponga que f es inyectiva y que f^{-1} es Lipschitz. Si g satisface que $Lip(f - g) < [Lip(f^{-1})]^{-1}$, entonces g también es inyectiva y

$$\begin{aligned} Lip(g^{-1}) &\leq ([Lip(f^{-1})]^{-1} - Lip(f - g))^{-1} \\ &= Lip(f^{-1}) / (1 - Lip(g - f)Lip(f^{-1})). \end{aligned}$$

Demostración

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(y)\| &\geq \|f(x) - f(y)\| - \|(g - f)(x) - (g - f)(y)\| \\ &\geq [[Lip(f^{-1})]^{-1} - Lip(f - g)]d(x, y). \end{aligned}$$

♣

Lema 3.4. Si $f : E(r) \times E_2(r) \rightarrow E$ es una perturbación de Lipschitz de T con $Lip(f - T) \leq \varepsilon < 1 - \lambda$, entonces si $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ son puntos en $E_1(r) \times E_2(r)$ con

$$\|x_1 - y_1\| < \|x_2 - y_2\|,$$

entonces

$$\begin{aligned} \|f_1(x) - f_1(y)\| &\leq (\lambda + \varepsilon)\|x_1 - y_1\| \\ &< (\lambda^{-1} - \varepsilon)\|f_2(x) - f_2(y)\|. \end{aligned}$$

Demostración Para la primera desigualdad observemos que

$$\begin{aligned} \|f_1(x) - f_1(y)\| &\leq \|p_1(f - T)(x) - p_1(f - T)(y) + T_1(x_1) - T_1(y_1)\| \\ &\leq \|p_1(f - T)(x) - p_1(f - T)(y)\| + \|T_1(x_1) - T_1(y_1)\| \\ &\leq \varepsilon\|x - y\| + \lambda\|x_1 - y_1\| \\ &\leq (\lambda + \varepsilon)\|x_1 - y_1\|. \end{aligned}$$

Y para la última desigualdad observemos que

$$\begin{aligned} \|f_2(x) - f_2(y)\| &\geq \|-(p_2(f - T)(x) - p_2(f - T)(y) + T_2(x_2) - T_2(y_2))\| \\ &\geq \|T_2(x_2) - T_2(y_2)\| - \|p_2(f - T)(x) - p_2(f - T)(y)\| \\ &\geq \lambda^{-1}\|x_2 - y_2\| - \varepsilon\|x - y\| \\ &\geq (\lambda^{-1} - \varepsilon)\|x_2 - y_2\| \end{aligned}$$

Del hecho que $\lambda - \varepsilon < 1 < \lambda^{-1} < \lambda^{-2} - \varepsilon$ obtenemos el resultado. ♣

Definición 3.5. Para $f : E(r) \times E_2(r) \rightarrow E$ y $r \geq r' > 0$ definimos $W_r^s(f)$ como

$$W_r^s(f) = \{x \in E_1(r') \times E_2(r') / \text{ para todo } n \geq 0, f^n(x) \text{ esta definida y, } ||f^n(x)|| \leq r\}$$

Corolario 3.6. Para $f : E(r) \times E_2(r) \rightarrow E$ con $Lip(f - T) < \varepsilon < 1 - \lambda$ el conjunto $W_r^s(f)$ es el gráfico de la función $g : A \rightarrow E_2(r)$, donde A es la proyección de $W_r^s(f)$ en $E_1(r)$. Además g es Lipschitz con $Lip(g) \leq 1$ y $f|_{W_r^s(f)}$ contrae distancias. Por lo tanto, f tiene a lo más un punto fijo el cual, si existe, atrae todos los otros puntos de $W_r^s(f)$.

Demostración Sean $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$ dos puntos cualquiera en $W_r^s(f)$. La afirmación acerca de g es lo mismo que demostrar que $||x_2 - y_2|| \leq ||x_1 - y_1||$.

Suponga por contradicción que $||x_2 - y_2|| > ||x_1 - y_1||$, entonces por el lema anterior (3.4) tendríamos

$$||f_2(x) - f_2(y)|| \geq (\lambda^{-1} - \varepsilon)||x_2 - y_2||$$

y por inducción, para todo $n \geq 1$

$$||f_2^n(x) - f_2^n(y)|| \geq (\lambda^{-1} - \varepsilon)^n ||x_2 - y_2||.$$

Ya que $(\lambda^{-1} - \varepsilon)^n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ ($\lambda^{-1} - \varepsilon > 1$), tendríamos que concluir que $||x_2 - y_2|| = 0$, pues $||f_2^n(x) - f_2^n(y)|| \leq 2r$, que es una contradicción a nuestra suposición. Por lo tanto $||x_2 - y_2|| \leq ||x_1 - y_1||$.

Ahora, debemos mostrar que $f|_{W_r^s(f)}$ es una contracción. De lo anterior, conocemos que para $x, y \in W_r^s(f)$ tenemos $||x - y|| = ||x_1 - y_1||$. Además ya que $f(W_r^s(f)) \subset W_r^s(f)$, también tenemos $||f(x) - f(y)|| = ||f_1(x) - f_2(y)||$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} ||f(x) - f(y)|| &= ||f_1(x) - f_2(y)|| \\ &\leq ||(f_1 - T_1)(x) - (f_1 - T_1)(y)|| + ||T_1(x_1) - T_1(y_1)|| \\ &\leq \varepsilon ||x - y|| + \lambda ||x_1 - y_1|| = (\lambda + \varepsilon) ||x - y|| \end{aligned}$$

Como $(\lambda + \varepsilon) < 1$ entonces $f|_{W_r^s(f)}$ es una contracción.♣

Teorema 3.7. (De la Variedad Estable de Irwin) Sea $T : E \rightarrow E$ un automorfismo hiperbólico tal que cumple (3.1). Existe un $\varepsilon > 0$, que depende sólo de λ, y , para todo

$r > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $f : E_1(r) \times E_2(r) \rightarrow E$ satisface que $\text{Lip}(f - t) < \varepsilon$ y $\|f(0)\| < \delta$, entonces $W_r^s(f)$ es el gráfico de una función Lipschitz $g : E_1(r) \rightarrow E_2(r)$ con $\text{Lip}(g) \leq 1$. Además si f es C^k entonces g también lo es.

Demostración Para $x \in W_r^s(f)$ la sucesión $\gamma = \{\gamma(n)/n \geq 1, \gamma(n) = f^n(x)\}$ satisface las siguientes condiciones:

1. $\|\gamma\| \leq r$,
2. $f(\gamma(n)) - \gamma(n+1) = 0$ para todo $n \geq 1$,
3. $f(x) - \gamma(1) = 0$.

Inversamente si un punto $x \in E(r)$ y una sucesión $(\gamma(n))_{n \geq 1}$ satisfacen esas condiciones, entonces $x \in W_r^s(f)$ y $\gamma(n) = f^n(x)$. Para desarrollar esta idea debemos introducir alguna notación.

Sea $\mathbf{B} = \{\gamma/\gamma = (\gamma(n))_{n \geq 1}, \gamma(n) \in E, \sup_{n \geq 1} \|\gamma(n)\| < \infty\}$. Con la norma $\|\gamma\| = \sup_{n \geq 1} \|\gamma(n)\|$, $\mathbf{B}$ es un espacio de Banach. Sea $\mathbf{B}(r)$ la bola cerrada de radio r en $\mathbf{B}$. Dotamos a $E \times \mathbf{B}$ y $E_1 \times \mathbf{B}$ con la norma del supremo inducida por E_1 , E , y $\mathbf{B}$.

Ahora definamos la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbf{F} : E_1(r) \times E_2(r) \times \mathbf{B}(r) &\rightarrow E_1 \times \mathbf{B} \\ \mathbf{F} : (x_1, x_2, \gamma) &\rightarrow (x_1, \mathbf{F}_{x_1}(\gamma)), \end{aligned}$$

donde $\mathbf{F}_{x_1} : E_2(r) \times \mathbf{B}(r) \rightarrow \mathbf{B}$ es definida como

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{x_1}(\gamma)(1) &= f(x_1, x_2) - \gamma(1) \\ \mathbf{F}_{x_1}(\gamma)(n) &= f(\gamma(n-1)) - \gamma(n) \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Si mostramos que $\mathbf{F}$ es invertible y que su imagen contiene $E_1(r) \times 0$ podemos definir g por $g = \Pi_2 \mathbf{F}^{-1}|_{E_1(r) \times 0}$, donde Π_2 es la proyección de $E_1 \times E_2 \times \mathbf{B}$ sobre E_2 . Usaremos, por supuesto, el teorema de la función inversa de Lipschitz para hacer esto.

Definamos $\mathbf{T}$ de forma análoga a $\mathbf{F}$, con T en lugar de f . $\mathbf{T}$ es claramente un operador lineal y continuo con $\|\mathbf{T}\| \leq 1 + \|T\|$ y $\text{Lip}(\mathbf{F} - \mathbf{T}) \leq \text{Lip}(f - T)$. Consecuentemente si mostramos que $\mathbf{T}$ es invertible y $\text{Lip}(f - T) \leq \|\mathbf{T}^{-1}\|^{-1}$, entonces $\mathbf{F}$ también es invertible.

$\mathbf{T}$ es invertible

$\mathbf{T}$ es definida explícitamente por $\mathbf{T}(x_1, x_2, \gamma) = (x, \nu)$ donde

$$\begin{aligned}\nu(1) &= \mathbf{T}_{x_1}(\gamma)(1) = T(x_1, x_2) - \gamma(1) \\ \nu(n) &= \mathbf{T}_{x_1}(\gamma)(n) = T(\gamma(n-1)) - \gamma(n) \quad n \geq 2.\end{aligned}$$

Necesitamos expresar x_2 y γ en términos de x_1 y ν . Escribiremos $\gamma(n) = (\gamma_1(n), \gamma_2(n)) \in E_1 \times E_2$, $\nu(n) = (\nu_1(n), \nu_2(n)) \in E_1 \times E_2$; Luego

$$\nu_1(1) = T_1(x_1) - \gamma_1(1)$$

$$\nu_2(1) = T_2(x_1) - \gamma_2(1)$$

$$\nu_1(n) = T_1(x_1) - \gamma_1(n), \quad n \geq 2,$$

$$\nu_2(n) = T_2(x_1) - \gamma_2(n), \quad n \geq 2.$$

La primera y la tercera ecuación debe ser escrita como

$$\gamma_1(1) = -\nu_1(1) + T_1(x_1),$$

$$\gamma_1(n) = T_1(\gamma_1(n-1)) - \nu_1(n), \quad n \geq 2,$$

que reemplazando sucesivamente nos da

$$\gamma_1(n) = - \left[\sum_{j=1}^n T_1^{n-j}(\nu_1(j)) \right] + T_1^n(x_1)$$

La cuarta ecuación está dada por

$$\begin{aligned}\gamma_2(n-1) &= T_2^{-1}[\nu_2(n) + \gamma_2(n)] \\ &= T_2^{-1}[\nu_2(n) + T_2^{-1}(\nu_2(n+1) + \gamma_2(n+1))] \\ &= \dots\end{aligned}$$

Así, en el limite

$$\gamma_2(n) = \sum_{j=1}^{\infty} T_2^{-j}(\nu(n+j)).$$

Finalmente para la segunda ecuación

$$x_2 = \sum_{j=1}^{\infty} T_2^{-j}(\nu(j)).$$

Estas series son todas convergentes pues $\|T_2^{-1}\| < 1$ y $\sup_{n \geq 1} \|\gamma(n)\| < \infty$. Así, tenemos establecida la inversa de $\mathbf{T}$ como

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^{-1} : E_1 \times \mathbf{B} &\rightarrow E_1 \times E_2 \times \mathbf{B} \\ \mathbf{T}^{-1}(x_1, \nu) &\rightarrow (x_1, x_2, \gamma),\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}x_2 &= \sum_{j=1}^{\infty} T_2^{-j}(\nu(j)), \\ \gamma_1(n) &= T_1^n(x_1) - \sum_{j=1}^n T_1^{n-j}(\nu_1(j)), \\ \gamma_2(n) &= \sum_{j=1}^{\infty} T_2^{-j}(\nu(n+j)),\end{aligned}$$

y uno puede verificar fácilmente que $\|\mathbf{T}^{-1}\| \leq (1 - \lambda)^{-1}$, luego como $\text{Lip}(\mathbf{F} - \mathbf{T}) \leq \text{Lip}(f - T) < \varepsilon < (1 - \lambda) < \|\mathbf{T}^{-1}\|^{-1}$, Entonces $\mathbf{F}$ es invertible.

La imagen de $\mathbf{F}$ contiene a $E_1 \times \{0\}$ cuando ε y $f(0)$ son pequeños.

Note que la imagen de $\mathbf{F}$ contiene a $(x_1, 0)$ si y sólo si la imagen de $\mathbf{F}_{x_1}$ contiene a 0. Además, $\mathbf{F}_{x_1}$ es una perturbación de Lipschitz de $\mathbf{T}_{x_1}$ y $\text{Lip}(\mathbf{F}_{x_1} - \mathbf{T}_{x_1}) \leq \text{Lip}(f - T)$. Ya que $\mathbf{T}_{x_1}$ difiere de $\mathbf{T}_0$ sólo por una traslación tenemos, en efecto, que $\text{Lip}(\mathbf{F}_{x_1} - \mathbf{T}_0) \leq \text{Lip}(f - T)$.

