



UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Física

**RELACIÓN EXACTA ENTRE LAS TEORÍAS
HOŘAVA-LIFSHITZ NO-PROYECTABLE Y
EINSTEIN-AETHER RESTRINGIDA:**

Análisis canónico en el régimen de bajas energías

Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias con
mención en Física.

Lic. Francisco Antonio Tello Ortiz

Profesor Guía: Dr. Álvaro Restuccia Núñez

Antofagasta, Chile

2017

En memoria a mi padre Iván Tello Ulloa (2015) y mis grandes amigos Norma Egaña Argandoña (2012), Oscar Villarroel Morales (2014), Wilfe Díaz Rodríguez (2016) y Ramón Correa Soto (2017).

Agradecimientos

Adosar este nuevo eslabón a mi andar, se debe a que he caminado tal y como Newton dijera sobre hombros de gigantes. Sí tal cual, hombros que me han elevado cada vez que he tocado fondo, porque cuando lo tocas lo único que queda es levantarse, a veces sólo y si no lo estás apoyado de quienes te rodean. Pensar que aquellos hombros que hoy me elevan hacia lo más alto, son los mismos que han sabido ser pilares fundamentales en este largo camino que aún no acaba. Me refiero a mi alteza, mi primogénita, aquel trozo de vida emergente dentro de tan hóstil y sombría multitud, aquel latido que se camufla para alentarme en medio de los sórdidos alaridos que pretenden aplacar mi andar. Martina amor eterno jamás dejaré de amparar tus sueños y dolencias, me faltará vida y aliento para agradecer el cruce de nuestros ínfimos suspiros. Martha mi madre, aquella aguerrida mujer, infatigable andante y luchadora, cuyas plegarias se elevan más allá de lo inconmensurable en aras de confortar mi pisar sea cual sea la senda a seguir. Claudia, mi musa, aquella sutil y delicada alma que día a día me auxilia y cobija en su regazo. Estos son pues mis hombros de gigantes, sobre los cuales seguiré caminando sin sed ni hambre que me detenga, sin dolor ni lágrimas que obstaculicen la brecha cada vez más estrecha.

*No puedo dejar escapar la oportunidad de destacar a quienes ya no me acompañan, pero que aún así fueron cimientos estructurales cabales, que impulsaron mi estadía y posición hoy día. Agradecer a mi padre caído un luctuoso día de Julio en (2015), jamás olvidaré: **nunca te rindas hijo mío, persevera hasta el fin**, y justamente eso haré no importa el pronóstico del tiempo. A Norma Egaña, mi entrañable profesora, quien me forjó durante largo tiempo en mi niñez. Wilfe Díaz, viejo lobo de mar a quien agradezco toda la ayuda que me brindó en su paso por este mundo. Finalmente a dos grandes profesores, Oscar Villarroel y Ramón Correa, a ellos debo mucho de mi formación universitaria, apoyo incondicional, grandes consejos, arengas y enseñanzas que jamás desatenderé.*

*Agradezco indubitablemente al Dr. Álvaro Restuccia, quien me apoyó incondicionalmente durante ésta estadía de investigación. A él debo mi iniciación profunda, dentro de una teoría fuertemente apreciada por mí desde hace mucho: "la gravitación". Sin lugar a dudas aprecio cada instante que el Dr. Álvaro dedicó a mí formación y enseñanza, como también así la confianza que depositó. Por otro lado debo destacar, el gran carisma que él posee, esto me hace recordar una de las célebres frases de Einstein: **antes de ser científicos, debemos ser primero seres humanos**, precisamente ésta es una de las mayores virtudes del Dr. Álvaro, ser humano antes que científico. Agradecer también al Dr. Jorge Bellorín, por todas aquellas horas de discusión y enseñanza, quien llegó en un momento crucial de esta etapa investigativa, sinceramente gracias por todo. Finalmente agradecer a los doctores Flavia Pennini, Christian Nitschelm y Keiichi Onhaka quienes me han permitido indagar en otras áreas de la física y astronomía, lo cual valoro demasiado, ya que nunca pero nunca quiero dejar de aprender.*

Po otro, debo dar las gracias al financiamiento otorgado por el proyecto FONDECYT regular No. 1161192, período 2016–2020, a cargo del Dr. Álvaro Restuccia Núñez y a la dirección general de postgrados de la Universidad Católica del Norte (UCN) quienes financiaron esta investigación.

Gracias totales.

Francisco Antonio Tello Ortiz, Antofagasta, Marzo de 2017.

Resumen

La investigación concierne en la búsqueda de una relación exacta a bajas energías (o equivalentemente grandes distancias o en el límite IR) entre las teorías de la gravedad de Hořava-Lifshitz no-proyectable (*HLNP*) y Einstein-aether restringida (*aer*). Dicha prospección es llevada a cabo aplicando la descomposición en variables *ADM* a la métrica, y luego un esquema perturbativo clásico a segundo orden a la densidad Lagrangeana. Se obtiene luego la formulación Hamiltoniana o canónica aplicando la transformada de Legendre, y se compara con su homólogo existente ya en la literatura para la teoría *HLNP*. Se establece, por primera vez la correspondencia canónica exacta entre ambas teorías. Dicha comparación entre ambas teorías en el régimen ya expuesto exige la clausura del álgebra de los vínculos presentes en el análisis, tal estudio es llevado a cabo implementando el algoritmo de Dirac-Bergmann, del cual se desprenden las simetrías de gauge para el establecimiento de la equivalencia entre ambas teorías.

Abstract

This work is devoted to investigate, an exact relation at low energies (or equivalently great distances or in the IR regime) between both the Hořava-Lifshitz non-projectable (*HLNP*) and restricted Einstein-aether (*aer*) theories of gravity. This prospection is carried out using the usual *ADM* decomposition for the metric and then applying a classical perturbative scheme up to second order for the Lagrangian density. After that, we perform the Legendre's transform to get the Hamiltonian formulation of *aer*. Then, the previous analysis is compared with the canonical analysis already existing in the literature for the theory *HLNP*. It is established, for the first time the exact canonical correspondence between both theories. Such comparison between the two theories in the already discussed regime demands the closure of the constraints algebra present in the analysis, such a study is carried out implementing the Dirac-Bergmann's algorithm, from which the gauge symmetries are derived for the equivalence between both theories.

Índice general

1. Introducción	3
2. Breve revisión de las teorías Hořava-Lifshitz y Einstein-aether	9
2.1. Teoría Hořava-Lifshitz	9
2.1.1. Intermisión: dimensión y determinación de z	11
2.2. Potencial y varias versiones de la teoría	13
2.2.1. Balance detallado	13
2.2.2. Teoría proyectable	14
2.2.3. Teoría no-proyectable	15
2.3. Teoría Einstein-aether	17
2.4. Dinámica cosmológica	18
2.5. Restricciones generales	20
2.5.1. Límite post-Newtoniano	20
2.5.2. Big-Bang: nucleosíntesis	21
3. Formulación Lagrangeana y Hamiltoniana de la teoría <i>aer</i>	23
3.1. Acción de la teoría Einstein-aether	23
3.2. Descomposición en variables <i>ADM</i> para la métrica	25
3.3. Langrangeano perturbado de la teoría <i>aer</i>	26
3.3.1. Análisis perturbativo	28
3.4. Transformada de Legendre	32

4. Resultados y discusiones	35
4.1. Análisis de los vínculos	35
4.1.1. Vínculos primarios	35
4.1.2. Vínculos secundarios	37
4.1.3. Descomposición de los vínculos en partes <i>transversas</i> y <i>longitudinales</i>	38
4.2. Algoritmo de Dirac-Bergmann	41
4.2.1. Clausura del álgebra de los vínculos	43
4.2.2. Vínculos de primera clase	44
4.3. Fijación de gauge y relación entre las teorías <i>HLNP</i> y <i>aer</i>	45
4.3.1. Hamiltoniano de la teoría <i>HLNP</i>	45
4.3.2. Elección del gauge	47
5. Consideraciones finales	48
5.1. Conclusión	48
A. Descomposición <i>ADM</i>	51
B. Análisis perturbativo	55
C. Corchetes de Poisson	62

Capítulo 1

Introducción

Obtener una teoría cuántica de la gravedad, es hasta ahora un problema sin resolver de la física moderna [1]-[2]. El objetivo que se tiene en mente cuando se habla de la obtención de una teoría de gravitación, es que ésta sea válida en todas las escalas. Más bien la gravedad es una fuerza de interacción débil, sus efectos cuánticos son difíciles de observar (al menos de forma directa). Por esta razón los criterios por los que se puede evaluar una teoría candidata para la gravedad cuántica se limitan a consistencias matemáticas, que reproduzcan la descripción clásica de la gravedad (es decir, relatividad general) y conduzcan a predicciones no triviales que eventualmente puedan ser probadas. La problemática anterior, yace en el hecho que la relatividad general (RG) de Einstein es una de las teorías físicas más precisas con gran soporte experimental [3], sin embargo a altas energías (ultravioleta) donde los efectos cuánticos son relevantes, no es compatible con la mecánica cuántica, ya que es perturbativamente no renormalizable en $3 + 1$ dimensiones. Esto se debe a que la constante de acoplamiento, es decir, la constante de Newton G_N , tiene dimensiones negativas de masa $[masa]^{-2}$. Lo cual implica que al ser calculadas las amplitudes en teoría cuántica de campos, las integrales a N lazos tienen divergencias en el ultravioleta (UV), difíciles de curar.

Basado en los trabajos previos de Lifshitz sobre materia condensada [4], Hořava

formula su propuesta [5], cuya motivación es la obtención de una teoría candidata de la gravedad cuántica (actualmente conocida como teoría de la gravedad Hořava-Lifshitz "HL"). En otras palabras una teoría renormalizable, que remediara los *infinitos* que surgen al calcular los diagramas de Feynman en el propagador del gravitón. Esta propuesta, plantea una ruptura de la simetría de Lorentz a través de un escalamiento anisotrópico de las variable del espacio-tiempo de Minkowsky ct y x en el régimen UV :

$$x \rightarrow bx, \quad t \rightarrow b^z t, \quad (1.1)$$

con b una constante y $z \in \mathbb{Z}$ el denominado exponente crítico. Tal elección rompe la simetría local de Lorentz, siendo esta uno de los ingredientes esenciales de la RG. Hořava escoge una foliación¹ del espacio-tiempo determinada por las variables Arnowitt-Deser-Misner (ADM) o descomposición en $3 + 1$ dimensiones [6], las cuales establecen una dirección de evolución preferencial para el tiempo t . La acción integral planteada bajo tal descomposición (ADM), no es invariante ante los mismos difeomorfismos de la RG, sino es invariante ante los difeomorfismos $Diff_{\mathcal{F}}(\mathcal{M})$ de las hojas de la foliación y reparametrizaciones del tiempo.

Lógicamente es sano pensar que esta teoría contenga en el límite de bajas energías o infra-rojo (IR) a la RG, ya que dicha propuesta se desvía de la RG mediante el acoplamiento de constantes adimensionales que bajo una elección adecuada de los valores de éstas, a bajas energías se decantaría nuevamente en la RG. Originalmente la propuesta de Hořava contiene varias versiones, dos de ellas son: "Hořava-Lifshitz proyectable"(HLP) y "Hořava-Lifshitz no-proyectable"(HLNP)². Tal y como inicialmente se había planteado la versión $HLNP$, ésta fue objeto de duras críticas por parte de Blas, Pujolas y Sibiryakov [7]-[8] y Chamousis, Niz, Padilla y Saffin [9], debido a que ésta versión adolecía en el régimen perturbativo,

¹Para mayor detalle sobre lo concerniente a foliación, ver el apéndice A

²La razón de estas versiones y sus características serán objeto de exposición del siguiente capítulo

de la existencia de *modos escalares extras* respecto de RG , los cuales se acoplan fuertemente a la misma y la teoría es inestable aún a escalas bajas de energías. Posteriormente Blas, Pujolas y Sibiryakov, introducen una serie de términos en el potencial de interacción que mejoran el comportamiento de estos modos extras [10]-[11], términos que por supuesto son idénticamente nulos en la versión HLP . La mejora de dicha patología, como también la consistencia de la teoría y clausura del álgebra de los vínculos, fue ampliamente estudiada por Bellorín y Restuccia [12]-[13]-[14]- [15]. Cabe mencionar que la versión HLP no contiene a todos los grados de libertad que permiten descubrir al *gravitón*. Ésta versión de la propuesta de Hořava se ha utilizado para describir modelos cosmológicos.