Ahora ya que el operador lineal $\mathbf{T}_0 : E_2 \times \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ es definido por

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_0(\gamma)(1) &= T(0, x_2) - \gamma(1) \\ \mathbf{T}_0(\gamma)(n) &= T(\gamma(n-1)) - \gamma(n), \quad n \geq 2,\end{aligned}$$

vemos que $\mathbf{T}$ es invertible y tiene inversa

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_0^{-1} : \mathbf{B} &\rightarrow E_2 \times \mathbf{B} \\ \mathbf{T}_0^{-1}(\nu) &\rightarrow (x_2, \nu),\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}x_2 &= \sum_{j=1}^{\infty} T_2^{-j}(\nu(j)), \\ \gamma_1(n) &= - \sum_{j=1}^n T_1^{n-j}(\nu_1(j)),\end{aligned}$$

$$\gamma_2(n) = \sum_{j=1}^{\infty} T_2^{-j}(\nu(n+j)),$$

$$y \parallel \mathbf{T}_0^{-1} \parallel \leq (1-\lambda)^{-1}.$$

Si $\text{Lip}(f - T) < \varepsilon < 1 - \lambda$ vemos que $\text{Lip}(\mathbf{T}_0^{-1} \mathbf{F}_{x_1} - Id) \leq \varepsilon/(1-\lambda)$ y usando el Lema 3.3

$$\mathbf{T}_0^{-1} \mathbf{F}_{x_1}[E_2(r) \times \mathbf{B}(r)] \supset \mathbf{T}_0^{-1} \mathbf{F}_{x_1}(0) + E_2(s) \times \mathbf{B}(s),$$

donde $s = r(1 - \frac{\varepsilon}{1-\lambda})$.

Ahora calculamos $\parallel \mathbf{T}_0^{-1} \mathbf{F}_{x_1}(0) \parallel$. Primero, para todo $\mathbf{F}_{x_1}(0) = \nu$, donde $\nu(1) = f(x_1, 0)$ y $\nu(n) = f(0, 0)$. Consecuentemente, $\mathbf{T}_0^{-1} \mathbf{F}_{x_1}(0) = (x_2, \gamma)$, donde

$$x_2 = T_2^{-1}[f_2(x_1, 0)] + \sum_{j=2}^{\infty} T_2^{-j}[f_2(0, 0)],$$

$$\gamma_1(n) = -T_1^{n-1}[f_1(x_1, 0)] - \sum_{j=2}^n T_1^{n-j}[f_1(0, 0)],$$

$$\gamma_2(n) = \sum_{j=1}^{\infty} T_2^{-j}[f_2(0, 0)].$$

Ahora podemos estimar

$$\begin{aligned} \parallel f_1(x_1, 0) \parallel &\leq \parallel p_1(f - T)(x_1, 0) \parallel + \parallel T_1 x_1 \parallel \\ &\leq \parallel (f - T)(x_1, 0) \parallel + \lambda \parallel x_1 \parallel, \end{aligned}$$

análogamente

$$\parallel f_2(x_1, 0) \parallel \leq \parallel (f - T)(x_1, 0) \parallel,$$

y además

$$\begin{aligned} \parallel (f - T)(x_1, 0) \parallel &\leq \parallel (f - T)(0) \parallel + \parallel (f - T)(x_1, 0) - (f - T)(0) \parallel \\ &\leq \parallel f(0) \parallel + \varepsilon \parallel x_1 \parallel. \end{aligned}$$

Para esto estimamos $\parallel \mathbf{T}_0^{-1} \mathbf{F}_{x_1}(0) \parallel$ como sigue:

$$\parallel x_2 \parallel \leq \varepsilon \lambda \parallel x_1 \parallel + \frac{\lambda}{1-\lambda} \parallel f(0) \parallel,$$

$$\begin{aligned} \|\gamma_1(n)\| &\leq \lambda^n \|x_1\| + \varepsilon \lambda^{n-1} \|x_1\| + \lambda^{n-1} \|f(0)\| + \sum_{j=2}^{\infty} \lambda^{n-j} \|f(0)\| \\ &\leq \|x_1\| (la + \varepsilon) + \frac{1}{1-\lambda} \|f(0)\|, \end{aligned}$$

$$\gamma_2(n) \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} \|f(0)\|,$$

así

$$\|\mathbf{T}_0^{-1} \mathbf{F}_{x_1}(0)\| \leq (\lambda + \varepsilon)r + \frac{1}{1-\lambda} \|f(0)\|.$$

ya que la imagen de $\mathbf{T}_0^{-1} \mathbf{F}_{x_1}$ contiene la bola al rededor de $\mathbf{T}_0^{-1} \mathbf{F}_{x_1}(0)$ de radio $s = r(1 - \frac{\varepsilon}{1-\lambda})$, ella contiene a 0 cuando $(\lambda + \varepsilon)r + 1/(1-\lambda) \|f(0)\| < r(1 - \varepsilon/(1-\lambda))$. Podemos reescribir la desigualdad como

$$\|f(0)\| < (1-\lambda)r \left(1 - \lambda - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{1-\lambda}\right) = r[(1-\lambda)^2 - \varepsilon(2-\lambda)].$$

Suponga entonces que $\varepsilon < (1-\lambda)^2/(2-\lambda) < 1-\lambda$ y tomando $\delta > 0$ tal que $\delta < r[(1-\lambda)^2 - \varepsilon(2-\lambda)]$; si $\text{Lip}(f-T) < \varepsilon$ y $\|f(0)\| < \delta$, hemos mostrado que $\|\mathbf{T}_0^{-1} \mathbf{F}_{x_1}\|$ contiene al 0. Ya que $\|\mathbf{T}_0$ es lineal, la imagen de $\|\mathbf{F}_{x_1}\|$ contiene al 0 también. Así la imagen de $\mathbf{F}$ contiene a $E_1 \times 0$ como se desea.

Mirando hacia atrás sobre lo que hemos hecho, vemos que tenemos que mostrar en este punto que:

Si $\text{Lip}(f-T) < \varepsilon < (1-\lambda)^2/(2-\lambda)$ y $\|f(0)\| < \delta < r[(1-\lambda)^2 - \varepsilon(2-\lambda)]$, entonces $W_r^s(f)$ es el gráfico de una función Lipschitz $g = \Pi_2 \mathbf{F}^{-1}|_{E_1(r) \times 0} : E_1(r) \rightarrow E_2(r)$ con $\text{Lip}(g) \leq 1$.

Para finalizar la demostración del teorema de la variedad estable sólo necesitamos:

g es C^k cuando f es C^k .

Para mostrar que g es C^k claramente sólo necesitamos mostrar que $\mathbf{F}^{-1}$ lo es. Ya que $\text{Lip}(\mathbf{F} - \mathbf{T}) < \|\mathbf{T}^{-1}\|^{-1}$, si $\mathbf{F}$ es C^1 tenemos que para todo $(x, \gamma) \in E(r) \times \mathbf{B}(r)$,

$$\|D\mathbf{F}_{(x,\gamma)} - \mathbf{T}\| < \|\mathbf{T}^{-1}\|^{-1}.$$

Esto significa que $D\mathbf{F}_{(x,\gamma)}$ es un isomorfismo lineal para $(x, \gamma) \in E(r) \times \mathbf{B}(r)$, así el teorema de la función inversa C^k muestra que $\mathbf{F}^{-1}$ es C^k cuando $\mathbf{F}$ lo es.

Reduciremos la demostración a mostrar que $\mathbf{F}$ es C^k cuando f lo es. Desafortunadamente $\mathbf{B}$ es demasiado grande para que esto sea posible, pero esto es una dificultad que podemos superar.

Note que el candidato obvio para la derivada de $\mathbf{F}$ en el punto $(x, \gamma) = (x_1, x_2, \gamma)$ de $E(r) \times \mathbf{B}(r)$ es la aplicación lineal

$$\begin{aligned}\mathbf{L} : E_1 \times E_2 \times \mathbf{B} &\rightarrow E_1 \times \mathbf{B} \\ \mathbf{L}(y_1, y_2, \nu) &\rightarrow (y_1, \varsigma),\end{aligned}$$

donde

$$\varsigma(1) = Df_x(y) - \nu(1) \quad \text{con } y = (y_1, y_2),$$

$$\varsigma(n) = Df_{\gamma(n-1)}[\nu(n-1)] - \nu(n), \quad n \geq 2.$$

Tenemos $\mathbf{F}(x + y, \gamma + \nu) - \mathbf{F}(x, \gamma) - \mathbf{L}(y, \nu) = (0, \varphi) \in E_1 \times \mathbf{B}$, donde

$$\varphi(1) = f(x + y) - f(y) - Df_x(y) = \int_0^1 (Df_{x+ty} - Df_x)(y) dt,$$

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= f[\gamma(n-1) + \nu(n-1)] - f(\gamma(n-1)) - Df_{\gamma(n-1)}(\nu(n-1)) \\ &= \int_0^1 (Df_{\gamma(n-1)+t\nu(n-1)} - Df_{\gamma(n-1)})(\nu(n-1)) dt \quad n \geq 2.\end{aligned}$$

Esto muestra que el cociente

$$\frac{\|\mathbf{F}(x + y, \gamma + \nu) - \mathbf{F}(x, \gamma) - \mathbf{L}(y, \nu)\|}{\|(y, \nu)\|}$$

está acotado superiormente por

$$\max \left(\int_0^1 \|Df_{x+ty} - Df_x\| dt, \sup_{n \geq 1} \int_0^1 \|Df_{\gamma(n)+t\nu(n)} - Df_{\gamma(n)}\| dt \right).$$

El apoyo de todas esas integrales no necesariamente tienden a cero con $\|(y, \nu)\|$, ya que $\mathbf{B}$ no es localmente compacto y Df no es necesariamente uniformemente continua. Si supiéramos que $\{\gamma(n)/n \geq 1\}$ estuvieran contenida en un subconjunto compacto de $E(r)$, en particular, si $\gamma(n)$ convergiera entonces el apoyo tendería a cero con $\|(y, \nu)\|$. Esto conduce a considerar el espacio $\mathbf{C}$ de todas las sucesiones convergentes:

$$\mathbf{C} = \{\gamma \in \mathbf{B} / \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(n) \text{ existe}\}.$$

Ya que E es completo $\mathbf{C}$ es también el subespacio de todas las sucesiones de Cauchy, uno puede fácilmente convencerse que $\mathbf{C}$ es cerrado en $\mathbf{B}$. Luego $\mathbf{C}$ mismo es un espacio de Banach.

Note que $\mathbf{F}(E_1(r) \times E_2(r) \times \mathbf{C}(r)) \subset E_1(r) \times \mathbf{C}$ por lo que tiene sentido considerar la restricción $\tilde{\mathbf{F}}$ de $\mathbf{F}$ a $E_1(r) \times E_2(r) \times \mathbf{C}(r)$ y definimos $\tilde{\mathbf{T}}$ similarmente como la aplicación inducida por $\mathbf{T}$. Tenemos esencialmente que demostrar que $\tilde{\mathbf{F}}$ es C^k cuando $\mathbf{F}$ lo es.

Siempre que sabemos $\tilde{\mathbf{T}}$ es invertible, podemos ahora repetir nuestra construcción previa de g con $\tilde{\mathbf{F}}$, $\tilde{\mathbf{T}}$ y $\mathbf{C}$ en lugar de $\mathbf{F}$, $\mathbf{T}$ y $\mathbf{B}$, es decir, que $\mathbf{T}^{-1}(E_1 \times \mathbf{C}) \subset E_1 \times E_2 \times \mathbf{C}$. Esto se procede a comprobar.

Sea (x, ν) en $E_1 \times \mathbf{C}$ y recalquemos que $\mathbf{T}^{-1}(x, \nu) = (x_1, x_2, \gamma)$ es dada por

$$x_2 = \sum_{j=1}^{\infty} T_2^{-j}[\nu_2(n)],$$

$$\gamma_1(n) = T_1^n(x_1) - \sum_{j=1}^n T_1^{n-j}[\nu_1(n)],$$

$$\gamma_2(n) = \sum_{j=1}^{\infty} T_2^{-j}[\nu_2(n+j)].$$

Para mostrar que γ pertenece a $\mathbf{C}$ mostraremos que γ_1 y γ_2 son de Cauchy. Primero γ_1 :

$$|\gamma_1(n) - \gamma_1(m)| \leq \left\| \sum_{j=1}^n T_1^{n-j}[\nu_1(j)] - \sum_{j=1}^m T_1^{m-j}[\nu_1(j)] \right\| + \|T_1^n(x_1) - T_1^m(x_1)\|.$$

Ya que $\|T_1\| < \lambda < 1$, el termino $\|T_1^n(x_1) - T_1^m(x_1)\|$ tiende a cero cuando n y m tienden a ∞ .

Como por el otro término:

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=1}^n T_1^{n-j}[\nu(j)] - \sum_{j=1}^m T_1^{m-j}[\nu(j)] \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=0}^{n-1} T^k[\nu_1(n-k)] - \sum_{k=0}^{m-1} T^k[\nu_1(m-k)] \right\| \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \right) \sup_{\substack{h \geq n-N \\ l \geq m-N}} \|\nu_1(h) - \nu_1(l)\| + 2 \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda^k \right) \|\nu_1\|. \end{aligned}$$

Para cualquier $\varepsilon > 0$ podemos encontrar N_0 suficientemente grande de modo que

$$\sup_{\substack{h \geq N_0 \\ l \geq N_0}} \|\nu_1(h) - \nu_1(l)\| \leq \frac{1-\lambda}{1} \varepsilon$$

y

$$\sum_{k=N_0+1}^{\infty} \lambda^k < \frac{\varepsilon}{4\|\nu_1\|}$$

que nos dice que, para n y $m \geq 2N_0$,

$$\left\| \sum_{j=1}^n T_1^{n-j}[\nu(j)] - \sum_{j=1}^m T_1^{m-j}[\nu(j)] \right\| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \right) \frac{1-\lambda}{2} \varepsilon + \frac{2\varepsilon\|\nu_1\|}{4\|\nu_1\|} = \varepsilon.$$

Así, hemos mostrado que γ_1 es de Cauchy.

El caso de γ_2 es más fácil, podemos estimar

$$\|\gamma_2(n) - \gamma_2(m)\| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j \right) \sup_{j \geq 1} \|\nu_2(n+j) - \nu_2(m+j)\|,$$

así ya que la sucesión ν_2 es de Cauchy, también lo es γ_2 .

En consecuencia g puede ser definida como $g = \tilde{\Pi}_2 \tilde{\mathbf{F}}^{-1}|_{E_1 \times 0}$, donde $\tilde{\Pi}_2$ es la proyección de $E_1 \times E_2 \times \mathbf{C}$ a E_2 . Puesto que hemos mostrado anteriormente que g es tan suave como lo es $\tilde{\mathbf{F}}$ el cual es tan suave como lo es f , esto finaliza la demostración del Teorema de la Variedad Estable. ♣

El siguiente Lema es un Corolario del Teorema de la Variedad Estable (3.7)

Lema 3.8. *Teorema de la Variedad Central* Suponga que $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una $C^{1,\zeta}$ contracción ($0 < \zeta \leq 1$) y que los dos autovalores λ_1 y λ_2 de $F'(0)$ satisfacen (1.5). Entonces existe un disco cerrado $V \subset \Omega$ centrado en 0 tal que F tiene una curva $C^{1,\zeta}$ invariante

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) \in V / x_1 = g(x_2)\},$$

donde $g : V \cap \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es $C^{1,\zeta}$ y $g(0) = g'(0) = 0$, si la contante ζ satisface que $0 < \zeta < \alpha_1$ donde α_1 es dado en (1.3).

Demostración

Sea la norma $\|\cdot\|_{C^{1,\zeta}}$ definida como

$$\|\varphi\|_{C^{1,\zeta}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \|\varphi'(x)\| + \sup_{x, \Delta \in \mathbb{R}} \frac{\|\varphi(x + \Delta) - \varphi(x) - \varphi'(x)\Delta\|}{\|\Delta\|^{1+\zeta}}$$

para toda aplicación $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $C^{1,\zeta}$. Sean S_1 y S_2 que denotan las axisa de x_1 y x_2 respectivamente, los cuales son obviamente subespacios cerrados de $\mathbb{R}^2$ invariantes bajo $F'(0)$ y satisfacen que $\mathbb{R}^2 = S_1 \oplus S_2$. Entonces uno puede chequear que existe una constante $a > 1$ tal que la expansión F^{-1} satisface las siguientes afirmaciones:

1. $F^{-1}(0) = 0$;

Pues 0 es un punto fijo

2. $\|F'(0)|_{s_1}\| = |\lambda_1| < a^{-(1+\zeta)}$;

Es claro que $\|F'(0)|_{s_1}\| = |\lambda_1|$ y a demás $|\lambda_1| < |\lambda_2|^{1+\zeta}$, pues $0 < \zeta$ y de (1.5). Existe un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $|\lambda_1| < (|\lambda_2| - \varepsilon)^{1+\zeta}$, haciendo $a = \frac{1}{|\lambda_2| - \varepsilon}$ que claramente es mayor que cero, obtenemos lo que queremos.

3. $\|(F^{-1})'(0)|_{s_2}\| = |\lambda_2|^{-1} < a$

Análogamente, es claro que $\|(F^{-1})'(0)|_{s_2}\| = |\lambda_2|^{-1}$, $|\lambda_2|^{-1} < (|\lambda_2| - \varepsilon)^{-1}$ y $a = \frac{1}{|\lambda_2| - \varepsilon}$, demostramos la afirmación.

4. existen aplicaciones $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $H(x) = F^{-1}(x)$ cerca de 0 y $\|\tilde{H}\|_{C^{1,\zeta}} = \|H(x) - H'(0)x\|_{C^{1,\zeta}}$ es suficientemente pequeño

Este ítem se puede probar por la elección de una bump function apropiada sobre $\mathbb{R}^2$ (es una función suave con soporte compacto).

En efecto, podemos considerar la aplicación $\tilde{H}$ definida por $\tilde{H} = \phi(\eta x)H(x) + (1 - \phi(\eta x))H'(0)x$, donde ϕ es tal bump function. Observemos que por la elección de η suficientemente grande, 4 se cumple. Además, ya que en una vecindad U del origen $\tilde{H} = H$ la curva Γ que se obtiene aplicando el Teorema 3.7 a $\tilde{H}$ será invariante bajo H en una pequeña vecindad del origen. Entonces por Teorema 3.7 la aplicación H tiene una curva invariante $C^{1,\zeta}$ sobre $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto F^{-1} tiene una curva invariante $C^{1,\zeta}$ sobre un disco cerrado $V \subset \Omega$ centrado en 0, el cual es tangente a la axisa x_2 para 0. También lo hace F . ♣

4. Linealización C^1 de F

Nuestro objetivo, en esta sección, es encontrar un difeomorfismo ϕ de clase C^1 cerca de 0 tal que cumpla la ecuación (1.1). Más específicamente, presentaremos un resultado para el caso de contracciones diferenciables con constante de Hölder α ($C^{1,\alpha}$) en $\mathbb{R}^2$, la cual establece que para algún $\alpha > \alpha_0 = 1 - \log |\lambda_2| / \log |\lambda_1|$ admiten linealización C^1 si λ_1 y λ_2 son las partes reales de los autovalores asociados al punto fijo 0 y satisfacen (1.5).

Observación 4.1. *Si existe tal difeomorfismo ϕ , S siempre es similar a $DF(0)$. En efecto, 0 es un punto fijo de F ($F(0) = 0$), entonces*

$$\phi \circ F(x) = S \circ \phi(x).$$

Derivando la igualdad anterior en el origen, obtenemos

$$D\phi(F(0)) \circ DF(0) = DS(\phi(0)) \circ D\phi(0).$$

La última expresión es equivalente a

$$D\phi(0) \circ DF(0) \circ [D\phi(0)]^{-1} = S.$$

Por lo tanto S es similar a $DF(0)$.

Como o habíamos mencionado buscamos linealización C^1 para contracciones en el plano, entonces podemos asumir que $S = F'(0)$. Ya que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ por (1.5), suponemos además que S es de la forma diagonal, es decir,

$$S = F'(0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

En lo que sigue para $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, definimos la norma $\|\cdot\|$ como

$$\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$

Teorema 4.2. de Zhang-Zhang

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ una vecindad del origen y $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ una contracción $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, siendo 0 un punto fijo. Asumamos que los dos autovalores λ_1 y λ_2 de $F'(0)$ satisfacen (1.5) y que

$$\alpha > \alpha_0 = 1 - \frac{\log |\lambda_2|}{\log |\lambda_1|}. \quad (4.1)$$

Entonces existe una vecindad $U \subset \Omega$ de 0 y un difeomorfismo $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 tal que F admite una linealización C^1 en una vecindad del origen.

El número α_0 dado en el Teorema de Zhang-Zhang es una cota inferior del exponente de Hölder α para la linealización C^1 . Obviamente $\alpha_0 < 1$. Se sigue inmediatamente que la contracción $C^{1,1}$ del plano admite linealización C^1 ($C^{1,\beta}$) local, como lo establece Hartman y que contracción C^{1,α_1} obtiene linealización C^1 (C^{1,α_1}) como lo indica Chaperon. Además uno puede chequear que $\alpha_0 < \alpha_1$ por (1.5), lo cual implica que la condición (4.1) es mas fina que la condición (1.3), pero obtiene una linealización mas débil de la que da Chaperon. Por lo tanto el Teorema (4.2) de Zhang y Zhang sólo extiende los resultados mencionados en [5] y [7] para el plano.

Demostración del Teorema (4.2) Como lo comentamos en la introducción de la tesis, Chaperon probó que una contracción $C^{1,\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$) F en un espacio de Banach es linealizable $C^{1,\alpha}$ para $\alpha \in (\alpha_1, 1]$ con α_1 como lo indica en (1.3). En particular para ese $\alpha > \alpha_1$ la linealización es C^1 .

Además, observemos que ser $C^{1,\alpha}$ implica $C^{1,\bar{\alpha}}$ cerca del origen 0 para $\bar{\alpha} < \alpha$. En efecto, como

$$\frac{\|F'(x) - F'(y)\|}{\|x - y\|^\alpha} \leq k$$

y

$$\frac{\|F'(x) - F'(y)\|}{\|x - y\|^{\bar{\alpha}}} < \frac{\|F'(x) - F'(y)\|}{\|x - y\|^\alpha},$$

pues $\bar{\alpha} < \alpha < 1$ cerca del origen 0, entonces

$$\frac{\|F'(x) - F'(y)\|}{\|x - y\|^{\bar{\alpha}}} \leq k.$$

Lo que queremos probar que para un α_0 determinado en (4.1) tal que $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha$ la linealización es C^1 , Para ello es suficiente considerar $\alpha = \bar{\alpha} \in (\alpha_0, \alpha_1] \cap (0, 1]$. Con el fin de simplificar la deducción, Aplastaremos F a lo largo de la axisa x_2 por enderezamiento de una curva invariante (que es la variedad central) de F que es tangente a la axisa x_2 , como muestra la *Figura 1*

Por Lema 3.8 existe un disco cerrado $V \subset \Omega$ centrado en 0 tal que F tiene una curva $C^{1,\bar{\alpha}}$ invariante $\Gamma = \{(x_1, x_2) \in V / x_1 = g(x_2)\}$ donde $g : V \cap \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es $C^{1,\bar{\alpha}}$ y $g(0) = g'(0) = 0$.

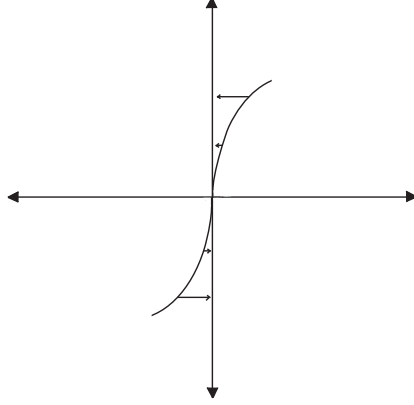


Figura 1: Enderezamiento de la curva invariante Γ .

Esta curva, que es la variedad central estable del flujo de F , nos permite hacer la $C^{1,\tilde{\alpha}}$ transformación $\theta : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\theta(x) = (x_1 - g(x_2), x_2) \quad (4.2)$$

tal que podemos considerar la aplicación $\tilde{F} = \theta \circ F \circ \theta^{-1}$ en el lugar de F . Una vez que probemos la linealización C^1 para $\tilde{F}$, naturalmente conoceremos la linealización C^1 de F ya que θ es un difeomorfismo C^1 local.

Para $\tilde{F}$ tendremos una nueva curva $\tilde{\Gamma}$ que buscamos hacer invariante. Entonces, consideremos $F_1 = \pi_1 F$, $F_2 = \pi_2 F$, $\tilde{F}_1 = \pi_1 \tilde{F}$ y $\tilde{F}_2 = \pi_2 \tilde{F}$, donde π_1 y π_2 denotan las proyecciones sobre las axisas x_1 y x_2 respectivamente. Un cálculo directo muestra que

$$\tilde{F}_1(x_1, x_2) = F_1(x + g(x_2), x_2) - g(F_2(x_1 + g(x_2), x_2)),$$

$$\tilde{F}_2(x_1, x_2) = F_2(x_1 + g(x_2), x_2)$$

Obviamente,

$$\tilde{F}_1(0, x_2) = F_1(g(x_2), x_2) - g(F_2(g(x_2), x_2)) = 0, \quad \text{para todo } x_2 \in V \cap \mathbb{R}, \quad (4.3)$$

es decir, $\tilde{F}$ deja la curva $\tilde{\Gamma} = (0, x_2)$ invariante, ya que el gráfico de g es invariante con respecto a F . Además, $\tilde{F}$ tiene las siguientes propiedades:

Lema 4.3.

1. $\tilde{F}$ es $C^{1,\tilde{\alpha}}$ en V tal que $\tilde{F}(0) = 0$ y $\tilde{F}'(0) = S$.