Moción diferente tiene la teoría Einstein-aether (ae), desarrollada ampliamente por Jacobson, Mattingly y Eling [16] hasta [23], precedida por el trabajo de Gasperini [26]. Esta teoría consiste en acoplar a la acción de Einstein-Hilbert (EH), un campo vectorial dinámico, tipo tiempo normalizado u_α , denominado *aether*. Este campo que es acoplado a la acción EH a través de derivadas covariantes, establece un marco preferencial de referencia, rompiendo la simetría local de Lorentz, pero manteniendo la covarianza general de la teoría. Tal modelo, hace posible el estudio de consecuencias gravitacionales y cosmológicas de sistemas con un marco preferencial de referencia, tales como velocidad de la luz variable o frecuencias de alta dispersión, siendo además una teoría que permite el contraste con la observaciones realizadas para testear la RG . Recientemente Jacobson [24]-[25], argumentó la equivalencia entre las teorías $HLNP$ (o extendida) y Einstein-aether, restringiendo el ingrediente principal de esta última, o sea u_α a ser ortogonal a las hojas que definen la foliación del espacio-tiempo, a través del gradiente de un campo escalar:

$$u_\alpha = W \partial_\alpha T \quad \text{con} \quad W = (-g^{\mu\nu} \partial_\mu T \partial_\nu T)^{-1/2}, \quad (1.2)$$

siendo $T = T(\vec{x}, t)$, un campo escalar bien comportado del espacio-tiempo. Jacobson clamaba dicha equivalencia o comparación, estableciendo la condición anterior

sumada a la descomposición en variables ADM de la teoría aer ,³ y luego comparó solamente la acción integral y constantes de acoplamiento entre ambas teorías. Tal enfoque no es del todo concluyente, ya que no se presentan las verdaderas variables dinámicas ni simetrías presentes. Por ésta razón el trabajo que a continuación se escribe, pretende clarificar y establecer la exacta y unívoca relación entre ambas teorías pero desde el punto de vista Hamiltoniano o canónico, en el régimen perturbativo a bajas energías.

La **propuesta** de esta investigación se enmarca en la descripción y formulación Hamiltoniana en el régimen perturbativo a segundo orden en el marco clásico, en el régimen de bajas energías IR de la teoría Einstein-aether restringida. Con miras a establecer el rango de las constantes de acoplamiento y fijaciones de gauge adecuadas, que permitan obtener la exacta y unívoca equivalencia entre la teoría aer y la teoría de Hořava -Lifshitz no-proyectable (HLNP) en el mismo régimen energético. El **objetivo general** es la búsqueda de la equivalencia a bajas energías entre las teorías de la gravitación de Hořava-Lifshitz no proyectable y Einstein-aether restringida. Los **objetivos específicos** consisten en (1) Obtener la formulación Lagrangeana a segundo orden de la teoría aer , así como (2) la descripción Hamiltoniana dentro del esquema perturbativo a segundo orden de la teoría aer en variables ADM , como también así estudiar (3) la clausura del álgebra de los vínculos asociados al análisis Hamiltoniano de la teoría aer mediante el algoritmo de Dirac-Bergmann y finalmente (4) relacionar la formulación Hamiltoniana de la teoría aer y la teoría de Hořava-Lifshitz no proyectable, estableciendo el rango de las constantes de acoplamiento para el cual las teorías son equivalentes, como también las fijaciones de gauge adecuadas.

La **hipótesis** de partida es la acción de la teoría aer propuesta por Jacobson y la formulación Hamiltoniana de la teoría ($HLNP$) estudiada ampliamente por

³De ahora en adelante se usará el acrónimo aer en virtud de la condición expuesta sobre el campo aether, es decir, se llamará a la teoría: Einstein-aether restringida.

Bellorín y Rescuccia. Se espera construir la formulación Hamiltoniana de la teoría *aer* en el régimen perturbativo. Este problema es no trivial debido a que la acción de la teoría *aer* contiene derivadas temporales de alto orden. Por esta razón tal formulación no ha sido hasta ahora obtenida. La **metodología** empleada en el estudio se lleva a cabo aplicando un esquema perturbativo clásico a segundo orden a la acción integral S en variables *ADM* de la teoría *aer*, dicha acción S tiene como variables dinámicas de la teoría la métrica de la foliación γ_{ij} , la función de lapse N , la función de shift N_i y el campo escalar $T = T(t, \vec{x})$. Como en todo enfoque perturbativo es menester fijar los *backgrounds* asociados a cada variable respecto del cual se hará la perturbación. Para las variables *ADM* basta con empatar el elemento de línea en variables *ADM* con el elemento de línea de un espacio-tiempo plano, o sea de Minkowsky. Mientras que para T basta con tomar el tiempo t , debido a la elección de restringir a u_α ortogonal a las hojas que definen la foliación. En adelante se procede a calcular los momentos conjugados asociados a cada velocidad de las variables antes mencionadas ejecutando la transformada de Legendre, en miras a conformar el Hamiltoniano de la teoría *aer* en variables *ADM*. Tal procedimiento arrojará los vínculos existentes en la teoría, con ello se procede a estudiar la clausura del álgebra de los mismos mediante el algoritmo de Dirac-Bergmann. Finalmente se comparan ambas formulaciones Hamiltonianas y se establecen las fijaciones de calibre o gauge que decidirán para que rango de las constantes de acoplamiento ambas teorías son equivalentes en el límite de bajas energías. La **importancia y originalidad** de esta investigación es la obtención por primera vez de la teoría *aer*, en el formalismo canónico en el límite de bajas energías bajo el esquema perturbativo clásico. Vislumbrándose las simetrías de gauge presentes en ésta, lo cual permite establecer de manera unívoca la correspondencia con la teoría de Hořava-Lifshitz no-proyectable.

El resto de la tesis, concierne en cuatro capítulos, donde se presenta una breve descripción de las teorías comprometidas en el estudio. Desarrollo y análisis de la

propuesta, resultados y conclusión, además de tres apéndices, que hacen referencia a la descomposición en variables ADM y explicación detallada de los cálculos comprendidos en el esquema perturbativo y clausura del álgebra de los vínculos.

Capítulo 2

Breve revisión de las teorías

Hořava-Lifshitz y Einstein-aether

2.1. Teoría Hořava-Lifshitz

Propuesta por P. Hořava [5], su motivación radica en el desarrollo de una teoría cuántica de la gravedad o teoría renormalizable de la gravedad, en virtud que la (RG) de Einstein en $3 + 1$ dimensiones es no renormalizable, al menos en el esquema perturbativo. Debido a esto Hořava, apoyándose de los trabajos precedentes de Lifshitz en materia condensada, específicamente campos escalares con escalamiento anisotrópico en las variables de espacio y tiempo, formula una teoría de la gravitación con relatividad anisotrópica¹ en aras de obtener una teoría de la gravedad en el régimen de altas energías (UV) o pequeñas distancias. Originalmente la propuesta contiene dos versiones, la versión *proyectable* y la versión *no-proyectable*.

El ingrediente principal o estructura básica de la propuesta de Hořava, como

¹Esta anisotropía rompe la simetría local de Lorentz, debido a que en relatividad general clásica las variables de espacio y tiempo son tratadas a un mismo nivel.

se expuso antes es el escalamiento anisotrópico en las variables del espacio-tiempo:

$$x \rightarrow bx \quad t \rightarrow b^z t \quad (2.1)$$

Las relaciones (2.1) claramente hacen una distinción entre espacio y tiempo, la cual rompe la invariancia ante los difeomorfismos espacio-temporales. Mientras que las expresiones (2.1) toman una coordenada temporal preferencial, no existen estados fundamentales para ningún sistema de coordenadas. Esto sugiere que la teoría sea construida sobre tal relación de escalamiento, necesitando solamente una variedad diferencial con una estructura espacio-tiempo básica. Esta construcción se lleva acabo aplicando las descomposición del espacio-tiempo en variables *ADM* (descomposición 3+1 dimensiones) [6], la cual es invariante ante los difeomorfismos $Diff_{\mathcal{F}}(\mathcal{M})$ que preservan la foliación, cuyos generadores infinitesimales están dados por:

$$\delta t = f(t) \quad \delta x^i = \xi^i(x, t). \quad (2.2)$$

Bajo este grupo de transformaciones las variables *ADM*, γ_{ij} , N_i y N , las cuales representa la métrica sobre las hojas de la foliación, la función *shift* y *lapse*, que definen el siguiente elemento de línea:

$$ds^2 = -N^2 c^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i - N^i dt) (dx^j - N^j dt), \quad (2.3)$$

respectivamente tienen la siguiente representación:

$$\begin{aligned} \delta \gamma_{ij} &= \partial_i \xi^k \gamma_{jk} + \partial_j \xi^k \gamma_{ik} + \xi^k \partial_k \gamma_{ij} + f \dot{\gamma}_{ij} \\ \delta N_i &= \partial_i \xi^j N_j + \xi^j \partial_j N_i + \dot{N}^j \gamma_{ij} \dot{f} N_i + f \dot{N}_i \\ \delta N &= \xi^j \partial_j N + \dot{f} N + f \dot{N}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde $\dot{f} \equiv \partial f / \partial t$. Con las elecciones anteriores, es posible ahora construir la acción integral. Esta puede ser descompuesta en una parte cinética y otra correspondiente al término potencial:

$$S = S_K + S_\nu, \quad (2.5)$$

donde S_K es la parte cinética de la acción, definida como la funcional más general, invariante ante $Diff_{\mathcal{F}}(\mathcal{M})$ y que contiene solo derivadas segundas en el tiempo de la métrica, y S_ν es el término de potencial, construido solamente con derivadas espaciales de la métrica. Comenzaremos con el término cinético, el cual tiene la siguiente forma:

$$S_K = g_k \int dt d^3x \sqrt{\gamma} N (K^{ij} K_{ij} - \lambda K^2), \quad (2.6)$$

siendo g_k una constante de acoplamiento (en RG $g_k = 1/16\pi G_N$), K_{ij} , $\lambda \in \mathcal{R}$, el tensor de curvatura extrínseco y K su traza, definidos por:

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} (\dot{\gamma}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i), \quad K = \gamma^{ij} K_{ij}, \quad (2.7)$$

estos objetos son ambos de manera independiente invariantes bajo $Diff_{\mathcal{F}}(\mathcal{M})$. Por otro lado λ es una constante adimensional, en el límite $\lambda = 1$ el término cinético es igual al de la RG. Finalmente tenemos para S_ν , la siguiente forma general:

$$S_\nu = \int dt d^3x \sqrt{\gamma} N \nu. \quad (2.8)$$

Ahora resta conocer cuantas derivadas espaciales pueden ser consideradas en ν , para ello se necesitan las dimensiones de escalamiento de los campos y esto a su vez requiere una elección de z .

2.1.1. Intermisión: dimensión y determinación de z

En esta intermisión, se seguirá de cerca la aproximación considerada en [27]-[28](por esta razón se omitirán algunos detalles). Mientras que en el resto de las secciones se tomará dimensión $d = 3$, en esta intermisión se tratará de forma arbitraria.

Sea κ algún objeto con dimensiones de momentum. El primer paso consiste en definir las dimensiones de escalamiento del espacio y tiempo como:

$$[dx] = [\kappa]^{-1}, \quad [dt] = [\kappa]^{-z}, \quad (2.9)$$

Para reflejar las propiedades en el régimen UV , se utilizará alguna escala Z , de dimensiones $[Z] = [dx]^z/[dt]$, adimensional. Combinando (2.3) con (2.9), se puede determinar la dimensión de N^i , mientras que se tiene la libertad de elegir γ_{ij} y N adimensionales, esto último debido a que en la propuesta de Hořava no hay métrica del espacio-tiempo. Sólo la métrica de las hojas de la foliación espacial.

$$[N^i] = [\kappa]^{z-1}, \quad [\gamma_{ij}] = [N] = [\kappa]^0, \quad (2.10)$$

de la cual se desprende que $[ds] = [\kappa]^{-1}$ solamente sobre cada hoja de la foliación, lo cual es el escalamiento usual del elemento de línea al no existir una métrica espacio-tiempo. Ahora se puede calcular la dimensión de escalamiento de la curvatura extrínseca y el elemento de volumen $dV_{d+1} \equiv d^d x dt \sqrt{\gamma} N$, resultando en:

$$[dV_{d+1}] = [\kappa]^{-d-z}, \quad [K_{ij}] = [\kappa]^z. \quad (2.11)$$

Aplicando la expresión anterior a (2.6) y demandando que la acción sea adimensional, se tiene:

$$[g_k] = [\kappa]^{d-z}, \quad (2.12)$$

para el cual g_k es adimensional si $d = z$. Como se está trabajando en $3 + 1$ dimensiones, de ahora en adelante el escalamiento anisotrópico estará caracterizado por $z = 3$. Por último se tiene para la dimensión de escalamiento del potencial ν lo siguiente:

$$[\nu] = [\kappa]^{2d} = [\kappa]^6. \quad (2.13)$$

Finalmete remarcar que según la forma en que sea construido ν se tendrán varias versiones de la teoría como se muestra a continuación.