2.

$$|\tilde{F}_1(x)| \leq (|\lambda_1| + L\|x\|^{\tilde{\alpha}})|x_1| \quad (4.4)$$

y

$$\left| \frac{\partial \tilde{F}_1(x)}{\partial x_2} \right| \leq L|x_1|^{\tilde{\alpha}} \quad (4.5)$$

para todo $x \in V$, donde $L > 0$ es una contante independiente de x

Dejaremos la demostración del Lema 4.3 para después de la demostración de este teorema.

En lo que sigue afirmamos que $(S^{-n}(\tilde{F}^n)'(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente. Pues si la afirmación es cierta, entonces la sucesión $(S^{-n}\tilde{F}^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ también converge uniformemente cerca de 0 porque para cualquier $m \neq n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|S^{-m}\tilde{F}^m(x) - S^{-n}\tilde{F}^n(x)\| &= \|S^{-m}\tilde{F}^m(x) - S^{-n}\tilde{F}^n(x) - S^{-m}\tilde{F}^m(0) + S^{-n}\tilde{F}^n(0)\| \\ &\leq \|S^{-m}(\tilde{F}^m)'(\tau_1 x) - S^{-n}(\tilde{F}^n)'(\tau_1 x)\| \|x\|, \end{aligned}$$

donde $\tau_1 \in (0, 1)$ es un número que depende de x . Así, el limite $\tilde{\phi} = \lim_{n \rightarrow \infty} S^{-n}\tilde{F}^n$ define una aplicación C^1 cerca de 0, la cual satisface la ecuación (1.1), pues

$$\begin{aligned} \tilde{F} \circ \tilde{\phi} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S^{-n}\tilde{F}^n \circ \tilde{\phi} \\ &= S \lim_{n \rightarrow \infty} S^{-(n+1)}\tilde{F}^{n+1} \\ &= S\tilde{\phi}. \end{aligned}$$

Además

$$\tilde{\phi}'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} S^{-n}(\tilde{F}^n)'(0) = id,$$

donde id denota la identidad. Esto implica que $\tilde{\phi}$ es un difeomorfismo C^1 cerca de 0. Además $\tilde{F}$ admite una linealización C^1 cerca de 0.

En virtud de probar la convergencia uniforme de $(S^{-n}(\tilde{F}^n)'(x))_{n \in \mathbb{N}}$ notaremos que $\|\tilde{F}(x)\| < \|x\|$ para $\|x\|$ pequeño por Lema 4.3, porque $\|S\| = |\lambda_2| < 1$. Esto implica que $\tilde{F}$ va de un disco cerrado suficientemente pequeño $U \subset V$ centrado en 0 en si mismo. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$(\tilde{F}^n)'(x) = \begin{pmatrix} a_n(x) & b_n(x) \\ c_n(x) & d_n(x) \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

donde $a_n, b_n, c_n, d_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas. Además, estas entradas satisfacen las cotas presentadas en el siguiente Lema.

Lema 4.4. *Existe un disco cerrado U centrado en 0 tal que para cada $n \geq 1$ y para cada $x \in U$, se satisface*

$$|a_1(\tilde{F}^n(x)) - \lambda_1| \leq M|\lambda_2|^{n\tilde{\alpha}}, \quad (4.7)$$

$$|b_1(\tilde{F}^n(x))| \leq M|\lambda_1|^{n\tilde{\alpha}}, \quad (4.8)$$

$$|c_1(\tilde{F}^n(x))| \leq M|\lambda_2|^{n\tilde{\alpha}}, \quad (4.9)$$

$$|d_1(\tilde{F}^n(x)) - \lambda_2| \leq M|\lambda_2|^{n\tilde{\alpha}}, \quad (4.10)$$

$$|a_n(x)| \leq M|\lambda_1|^n, \quad (4.11)$$

$$|b_n(x)| \leq M|\lambda_1|^n, \quad (4.12)$$

$$|c_n(x)| \leq M|\lambda_2|^n, \quad (4.13)$$

$$|d_n(x)| \leq M|\lambda_2|^n, \quad (4.14)$$

donde $M > 0$ es una constante independiente de n y de x

Dejaremos la demostración del Lema 4.4 para después de este teorema. Note que

$$S^{-n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1^n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2^n} \end{pmatrix},$$

entonces

$$S^{-n}(\tilde{F}^n)'(x) = \begin{pmatrix} \frac{a_n(x)}{\lambda_1^n} & \frac{b_n(x)}{\lambda_1^n} \\ \frac{c_n(x)}{\lambda_2^n} & \frac{d_n(x)}{\lambda_2^n} \end{pmatrix}.$$

Queremos derivar $\tilde{F}^{n+1}(x)$, por regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned} (\tilde{F}^{n+1})'(x) &= (\tilde{F}(\tilde{F}^n(x)))' \\ &= \tilde{F}'(\tilde{F}^n(x))((\tilde{F}^n)'(x)). \end{aligned} \tag{4.15}$$

En (4.6) haciendo $n = 1$ y usando $\tilde{F}^n(x)$ en lugar de x hallamos $\tilde{F}'(\tilde{F}^n(x))$ y remplazando $(\tilde{F}^n)'(x)$, tenemos

$$\begin{aligned} (\tilde{F}^{n+1})'(x) &= \begin{pmatrix} a_1(\tilde{F}^n(x)) & b_1(\tilde{F}^n(x)) \\ c_1(\tilde{F}^n(x)) & d_1(\tilde{F}^n(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n(x) & a_n(x) \\ a_n(x) & a_n(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1(\tilde{F}^n(x))a_n(x) + b_1(\tilde{F}^n(x))c_n(x) & a_1(\tilde{F}^n(x))b_n(x) + b_1(\tilde{F}^n(x))d_n(x) \\ c_1(\tilde{F}^n(x))a_n(x) + d_1(\tilde{F}^n(x))c_n(x) & c_1(\tilde{F}^n(x))b_n(x) + d_1(\tilde{F}^n(x))d_n(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Nuevamente por (4.6) usando $n + 1$ en lugar de n , tenemos

$$\begin{pmatrix} a_{n+1}(x) & b_{n+1}(x) \\ c_{n+1}(x) & d_{n+1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(\tilde{F}^n(x))a_n(x) + b_1(\tilde{F}^n(x))c_n(x) & a_1(\tilde{F}^n(x))b_n(x) + b_1(\tilde{F}^n(x))d_n(x) \\ c_1(\tilde{F}^n(x))a_n(x) + d_1(\tilde{F}^n(x))c_n(x) & c_1(\tilde{F}^n(x))b_n(x) + d_1(\tilde{F}^n(x))d_n(x) \end{pmatrix}$$

Aplicamos el Lema 4.4 y el resultado anterior para estimar

$$\begin{aligned}
\left| \frac{a_{n+1}}{\lambda_1^{n+1}} - \frac{a_n}{\lambda_1^n} \right| &= \left| \frac{(a_1(\tilde{F}^n(x)) - \lambda_1)a_n(x) + b_1(\tilde{F}^n(x))c_n(x)}{\lambda_1^{n+1}} \right| \leq \frac{M^2}{|\lambda_1|}(\mu_1^n + \mu_2^n), \\
\left| \frac{b_{n+1}}{\lambda_1^{n+1}} - \frac{b_n}{\lambda_1^n} \right| &= \left| \frac{(a_1(\tilde{F}^n(x)) - \lambda_1)b_n(x) + b_1(\tilde{F}^n(x))d_n(x)}{\lambda_1^{n+1}} \right| \leq \frac{M^2}{|\lambda_1|}(\mu_1^n + \mu_2^n), \\
\left| \frac{c_{n+1}}{\lambda_2^{n+1}} - \frac{c_n}{\lambda_2^n} \right| &= \left| \frac{(d_1(\tilde{F}^n(x)) - \lambda_2)c_n(x) + c_1(\tilde{F}^n(x))a_n(x)}{\lambda_2^{n+1}} \right| \leq \frac{M^2}{|\lambda_2|}(\mu_3^n + \mu_2^n), \\
\left| \frac{d_{n+1}}{\lambda_2^{n+1}} - \frac{d_n}{\lambda_2^n} \right| &= \left| \frac{(d_1(\tilde{F}^n(x)) - \lambda_2)d_n(x) + c_1(\tilde{F}^n(x))b_n(x)}{\lambda_2^{n+1}} \right| \leq \frac{M^2}{|\lambda_2|}(\mu_3^n + \mu_2^n),
\end{aligned} \tag{4.17}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in U$, donde

$$\mu_1 = |\lambda_2|^{\tilde{\alpha}}, \quad \mu_2 = \frac{|\lambda_1|^{\tilde{\alpha}}|\lambda_2|}{|\lambda_1|}, \quad \mu_3 = \frac{|\lambda_2|^{\tilde{\alpha}}|\lambda_1|}{|\lambda_2|}.$$

Se sigue que

$$\|S^{-(n+1)}(\tilde{F}^{n+1})'(x) - S^{-n}(\tilde{F}^n)'(x)\| \leq \frac{M^2}{|\lambda_1|}\eta_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in U, \tag{4.18}$$

donde $\eta_n = \max \mu_1^n + \mu_2^n, \mu_3^n + \mu_1^n$. Deseamos probar para todo

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in (0, 1) \tag{4.19}$$

En efecto $\mu_3 < \mu_1 < 1$ es obvio por (1.5). De la definición (4.1) de α_0 y el cambio de $\tilde{\alpha}$ veremos que $\log |\lambda_2| < (1 - \tilde{\alpha}) \log |\lambda_1|$, es decir $|\lambda_2| < |\lambda_1|^{1-\tilde{\alpha}}$ el cual implica que $\mu_2 < 1$. A demás se sigue de (4.18) y (4.19) que las series $\sum_{n=1}^{\infty} S^{-(n+1)}(\tilde{F}^{n+1})'(x) - S^{-n}(\tilde{F}^n)'(x)$ converge uniformemente en U , es decir, la sucesión $(S^{-n}(\tilde{F}^n)'(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en U . Como mostramos anteriormente la convergencia garantiza la linealización C^1 para $\alpha = \tilde{\alpha}$. ♣

Demostración (del Lema 4.3)

Note que F y θ (junto con θ^{-1}) son $C^{1,\tilde{\alpha}}$ ya que g es $C^{1,\tilde{\alpha}}$, obtenemos que

$$\|\tilde{F}'(x) - \tilde{F}'(y)\| = \|(\theta \circ F \circ \theta^{-1})'(x) - (\theta \circ F \circ \theta^{-1})'(y)\|,$$

por regla de la cadena

$$\|\tilde{F}'(x) - \tilde{F}'(y)\| = \|\theta'(F \circ \theta^{-1}(x))F'(\theta^{-1}(x))(\theta^{-1})'(x) - \theta'(F \circ \theta^{-1}(y))F'(\theta^{-1}(y))(\theta^{-1})'(y)\|,$$

sumando dos ceros dados por $\theta'(F \circ \theta^{-1}(y))F'(\theta^{-1}(x))(\theta^{-1})'(x)$ y $\theta'(F \circ \theta^{-1}(y))F'(\theta^{-1}(y))(\theta^{-1})'(x)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|\tilde{F}'(x) - \tilde{F}'(y)\| &\leq \|\theta'(F \circ \theta^{-1}(x)) - \theta'(F \circ \theta^{-1}(y))\| \|F'(\theta^{-1}(x))\| \|(\theta^{-1})'(x)\| \\ &\quad + \|\theta'(F \circ \theta^{-1}(y))\| \|F'(\theta^{-1}(x)) - F'(\theta^{-1}(y))\| \|(\theta^{-1})'(x)\| \\ &\quad + \|\theta'(F \circ \theta^{-1}(y))\| \|F'(\theta^{-1}(y))\| \|(\theta^{-1})'(x) - (\theta^{-1})'(y)\| \\ &\leq L_1 \|F \circ \theta^{-1}(x) - F \circ \theta^{-1}(y)\|^{\tilde{\alpha}} + L_2 \|\theta^{-1}(x) - \theta^{-1}(y)\|^{\tilde{\alpha}} + L_3 \|x - y\|^{\tilde{\alpha}} \\ &\leq L \|x - y\|^{\tilde{\alpha}} \end{aligned} \tag{4.20}$$

para todo $x, y \in V$, donde L_1, L_2, L_3 y L son constantes positivas independientes de x y de y . Esto implica que $\tilde{F}$ es $C^{\tilde{\alpha}}$ en V . Note que $g(0) = 0$ y $g'(0) = 0$ como se indica antes de (4.2). Uno puede verificar que $\tilde{F}(0) = 0$ y $\tilde{F}'(0) = S$.

En virtud de probar 2., primero notemos que $\tilde{F}_1(0, x_2) = 0$ por (4.3) y aplicando la primera parte del Lema 4.3 tenemos que $\frac{\partial \tilde{F}_1(0,0)}{\partial x_1} = \lambda_1$. Así haciendo un par de cálculos y usando (4.20), obtenemos

$$\begin{aligned} |\tilde{F}_1(x)| &= |\tilde{F}_1(x_1, x_2) - \tilde{F}_1(0, x_2)| \\ &\leq \left| \frac{\partial \tilde{F}_1(\tau_2 x_1, x_2)}{\partial x_1} \right| |x_1| \\ &\leq (|\lambda_1| + \left| \frac{\partial \tilde{F}_1(\tau_2 x_1, x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial \tilde{F}_1(0, 0)}{\partial x_1} \right|) |x_1| \\ &\leq (|\lambda_1| + L \|x\|^{\tilde{\alpha}}) |x_1|, \end{aligned}$$

para todo $x \in V$, donde $\tau_2 \in (0, 1)$ es un número que depende de x . Luego (4.4) en 2. es probada. Además tenemos que

$$\frac{\partial \tilde{F}_1(0, x_2)}{\partial x_2} = 0, \quad \text{para cada } x_2 \in V \cap \mathbb{R}. \tag{4.21}$$

De otra manera, la continuidad de $\frac{\partial \tilde{F}_1(0, x_2)}{\partial x_2}$ en x_2 implica que existe $x_2^* \in V \cap \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^{x_2^*} \frac{\partial \tilde{F}_1(0, t)}{\partial t} dt \neq 0. \quad (4.22)$$

Por otra parte, $\tilde{F}_1(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} \frac{\partial \tilde{F}_1(x_1, t)}{\partial t} dt + h(x_1)$, donde $h : V \cap \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que $h(0) = 0$ ya que $F_1(0, 0) = 0$. Se sigue de (4.22) que

$$\tilde{F}_1(0, x_2^*) = \int_0^{x_2^*} \frac{\partial \tilde{F}_1(0, t)}{\partial t} dt \neq 0,$$

lo que contradice (4.3). Así, de (4.20) y (4.21) tenemos

$$\left| \frac{\partial \tilde{F}_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right| = \left| \frac{\partial \tilde{F}_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial \tilde{F}_1(0, x_2)}{\partial x_2} \right| \leq L|x_1|^{\tilde{\alpha}}, \quad \text{para todo } x \in V.$$

Esto demuestra (4.5) dada en 2. y concluye la demostración del Lema (4.3). ♣

Demostración del Lema (4.4)

Por (4.20) y (4.5) en el Lema 4.3, tenemos que para cada $x \in V$

$$|a_1(x) - \lambda_1| = \left| \frac{\partial \tilde{F}_1(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial \tilde{F}_1(0)}{\partial x_1} \right| \leq L\|x\|^{\tilde{\alpha}}, \quad (4.23)$$

$$|b_1(x)| = \left| \frac{\partial \tilde{F}_1(x)}{\partial x_2} \right| \leq L\|x\|^{\tilde{\alpha}}, \quad (4.24)$$

$$|c_1(x)| = \left| \frac{\partial \tilde{F}_2(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial \tilde{F}_2(0)}{\partial x_1} \right| \leq L\|x\|^{\tilde{\alpha}}, \quad (4.25)$$

$$|d_1(x) - \lambda_2| = \left| \frac{\partial \tilde{F}_2(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial \tilde{F}_2(0)}{\partial x_2} \right| \leq L\|x\|^{\tilde{\alpha}}. \quad (4.26)$$

Por otro lado existe un disco cerrado $U \subset V$ centrado en 0 tal que

$$\|\tilde{F}^n(x)\| \leq M_1|\lambda_2|^n, \quad (4.27)$$

$$|\pi_1 \tilde{F}^n(x)| \leq M_2 |\lambda_1|^n, \quad (4.28)$$

$$\|(\tilde{F}^n)'(x)\| \leq M_1 |\lambda_2|^n \quad (4.29)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in U$, donde M_1, M_2 son constantes positivas independientes de n y de x . En efecto,

$$\begin{aligned} \|\tilde{F}(x)\| &\leq \|\tilde{F}'(\tau_3 x)\| \cdot \|x\| \leq (\|S\| + \|\tilde{F}'(\tau_3 x) - \tilde{F}'(0)\|) \|x\| \\ &\leq (|\lambda_2| + L\|x\|^{\tilde{\alpha}}) \|x\|, \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde $\tau_3 \in (0, 1)$ es un número que depende de x . Así podemos inductivamente probar que existe un disco cerrado $V_1 \subset V$ centrado en 0 tal que

$$\|\tilde{F}^i(x)\| \leq (|\lambda_2| + \delta)^i, \quad \text{para cada } i \in \mathbb{N}, \text{ y cada } x \in V_1, \quad (4.31)$$

donde $\delta = (1 - |\lambda_2|)/2$. Sustituyendo (4.30) en (4.31), tenemos

$$\|\tilde{F}^{i+1}(x)\| \leq (|\lambda_2| + L(|\lambda_2| + \delta)^{i\tilde{\alpha}}) \|\tilde{F}^i(x)\|, \quad \text{para cada } i \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

lo que implica (4.27) por inducción, donde

$$M_1 = \prod_{i=0}^{\infty} \{1 + \frac{L}{|\lambda_2|} (|\lambda_2| + \delta)^{i\tilde{\alpha}}\} < \infty.$$

Similarmente, por (4.4) en el Lema (4.3) vemos que existe un disco cerrado $V_2 \subset V$ centrado en 0 tal que

$$|\pi_1 \tilde{F}^{i+1}(x)| \leq (|\lambda_2| + L(|\lambda_2| + \delta)^{i\tilde{\alpha}}) |\pi_1 \tilde{F}^i(x)|, \quad \text{para cada } i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \text{ para cada } x \in V_2.$$

Lo que implica (4.28) por inducción, donde

$$M_2 = \prod_{i=0}^{\infty} \{1 + \frac{L}{|\lambda_1|} (|\lambda_2| + \delta)^{i\tilde{\alpha}}\} < \infty.$$

Además consideramos

$$\|\tilde{F}'(x)\| \leq \|S\| + \|\tilde{F}'(x) - \tilde{F}'(0)\| \leq |\lambda_2| + L\|x\|^{\tilde{\alpha}}.$$

Se sigue de (4.31) que

$$\begin{aligned} \|(\tilde{F}^n)'(x)\| &\leq \|\tilde{F}'(\tilde{F}^{n-1}(x))\| \cdots \|\tilde{F}'(x)\| \leq \prod_{i=0}^{n-1} \{|\lambda_2| + L(|\lambda_2| + \delta)^{i\tilde{\alpha}}\} \\ &\leq M_1 |\lambda_2|^n \end{aligned} \quad (4.32)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in V_1$, esto establece (4.29), de otra forma las tres desigualdades permanecen en la vecindad $U = V_1 \cap V_2$.

Sea $M > 0$ una constante mayor que $\max\{LM_1^{\tilde{\alpha}}, LM_2^{\tilde{\alpha}}, M_1\}$. Sustituyendo (4.27) y (4.28) en los argumentos de (4.23) y (4.26) respectivamente, obtenemos las cuatro desigualdades dadas en (4.7), (4.8, 4.9) y (4.10). De (4.29) inmediatamente obtenemos las dos desigualdades dadas en (4.13) y (4.14).

En virtud de probar las desigualdades dadas en (4.11) y (4.12), note que usando (4.7) y (4.13) tenemos que

$$\begin{aligned} |a_{i+1}(x)| &= a_1(\tilde{F}^i(x))a_i(x) + b_1(\tilde{F}^i(x))c_i(x) \\ &\leq (|\lambda_1| + M|\lambda_2|^{i\tilde{\alpha}})a_i(x) + M^2(|\lambda_1|^{\tilde{\alpha}}|\lambda_2|)^i, \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Fijando $M > 0$ suficientemente grande tal que $|a_1(x)| \leq M^2$. Entonces, por (4.33),

$$\begin{aligned} |a_n(x)| &\leq M^2 \prod_{i=1}^{n-1} \{|\lambda_1| + M|\lambda_2|^{i\tilde{\alpha}}\} + M^2 \prod_{i=2}^{n-1} \{|\lambda_1| + M|\lambda_2|^{i\tilde{\alpha}}\} |\lambda_1|^{\tilde{\alpha}} |\lambda_2| + \dots \\ &\quad + M^2 \prod_{i=k+1}^{n-1} \{|\lambda_1| + M|\lambda_2|^{i\tilde{\alpha}}\} (|\lambda_1|^{\tilde{\alpha}} |\lambda_2|)^k + \dots + M^2 \tilde{\alpha} |\lambda_2|^{n-1} \\ &\leq \frac{M^2}{|\lambda_1|} \prod_{i=1}^{\infty} (1 + \frac{M}{|\lambda_1|} |\lambda_2|^{i\tilde{\alpha}}) \sum_{j=0}^{\infty} (\frac{|\lambda_1|^{\tilde{\alpha}} |\lambda_2|}{|\lambda_1|})^j |\lambda_1|^n = \tilde{M} |\lambda|^n, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ donde $\frac{|\lambda_1|^{\tilde{\alpha}} |\lambda_2|}{|\lambda_1|} = \mu_2 < 1$, conocida de (4.19). Además

$$M = \frac{M^2}{|\lambda_1|} \prod_{i=1}^{\infty} (1 + \frac{M}{|\lambda_1|} |\lambda_2|^{i\tilde{\alpha}}) \sum_{j=0}^{\infty} (\frac{|\lambda_1|^{\tilde{\alpha}} |\lambda_2|}{|\lambda_1|})^j < \infty.$$

Así, sin pérdida de generalidad, asumiendo $M = \tilde{M}$ podemos probar (4.11). (4.12) se prueba de forma similar. Finalmente la demostración del Lema (4.4). ♣

Observemos que la desigualdad (1.4), establecida en el Teorema 4.2, debe ser escrita como $(\tilde{F} - S)^{(j)}(0, x_2) = 0$, para todo $0 \leq j \leq k$, donde $\tilde{F}$ es C^k , pero no puede obtenerse de aplicaciones $C^{1,\alpha}$ ($0 < \alpha \leq 1$). Con el fin de superar la dificultad, probamos la desigualdad $|b_1(\tilde{F}^n(x))| \leq M|\lambda_1|^{n\tilde{\alpha}}$ presentada en el Lema 4.4, el cual tiene una delicada diferencia, que la constante $|\lambda_1|$ es más pequeña que la correspondiente constante $|\lambda_2|$ en otras tres desigualdades dadas en (4.7) y (4.9). Esto garantiza que la sucesión $(S^{-(n+1)}(\tilde{F}^{n+1})'(x) - S^{-n}(\tilde{F}^n)'(x))$ es controlada por la sucesión $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ establecida en (4.18)

5. Regularidad de la linealización

En esta sección estableceremos la clase de diferenciabilidad de la linealización ϕ obtenida del Teorema 4.2 de Wenmeng Zhang y Weinian Zhang.

Teorema 5.1. *Sea F como en el teorema de Zhang-Zhang y sean λ_1 y λ_2 de $F'(0)$ que satisfacen (1.5). Entonces, las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. *Si $\alpha_1 < \alpha \leq 1$, entonces F puede ser linealizada por una transformación de clase $C^{1,\alpha}$ cerca de 0.*
2. *Si $\alpha = \alpha_1 \leq 1$, entonces F puede ser linealizada por una transformación de clase $C^{1,\beta}$ cerca de 0 para todo $\beta \in (0, \alpha)$*
3. *Si $\alpha = 1$, pero $\alpha_1 > 1$ entonces F puede ser linealizada por una transformación de clase $C^{1,\alpha_1^{-1}}$ cerca de 0.*
4. *Si $\alpha_0 < \alpha < \min\{1, \alpha_1\}$, entonces F puede ser linealizada por una transformación de clase C^{1,β_2} cerca de 0, donde $\beta_2 = (\alpha_1^{-1} + 1)\alpha - 1 = \alpha_0^{-1}\alpha - 1 \in (0, 1)$.*