2.2. Potencial y varias versiones de la teoría

2.2.1. Balance detallado

En la primera formulación de la gravedad de Hořava-Lifshitz, se propuso que el potencial ν podría ser definido usando el llamado *balance detallado*, el cual está inspirado por los trabajos de materia condensada, si bien ésta condición da lugar a una teoría con constante cosmológica de signo contrario al reportado con las observaciones. Este problema puede ser resuelto mediante una extensión analítica de la teoría [33], no obstante, pareciera ser que la condición de balance detallado podría resultar demasiado restrictiva al carecer de un sustento físico y podría representar simplemente una herramienta técnica para recortar el número de términos posibles en el potencial de interacción en un modo compatible con renormalización. Este principio dice que el potencial puede ser derivado a partir de un super potencial W , donde:

$$\nu = E^{ij} \mathcal{G}_{ijkl} E^{kl}, \quad \text{con} \quad E^{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta W}{\delta g_{ij}}, \quad (2.14)$$

siendo \mathcal{G}_{ijkl} la métrica generalizada de Wheeler-De Witt, definida por:

$$\mathcal{G}_{ijkl} E^{kl} = \frac{1}{2} \left(g^{ik} g^{jl} + g^{jk} g^{il} \right) - \lambda g^{ij} g^{kl}, \quad (2.15)$$

cuya inversa depende del valor de λ . Para $\lambda \neq 1/3$ está definida por:

$$\mathcal{G}^{ijkl} = \frac{1}{2} \left(g_{ij} g_{kl} - g_{il} g_{jk} \right) - \frac{\lambda}{3\lambda - 1} g_{ij} g_{kl}. \quad (2.16)$$

Entonces la acción más general que puede ser planteada con ν satisfaciendo la condición anterior es:

$$S_{bd} = g_k \int dt d^3x \sqrt{\gamma} N \left(K^{ij} K_{ij} - \alpha^4 C_{ij} C^{ij} + 2\alpha\beta \frac{\epsilon^{ijk}}{\sqrt{g}} R_{il} \nabla_j R_k^l - \beta^2 R^{ij} R_{ij} + \frac{\beta^2}{4} \frac{1-4\lambda}{1-3\lambda} R^2 + \frac{\beta^2 \zeta}{1-3\lambda} R - \frac{3\beta^2 \zeta^2}{1-3\lambda} \right), \quad (2.17)$$

donde ϵ^{ijk} es el símbolo de Levi-Civita y:

$$C^{ij} = \frac{\epsilon^{ikl}}{\sqrt{g}} \nabla^k \left(R_l^j - \frac{1}{4} \delta_l^j R \right), \quad (2.18)$$

es el tensor de Cotton, y α , β y ζ son constantes adimensionales de acoplamiento. Es importante notar que solamente hay 3 nuevas constantes de acoplamiento en el potencial ν , para un total de 6 términos. En este sentido, como antes se expuso la condición de balance detallado no cuenta con un argumento a favor más allá de la simplicidad de los cálculos.

2.2.2. Teoría proyectable

Esta versión debe su nombre, debido a que la función de lapse N está restringida a ser una función dependiente sólo del tiempo t , es decir, $N = N(t)$. Con lo cual esta tiene exactamente la misma dirección que la línea de evolución del tiempo. Una razón para tal elección, es que solamente en este caso se puede imponer la fijación del gauge $N = 1$, tal y como en RG , lo cual claramente no es posible fuera del caso de proyectabilidad, debido a que la foliación que preserva los difeomorfismos permite solamente reparametrizaciones independientes del tiempo. La proyectabilidad, implica que todos los términos con derivadas espaciales de N se anulan. Esto debido a que el potencial ν depende de la métrica y sus derivadas espaciales, lo que significa que la acción incluye todos los invariantes de curvatura que pueden ser construidos a partir de la métrica, hasta derivadas de sexto orden.

Usando las identidades de Bianchi e ignorando los términos de borde, la acción integral de la teoría proyectable S_p es:

$$\begin{aligned} S_p = g_k \int dt d^3x \sqrt{\gamma} N & \left(K^{ij} K_{ij} - \lambda K^2 - g_0 - g_1 R - g_2 R^2 \right. \\ & - g_3 R^{ij} R_{ij} - g_4 R^3 - g_5 R (R^{ij} R_{ij}) \\ & \left. - g_6 R_j^i R_k^j R_i^k - g_7 R \nabla^2 R - g_8 \nabla_i R_{jk} \nabla^i R^{jk} \right), \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde g_i son constantes de acoplamiento adimensionales. Se pueden remarcar las siguiente consideraciones de esta acción:

- Cuando se impone la condición de proyectabilidad en conjunto con el balance detallado, se encuentra que la acción s_{bd} es la misma, aparte del hecho que N es una función del tiempo solamente.
- Existen 3 operadores más en la acción de la versión proyectable que la de balance detallado, lo cual significa que el balance detallado no simplifica lo suficiente la acción.
- g_0 controla el valor de la constante cosmológica, el cual no está restringido.
- Hay dos tipos de términos que violan la invarianza de Lorentz en la acción. Unos contenidos en el potencial ν , los cuales son suprimidos por alguna escala que puede ser determinada ajustando g_2 con g_8 . Los otros están contenidos en el término cinético y están relacionados con el hecho que λ no es generalmente igual a 1.

2.2.3. Teoría no-proyectable

Es la formulación más general de la teoría Hořara-Lifshitz, ya que la función de lapso N , no está restringida a ser sólo función del tiempo, sino que puede depender además de las coordenadas espaciales, es decir, $N = N(\vec{x}, t)$. Abandonandose pués entonces, la condición de proyectabilidad y a su vez también la condición de balance detallado. Es importante recalcar que cuando se abandona el balance detallado, entonces agregar sólo algunas formas específicas de los términos adicionales no es la forma correcta de como construir la forma más general de la versión no proyectable. De hecho, las correcciones radiativas generarán todos los términos posibles compatibles con las simetrías de la teoría y por lo tanto todos estos términos deben tenerse en cuenta. El punto crucial de la no-proyectabilidad

es que el término potencial debe contener también términos contruidos utilizando la cantidad vectorial:

$$a_i = \frac{1}{N} \partial_i N, \quad (2.20)$$

el cual es llamado *aceleración*. Esta aceleración permite construir objetos invariantes que pueden ser adheridos al potencial de la acción, ya sea contrayendolo consigo mismo o con términos de curvatura [10]. Finalmente el invariante de menor orden que puede ser construido con a_i es $a^i a_i$, con lo cual la acción S_{np} es:

$$S_{np} = \frac{M_{pl}^2}{2} \int dt d^3x \sqrt{\gamma} N (K^{ij} K_{ij} - \lambda K^2 + \beta R + \alpha a_i a^i), \quad (2.21)$$

Esta versión de la teoría fue analizada por [10], con miras a resolver ciertas inconsistencias. De esta versión se puede destacar lo siguiente:

- La acción S_{np} , puede ser extendida y considerar el acoplamiento de la constante cosmológica.
- El número de operadores en el caso no proyectable es mayor que en el caso proyectable.
- Para recobrar RG en el límite IR entonces $\lambda \rightarrow 1$, $\beta \rightarrow 1$ y $\alpha \rightarrow 0$.

2.3. Teoría Einstein-aether

La primera aparición de esta teoría, en la forma que actualmente se conoce es debida a Jacobson y Mattingly [16]. Tal y como se ha explicado anteriormente esta teoría, tiene como ingrediente principal un campo vectorial dinámico, tipo tiempo y normalizado u_α , llamado aether:

$$u^\alpha u_\alpha = -1, \quad (2.22)$$

el cual establece un marco preferencial de referencia, rompiendo la simetría local de Lorentz. Este campo se acopla a la acción gravitacional de la RG , a través de derivadas covariantes:

$$S_{ae} = \frac{1}{16\pi G_{ae}} \int \sqrt{-g} (R + \mathcal{L}_{ae}) d^4x, \quad (2.23)$$

donde R es el escalar de Ricci cuadri-dimensional, G_{ae} una constante relacionada con la constante de Newton G_N y \mathcal{L}_{ae} la densidad Lagrangeana en la teoría ae , dado por:

$$\mathcal{L}_{ae} = \mathcal{M}^{\alpha\beta\lambda\gamma} \nabla_\alpha u_\lambda \nabla_\beta u_\gamma + \lambda (u_\alpha u^\alpha + 1), \quad (2.24)$$

siendo $\mathcal{M}^{\alpha\beta\lambda\gamma}$ una matriz simétrica respecto al primer y segundo par de índices de manera simultánea, definida como:

$$\mathcal{M}^{\alpha\beta\lambda\gamma} = c_1 g^{\alpha\beta} g^{\lambda\gamma} + c_2 g^{\alpha\lambda} g^{\beta\gamma} + c_3 g^{\alpha\gamma} g^{\beta\lambda} + c_4 u^\alpha u^\beta g^{\lambda\gamma}, \quad (2.25)$$

con c_i constante adimensionales y λ un multiplicador de Lagrange que estresa la condición (2.22). Justamente la condición (2.22), sumada al hecho que u_α es dinámico, lo que se puede expresar también diciendo que el campo aether posee tres grados de libertad independientes, permite mantener los requerimientos de estabilidad de la teoría, y así asegurar la covarianza general de ésta. Usando la definición estándar, tenemos el siguiente tensor de energía-impulso asociado al

campo aether:

$$\begin{aligned}
T_{\alpha\beta} = & -\frac{g_{\alpha\beta}}{2}\mathcal{M}^{\alpha\beta\lambda\gamma}\nabla_{\alpha}u_{\lambda}\nabla_{\beta}u_{\gamma} \\
& -2\left[c_1\nabla_{\alpha}u^{\gamma}\nabla_{\beta}u^{\gamma}+c_2\nabla_{\alpha}u_{\beta}\nabla_{\lambda}u^{\lambda}+c_3\nabla_{\alpha}u_{\lambda}\nabla^{\lambda}u_{\beta}\right] \\
& -c_4u^{\lambda}u^{\gamma}\nabla_{\alpha}u_{\lambda}\nabla_{\beta}u_{\gamma}-2\nabla_{\lambda}\left[J_{(\alpha}{}^{\lambda}u_{\beta)}-J_{(\alpha}^{\lambda}u_{\beta)}-J_{(\alpha\beta)}u^{\lambda}\right]
\end{aligned}
\tag{2.26}$$

mientras que la ecuación de Euler-Lagrange obtenida por medio de la variación de u_{α} , viene dada por:

$$\nabla_{\alpha}J_{\beta}^{\alpha}+c_4u^{\alpha}\nabla_{\alpha}u^{\gamma}\nabla_{\beta}u_{\gamma}=\lambda u_{\beta},\tag{2.27}$$

donde se ha definido:

$$J^{\beta\gamma}=\mathcal{M}^{\alpha\beta\lambda\gamma}\nabla_{\alpha}u_{\lambda}.\tag{2.28}$$

Como se dijo antes, existen diferentes motivaciones para estudiar teorías de la gravedad con sistemas de referencia privilegiados. En primer lugar, es útil tener una teoría viable contra que comparar las observaciones gravitacionales, y esto también puede ser visto como una forma de probar la RG. La posibilidad de que el vacío en gravedad cuántica pueda determinar un marco preferencial también fue una motivación en los estudios de estas teorías. Finalmente, ésta teoría modificada de la gravedad podría explicar la presencia de los componentes oscuros, tales como energía y materia, y su papel en la explicación de la aceleración cósmica, curvas de rotación de galaxias y formación de estructuras. A continuación se presentan de manera sucinta algunos de los estudios realizados por la teoría Einstein-aether y su compatibilidad con la RG.

2.4. Dinámica cosmológica

Consideremos la dinámica de un universo $FLLRW^2$ espacialmente plano y no perturbado en presencia del campo aether. La homogeneidad y la isotropía limitan

²Acrónimo que hace referencia a un Universo tipo Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker

la forma de la métrica y del aether. Con el elemento de línea dado por:

$$ds^2 = a^2(\eta) [-d\eta^2 + d\vec{x}^2], \quad (2.29)$$

de lo cual en conjunto con (2.22), se tiene:

$$u^\alpha = (a^{-1}, 0, 0, 0). \quad (2.30)$$

Introduciendo la expresión anterior en (2.26), se encuentra que la densidad de energía y presión asociadas al campo aether son respectivamente:

$$\rho_{u_\gamma} = \frac{3\alpha}{16\pi G a^2} H^2, \quad p_{u_\gamma} = -\frac{\alpha}{16\pi G a^2} (H^2 + 2H'), \quad (2.31)$$

donde $G = 1/8\pi M_p^2$, $H' = a'/a$ y la prima denota derivada respecto al tiempo conformal. Luego las ecuaciones de Einstein vienen dadas por:

$$H^2 = \frac{8\pi G_{cos}}{3} a^2 \rho \quad (2.32)$$

$$H' = -\frac{4\pi G_{cos}}{3} a^2 (\rho + 3p), \quad (2.33)$$

donde ρ y p son la densidad de energía y presión de los campos de materia (excluyendo al campo aether) y:

$$G_{cos} = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{-1} G. \quad (2.34)$$

Una comparación con las mismas ecuaciones en ausencia del campo aether, muestra que el efecto del campo vectorial aether es meramente redefinir el valor de la constante gravitacional de Newton [29], la densidad de energía y la presión del campo vectorial aether imitan la de los componentes restantes en el universo. Por otro lado, el campo gravitacional creado por cuerpos aislados no es exactamente el mismo que en RG , y en este sentido el campo aether es una buena modificación de la gravedad. A bajos órdenes en la expansión post-Newtoniana, las fuentes de potencial para un cuerpo estático y esféricamente simétrico satisface la ecuación de Poisson $\Delta\phi = 4\pi G_N \rho$, pero con una constante de gravitacional modificada [17]:

$$G_N = \left(1 + \frac{c_1 + c_4}{2}\right)^{-1} G. \quad (2.35)$$

Por lo tanto, el aether también renormaliza la constante gravitacional medida en experimentos locales, pero por una cantidad diferente que en el caso cosmológico. Las correcciones post-Newtonianas llevan a desviaciones adicionales de la RG , que imponen severas restricciones a los parámetros del aether.

Es de notar que el multiplicador de Lagrange λ , tiene un valor finito en las soluciones cosmológicas. Contrayendo la ecuación (2.27) con u^β se tiene:

$$\lambda = \frac{3}{a^2} \left(\beta H^2 - c_2 H' \right). \quad (2.36)$$

2.5. Restricciones generales

Como se mencionó anteriormente hay varias condiciones que los c_i tienen que satisfacer, las cuales surgen del límite post-Newtoniano de la teoría, núcleo-síntesis durante la era del Big-Bang y la llegada de los rayos cósmicos de alta energía a la tierra. Un resumen extenso de estas restricciones se puede encontrar en [17].

2.5.1. Límite post-Newtoniano

En cualquier teoría métrica, el campo gravitatorio creado por los cuerpos no-relativistas puede ser caracterizada más allá del límite Newtoniano por un conjunto de parámetros post-Newtoniano PPN , cuyos valores están fuertemente limitados por las pruebas gravitacionales del sistema solar [30]. Pero debido a que el aether define un marco preferido, también introduce desviaciones de la RG , que se manifiestan como potenciales gravitacionales que dependen de la velocidad de los cuerpos que interactúan con respecto al aether. Estos efectos de marco preferido están codificados en los parámetros PPN , α_1 y α_2 . Uno de los límites o cotas más estrictos en el valor de α_1 viene de las medidas de la excentricidad del pulsar binario $J2317 + 1439$ (que cambiaría si α_1 fuera no cero) [31], mientras que uno de los límites más estrictos en α_2 proviene de la alineación del giro del sol con

el momentum angular del sistema solar (con α_2 no cero, podría conducir a un desalineamiento) [32]. Estos límites conducen a las siguientes condiciones:

$$\alpha_1 = -\frac{8(c_1c_4 + c_3^2)}{2c_1 - c_1^2 + c_3^2} \leq 1,7 \times 10^{-4} \quad (2.37)$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{2} - \frac{(2c_1 + 2c_3 - c_1 - c_4)(\alpha + c_1 + c_4)}{\beta(2 - c_1 + c_4)} \leq 1,2 \times 10^{-7}. \quad (2.38)$$

Es importante destacar que ambos límites asumen que la velocidad del sol ω con respecto al aether es la velocidad con respecto al marco en que el dipolo del *CMB* desaparece, $\omega \sim 10^{-3}$. A grandes rasgos, el límite en α_1 es en realidad un límite en $\alpha_1\omega$, mientras que el límite en α_2 es realmente una restricción $\alpha_2\omega^2$. Por lo tanto, si ω fuera mayor de lo supuesto, los límites de α_1 y α_2 serían en realidad más estrictos. En otras palabras, las restricciones en los parámetros *PPN*, α_1 y α_2 son realmente:

$$\alpha_1 \lesssim 10^{-4} \times \left(\frac{10^{-3}}{\omega}\right) \quad (2.39)$$

$$\alpha_2 \lesssim 10^{-7} \times \left(\frac{10^{-3}}{\omega}\right)^2, \quad (2.40)$$

donde ω es nuevamente la velocidad del sol o pulsar binario con respecto al marco preferencial.

2.5.2. Big-Bang: nucleosíntesis

La acordancia entre las abundancias de elementos luminosos predichas y los observados (o medido indirectamente usando observaciones de la radiación de fondo cósmico) restringe el valor de la constante de Hubble en el momento en que se formaron los elementos ligeros, a temperaturas de aproximadamente $T \approx 10^9[K]$. Debido a que la tasa de expansión depende del valor de la constante de Newton renormalizada $G_{cos} = 2G/(2 - \alpha)$ a través de la expresión (2.30), y porque ésta última está relacionada con la constante gravitacional Newtoniana por la ecuación (2.33), dado el valor medido de G_N en pequeñas escalas y el número de especies

relativistas durante la nucleosíntesis, se puede determinar cómo las abundancias de elementos ligeros dependen de los parámetros α y $c_1 + c_4$. De acuerdo a tal predicción con las observaciones, implican entonces:

$$\frac{c_1 + c_4 + \alpha}{2 - \alpha} \lesssim 10 \%. \quad (2.41)$$

Capítulo 3

Formulación Lagrangeana y Hamiltoniana de la teoría *aer*

3.1. Acción de la teoría Einstein-aether

La acción más general en la teoría *ae*, la cual es invariante ante difeomorfismos y cuadrática en derivadas, sin considerar acoplamiento de campos materiales está dada por [16]:

$$S_{ae} = \frac{1}{16\pi G_{ae}} \int \sqrt{-g} (R + \mathcal{L}_{ae}) d^4x, \quad (3.1)$$

donde R es el escalar de Ricci cuadri-dimensional, G_{ae} una constante relacionada con la constante de Newton G_N y \mathcal{L}_{ae} la densidad Lagrangeana en la teoría *ae*, dado por:

$$\mathcal{L}_{ae} = \mathcal{M}^{\alpha\beta\lambda\gamma} \nabla_\alpha u_\lambda \nabla_\beta u_\gamma, \quad (3.2)$$

siendo $\mathcal{M}^{\alpha\beta\lambda\gamma}$ una matriz simétrica respecto al primer y segundo par de índices de manera simultánea, definida como:

$$\mathcal{M}^{\alpha\beta\lambda\gamma} = c_1 g^{\alpha\beta} g^{\lambda\gamma} + c_2 g^{\alpha\lambda} g^{\beta\gamma} + c_3 g^{\alpha\gamma} g^{\beta\lambda} + c_4 u^\alpha u^\beta g^{\lambda\gamma}, \quad (3.3)$$

donde c_1, c_2, c_3 y c_4 son constantes adimensionales. Cabe señalar que los índices griegos toman valores espacio-temporales ($\alpha = 0, 1, 2, 3$), mientras que índices

latinos que aparezcan sólo tomarán valores espaciales ($i = 1, 2, 3$). Por otro lado u_α es un campo vectorial dinámico, tipo tiempo normalizado ($u_\alpha u^\alpha = -1$) el cual se denomina campo *aether*. Tal campo vectorial está especificado por tres parámetros independientes en cada punto del espacio y es acoplado a la teoría a través de derivadas covariantes [20].

Las ecuaciones de campo generales asociadas a la acción (3.1), se obtienen exigiendo que la acción sea estacionaria ante la variación de la métrica y el campo *aether* u_α , es decir $\delta S = 0$. Para ello convendremos en realizar por simplicidad del cálculo la variación respecto de la métrica inversa, es decir $g^{\alpha\beta}$ y el campo *aether* en forma contra-variante u^α . Esto debido a que la matriz $\mathcal{M}^{\alpha\beta\lambda\gamma}$ contiene a ambos elementos en dicha representación.

La variación de la acción S respecto de la métrica $g^{\alpha\beta}$ conduce a la siguiente ecuación general [34]:

$$G_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}, \quad (3.4)$$

siendo $G_{\alpha\beta}$ el tensor de Einstein definido por:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2}g_{\alpha\beta}, \quad (3.5)$$

y $T_{\alpha\beta}$ el tensor de energía-impulso asociado al campo *aether*, definido por:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} = & -\frac{g_{\alpha\beta}}{2}\mathcal{M}^{\alpha\beta\lambda\gamma}\nabla_\alpha u_\lambda\nabla_\beta u_\gamma \\ & - 2[c_1\nabla_\alpha u^\gamma\nabla_\beta u_\gamma + c_2\nabla_\alpha u_\beta\nabla_\lambda u^\lambda + c_3\nabla_\alpha u_\lambda\nabla^\lambda u_\beta] \\ & - c_4u^\lambda u^\gamma\nabla_\alpha u_\lambda\nabla_\beta u_\gamma - 2\nabla_\lambda [J_{(\alpha}{}^\lambda u_{\beta)} - J_{(\alpha}^\lambda u_{\beta)} - J_{(\alpha\beta)}u^\lambda] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Por otro lado la variación de la acción (3.1) con respecto a u^α da:

$$c_4\dot{u}_\lambda\nabla_\beta u_\lambda - g_{\gamma\beta}\nabla_\beta [\mathcal{M}^{\alpha\beta\lambda\gamma}\nabla_\alpha u_\lambda] = 0, \quad (3.7)$$

donde se ha definido:

$$\dot{u}_\alpha = u^\beta\nabla_\beta u_\alpha, \quad J^{\beta\gamma} = \mathcal{M}^{\alpha\beta\lambda\gamma}\nabla_\alpha u_\lambda. \quad (3.8)$$

Debido a que el tensor de Einstein (3.5) cumple con la identidad de Bianchi:

$$\nabla^\alpha G_{\alpha\beta} = 0, \quad (3.9)$$

el tensor de energía-impulso debe conservarse (3.6):

$$\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = 0. \quad (3.10)$$

3.2. Descomposición en variables *ADM* para la métrica

En aras de arribar a la formulación canónica o Hamiltoniana de la teoría *ea*-restringida ¹ (*ear* en corto) en el régimen perturbativo clásico a segundo orden, es conveniente primero descomponer la métrica en variables *ADM* [6]. En estas variables el intervalo viene dado por²:

$$ds_{ADM}^2 = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i - N^i dt) (dx^j - N^j dt), \text{ con } (j, i = 1, 2, 3), \quad (3.11)$$

, siendo γ_{ij} la trimétrica de las hipersuperficies de la foliación del espacio-tiempo, la cual depende del tiempo t y se puede considerar como una variable dinámica. La trimétrica es un tensor simétrico, lo cual implica que tiene seis grados de libertad, a diferencia de la métrica $g_{\mu\nu}$ correspondiente al espacio-tiempo la cual posee diez grados de libertad. Los cuatro grados de libertad restantes vienen codificados en la funciones N y N^i , llamadas funciones de *lapse* y *shift* respectivamente. La función *lapse* está relacionada con la separación entre cada hipersuperficie. La función *shift* tiene que ver con el movimiento de un punto al pasar de una hipersuperficie a otra. De acuerdo al elemento de línea (3.11), la relación existente entre las componentes de la métrica cuadi-dimensional $g_{\mu\nu}$ y las variables *ADM* γ_{ij} , N y N^i , viene dada

¹Nombre que será más claro por razones dadas posteriormente.

²La descomposición *ADM* será solamente aplicada a la métrica.

por:

$$g_{00} = -N^2 + \gamma_{ij}N^iN^j, \quad g_{0i} = \gamma_{ij}N^j, \quad g_{ij} = \gamma_{ij}. \quad (3.12)$$

Mientras que las relaciones inversas son:

$$g^{00} = -\frac{1}{N^2}, \quad g^{0i} = \frac{N^i}{N^2}, \quad g^{ij} = \gamma^{ij} - \frac{N^iN^j}{N^2}. \quad (3.13)$$

3.3. Langrangeano perturbado de la teoría *aer*

Relacionar ambas teorías, exige imponer una condición fundamental sobre el campo vectorial *aether* u_α . Esta requiere que el campo *aether* sea ortogonal a las hojas de la foliación del espacio-tiempo, para ello se define el campo *aether* a través del gradiente de un campo escalar $T = T(t, \vec{x})$ bien comportado del espacio-tiempo [24], de la siguiente manera:

$$u_\alpha = W \partial_\alpha T \quad \text{con} \quad W = (-g^{\mu\nu} \partial_\mu T \partial_\nu T)^{-1/2}, \quad (3.14)$$

manteniendo el hecho que el campo *aether* está normalizado, es decir:

$$u^\alpha u_\alpha = -1. \quad (3.15)$$

Estas consideraciones, sumadas a la descomposición en variables *ADM* para la métrica, conllevan a expresar la acción (3.1) de la siguiente manera:

$$S_{ae} = \frac{1}{16\pi G_{ae}} \int N \sqrt{\gamma} (K^{ij} K_{ij} - K^2 + {}^{(3)}R + \mathcal{M}^{\alpha\beta\lambda\gamma} \nabla_\alpha u_\lambda \nabla_\beta u_\gamma) d^3x dt, \quad (3.16)$$

sujeta a las restricciones (3.14) y (3.15), siendo ${}^{(3)}R$ el escalar de Ricci tri-dimensional, denominado también el término potencial, K_{ij} la curvatura extrínseca de las hiper-superficies de la foliación la cual es un tensor simétrico y está definida por:

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} (\dot{\gamma}_{ij} + \nabla_i N_j + \nabla_j N_i), \quad (3.17)$$

donde $K = \gamma^{ij}K_{ij}$ la traza de la curvatura extrínseca (3.17). Cabe mencionar que cuando $u_\alpha = 0$, se recupera la teoría de la relatividad general de Einstein. Considerando además, que el elemento de volumen se ha descompuesto en:

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{\gamma}. \quad (3.18)$$

Cabe mencionar que la función *lapse* N debe ser considerada como una función del espacio-tiempo, es decir, $N = N(\vec{x}, t)$. Esto conlleva a que el término asociado al potencial en la acción (término correspondiente al escalar de Ricci tridimensional), pueda contener términos construidos a partir de la cantidad vectorial $a_i = \nabla_i(N)/N$, llamada *aceleración*.

De aquí en adelante los índices serán subidos o bajados con la tri-métrica γ_{ij} y se considerará la métrica $(-, +, +, +)$.