Demostración El resultado 1., como lo mencionamos anteriormente, fué probado por Chaperon en [5]. para probar 2., 3. y 4. estimaremos el exponente de Hölder β con la primera derivada para la transformación ϕ obtenida en el teorema de Zhang-Zhang. Tal como en la demostración del teorema 4.2, primero asumiremos que $\alpha = \tilde{\alpha}$ en $(\alpha_0, \alpha_1) \cap (0, 1]$ e investigamos la aplicación reducida $\tilde{F}$, la cual esta definida en (4.2). Sea $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} S^{-n} \tilde{F}^n$. Se desea mostrar que

$$\|\tilde{\phi}'(x) - \tilde{\phi}'(y)\| = \|\lim_{n \rightarrow \infty} \{S^{-n}(\tilde{F}^n)'(x) - S^{-n}(\tilde{F}^n)'(y)\}\| \leq K\|x - y\|^\omega \quad (5.1)$$

para K y ω constantes positivas, lo cual implica que $\tilde{\phi}$ es de clase $C^{1,\omega}$. A partir de la suavidad $C^{1,\tilde{\alpha}}$ de θ establecida en (4.2) y la relación $\phi = \tilde{\phi} \circ \theta$ podemos usar el mismo argumento que en (4.20) para ver que la aplicación ϕ tiene suavidad $C^{1,\beta}$, donde

$$\beta = \min\{\tilde{\alpha}, \omega\}. \quad (5.2)$$

En virtud de calcular el valor de ω en (5.1), tenemos

$$\begin{aligned}
& || \lim_{n \rightarrow \infty} \{S^{-n}(\tilde{F}^n)'(x) - S^{-n}(\tilde{F}^n)'(y)\} || \\
& \leq || \sum_{n=1}^{\infty} \{ \{S^{-(n+1)}(\tilde{F}^n + 1)'(x) - S^{-(n+1)}(\tilde{F}^n + 1)'(y)\} - \{S^{-n}(\tilde{F}^n)'(x) - S^{-n}(\tilde{F}^n)'(y)\} \} || \\
& \quad + || S^{-1}\tilde{F}'(x) - S^{-1}\tilde{F}'(y) || \\
& \leq \sum_{n=1}^{\infty} || \{S^{-(n+1)}(\tilde{F}^n + 1)'(x) - S^{-(n+1)}(\tilde{F}^n + 1)'(y)\} - \{S^{-n}(\tilde{F}^n)'(x) - S^{-n}(\tilde{F}^n)'(y)\} || \\
& \quad + |\lambda_1|^{-1} L ||x - y||^{\tilde{\alpha}}
\end{aligned}$$

para todo $x, y \in V$ por (4.20), en el cual

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} || \{S^{-(n+1)}(\tilde{F}^n + 1)'(x) - S^{-(n+1)}(\tilde{F}^n + 1)'(y)\} - \{S^{-n}(\tilde{F}^n)'(x) - S^{-n}(\tilde{F}^n)'(y)\} || \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\begin{array}{cc} |(\frac{a_{n+1}(x)}{\lambda_1^{n+1}} - \frac{a_{n+1}(y)}{\lambda_1^{n+1}}) - (\frac{a_n(x)}{\lambda_1^n} - \frac{a_n(y)}{\lambda_1^n})| & |(\frac{b_{n+1}(x)}{\lambda_1^{n+1}} - \frac{b_{n+1}(y)}{\lambda_1^{n+1}}) - (\frac{b_n(x)}{\lambda_1^n} - \frac{b_n(y)}{\lambda_1^n})| \\ |(\frac{c_{n+1}(x)}{\lambda_1^{n+1}} - \frac{c_{n+1}(y)}{\lambda_1^{n+1}}) - (\frac{c_n(x)}{\lambda_1^n} - \frac{c_n(y)}{\lambda_1^n})| & |(\frac{d_{n+1}(x)}{\lambda_1^{n+1}} - \frac{d_{n+1}(y)}{\lambda_1^{n+1}}) - (\frac{d_n(x)}{\lambda_1^n} - \frac{d_n(y)}{\lambda_1^n})| \end{array} \right) \quad (5.3)
\end{aligned}$$

Aquí a_n, b_n, c_n, d_n son obtenidas en (4.6). Para la primera entrada en (5.3) por (4.16) se tiene

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{a_{n+1}(x)}{\lambda_1^{n+1}} - \frac{a_{n+1}(y)}{\lambda_1^{n+1}} \right) - \left(\frac{a_n(x)}{\lambda_1^n} - \frac{a_n(y)}{\lambda_1^n} \right) \right| \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|\lambda_1|^{n+1}} | \{ (a_1(\tilde{F}^n(x)) - \lambda_1)a_n(x) + b_1(\tilde{F}^n(x))c_n(x) \} \right. \\
& \quad \left. - \{ (a_1(\tilde{F}^n(y)) - \lambda_1)a_n(y) + b_1(\tilde{F}^n(y))c_n(y) \} | \right) \\
& \leq \vartheta_1(x, y) + \vartheta_2(x, y) + \vartheta_3(x, y),
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|\lambda_1|^{n+1}} |a_1(\tilde{F}^n(x)) - \lambda_1| \cdot |a_n(x) - a_n(y)| \right), \\
\vartheta_2(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|\lambda_1|^{n+1}} |b_1(\tilde{F}^n(x)) - b_1(\tilde{F}^n(y))| \cdot |c_n(x)| \right)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\vartheta_3(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|\lambda_1|^{n+1}} |a_1(\tilde{F}^n(x)) - a_1(\tilde{F}^n(y))| \cdot |a_n(x)| \right. \\
& \quad \left. + |b_1(\tilde{F}^n(x))| \cdot |c_n(x) - c_n(y)| \right).
\end{aligned}$$

Lema 5.2. *Existe una vecindad $U \subset V$ de 0 y constantes positivas K_1, K_2 y K_3 tal que*

$$\vartheta_1(x, y) \leq K_1 ||x - y||^{\alpha_1^{-1}\tilde{\alpha}^2}, \quad (5.4)$$

$$(5.5)$$

$$\vartheta_2(x, y) \leq K_2 \|x - y\|^{(\alpha_1^{-1}+1)\bar{\alpha}-1}, \quad (5.6)$$

$$(5.7)$$

$$\vartheta_3(x, y) \leq K_3 \|x - y\|^{\bar{\alpha}} \quad (5.8)$$

para todo $x, y \in U$.

Observemos que el exponente $(\alpha_1^{-1} + 1)\bar{\alpha} - 1$ es una constante positiva ya que $\tilde{\alpha} > \alpha_0$. Este lema es probado por el Lema 4.4 y daremos la demostración después de demostrar este teorema. Entonces por Lema 5.2,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{a_{n+1}(x)}{\lambda_1^{n+1}} - \frac{a_{n+1}(y)}{\lambda_1^{n+1}} \right) - \left(\frac{a_n(x)}{\lambda_1^n} - \frac{a_n(y)}{\lambda_1^n} \right) \right| \\ \leq K_1 \|x - y\|^{\alpha_1^{-1}\bar{\alpha}^2} + K_2 \|x - y\|^{(\alpha_1^{-1}+1)\bar{\alpha}-1} + K_3 \|x - y\|^{\bar{\alpha}}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Las estimaciones para la segunda entrada en (5.3) es a lo más la misma, por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{b_{n+1}(x)}{\lambda_1^{n+1}} - \frac{b_{n+1}(y)}{\lambda_1^{n+1}} \right) - \left(\frac{b_n(x)}{\lambda_1^n} - \frac{b_n(y)}{\lambda_1^n} \right) \right| \\ \leq K_1 \|x - y\|^{\alpha_1^{-1}\bar{\alpha}^2} + K_2 \|x - y\|^{(\alpha_1^{-1}+1)\bar{\alpha}-1} + K_3 \|x - y\|^{\bar{\alpha}}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Para la tercera entrada en (5.3) notemos que para todo $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \|\tilde{F}'(\tilde{F}^k(x)) - \tilde{F}'(\tilde{F}^k(y))\| &\leq L \|(\tilde{F}^k)'(y + \sigma_k(x - y))\|^{\bar{\alpha}} \|x - y\|^{\bar{\alpha}} \\ &\leq LM_1 \tilde{\alpha} |\lambda_2|^{k\tilde{\alpha}} \|x - y\|^{\bar{\alpha}} \end{aligned} \quad (5.11)$$

por (4.20) y la primera desigualdad en (??), donde $\sigma_k \in (0, 1)$ es un numero que depende de x y de y . Entonces, por (4.32) y (5.11),

$$\begin{aligned}
& \|(\tilde{F}^n)'(x) - (\tilde{F}^n)'(y)\| \\
& \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\tilde{F}'(\tilde{F}^{n-1}(y))\| \cdots \|\tilde{F}'(\tilde{F}^{n-i}(y))\| \cdot \|\tilde{F}'(\tilde{F}^{n-i-1}(x)) - \tilde{F}'(\tilde{F}^{n-i-1}(y))\| \\
& \quad \cdot \|\tilde{F}'(\tilde{F}^{n-i-2}(x))\| \cdots \|\tilde{F}'(x)\| \\
& \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|\tilde{F}'(\tilde{F}^{n-1}(y))\| \cdots \|\tilde{F}'(\tilde{F}^{n-i}(y))\| \cdot \|\tilde{F}'(\tilde{F}^{n-i-1}(x))\| \cdots \|\tilde{F}'(x)\|}{\|\tilde{F}'(\tilde{F}^{n-i-1}(x))\|} \right. \\
& \quad \cdot \|\tilde{F}'(\tilde{F}^{n-i-1}(x)) - \tilde{F}'(\tilde{F}^{n-i-1}(y))\| \\
& \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{M_1 |\lambda_2|^n}{\|\tilde{F}'(\tilde{F}^{n-i-1}(x))\|} \cdot LM_1^{\tilde{\alpha}} |\lambda_2|^{(n-i-1)\tilde{\alpha}} \|x - y\|^{\tilde{\alpha}} \right) \\
& \leq \tilde{L} |\lambda_2|^n \|x - y\|^{\tilde{\alpha}},
\end{aligned} \tag{5.12}$$

donde

$$\tilde{L} = \sup_{x \in U} \|\tilde{F}'(x)\|^{-1} LM_1^{1+\tilde{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_2|^{i\tilde{\alpha}} < \infty$$

es una constante positiva independiente de x, y y de n . El hecho de que $\tilde{L}$ esté acotado es por que $\|\tilde{F}'(0)\| = |\lambda_2| \neq 0$. Así, por (4.9) en el Lema 4.4, (4.16), (5.11) y (5.12),

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{c_{n+1}(x)}{\lambda_1^{n+1}} - \frac{c_{n+1}(y)}{\lambda_1^{n+1}} \right) - \left(\frac{c_n(x)}{\lambda_1^n} - \frac{c_n(y)}{\lambda_1^n} \right) \right| \\
& \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_2|^{n+1}} \{ |c_1(\tilde{F}^n(x))| \cdot |a_n(x) - a_n(y)| + |d_1(\tilde{F}^n(x)) - d_1(\tilde{F}^n(y))| \cdot |c_n(x)| \\
& \quad + |c_1(\tilde{F}^n(x)) - c_1(\tilde{F}^n(y))| \cdot |a_n(y)| + |d_1(\tilde{F}^n(y)) - \lambda_2| \cdot |c_n(x)| \cdot |c_n(x) - c_n(y)| \} \\
& \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_2|^{n+1}} \{ (|c_1(\tilde{F}^n(x))| + |d_1(\tilde{F}^n(y)) - \lambda_2|) \|(\tilde{F}^n)'(x) - (\tilde{F}^n)'(y)\| \\
& \quad + (|c_n(x)| + |a_n(y)|) \|\tilde{F}'(\tilde{F}^n(x)) - \tilde{F}'(\tilde{F}^n(y))\| \} \\
& \leq K_4 \|x - y\|^{\tilde{\alpha}},
\end{aligned} \tag{5.13}$$

donde $K_4 = \{ LMM_1^{al\tilde{p}ha} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_3^n + (2\tilde{L}M + LMM_1^{al\tilde{p}ha}) \sum_{n=1}^{\infty} \mu_4^n \} |\lambda_2|^{-1} > 0$ es una constante independiente de x, y y de n . Aquí $\mu_3, \mu_4 \in (0, 1)$, como indica (4.19), lo cual garantiza la convergencia de las dos series en la definición de K_4 . La estimación para la

cuarta entrada en (5.3) es a lo más la misma que la tercera y por lo tanto obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{c_{n+1}(x)}{\lambda_1^{n+1}} - \frac{c_{n+1}(y)}{\lambda_1^{n+1}} \right) - \left(\frac{c_n(x)}{\lambda_1^n} - \frac{c_n(y)}{\lambda_1^n} \right) \right| \leq K_4 \|x - y\|^{\tilde{\alpha}}. \quad (5.14)$$

Teniendo estimaciones (5.9), (5.10), (5.13) y (5.14) para las entradas de (5.3) obtenemos (5.1), donde $K = \max\{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ y

$$\omega = \min\{\alpha_1^{-1}\tilde{\alpha}^2, (\alpha_1^{-1} + 1)\tilde{\alpha} - 1, \tilde{\alpha}\} = (\alpha_1^{-1} + 1)\tilde{\alpha} - 1$$

ya que $\tilde{\alpha} < \alpha_1$. Esto prueba 3 y 4 sustituyendo $\tilde{\alpha}$ por α . Para (ii), es decir $\alpha = \alpha_1 \leq 1$, la suavidad $C^{1,\alpha}$ de $\tilde{F}$ implica que $\tilde{F}$ es $C^{1,\alpha}$ para cualquier $\tilde{\alpha} \in (\alpha_0, \alpha_1)$. Así podemos aplicar 4 para demostrar 2, pues

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha} (\alpha_1^{-1} + 1)\tilde{\alpha} - 1 = (\alpha^{-1} + 1)\alpha - 1 = \alpha.$$

Por lo tanto la demostración está completada. ♣

Demostración (Del Lema 5.2)

Antes de estimar ϑ_1 , notemos que

$$|a_n(x) - a_n(y)| \leq |a_n(x)| + |a_n(y)| \leq 2M|\lambda_1|^n \quad (5.15)$$

por (4.11) ó por (5.12)

$$|a_n(x) - a_n(y)| \leq \|(\tilde{F}^n)(x) - (\tilde{F}^n)(y)\| \leq \tilde{L}|\lambda_2|^n \|x - y\|^{\tilde{\alpha}}, \quad (5.16)$$

para cada x, y en U que es suficientemente pequeño, elegiremos

$$n_1(x, y) = \frac{\log\{2M/(\tilde{L}\|x - y\|^{\tilde{\alpha}})\}}{\log(|\lambda_2|/|\lambda_1|)} > 1,$$

donde $|\lambda_2|/|\lambda_1| > 1$ por (1.5). Claramente, n_1 es un número real que depende de x e y tal que lo que está a la derecha de (5.15) y (5.16) son iguales, es decir,

$$2M|\lambda_1|^{n_1} = \tilde{L}|\lambda_2|^{n_1} \|x - y\|^{\tilde{\alpha}}. \quad (5.17)$$

Esto implica que

$$\begin{cases} \tilde{L}|\lambda_2|^n \|x - y\|^{\tilde{\alpha}} \leq 2M|\lambda_1|^n & \text{si } 1 \leq n \leq [n_1], \\ 2M|\lambda_1|^n \leq \tilde{L}|\lambda_2|^n \|x - y\|^{\tilde{\alpha}} & \text{si } n \geq [n_1] + 1, \end{cases} \quad (5.18)$$

donde $[n_1]$ denota el entero más grande que no supera a n_1 . Por otra parte, de la elección dada en (1.3), tenemos $|\lambda_2| = |\lambda_1|^{(\alpha_1+1)^{-1}}$. Se sigue de (5.17) que

$$|\lambda_1|^{n_1} = C_1 \|x - y\|^{(\alpha_1^{-1}+1)\tilde{\alpha}} \quad y \quad \|\lambda_2\|^{n_1} = c_2 \|x - y\|^{\alpha_1^{-1}\tilde{\alpha}}, \quad (5.19)$$

donde C_1 y C_2 son constantes positivas independientes de x y de y .