Un aspecto importante a destacar, es sí las ecuaciones de campo de Einstein implican la conservación del tensor energía-impulso asociado a este campo escalar. Una forma de corroborar esto es recurriendo a la invariancia frente a *difeomorfismos* de la acción (3.16). Esto es bajo, difeomorfismos generados por un campo vectorial arbitrario ξ^a , la acción es invariante, por tanto se tiene:

$$\delta_\xi S = \int \left(\frac{\delta S}{\delta g} \right) \mathfrak{L}_\xi g + \left(\frac{\delta S}{\delta T} \right) \mathfrak{L}_\xi T = 0, \quad (3.19)$$

donde \mathfrak{L}_ξ es la derivada de Lie a largo del campo vectorial ξ^a , definida por:

$$\mathfrak{L}_\xi = W\xi^i\nabla_i W^j - W^i\nabla_i \xi^j. \quad (3.20)$$

Si se considera que las ecuaciones de Einstein se cumplen, es decir $\delta S/\delta g = 0$, entonces:

$$\int \left(\frac{\delta S}{\delta T} \right) \mathfrak{L}_\xi T = 0, \quad (3.21)$$

para cualquier campo ξ^a . Es claro que la expresión anterior se cumple si el campo escalar T es constante, lo cual no es el caso debido a la foliación escogida. Por otro

lado $\mathfrak{L}_\xi T$ es arbitraria variando la elección del campo vectorial ξ^a , por tanto se concluye que:

$$\frac{\delta S}{\delta T} = 0, \quad (3.22)$$

lo cual implica que se satisface la ecuación de campo asociada a T [20]-[24].

3.3.1. Análisis perturbativo

El análisis perturbativo concierne en perturbar las variables dinámicas involucradas, que este caso serían la tri-métrica γ_{ij} de las hojas de la foliación, el campo escalar T y las variables N y N^i . Para ello es imprescindible establecer el *background* en torno al cual se realiza la perturbación para cada variable. Para establecer los *background* asociados a la tri-métrica γ_{ij} , la función lapse N y shift N^i , basta comparar el intervalo (3.11) con el asociado a un espacio-tiempo plano, es decir:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (3.23)$$

entonces a partir de (3.11) y (3.23), se concluye que el *background* asociado a las variables antes mencionadas son:

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij}, \quad N = 1, \quad N^i = 0, \quad (3.24)$$

siendo δ_{ij} la delta de Kronecker. Con lo anterior se puede establecer ahora la perturbación deseada para cada variable hasta segundo orden como sigue:

$$N^i = \epsilon n^i + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.25)$$

$$N = 1 + \epsilon n + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.26)$$

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} + \epsilon h_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.27)$$

siendo h_{ij} , n y n^i las perturbaciones asociadas a cada variable y ϵ un parámetro de control de la perturbación. Es también necesario obtener la inversa de la tri-métrica

γ_{ij} , la cual debe cumplir la siguiente relación:

$$\gamma_{ij}\gamma^{jk} = \delta_i^k, \quad (3.28)$$

se propone entonces una inversa de la siguiente forma a segundo orden en ϵ :

$$\gamma^{jk} = \delta^{jk} + \epsilon \hat{h}^{jk} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.29)$$

chequeando que se cumpla la relación (3.28), se obtiene:

$$\gamma_{ij}\gamma^{jk} = \delta_i^k + \epsilon \left(\delta_{ij}\hat{h}^{jk} + \delta^{jk}h_{ij} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.30)$$

imponiendo:

$$\delta_{ij}\hat{h}^{jk} + \delta^{jk}h_{ij} = 0 \Rightarrow \hat{h}^{ik} = -h_{ik} \quad (3.31)$$

Finalmente, se arriba a:

$$\gamma^{ij} = \delta^{ij} - \epsilon h_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.32)$$

Por otro lado el *background* más natural para el campo escalar T es el tiempo t , lo cual conlleva a la siguiente expansión:

$$T = t + \epsilon\tau + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.33)$$

siendo $\tau = \tau(\vec{x}, t)$ un campo escalar bien comportado del espacio-tiempo. Las consideraciones anteriores permiten obtener las componentes espaciales y temporales del campo *aether* u_α , como sigue:

$$u_0 = 1 + \epsilon n + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.34)$$

$$u_i = \epsilon \partial_i \tau + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.35)$$

donde se ha tenido en cuenta el siguiente resultado:

$$W = (-g^{\mu\nu}\partial_\mu T\partial_\nu T)^{-1/2} \approx 1 - \epsilon \dot{\tau} + \epsilon n + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.36)$$

Expandiendo la expresión (3.2) de acuerdo a las consideraciones antes expuestas, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{aer} = & -\mathcal{M}^{0000}\nabla_0u_0\nabla_0u_0 - 2\mathcal{M}^{00i0}\nabla_0u_i\nabla_0u_0 - 2\mathcal{M}^{0i00}\nabla_0u_0\nabla_iu_0 \\
& - 2\mathcal{M}^{0i0j}\nabla_0u_0\nabla_iu_j - 2\mathcal{M}^{i00j}\nabla_iu_0\nabla_0u_j - 2\mathcal{M}^{ijk0}\nabla_iu_k\nabla_ju_0 \\
& - 2\mathcal{M}^{0ijk}\nabla_0u_j\nabla_iu_k - 2\mathcal{M}^{0i0i}\nabla_0u_0\nabla_iu_i - \mathcal{M}^{ij00}\nabla_iu_0\nabla_ju_0 \\
& - \mathcal{M}^{00ij}\nabla_0u_i\nabla_0u_j - \mathcal{M}^{ijkl}\nabla_iu_k\nabla_ju_l,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

dado que la expresión anterior es cuadrática en las derivadas covariantes, bastará sólo con expresar cada una de ellas hasta primer orden en ϵ como sigue:

$$\nabla_0u_0 = \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{3.38}$$

$$\nabla_iu_0 = \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{3.39}$$

$$\nabla_0u_0 = \epsilon\partial_i\dot{\tau} - \epsilon\partial_in + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{3.40}$$

$$\nabla_iu_j = \epsilon\partial_i\partial_j\tau + \frac{\epsilon}{2}[\partial_jn^i + \partial_in^j - \dot{h}_{ij}] + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{3.41}$$

tal desarrollo consideró los siguientes símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{00}^0 = \epsilon\dot{n} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{3.42}$$

$$\Gamma_{i0}^0 = \epsilon\partial_in + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{3.43}$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{\epsilon}{2}[h_{ij} - \partial_jn^i - \partial_in^j] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{3.44}$$

Como sólo serán considerados términos de orden cuadráticos en ϵ , la expresión (3.37) se reduce a:

$$\mathcal{L}_{aer} = \mathcal{M}^{00ij}\nabla_0u_i\nabla_0u_j + \mathcal{M}^{ijkl}\nabla_iu_k\nabla_ju_l, \tag{3.45}$$

siendo suficiente estimar el orden cero de las matrices que anteceden a las derivadas covariantes:

$$\mathcal{M}^{00ij} = (c_4 - c_1)\delta^{ij}, \quad \mathcal{M}^{ijkl} = \delta^{ij}\delta^{kl}c_1 + \delta^{ik}\delta^{jl}c_2 + \delta^{il}\delta^{kj}c_3. \tag{3.46}$$

Con lo anterior se arriba a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{aer} = \epsilon^2 & \left[(c_4 - c_1) (\partial_i \dot{\tau} - \partial_i n)^2 + \epsilon^2 (c_1 + c_3) \left(\partial_i \partial_j \tau + \frac{\partial_i n^j}{2} + \frac{\partial_j n^i}{2} - \frac{\dot{h}_{ij}}{2} \right)^2 \right. \\ & \left. + c_2 \left(\Delta \tau + \partial_i n^i - \frac{\partial h}{2} \right)^2 \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3), \end{aligned} \quad (3.47)$$

teniendo presente que $\Delta \equiv \partial_i \partial_i$ es el operador de Laplace-Beltrami y $h \equiv h_{ii}$ corresponde a la traza.

En aras de la conveniencia, se codificará la información asociada a la velocidad \dot{h}_{ij} , correspondiente a la perturbación de la tri-métrica a través de la perturbación del tensor de curvatura extrínseca (3.17), la cual viene definida por:

$$K_{ij} = \epsilon \kappa_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.48)$$

siendo κ_{ij} la corrección a primer orden, expresada por:

$$\kappa_{ij} = \frac{1}{2} \left(\dot{h}_{ij} - \partial_i n^k \delta_{jk} - \partial_j n^k \delta_{ik} \right), \quad (3.49)$$

con esto la ecuación (3.47) luce como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ear} = \epsilon^2 & \left[\kappa_{ij}^2 - \lambda \kappa^2 - 2(1 - \beta) \kappa_{ij} \partial_i \partial_j \tau - 2(\beta - \lambda) \Delta \tau \kappa + \alpha (\partial_i \dot{\tau} - \partial_i n)^2 \right. \\ & \left. + (1 - \beta) (\partial_i \partial_j \tau)^2 + (\beta - \lambda) (\Delta \tau)^2 \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3), \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde se han redefinido los parámetros α , β y λ de la siguiente manera:

$$\alpha = \frac{c_1 - c_4}{c_1 + c_3 + 1}, \quad \beta = \frac{1}{c_1 + c_3 + 1}, \quad \lambda = \frac{1 - c_2}{c_1 + c_3 + 1}, \quad (3.51)$$

bajo la premisa que $\lambda \neq 1/3$. Finalmente la expresión (3.50) corresponde a la densidad Lagrangeana de la teoría *aer* a segundo orden en el esquema perturbativo clásico. Por otro lado la parte correspondiente al potencial, tiene la siguiente representación a segundo orden en el esquema perturbativo:

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{\gamma} N^{(3)} R = \epsilon^2 \beta \left(\frac{1}{4} h_{ij} \Delta h_{ij} - \frac{1}{4} h \Delta h - n \Delta h \right), \quad (3.52)$$

destacando que se ha integrado por partes y utilizado el gauge de Lorentz $\partial_i h_{ij} = 0$, como es usual [34]. También se ha hecho uso de:

$$\sqrt{\gamma}N \approx 1 + \epsilon \left(n + \frac{h}{2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.53)$$

Cabe mencionar que el término $\sqrt{\gamma}N$ multiplica también en la acción (3.1) al Lagrangeano ear , pero como este ya es cuadrático en ϵ entonces sólo basta tomar el término de orden cero de la expansión (3.53). Finalmente el Lagrangeano viene dado por:

$$L = \epsilon^2 \int d^3x \mathcal{L}, \quad (3.54)$$

siendo:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{aer} + \mathcal{L}_G \quad (3.55)$$

Por último indicar que una revisión más detallada de todos los cálculos presentados en este capítulo puede ser encontrada en el apéndice B.

3.4. Transformada de Legendre

La transición de la descripción Lagrangeana a la descripción Hamiltoniana, está dada por la transformada de Legendre:

$$H(p(t), q(t)) = p_i(t)\dot{q}^i(t) - L(q(t), \dot{q}(t)), \quad (3.56)$$

siendo $p(t)$ y $q(t)$ las variables canónicas del espacio de *fase*. Dicho cambio exige una relación entre las variables activas $\dot{q}^i(t)$ y $p_i(t)$, establecida por:

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (3.57)$$

Las variables activas involucradas en este caso son: \dot{n} , \dot{n}_i , $\dot{\tau}$, $\dot{\gamma}$ y $\dot{\gamma}_{ij}$. De las cuales se desprenden las siguientes densidades de momento asociados o conjugados a n ,

n_i, τ, γ y γ_{ij} , respectivamente:

$$\phi_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{n}} = 0 \quad (3.58)$$

$$\phi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{n}^i} = 0 \quad (3.59)$$

$$p_\tau = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\tau}} = -2\alpha\Delta (\dot{\tau} - n) \quad (3.60)$$

$$\pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} = \kappa_{ij} - \lambda\kappa\delta_{ij} - (1 - \beta) (\partial_i \partial_j \tau) - (\beta - \lambda) \Delta\tau\delta_{ij}. \quad (3.61)$$

Considerando que en la obtención de p_τ se ha integrado por partes y se ha desconsiderado el término correspondiente a derivadas totales, debido al comportamiento *asintótico* de los campos en el infinito (tienden asintóticamente a cero en el infinito) tal como en relatividad general, en otras palabras específicamente se ha establecido que todas las configuraciones son fijas en el infinito, lo cual corresponde a un espacio-tiempo tipo Minkowski o equivalentemente a un manifold Riemanniano asintóticamente plano dotado con una métrica γ_{ij} de clase C^∞ cuyo momento asociado es π^{ij} [35]. En coordenadas asintóticamente planas, cuando $r \rightarrow \infty$ se tiene el siguiente comportamiento:

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} + \mathcal{O}(r^{-1}), \quad \pi^{ij} = \mathcal{O}(r^{-2}) \quad (3.62)$$

$$N = 1 + \mathcal{O}(r^{-1}), \quad N_i = \mathcal{O}(r^{-1}).$$

El conjunto de ecuaciones (3.57)-(3.61) permite establecer la siguiente densidad Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = 2\pi^{ij}\kappa_{ij} + \pi^{ij} (\partial_i n^j + \partial_j n^i) + p_\tau \dot{\tau} - \mathcal{L}, \quad (3.63)$$

recordando que el Hamiltoniano viene dado por:

$$H = \int d^3x \mathcal{H}. \quad (3.64)$$

Una vez más integrando por partes la expresión (3.63) se transforma en:

$$\mathcal{H} = 2\pi^{ij}\kappa_{ij} - 2n^j \partial_i \pi^{ij} + p_\tau \dot{\tau} - \mathcal{L} + 2\partial_i (n^j \pi^{ij}), \quad (3.65)$$

donde nuevamente tenemos un término correspondiente a derivadas totales, representado por el último ente de la expresión (4.30), el cual no tiene contribución alguna y puede ser despreciado como se expuso con anterioridad.

Las expresiones (3.59), (3.60) y (3.61) permiten expresar las velocidades \dot{h}_{ij} , \dot{h} y $\dot{\tau}$ en función de los momentos asociados a cada una, es decir, son relaciones invertibles. Diferente es el caso de las expresiones (3.57) y (3.58) que no poseen dicha facultad. La inversión de las expresiones (3.59), (3.60) y (3.61) esta dada por:

$$\dot{\tau} = -\frac{p_\tau}{2\alpha\Delta} + n \quad (3.66)$$

$$\kappa = \frac{1}{1-3\lambda} [\pi + (1+2\beta-3\lambda)\Delta\tau] \quad (3.67)$$

$$\kappa_{ij} = \pi^{ij} + \frac{\lambda}{1-3\lambda}\delta_{ij}\pi + \beta\frac{1-\lambda}{1-3\lambda}\delta_{ij}\Delta\tau + (1-\beta)(\partial_i\partial_j\tau). \quad (3.68)$$

Recordando que las velocidades \dot{h}_{ij} y \dot{h} asociadas a la tri-métrica, están codificadas mediante κ_{ij} . Finalmente se arriba a la siguiente densidad Hamiltoniana:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = np_\tau - 2n^j\partial_i\pi^{ij} + \frac{1}{\beta}\kappa_{ij}^2 - \frac{1}{\beta}\lambda\kappa^2 + \frac{1}{\beta}(\lambda-1)(\Delta\tau)^2 - p_\tau\left(\frac{\beta}{4\alpha\Delta}\right)p_\tau \\ + n\Delta h + \frac{1}{4}h\Delta h - \frac{1}{4}h_{ij}\Delta h_{ij} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Teniendo en cuenta que κ y κ_{ij} están definidas por (3.67) y (3.68) respectivamente.

Capítulo 4

Resultados y discusiones

4.1. Análisis de los vínculos

4.1.1. Vínculos primarios

Tal y como se ha exployado en la sección anterior la ecuación (3.57) permite en principio expresar las cantidades $\dot{q}^i(t)$ como una función de las variables $p_i(t)$ y $q_i(t)$. Esto es equivalente a establecer que la matriz Hessiana H_{ij} definida por:

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}, \quad (4.1)$$

es invertible. En otras palabras su determinante es distinto de cero:

$$\det H_{ij} \neq 0. \quad (4.2)$$

Caso contrario a lo mencionado, es decir cuando la matriz Hessiana no tiene inversa o su determinante es nulo, se dice que el sistema es *singular* o *vinculado*. Esto significa que las velocidades $\dot{q}_i(t)$ no pueden ser expresadas como una función de las coordenadas $q_i(t)$ y los momentos $p^i(t)$, por tanto éstas últimas se encuentran vinculadas o relacionadas mediante expresiones del tipo:

$$\phi_r = (p, q) = 0, \quad r = 1, \dots, R. \quad (4.3)$$

Estas relaciones las cuales obviamente no pueden ser ecuaciones de movimiento, son denominadas *vínculos primarios*. Lo interesante es que estas funciones son restricciones reales en el espacio de fase. Todas las restricciones definen conjuntamente una sub-variedad Γ_p en el espacio de fase de dimensión $(2S - R)$ (siendo S el número de grados de libertad y R el número total de vínculos), que contiene todas las variables físicamente alcanzables.

Justamente el problema en estudio posee tal característica, ser un sistema vinculado. Esto se evidencia en la expresión (3.55), la cual no depende explícitamente de las velocidades asociadas a las perturbaciones respectivas de la función de lapse n y shift n^i , es decir, los objetos \dot{n} y \dot{n}^i no están presentes en la densidad Lagrangeana, lo cual está representado en las expresiones (3.57) y (3.58). Precisamente ϕ_0 y ϕ_i son vínculos *primarios*, lo cual era de esperar ya que como se ha mencionado la teoría *aer* no es más sino que la teoría general de la relatividad de Einstein acoplada a un campo vectorial dinámico restringido a ser ortogonal a las hojas que definen la foliación del espacio-tiempo.

Una cuestión importante a ser analizada es la *conservación* de los vínculos señalados, lo que es homólogo a estudiar si la variación en el tiempo de estos es nulo, o sea verificar que sean constantes de movimiento. Dicho cómputo se lleva a cabo calculando el corchete de Poisson entre el objeto a estudiar y el Hamiltoniano total del sistema. Otra forma es obtener la ecuación de Hamilton asociada, es decir:

$$\dot{\phi}_0 = \{\phi_0, H\} = -\frac{\delta H}{\delta n} \approx 0 \quad (4.4)$$

$$\dot{\phi}_i = \{\phi_i, H\} = -\frac{\delta H}{\delta n^i} \approx 0, \quad (4.5)$$

nótese que la terminología "δ" significa derivada funcional y "≈" indica igualdad sobre la *superficie de restricción*, en otras palabras cuando un objeto se anula sobre la superficie de restricción, se dice que este se anula débilmente. La conservación de los vínculos ϕ_0 y ϕ_i , da como resultado:

$$\dot{\phi}_i = \{\phi_i, H\} = -2\partial_j \pi^{ij} \Rightarrow -2\partial_j \pi^{ij} \approx 0 \quad (4.6)$$

$$\dot{\phi}_0 = \{\phi_0, H\} = p_\tau + \Delta h \Rightarrow p_\tau + \Delta h \approx 0. \quad (4.7)$$

Estos cálculos se obtuvieron teniendo presente la siguiente definición para el corchete de Poisson [36]:

$$\{X, Y\} = \int_V d^3\vec{z} \sum_{\xi=1}^S \left(\frac{\delta X}{\delta \varphi_\xi} \frac{\delta Y}{\delta \pi^\xi} - \frac{\delta X}{\delta \pi^\xi} \frac{\delta Y}{\delta \varphi_\xi} \right), \quad (4.8)$$

considerando la dependencia funcional para los campos $X = X(\varphi_\xi(\vec{x}, t), \pi^\xi(\vec{y}, t))$ y $Y = Y(\varphi_\xi(\vec{y}, t), \pi^\xi(\vec{y}, t))$. Mientras que para la derivada funcional se ha utilizado:

$$\frac{\delta u(\vec{x}, t)}{\delta u(\vec{x}', t)} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'), \quad \frac{\delta u_i(\vec{x}, t)}{\delta u_j(\vec{x}', t)} = \delta_i^j \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (4.9)$$

4.1.2. Vínculos secundarios

Dado que ϕ_0 ni ϕ^i conmutan con el Hamiltoniano H , implica que no son constantes de movimiento, lo cual conlleva a una consecuencia de relevancia. Esta consecuencia revela que tanto n como n^j , no son verdaderas variables dinámicas, sino más bien *multiplicadores de Lagrange*. Esto se debe a que las expresiones resultantes de los corchetes (4.6) y (4.7), están presentes en la expresión (3.55) precisamente multiplicadas por n y n^j . Dichos resultados son denominados *vínculos secundarios*, ya que se desprenden de la no conservación de los vínculos primarios. Con esto el Hamiltoniano (3.64) puede ser re-escrito como:

$$H = \int_V d^3x \left[n\tilde{\mathcal{H}} + n_j\tilde{\mathcal{H}}^j + \frac{1}{\beta}\kappa_{ij}^2 - \frac{1}{\beta}\lambda\kappa^2 + \frac{1}{\beta}(\lambda - 1)(\Delta\tau)^2 + \frac{1}{4}h\Delta h - \frac{1}{4}h_{ij}\Delta h_{ij} - p_\tau \left(\frac{\beta}{4\alpha\Delta} \right) p_\tau \right], \quad (4.10)$$

teniendo en cuenta la siguiente designación:

$$\tilde{\mathcal{H}}^j = -2\partial_i\pi^{ij} \approx 0 \quad (4.11)$$

$$\tilde{\mathcal{H}} = p_\tau + \Delta h \approx 0. \quad (4.12)$$

La cuestión ahora es analizar si las expresiones (4.11) y (4.12) invocan la existencia de más vínculos presentes en el estudio. Tal análisis se ejecuta implementando el algoritmo de Dirac-Bergmann, el cual es materia de desarrollo del acápite (4.2). Sin embargo, antes de implementar el algoritmo de Dirac-Bergmann es conveniente en aras de la simplicidad de los cálculos, descomponer las expresiones (4.11) y (4.12) en sus componentes *transversas* y *longitudinales* [6], tal como se presenta en la siguiente sección.

4.1.3. Descomposición de los vínculos en partes *transversas* y *longitudinales*

En el estudio de la linealización de las ecuaciones de campo de Einstein [37], una técnica usual en el cálculo es descomponer la perturbación asociada a la métrica en sus partes transversales y longitudinales. No obstante, dicha descomposición puede ser aplicada a cualquier tensor de segundo orden simétrico [6]-[38]. Tal descomposición tiene la siguiente forma:

$$f_{ij} = f_{ij}^{TT} + \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\Delta} \right) f^T + \partial_i f_j^L + \partial_j f_i^L, \quad (4.13)$$

considerando por supuesto que f_{ij} es un tensor simétrico. Cada término de la descomposición anterior tiene el siguiente significado: f_{ij}^{TT} corresponde a la parte transversal del tensor sin traza, es decir $f_{ii}^{TT} = 0$, siendo además esta parte del tensor, libre de divergencia $\partial_i f_{ij}^{TT} = 0$. Por otro lado f^T y f_i^L representan la parte transversal y longitudinal respectivamente, teniendo esta última divergencia nula, $\partial_i f_i^L$. Por último la parte longitudinal puede ser descompuesta nuevamente, de la siguiente manera:

$$f_i^L = \tilde{f}_i^T + \frac{1}{2} \partial_i \tilde{f}^L, \quad (4.14)$$

donde $\partial_i \tilde{f}_i^T = 0$. Bajo este esquema la velocidad asociada a la perturbación de la tri-métrica \dot{h}_{ij} y su momento conjugado π^{ij} , pueden ser expresados como sigue:

$$\pi^{ij} = \pi^{ijTT} + \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\Delta} \right) \pi^T + \partial_j \tilde{\pi}^{iT} + \partial_i \tilde{\pi}^{jT} + \partial_i \partial_j \tilde{\pi}^L \quad (4.15)$$

$$\dot{h}_{ij} = \dot{h}_{ij}^{TT} + \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\Delta} \right) \dot{h}^T + \partial_j \dot{\tilde{h}}_i^T + \partial_i \dot{\tilde{h}}_j^T + \partial_i \partial_j \dot{\tilde{h}}^L, \quad (4.16)$$

con esto el producto $\pi^{ij} \dot{h}_{ij}$ toma la siguiente forma:

$$\pi^{ij} \dot{h}_{ij} = \pi^{ijTT} \dot{h}_{ij}^{TT} + \frac{1}{2} \pi^T \dot{h}^T - 2\Delta \tilde{\pi}^{iT} \dot{\tilde{h}}_i^T + \Delta \tilde{\pi}^L \Delta \dot{\tilde{h}}^L, \quad (4.17)$$

teniendo en cuenta que el resultado anterior está bajo el símbolo integral, y por tanto se han llevado a cabo integraciones por partes, desconsiderando los términos que involucran derivadas totales. Además de prescindir de los términos cruzados presentes en el cálculo, producto de la descomposición impuesta. Lo anterior permite establecer los momentos conjugados a cada parte de la descomposición:

$$h_{ij}^{TT} \rightarrow \pi^{ijTT} \quad (4.18)$$

$$h^T \rightarrow \frac{1}{2} \pi^T \quad (4.19)$$

$$\tilde{h}^L \rightarrow \Delta^2 \tilde{\pi}^L \quad (4.20)$$

$$\tilde{h}_i^T \rightarrow -2\Delta \tilde{\pi}^{iT}. \quad (4.21)$$

Todo lo anterior reduce el vínculo (4.12) en función solamente del escalar transversal h^T , de la siguiente manera:

$$p_\tau + \Delta h \approx 0, \quad (4.22)$$

recordando que $h = h_{ii}$ y recurriendo a la descomposición ortogonal, se tiene:

$$h_{ii} = h^T + 2\partial_i \tilde{h}_i^T, \quad (4.23)$$

donde la cancelación del segundo miembro en el lado derecho de la expresión anterior se debe a la fijación del gauge de Lorentz. En definitiva el vínculo se reduce a:

$$p_\tau + \Delta h^T \approx 0. \quad (4.24)$$

Por otro lado el vínculo (4.11) permite la reducción de π^{ii} en función de π^T , tal como se muestra a continuación:

$$\pi^{ij} = \pi^{ijTT} + \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\Delta} \right) \pi^T + \partial_i \pi^{jL} + \partial_j \pi^{iL}, \quad (4.25)$$

tomando la divergencia y aplicando consideraciones antes expuestas:

$$\partial_j \pi^{ij} = \Delta \pi^{iL} = 0 \rightarrow \pi^{iL} = 0, \quad (4.26)$$

lo anterior implica:

$$\tilde{\pi}^L = \tilde{\pi}^{iT} = 0, \quad (4.27)$$

lo cual a su vez permite hacer la siguiente elección de gauge:

$$\tilde{h}^L = \tilde{h}^{iT} = 0, \quad (4.28)$$

en aras de mantener la consistencia de la formulación Hamiltoniana, ya que es imprescindible la presencia en conjunto de la variable y su momento conjugado. Tomando la traza de la expresión (4.25):

$$\pi^{ii} = \pi^T + 2\partial_i \pi^{iL}, \quad (4.29)$$

lo cual es consecuencia de la ecuación (4.26) o del vínculo (4.6) propiamente tal. Por otro lado, en virtud de la expresión (4.24) se puede despejar p_τ en función de h^T , lo cual al ser reemplazado en el Hamiltoniano (4.10) y después de un poco de álgebra se arriba a:

$$H = \int_V d^3x \left[\beta (\pi^{ijTT})^2 - \frac{1}{4} h_{ij}^{TT} \Delta h_{ij}^{TT} + \frac{\beta(1-\lambda)}{2(1-3\lambda)} (\pi^T)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{\alpha} \right) h^T \Delta h^T + \chi (\Delta \tau)^2 \right], \quad (4.30)$$

siendo χ la agrupación de todos los coeficientes que involucran a τ . El Hamiltoniano anterior estresa la premisa considerada durante todo el estudio sobre la constante de acoplamiento λ , es decir, que ésta deber ser distinta de 1/3. Más

aún, la expresión anterior permite también definir un rango de valores posibles para esta constante, en aras de asegurar la positividad de ésta misma, lo cual se muestra en la figura (4.1). Observar que el signo del coeficiente del último término del Hamiltoniano (4.30) no es relevante, ya que ese término puede ser eliminado por una fijación de gauge, como se verá más adelante.