Teniendo los preparativos, podemos estimar ϑ_1 . Por la definición,

$$\vartheta_1(x, y) = \vartheta_{11}(x, y) + \vartheta_{12}(x, y),$$

donde ϑ_{11} denota la suma $\sum_{n=1}^{[n_1]}$ del primer término $[n_1]$ en la suma de $\vartheta_1(x, y)$ y ϑ_{12} denota la suma $\sum_{n=[n_1]+1}^{\infty}$. Note que (5.18) y aplicando las desigualdades (5.15) y (5.16), obtenemos

$$\vartheta_{11} \leq \frac{M\tilde{L}}{|\lambda_1|} \sum_{n=1}^{[n_1]} \left(\frac{|\lambda_2|^{1+\tilde{\alpha}}}{|\lambda_1|} \right)^n \|x - y\|^{\tilde{\alpha}} = \frac{M\tilde{L}|\lambda_2|^{1+\tilde{\alpha}}}{|\lambda_1|(|\lambda_2|^{1+\tilde{\alpha}} - |\lambda_1|)} \left\{ \left(\frac{|\lambda_2|^{1+\tilde{\alpha}}}{|\lambda_1|} \right)^{[n_1]} - 1 \right\} \|x - y\|^{\tilde{\alpha}}$$

y

$$\vartheta_{12} \leq \frac{2M^2}{|\lambda_1|} \sum_{n=[n_1]+1}^{\infty} |\lambda_2|^{n\tilde{\alpha}} = \frac{2M^2}{|\lambda_1|(1 - |\lambda_2|^{\tilde{\alpha}}|\lambda_2|)^{([n_1]+1)\tilde{\alpha}}}$$

respectivamente por la primera desigualdad dada en (4.7), donde $|\lambda_2|^{1+\tilde{\alpha}}/|\lambda_1| > 1$ ya que $\tilde{\alpha} < \alpha_1$. Además, por (5.19), tenemos

$$\begin{aligned} \vartheta_{11} &\leq \frac{M\tilde{L}|\lambda_2|^{1+\tilde{\alpha}}}{|\lambda_1|(|\lambda_2|^{1+\tilde{\alpha}} - |\lambda_1|)} \left(\frac{|\lambda_2|^{1+\tilde{\alpha}}}{|\lambda_1|} \right)^{n_1} \|x - y\|^{\tilde{\alpha}} = K_{11} \|x - y\|^{\alpha_1^{-1}\tilde{\alpha}^2}, \\ \vartheta_{12} &\leq \frac{2M^2}{|\lambda_1|(1 - |\lambda_2|^{\tilde{\alpha}})} |\lambda_2|^{n_1\tilde{\alpha}} = K_{12} \|x - y\|^{\alpha_1^{-1}\tilde{\alpha}^2}, \end{aligned}$$

donde

$$K_{11} = \frac{C_2^{1+\tilde{\alpha}} M\tilde{L}|\lambda_2|^{1+\tilde{\alpha}}}{C_1|\lambda_1|(|\lambda_2|^{1+\tilde{\alpha}} - |\lambda_1|)} > 0,$$

$$K_{12} = \frac{2C_2M^2}{|\lambda_1|(1 - |\lambda_2|^{\tilde{\alpha}})} > 0.$$

Así, haciendo $K_1 = K_{11} + K_{12}$ podemos probar (5.4) en el Lema 5.2.

Para estimar ϑ_2 , notemos que

$$|b_1(\tilde{F}^n(x)) - b_1(\tilde{F}^n(y))| \leq |b_1(\tilde{F}^n(x))| + |b_1(\tilde{F}^n(y))| \leq 2M|\lambda_1|^{n\tilde{\alpha}} \quad (5.20)$$

por la segunda desigualdad dada en (4.7), ó bien,

$$|b_1(\tilde{F}^n(x)) - b_1(\tilde{F}^n(y))| \leq \|\tilde{F}'(\tilde{F}^n(x)) - \tilde{F}'(\tilde{F}^n(y))\| \leq LM_1^{\tilde{\alpha}} |\lambda_2|^{n\tilde{\alpha}} \|x - y\|^{\tilde{\alpha}} \quad (5.21)$$

por (5.11). Se sigue un procedimiento totalmente similar al de ϑ_1 . Para cada x, y fijo en U suficientemente pequeño elegimos

$$n_2(x, y) = \frac{\log\{(2M)^{1/\tilde{\alpha}}/(L^{1/\tilde{\alpha}}M_1\|x - y\|)\}}{\log(|\lambda_2|/|\lambda_1|)} > 1,$$

notemos que $|\lambda_2|/|\lambda_1| > 1$ por (1.5). Claramente n_2 es un número real que depende de x y de y tal que la expresión derecha de (5.20) y (5.21) son iguales, es decir,

$$2M|\lambda_1|^{n_2\tilde{\alpha}} = LM_1^{\tilde{\alpha}}|\lambda_2|^{n_2\tilde{\alpha}}\|x - y\|^{\tilde{\alpha}}.$$

Entonces,

$$|\lambda_1|^{n_2} = C_3\|x - y\|^{1+\alpha_1^{-1}} \quad y \quad \|\lambda_2\|^{n_2} = C_4\|x - y\|^{|\alpha_1^{-1}|}, \quad (5.22)$$

donde C_3 y C_4 son dos constantes positivas independientes de x y de y . Se sigue de la primera fórmula en (4.13), (5.21) y (5.22) que

$$\begin{aligned} \vartheta_2(x, y) &\leq \frac{MLM_1^{\tilde{\alpha}}}{|\lambda_1|} \sum_{n=1}^{[n_2]} \left(\frac{|\lambda_2|^{1+\tilde{\alpha}}}{|\lambda_1|} \right)^n \|x - y\|^{\tilde{\alpha}} + \frac{2M^2}{|\lambda_1|} \sum_{n=[n_2]+1}^{\infty} \left(\frac{|\lambda_1|^{\tilde{\alpha}}|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \right)^n \\ &\leq \frac{MLM_1^{\tilde{\alpha}}|\lambda_2|^{1+\tilde{\alpha}}}{|\lambda_1|(|\lambda_2|^{1+\tilde{\alpha}}-|\lambda_1|)} \left(\frac{|\lambda_2|^{1+\tilde{\alpha}}}{|\lambda_1|} \right)^{n_2} \|x - y\|^{\tilde{\alpha}} + \frac{2M^2}{|\lambda_1|-|\lambda_1|^{\tilde{\alpha}}|\lambda_2|} \left(\frac{|\lambda_1|^{\tilde{\alpha}}|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \right)^{n_2} \\ &\leq K_2\|x - y\|^{(1+\alpha_1^{-1})\tilde{\alpha}-1}, \end{aligned}$$

donde

$$K_2 = \frac{C_4^{1+\tilde{\alpha}}MLM_1^{\tilde{\alpha}}|\lambda_2|^{1+\tilde{\alpha}}}{C_3|\lambda_1|(|\lambda_2|^{1+\tilde{\alpha}}-|\lambda_1|)} + \frac{2C_4M^2}{C_3^{1-\tilde{\alpha}}(|\lambda_1|-|\lambda_2|^{\tilde{\alpha}}|\lambda_2|)} > 0,$$

porque $|\lambda_2|^{1+\tilde{\alpha}}/|\lambda_1| > 0$ como se menciono antes y $|\lambda_1|^{\tilde{\alpha}}|\lambda_2|/|\lambda_1| = \mu_2 < 1$ por (4.19). Esto prueba (5.6) del Lema 5.2.

La estimación de ϑ_3 puede ser dada directamente de la primera desigualdad en (2.13), la segunda en (4.7), (5.11) y (5.12). Uno puede obtener que $\vartheta_3(x, y) \leq K_3\|x - y\|^{\tilde{\alpha}}$, donde

$$K_3 = \left(MLM_1^{\tilde{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1^n + M\tilde{L} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2^n \right) |\lambda_1|^{-1} \in (0, +\infty)$$

ya que $\mu_1, \mu_2 \in (0, 1)$ como se muestra en (4.19). Así se completa la demostración. ♣

6. Nitidez de las estimaciones

El Teorema 5.1, del capítulo anterior, da estimaciones para la regularidad de la linealización en varios casos cuando la contracción considerada tiene dos autovalores diferentes en valor absoluto. Si la contracción considerada tiene dos autovalores con el mismo valor absoluto, Chaperon probó que la linealización es de la misma regularidad que la contracción. En esta sección daremos un ejemplo para mostrar que en el caso de que los dos autovalores son diferentes en valor absoluto, las mejores estimaciones para la linealización son las dadas en el Teorema (5.1).

Suponga que λ_1, λ_2 son numeros reales que satisfacen (1.5), es decir, $0 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < 1$ y que $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Sea $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_1 < 1, -1 < x_2 < 1\}$ una vecindad abierta del origen. Dado $\alpha \in (0, 1]$, considere la función $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$p(u) = \begin{cases} u^{1+\alpha}, & u \geq 0, \\ 0, & u < 0 \end{cases}; \quad (6.1)$$

donde la función $u : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por

$$u(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x_1/|x_2|} q(t)dt / \int_{-\infty}^{-\infty} q(t)dt, & x_2 \neq 0, \\ 0, & x_1 < 0, x_2 = 0, \\ 1, & x_1 > 0, x_2 = 0 \end{cases},$$

donde

$$q(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t(t-1)}}, & 0 < t < 1, \\ 0, & \text{otros casos.} \end{cases}$$

Podemos verificar que p es $C^{1,\alpha}$ sobre $\mathbb{R}$ y que u es C^∞ sobre $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ tal que

(U1) $u(x_1, x_2) = 1$ si $x_1 \geq |x_2|$,

(U2) $u(x_1, x_2) = 1$ si $x_1 \leq 0$, y

(U3) $\partial u(x)/\partial x_1 \geq 0$ y $\|u^r(x)\| \leq A\|x\|^{-r}$ para $r = 1, 2$ y para $x \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, donde A es una constante positiva.

Se define una aplicación planar $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$F(x) = \begin{cases} (\lambda_1 x_1 + u(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)p(\lambda_2 x_2), \lambda_2 x_2), & \text{si } x \in \Omega - \{0\}, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

De acuerdo a (U3), uno puede verificar que

$$\|F(x) - \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)x\| = o(\|x\|), \quad \lim_{x \rightarrow 0} F'(x) = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$$

y

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leq L\|x - y\|^\alpha,$$

para una constante $L > 0$ en una pequeña vecindad de $U \subset \Omega$ de 0, es decir, F es un difeomorfismo $C^{1,\alpha}$ en U . Afirmamos lo siguiente.

Afirmación 6.1.

1. Para $\alpha \in (\alpha_0, 1]$, la aplicación F dada en (6.2) no puede ser linealizable cerca de 0 por una transformación más suave que las provenientes de los casos (i)-(iv) en el Teorema 5.1.
2. Para $\alpha \in (0, \alpha_0]$, la aplicación no puede ser linealizada cerca de 0 por una transformación $C^{1,\beta}$ para cualquier $\beta \in (0, 1]$

Demostración

1. Para $\alpha \in (\alpha_0, 1]$, el hecho es obvio en el caso (i).

Con el fin de probar los casos (ii) al (iv), suponemos que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$. Cuando al menos uno de los autovalores de $F'(0)$ es negativo, podemos considerar la iteración cuadrática F^2 en lugar de F para obtener la misma conclusión.

Es claro que por (U2) la aplicación F definida en (6.2) es lineal en el segundo y tercero cuadrante. Además por (6.1) el cuarto cuadrante también lo es, en efecto, el cuarto cuadrante son los valores donde $x_1 > 0$ y $x_2 < 0$ eso implica que $u = 0$ por lo tanto F se hace lineal. Por lo tanto nuestra discusión será basada en el primer cuadrante.