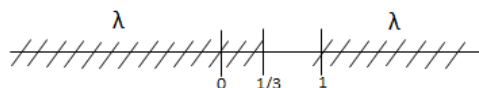


Figura 4.1: Rango posible de valores que puede tomar la constante de acoplamiento λ , en aras de mantener la consistencia y positividad de la formulación Hamiltoniana de la teoría *aer*.

Respecto de las constantes α y β , bajo el mismo argumento de positividad, éstas tienen la siguiente restricción $\beta \geq 0$ y $\alpha \neq 2$, o lo que es equivalente $\beta > \alpha/2$.

4.2. Algoritmo de Dirac-Bergmann

La no conservación de los vínculos primarios ϕ_0 y ϕ_i , dio origen a la existencia de los vínculos secundarios $\tilde{\mathcal{H}}$ y $\tilde{\mathcal{H}}^i$. Ahora la cuestión es si los vínculos secundarios desprendidos de los primarios cumplen o no con los requerimientos de consistencia. Cumplir las condiciones de consistencia, significa que el álgebra de los vínculos es cerrada y no hay paso a la existencia de más vínculos, caso contrario estos darán origen a vínculos terciarios, etc. volviendo nuevamente el proceso al inicio. La manera de abordar la problemática de sistemas vinculados, y chequear pues entonces la conservación de los vínculos presentes, se lleva a cabo aplicando el algoritmo de Dirac-Bergmann[39], el cual se describe brevemente a continuación.

La presencia de vínculos primarios en un sistema, producto de la no posible

inversión de la transformada de Legendre en el paso de la formulación Lagrangeana hacia la Hamiltoniana, permite escribir un Hamiltoniano *extendido* H_{ext} del sistema, el cual incluye los vínculos primarios a través de multiplicadores de Lagrange:

$$H_{ext} = H + u_m \phi^m \quad (4.31)$$

donde u_m son los multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos primarios. Ahora el conducto dicta utilizar la estructura de los corchetes de Poisson para chequear la conservación de los vínculos primarios:

$$\dot{\phi}^m = \{\phi^m, H\} + u_n \{\phi^m, \phi^n\} \approx 0, \quad (4.32)$$

donde han sido empleadas propiedades de los corchetes de Poisson para arribar a la expresión anterior ([36]). La expresión (4.32) tiene las siguientes tres posibilidades:

- $\dot{\phi}^m \approx 0$ se satisface, implicando entonces la conservación automática del vínculo ϕ^m , con lo cual el algoritmo concluye.
- $\dot{\phi}^m \approx 0$ decanta en una ecuación que no se anula débilmente, quedando en función de los multiplicadores de Lagrange. En tal caso se impone la condición de nulidad débil, lo cual determina los multiplicadores de Lagrange, haciendo por tanto que ϕ^m se conserve en el tiempo.
- $\dot{\phi}^m \approx 0$ no implica convergencia débil ni dependencia de los multiplicadores de Lagrange, en este caso el requerimiento de convergencia débil conlleva a una relación entre las coordenadas del espacio de fase la cual debe anularse débilmente sobre el sub-espacio de fase Γ_p que estas forman, dando origen a nuevos vínculos.

Las dos primeras opciones no requieren más controles de consistencia, pero esto no es cierto para el tercero. La existencia de una nueva restricción o vínculo implica que los vínculos primarios sólo se conservarán en el tiempo si los secundarios son constantes.

4.2.1. Clausura del álgebra de los vínculos

La clausura del álgebra de los vínculos, supone que no existen más restricciones en el sistema. Para que esto suceda en el estudio presente, debe ocurrir que los vínculos secundarios $\tilde{\mathcal{H}}$ y $\tilde{\mathcal{H}}_i$ se conserven en el tiempo, lo cual es equivalente a que el corchete de Poisson asociado a cada uno con el Hamiltoniano extendido H_{ext} se anule débilmente de manera directa o este sea proporcional a parte de los vínculos ya presentes, los cuales por definición se anulan sobre la sub-variedad Γ_p del espacio de fase, en otras palabras que el álgebra se cierre sobre los propios vínculos ya existentes. La condición de consistencia de los vínculos secundarios conlleva a los siguientes resultados:

$$\dot{\tilde{\mathcal{H}}^i} = \{\tilde{\mathcal{H}}^i, H_{ext}\} = \{\tilde{\mathcal{H}}^i, \langle \mathcal{H} \rangle\} + u_0 \{\tilde{\mathcal{H}}^i, \langle \phi^0 \rangle\} + u_j \{\tilde{\mathcal{H}}^i, \langle \phi^j \rangle\}, \quad (4.33)$$

donde el uso de los paréntesis " $\langle \rangle$ " denota la integración sobre todo el espacio físico, $\langle \mathcal{F} \rangle \equiv \int d^3x \mathcal{F}$. No es tarea difícil demostrar que los corchetes del lado derecho de la ecuación (4.33) se anulan débilmente de manera directa:

$$\dot{\tilde{\mathcal{H}}^i} = \{\tilde{\mathcal{H}}^i, H_{ext}\} \approx 0, \quad (4.34)$$

lo que significa que el vínculo $\tilde{\mathcal{H}}^i$ se conserva en el tiempo. Esto era de esperar ya que este vínculo es exactamente el mismo que se obtiene en el análisis perturbativo en relatividad general. Por otro lado la conservación del vínculo $\tilde{\mathcal{H}}$ da:

$$\dot{\tilde{\mathcal{H}}} = \{\tilde{\mathcal{H}}, H_{ext}\} = \{\tilde{\mathcal{H}}, \langle \mathcal{H} \rangle\} + u_0 \{\tilde{\mathcal{H}}, \langle \phi^0 \rangle\} + u_j \{\tilde{\mathcal{H}}, \langle \phi^j \rangle\}, \quad (4.35)$$

las dos últimas expresiones del miembro derecho de la ecuación anterior se anulan directamente, no así el primer corchete, debido a que la densidad Hamiltoniana \mathcal{H} tiene dependencia funcional tanto con las coordenadas como momentos conjugados, respecto de p_τ y h^T . Entoces la expresión 4.35 puede ser reescrita como:

$$\{\tilde{\mathcal{H}}, \langle \mathcal{H} \rangle\} = \{p_\tau, \langle \mathcal{H} \rangle\} + \{\beta \Delta h^T, \langle \mathcal{H} \rangle\}, \quad (4.36)$$

arribándose a los siguientes resultados:

$$\{p_\tau, \langle \mathcal{H} \rangle\} = -\frac{2\beta(1-\lambda)}{1-3\lambda} [\Delta\pi + 2\beta\Delta^2\tau] \quad (4.37)$$

$$\{\beta\Delta h^T, \langle \mathcal{H} \rangle\} = \frac{2\beta(1-\lambda)}{1-3\lambda} [\Delta\pi + 2\beta\Delta^2\tau], \quad (4.38)$$

donde se han tenido en cuenta las expresiones (3.67) y (3.68) como también así las propiedades de aditividad y producto de los corchetes de Poisson, además de la integración por partes. Sumando las expresiones (4.37) y (4.38) finalmente se obtiene:

$$\dot{\tilde{\mathcal{H}}} = \{\tilde{\mathcal{H}}, H_{ext}\} \approx 0. \quad (4.39)$$

Es decir el vínculo se conserva. En virtud que ambos vínculos secundarios cumplen las condiciones de consistencia, esto no da paso a más restricciones en el estudio, lo cual entraña la *clausura del álgebra de los vínculos*¹.

4.2.2. Vínculos de primera clase

Del análisis de la sección precedente, se puede extraer, otra importante consecuencia. Esta radica en que las relaciones de conmutación entre los vínculos y las relaciones entre un vínculo y el mismo, son todos idénticamente nulos, a un mismo tiempo pero diferentes puntos del espacio-tiempo, es decir:

$$\{\phi_i, \phi_j\} = \{\phi_i, \tilde{\mathcal{H}}\} = \{\phi_i, \tilde{\mathcal{H}}^j\} \approx 0, \quad (4.40)$$

$$\{\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\mathcal{H}}\} = \{\tilde{\mathcal{H}}^i, \tilde{\mathcal{H}}^j\} = \{\tilde{\mathcal{H}}^i, \tilde{\mathcal{H}}\} \approx 0, \quad (4.41)$$

$$\{\phi_0, \phi_{0'}\} = \{\phi_0, \phi_i\} = \{\phi_0, \tilde{\mathcal{H}}\} = \{\phi_0, \tilde{\mathcal{H}}^i\} \approx 0. \quad (4.42)$$

La importancia de las expresiones anteriores, concierne en que todos los vínculos presentes en el estudio son de *primera clase*, ya que o bien los corchetes de Poisson son directamente nulos, como es en esta ocasión, o estos son proporcionales

¹Una revisión detallada de los cálculos de los corchetes de Poisson, está disponible en el apéndice C

a vínculos ya presentes en el sistema. Esto significa entonces, que estos vínculos son generadores de transformaciones de gauge. Lo cual permitirá establecer posteriormente, que elección de gauge será la más adecuada para relacionar de manera unívoca y exacta las teorías *HLNP* y *aer*.

4.3. Fijación de gauge y relación entre las teorías *HLNP* y *aer*

4.3.1. Hamiltoniano de la teoría *HLNP*

En esta sección se presenta de manera sucinta, la formulación Hamiltoniana en el marco perturbativo clásico a segundo orden a bajas energías de la teoría Hořara-Lifshitz no-proyectable (*HLNP*). Partiendo de la acción integral cuadrática, la cual está dada por:

$$S_{np} = \int dt d^3x \sqrt{\gamma} N (K^{ij} K_{ij} - \lambda K^2 + \beta^{(3)} R + \alpha a_i a^i), \quad (4.43)$$

estresando por supuesto la condición $\lambda \neq 1/3$. Básicamente, la diferencia entre la acción (3.16) y la acción (4.43), es que esta última tiene adherido el término $\alpha a_i a^i$ y no el campo aether. El procedimiento perturbativo dicta hacer exactamente lo mismo que antes, con la salvedad que el invariante construido por el vector aceleración debe tener su forma perturbada, la cual es:

$$a_i = \frac{1}{N} \partial_i N \sim \epsilon \partial_i n + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4.44)$$

con lo cual, el Lagrangiano de la teoría *HLNP* a segundo orden de perturbación es:

$$L_{np} = \int_V \left[\kappa_{ij}^2 - \lambda \kappa^2 + \alpha \partial^i n \partial_i n + \beta \left(\frac{1}{4} h_{ij} \Delta h_{ij} - \frac{1}{4} h \Delta h - n \Delta h \right) \right], \quad (4.45)$$

aplicando transformada de Legendre, se obtienen los siguientes momentos:

$$\phi_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{n}} = 0 \quad (4.46)$$

$$\phi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{n}^i} = 0 \quad (4.47)$$

$$\pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} = \kappa_{ij} - \lambda \kappa \delta_{ij}, \quad (4.48)$$

donde al igual que antes, se tienen los vínculos primarios ϕ_0 y ϕ^i . El conjunto de expresiones anteriores permiten establecer el siguiente Hamiltoniano:

$$H_{np} = \int_V d^3x \left[n \tilde{\mathcal{H}} - n_j \tilde{\mathcal{H}}^j + \kappa_{ij}^2 - \lambda \kappa^2 + \beta \left(\frac{1}{4} h \Delta h - \frac{1}{4} h_{ij} \Delta h_{ij} \right) \right], \quad (4.49)$$

donde por supuesto se ha hecho uso de la integración por partes y se han desconsiderado los términos de borde. Tal y como antes los vínculos ϕ_0 y ϕ^i no cumplen con los requerimientos de consistencia, dando origen a vínculos secundarios, dados por:

$$\tilde{\mathcal{H}}^j = 2 \partial_i \pi^{ij} \approx 0 \quad (4.50)$$

$$\tilde{\mathcal{H}} = 2\alpha \Delta n + \beta \Delta h \approx 0, \quad (4.51)$$

siendo el vínculo (4.51) de primera clase, mientras que (4.52) es de segunda clase. Recurriendo nuevamente a la descomposición ortogonal, el vínculo (4.52) se reduce ha:

$$2\alpha \Delta n + \beta \Delta h^T \approx 0, \quad (4.52)$$

lo cual permite obtener n en función de h^T , con lo cual el Hamiltoniano (4.50) se reduce ha:

$$H = \int_V d^3x \left[(\pi^{ijTT})^2 - \frac{\beta}{4} h_{ij}^{TT} \Delta h_{ij}^{TT} + \frac{1-\lambda}{2(1-3\lambda)} (\pi^T)^2 + \frac{\beta}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{\alpha} \right) h^T \Delta h^T \right]. \quad (4.53)$$

Cabe destacar que este caso n no juega un rol de multiplicador de Lagrange, como lo hacia en la teoría *aer*. Respecto a la clausura del álgebra de los vínculos (4.51)

y (4.52), el primero de estos cierra directamente, mientras que el segundo cierra cuando se calcula su conservación y se determina un multiplicador de Lagrange. Una exposición más exhaustiva del estudio y análisis de ésta versión de la teoría *HLNP* bajo este esquema de desarrollo, puede ser encontrada en [12]-[13]-[14]-[15].