Fijamos una constante real $\xi \in U \cap (0, +\infty)$ y elegimos

$$n_0(x_2) = \alpha_1^{-1} \log_{\lambda_2}(x_2/\xi) > 1 \tag{6.3}$$

para cada $x_2 \in U \cap (0, +\infty)$ suficientemente pequeño. Simplemente dejaremos como notación n_0 en vez de $n_0(x_2)$ cuando no exista confusión. Claramente, el entero

$[n_0]$ es el mayor entero que no excede a n_0 , es el mayor entero en el conjunto $\{n \in \mathbb{Z} : \lambda_2^n \xi \geq \lambda_2^n x_2\}$. Observando (6.2), tenemos

$$\pi_1 F(x) \geq \lambda_1 x_1, \text{ para todo } x \in U - \{0\}, \quad (6.4)$$

porque $p(u) \geq 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$ y $u(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega - \{0\}$ por (U2) y la primera desigualdad en (U3). Un sencillo cálculo muestra que $\pi_2 F^n(\xi, x_2) = \lambda_2^n x_2$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y que

$$\begin{aligned} \pi_2 F^n(\xi, x_2) &\geq \lambda_1^{n-[n_0]} \pi_1 F^{[n_0]}(\xi, x_2) \\ &= \lambda_1^{n-[n_0]} \left\{ \lambda_1^{[n_0]} \xi + \sum_{i=1}^{[n_0]-1} u(\lambda_1^i \xi + R_i(x), \lambda_2^i x_2) (\lambda_2^i x_2)^{1+\alpha} \right. \\ &\quad \left. + u(\lambda_1^{[n_0]} \xi + R_{[n_0]}(x), \lambda_2^{[n_0]} x_2) (\lambda_2^{[n_0]} x_2)^{1+\alpha} \right\} \end{aligned} \quad (6.5)$$

para todo $n \geq [n_0]$ por (6.4), donde $R_i(x) \geq 0$ para todo $x \in U - \{0\}$ y para todo $i = 1, \dots, [n_0]$ ya que $p(u) \geq 0$ y $u(x) \geq 0$ como mencionamos antes. Además, por (U1) y el número que elegimos $[n_0]$ dado en (6.3), obtenemos

$$u(\lambda_1^i \xi + R_i(x), \lambda_2^i x_2) = 1, \text{ para todo } x \in U, \forall i = 1, \dots, [n_0],$$

pues $\lambda_1^i \xi + R_i(x) \geq \lambda_2^i x_2$. Así, por (6.5)

$$\begin{aligned} \pi_2 F^n(\xi, x_2) &\geq \lambda_1^{n-[n_0]} \left\{ \lambda_1^{[n_0]} \xi + \sum_{i=1}^{[n_0]-1} \lambda_1^{[n_0]-i} (\lambda_2^i x_2)^{1+\alpha} + (\lambda_2^{[n_0]} x_2)^{1+\alpha} \right\} \\ &= \lambda_1^n \left\{ \xi + \sum_{i=1}^{[n_0]-1} (\lambda_1^{-1} \lambda_2^{1+\alpha})^i x_2^{1+\alpha} + (\lambda_1^{-1} \lambda_2^{1+\alpha})^{[n_0]} x_2^{1+\alpha} \right\} \end{aligned} \quad (6.6)$$

para todo $n \geq [n_0]$. En el caso en que $\alpha = \alpha_1 \leq 1$, tenemos $\lambda_1^{-1} \lambda_2^{1+\alpha} = 1$ por (1.3). Entonces, por (6.3) y (6.6),

$$\begin{aligned} \pi_2 F^n(\xi, x_2) &\geq \lambda_1^n \{ \xi + [n_0] x_2^{1+\alpha} \} \\ &\geq \lambda_1^n \{ \xi + \{ \alpha_1^{-1} \log_{\lambda_2}(x_2/\xi) - 1 \} x_2^{1+\alpha} \}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

En cualquiera de los dos casos $\alpha = 1$, pero $\alpha_1 > 1$ ó $0 < \alpha < \min\{1, \alpha_1\}$, tenemos que $\lambda_1^{-1} \lambda_2^{1+\alpha} > 1$ por (1.3) y que la suma $\sum_{i=1}^{[n_0]-1} (\lambda_1^{-1} \lambda_2^{1+\alpha})^i x_2^{1+\alpha}$ en la última fila es

positiva en (6.6). Entonces, usando (6.3) y (6.6) nuevamente, tenemos

$$\begin{aligned}\pi_2 F^n(\xi, x_2) &\geq \lambda_1^n \{\xi + (\lambda_1^{-1} \lambda_2^{1+\alpha})^{[n_0]} x_2^{1+\alpha}\} \\ &\geq \lambda_1^n \{\xi + (\lambda_1^{-1} \lambda_2^{1+\alpha})^{\alpha_1^{-1} \log_{x_2}(x_2/\xi) - 1} x_2^{1+\alpha}\} \\ &= \lambda_1^n \{\xi + C x_2^{(\lambda_1^{-1} + 1)\alpha}\}\end{aligned}\tag{6.8}$$

pues $\lambda_1 = \lambda_2^{1+\alpha_1}$ por (1.3), donde $C = \lambda_1 \lambda_2^{-(1+l)} \xi^{1-\alpha_1^{-1}\alpha} > 0$.

Teniendo estas preparaciones, podemos estimar β . Para un número fijo $\beta \in (0, 1]$, suponga que $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un difeomorfismo $C^{1,\beta}$ que satisface la ecuación (1.1) en U . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que

$$\phi(0, x_2) = (0, x_2), \quad \phi(x_1, 0) = (x_1, 0), \quad \phi'(x_2, 0) = \phi'(0, x_2) = id.\tag{6.9}$$

De otra manera, consideramos otro difeomorfismo $C^{1,\beta}$ $\tilde{\phi} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$\tilde{\phi} = \hat{\theta} \circ \{\phi'(0)\}^{-1} \phi,$$

donde $\hat{\theta} = (x_1 - \hat{g}(x_2), x_2)$ para todo $x \in U$ y $\hat{g}$ es una función $C^{1,\beta}$ sobre $U \cap \mathbb{R}$ cuya gráfica $\hat{\Gamma} = \{(x_1, x_2) \in U : x_1 = \hat{g}(x_2)\}$ es justo la imagen de la axisa x_2 bajo $\{\phi'(0)\}^{-1} \phi$. Se puede chequear que $\tilde{\phi}$ es una solución de la ecuación (1.1) porque la transformación $\hat{\theta}$ conmuta con $F'(0)$ y que $\tilde{\phi}$ satisface (6.9). De (6.9) se sigue que la expansión de Taylor de $\pi_1 \phi$ en $(\xi, 0)$ da $\pi_1 \phi(\xi, x_2) = \xi + O(x_2^{1+\beta})$. Sustituyendo x_2 con λ_2^k para todo $k \in \mathbb{Z}$ suficientemente grande y tomando k como variable, tenemos

$$\pi_1 \phi(\xi, \lambda_2^k) = \xi + O(\lambda_2^{k(1+\beta)}).\tag{6.10}$$

Sea $N \in \mathbb{Z}$ tal que $N > \max\{\alpha_1^{-1}, (1+\beta)(\beta\alpha_1 + \beta)^{-1}\}$. Por (1.1) y (6.10),

$$\pi_1 \phi(F^{Nk}(\xi, \lambda_2^k)) = \lambda_1^{Nk} \pi_1 \phi(\xi, \lambda_2^k) = \lambda_1^{Nk} \{\xi + O(\lambda_2^{k(1+\beta)})\}.\tag{6.11}$$

Por otro lado, podemos observar que F dado en (6.2) satisface la desigualdad (4.3), es decir, $\pi_1 F(0, x_2) = 0$ para todo $x_2 \in U \cap (0, +\infty)$. Se sigue que la desigualdad en (4.28) cumple para F . Así, por (6.4) y para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\lambda_1^{Nk} \xi &\leq \pi_1 F^{Nk}(\xi, \lambda_2^k) \\ &\leq M_2 \lambda_1^{Nk} \xi.\end{aligned}\tag{6.12}$$

La expansión de Taylor de $\pi_1\phi$ en el punto $(0, \lambda_2^{(N+1)k})$ es

$$\begin{aligned}\pi_1\phi(F^{Nk}(\xi, \lambda_2^k)) &= \pi_1\phi(\pi_1 F^{Nk}(\xi, \lambda_2^k), \lambda_2^{(N+1)k}) \\ &= \pi_1 F^{Nk}(\xi, \lambda_2^k) + O(\{\pi_1 F^{Nk}(\xi, \lambda_2^k)\}^{1+\beta}) \\ &= \pi_1 F^{Nk}(\xi, \lambda_2^k) + O(\lambda_1^{Nk(1+\beta)})\end{aligned}$$

por (6.9) y (6.12). Ya que $Nk > n_0(\lambda_1^k)$ por la elección de N , se sigue de (6.7) y (6.8) que

$$\pi_1\phi(F^{Nk}(\xi, \lambda_2^k)) \geq \lambda_1^{Nk} \{\xi + (\lambda_1^{-1}k - \tilde{C})\lambda_2^{k(1+\alpha)} + O(\lambda_1^{Nk\beta})\} \quad (6.13)$$

cuando $\lambda = \lambda_1 \leq 1$, donde $\tilde{C} = \lambda_1^{-1} \log_{\lambda_2} \xi + 1$. También obtenemos que

$$\pi_1\phi(F^{Nk}(\xi, \lambda_2^k)) \geq \lambda_1^{Nk} \{\xi + C\lambda_2^{k(\alpha_1^{-1}+1)\alpha} + O(\lambda_1^{Nk\beta})\} \quad (6.14)$$

cuando sea $\alpha = 1$, pero $\alpha_1 > 1$ ó $0 < \alpha < \min\{1, \alpha_1\}$.

Para los casos del (ii) al (iv) en el Teorema 5.1, comparando (6.11) con (6.13) y (6.14) respectivamente y notando que la elección de N implica que $\lambda_1^{N\beta} < \lambda_2^{1+\beta}$, tenemos

$$\begin{cases} \beta < \alpha, & \text{si } \alpha = \alpha_1 < 1, \\ \beta \leq (\alpha_1^{-1} + 1)\alpha - 1, & \text{si cualquier } \alpha = 1 \text{ pero } \alpha_1 > 1 \text{ ó } \alpha_0 < \alpha < \min\{1, \alpha_1\}. \end{cases}$$

2. Para $\alpha \in (0, \alpha_0]$, asumimos que F puede ser linealizado $C^{1,\beta}$ cerca de 0 para un número $\beta \in (0, 1]$. Entonces (6.11) contradice a (6.14) porque

$$1 + \beta > 1 \geq \alpha_0^{-1}\alpha = (\alpha_1^{-1} + 1)\alpha,$$

lo cual implica que $\lambda_2^{1+\beta} < \lambda_2^{(\alpha_1^{-1}+1)\alpha}$.

Así, la demostración queda completada. ♣

Observación 6.2. Como problema abierto, es interesante investigar si existe linealización C^1 para una contracción F de clase $C^{1,\alpha}$, donde $\alpha \in (0, \alpha_0]$.

7. Referencias

- [1] V.I. Arnold, Geometric Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations, Springer, New York, 1983.
- [2] G.R. Beliskii, Functional equations and the conjugacy of diffeomorphism of finite smoothness class, *Funct, Anal. Appl.* 7 (1973) 268-277.
- [3] G.R. Beliskii, Equivalence and normal forms of germs of smooth mappings, *Russian Math. Surveys* 33 (1978) 107-177.
- [4] A.D. Brjuno, Analytical form of differential equations, *Trans. Moscow Math. Soc.* 25 (1971) 131-288
- [5] M. Chaperon, Invariant manifold resited, *Tr. Mat. Inst: Steklova* 236 (2002) 428-446.
- [6] M.S. ElBialy, Local Contractions of Banach spaces and spectral gap conditions, *J. Funct. Anal.* 182 (2001) 108-150.
- [7] P. Hartman, On local homeomorphisms of Euclidean spaces, *Bol. Soc. Mat Mexicana* 5 (1960) 220-241.
- [8] P. Hartman, Ordinary Differential Equations, Jhon Wiley and Sons, New York, 1964.
- [9] R. de la Llave, C.E. Wayne, On Irwin's proof of the pseudo-stable manifold theorem, *Math. Z* 219 (1995) 301-321.
- [10] H. Poincaré, Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, *Acta Math.* 13 (1890) 1-270.
- [11] C. Pugh, On a theorem of P. Hartman, *Amer. J.* 91 (1969) 363-367.
- [12] H.M: Rodrigues, J. Sola-Morales, Linearization of class C^1 for contractions on Banach spaces, *J. Differential Equations* 201 (2004) 351-382.
- [13] G. R. Sell, Smooth linearization near a fixed point, *Amer. J. Math.* 107 (1985) 1035-1091.
- [14] C. L. Siegel. Iteration of analytic functions, *Ann. Math.* 43 (1942) 607-612.
- [15] S. Sternberg, Local contractions and a theorem of Poincaré, *Amer. J. Math.* 80 (1958) 809-824.
- [16] S. Sternberg, On the structure of local homeomorphisms of Euclidean n-space, *Amer.*

J. Math. 80 (1958) 623-631.

[17] D. Stowe, Linearization in two dimensions, J. Differential Equations 69 (1986) 183-226

[18] J.C. Yoccoz, Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbb{C}, 0)$, C. R. Acad. Sci. Paris 36 (1988) 55-58

[19] M. Shub, Global stability of dynamical systems. S. Math de France, 1978. 49-58.

[20] W. Zhang and W. Shang, C^1 linearization for planar contractions. 2010.