4.3.2. Elección del gauge

El Hamiltoniano (4.54) de la teoría *HLNP* en el marco perturbativo clásico a segundo orden, sólo difiere de su homólogo de la teoría *aer* (4.30) en que ésta no tiene los términos asociados a la perturbación del campo escalar T , es decir, no está presente τ ni el momentum conjugado a este, o sea p_τ . En *HLNP* se tiene aparte del vínculo $\tilde{\mathcal{H}}^i$, que existe en ambas teorías, solamente un vínculo de segunda clase, que permite eliminar n . En la teoría *aer* se tiene un vínculo de primera clase. Al fijar el gauge:

$$\tau = 0, \tag{4.54}$$

y resolver el vínculo se eliminan τ , su momento conjugado p_τ y n que es el multiplicador del vínculo. En consecuencia el contenido en campos en ambas teorías es exactamente el mismo. Por lo tanto siempre se puede hacer dicha elección de gauge y los Hamiltonianos (4.30) y (4.54) serán completamente equivalentes. Remarcar también que ambas teorías para $\lambda \neq 1/3$ en el régimen perturbativo tienen un modo escalar extra respecto de relatividad general clásica, el cual es precisamente el mismo para ambas teorías, este es justamente el escalar transversal h^T asociado a la perturbación de la métrica.

Capítulo 5

Consideraciones finales

5.1. Conclusión

En este trabajo se ha abordado la formulación Hamiltoniana en el marco de la teoría de perturbaciones clásica a segundo orden, en el régimen de bajas energías (IR) o grandes distancias, de la teoría Einstein-aether restringida. Con miras a establecer una relación unívoca y exacta con la teoría extendida o no-proyectable de Hořava-Lifshitz, lo cual fue propuesto por Jacobson en [23]-[24], quien argumentaba dicha equivalencia sólo desde el punto de vista comparativo de las acciones integrales de ambas teorías. El estudio ha revelado interesantes propiedades de la teoría *aer* bajo tal formalismo aplicado, las cuales se remarcan a continuación:

- Bajo el esquema aplicado, la teoría *aer* resultó ser un sistema vinculado, en donde las perturbaciones asociadas a la función de *lapse* N y *shit* N_i , es decir, n y n_i , no son verdaderas variables dinámicas de la teoría, sino más bien actúan como multiplicadores de Lagrange. Esto era de esperar ya que la teoría *aer* corresponde a la relatividad general de Einstein más el acoplo de un campo vectorial dinámico, tipo tiempo y normalizado, que entra a la teoría a través de derivadas covariantes. Diferente es el caso con la teoría

$HLNP$, en donde n es un campo dinámico más.

- Para $\lambda \neq 1/3$, la teoría presenta un modo de propagación extra respecto de relatividad general, el cual corresponde al escalar transverso h^T asociado a la perturbación de la tri-métrica γ_{ij} . Este modo extra también está presente en la teoría $HLNP$, bajo la misma premisa de λ .
- Los vínculos presentes en la teoría, resultaron ser todos de *primera clase*. Lo cual entraña la clausura del álgebra de estos mediante el algoritmo de Dirac-Bergmann. Es decir, no hay paso a la existencia de más restricciones de las que se hallaron inicialmente, lo cual establece de manera terminal los verdaderos grados de libertad que la teoría presenta.
- En virtud del vínculo (4.11), esta trae como consecuencia la expresión (4.27), lo cual permite fijar las simetrías de gauge dadas por la expresión (4.28). Manteniéndose así la consistencia de la formulación Hamiltoniana obtenida para la teoría *aer*.
- Respecto del rango admisible para las constantes de acoplamiento α y β , éstas están en completa acordancia con los valores que permiten preservar tanto la consistencia como positividad del Hamiltoniano de la teoría.

En relación al objetivo general planteado en este trabajo, se ha de concluir que ambas teorías son completamente equivalentes en el régimen de bajas energías (IR). Lo cual puede ser apreciado comparando directamente las expresiones (4.30) y (4.54), que corresponden a los Hamiltonianos en el esquema perturbativo clásico a segundo orden de las teorías *aer* y $HLNP$, respectivamente. La diferencia entre ambas expresiones es la variable τ en la formulación original de la teoría *aer*. Sin embargo, ésta teoría presenta una simetría adicional a la de la teoría de $HLNP$, lo cual permite fijar el gauge y reducir la teoría del *aer* en su formulación Hamiltoniana exactamente a la teoría $HLNP$. Finalmente remarcar que ambas teorías

están en completa acordancia con el rango posible de valores permitidos para las constantes de acoplamiento α , β y λ . Lo cual no había sido determinado en el análisis de Jacobson.

Apéndice A

Descomposición *ADM*

El objetivo de este apéndice es dar una breve introducción, no del todo técnica a la formulación en variables *ADM* de la relatividad general [6]. La presentación comenzará con la descomposición $3 + 1$ de la métrica, luego se re-escribirá la acción de Einstein-Hilbert con las nuevas variables y finalmente, se dará una breve presentación de la formulación Hamiltoniana de la relatividad general.

La relatividad clásica de Einstein, es una teoría de campo dotada de un tensor métrico cuatridimensional $g_{\mu\nu}$. Por tanto, la estructura del espacio-tiempo es una variedad \mathcal{M} pseudo-Riemanniana, con una métrica sobre este. La teoría puede ser construida bajo difeomorfismos invariantes sobre \mathcal{M} . La acción más general que respeta la invariancia bajo difeomorfismos y que tiene derivadas de segundo orden solamente, es la acción de Einstein-Hilbert¹:

$$S = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (\text{A.1})$$

Si se desea escribir, la acción gravitacional anterior en el formalismo Hamiltoniano, primero es necesario definir una coordenada para el tiempo sobre \mathcal{M} , ya que, en general no hay marcos preferenciales de referencia. Para definir tal elección, se elige una foliación global en el tiempo de \mathcal{M} , en hiper-superficies tridimensionales

¹Se omitirá el término correspondiente a la constante cosmológica.

Σ , donde $\mathcal{M} = R \times \Sigma$. La métrica inducida γ_{ij} sobre Σ corresponde justamente a las componentes tridimensionales de la métrica original, es decir, $\gamma_{ij} = g_{ij}$. Para describir completamente $g_{\mu\nu}$, aún es necesario definir un campo escalar y uno vectorial. Para ver esto, considérese dos hiper-superficies infinitesimalmente cercanas, Σ_t y Σ_{t+dt} (ver fig. A.1) y un desplazamiento infinitesimal desde el punto $(x^i, t) \in \Sigma_t$ hasta el punto $(x^i + dx^i, t + dt) \in \Sigma_{t+dt}$. Proyectando el elemento de línea ds sobre el eje del tiempo (eje perpendicular a las hiper-superficies de la foliación) se obtiene Ndt , donde $N \equiv (-g^{00})^{-1/2}$ es la denominada función *lapse*, la cual provee la medida de como el tiempo propio ha avanzado entre dos hiper-superficies adyacentes. Como se puede apreciar en la figura (A.1), el desplazamiento infinitesimal en la dirección del tiempo no toma, en general, un punto de (x^i, t) a $(x^i, t + dt)$, ya que hay un desplazamiento dado por los elementos g_{0i} de la métrica original. Por lo tanto, se define el vector de *shift* como $N_i \equiv g_{0i}$. Resumiendo estas definiciones, las variables de campo pueden ser re-escritas como:

$$\gamma_{ij} \equiv g_{ij}, \quad N \equiv (-g^{00})^{-1/2}, \quad N_i \equiv g_{0i} \quad (\text{A.2})$$

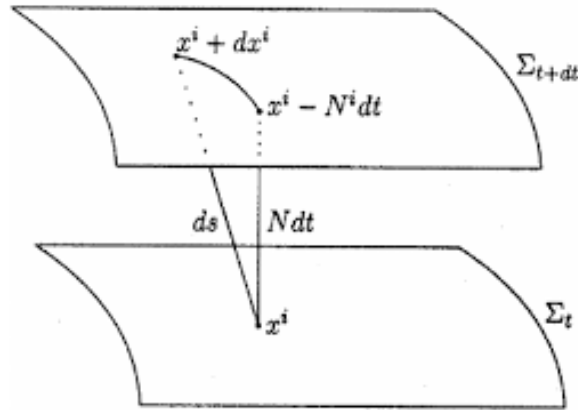


Figura A.1: Hiper-superficies de la foliación del espacio-tiempo en $3 + 1$ dimensiones.

Usando estas definiciones para escribir el elemento de línea, se arriba a:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + N^i dt) (dx^j + N^j dt). \quad (\text{A.3})$$

Para escribir (A.1), usando (A.2) se utiliza:

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{\gamma}, \quad R = {}^{(3)}R + K_{ij}K^{ij} - K^2, \quad (\text{A.4})$$

donde K_{ij} es el llamado tensor de curvatura extrínseca, dado por:

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} (\dot{\gamma}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i). \quad (\text{A.5})$$

Insertando (A.4) en (A.1), se obtiene la descomposición 3 + 1 para la acción de Einstein-Hilbert:

$$S = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^3 dt N \sqrt{\gamma} (K_{ij}K^{ij} - K^2 + {}^{(3)}R). \quad (\text{A.6})$$

Es de notar que todas las derivadas en temporales, están contenidas en el término ${}^2K_{ij}K^{ij} - K^2$, mientras que el escalar de Ricci tridimensional solamente contiene derivadas espaciales de la métrica. Más aún, no existen derivadas temporales de N ni de N_i . Finalmente remarcar que $K_{ij}K^{ij} - K^2$, es el término cinético lo más general posible, mientras que el escalar de Ricci tri-dimensional juega el rol precisamente de un potencial gravitacional. Esta es la ventaja de la descomposición *ADM*: descomponer explícitamente la acción en una parte cinética y otra potencial.

Es posible ahora definir las densidades de momentum asociadas a γ_{ij} , N y N_i :

$$\pi^{ij} \equiv \frac{\delta S}{\delta \dot{\gamma}_{ij}} = \sqrt{\gamma} (K^{ij} - \gamma^{ij} K), \quad (\text{A.7})$$

$$\phi_0 \equiv \frac{\delta S}{\delta \dot{N}} = 0, \quad \phi^i \equiv \frac{\delta S}{\delta \dot{N}_i} = 0. \quad (\text{A.8})$$

²Para incluir un término covariante con derivadas temporales de N o N_i , es necesario incluir más derivadas de γ_{ij} , llevando el total de derivadas temporales a más de dos.

La ausencia de derivadas temporales de N y N_i en (A.6), se refleja en el momentum nulo asociado, el cual define vínculos primarios de la teoría, ϕ_0 y ϕ^i . Realizando la transformada de Legendre, se obtiene el Hamiltoniano:

$$H = \int d^3x (N\mathcal{H} + N^i\mathcal{H}_i + u_0\phi_0 + u_i\phi^i), \quad (\text{A.9})$$

donde u_0 y u_i son los multiplicadores de Lagrange asociados a ϕ_0 y ϕ^i , respectivamente. \mathcal{H} y \mathcal{H}^i dados por:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} (\pi^{ij}\pi_{ij} - \pi^2), \quad (\text{A.10})$$

$$\mathcal{H}^i = -2\nabla_j\pi^{ij}. \quad (\text{A.11})$$

Donde las expresiones anteriores se han obtenido, chequeando los requerimientos de consistencia de ϕ_0 y ϕ^i . Siendo \mathcal{H} denominado el vínculo Hamiltoniano de relatividad general y \mathcal{H}^i el vínculo de momentum, ambos restricciones secundarias. La preservación en el tiempo de estos vínculos secundarios, es un cálculo altamente no trivial [40]. Todos los corchetes de Poisson entre \mathcal{H} y \mathcal{H}^i , se anulan débilmente, no conduciendo a la existencia de nuevos vínculos, lo cual significa que el álgebra del algoritmo de Dirac-Bergmann es cerrada:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}(y)\} &= \mathcal{H}\partial_i\delta^{(3)}(x, y) \\ \{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}_j(y)\} &= \mathcal{H}_j\partial_i\delta^{(3)}(x, y) + \mathcal{H}_i\partial_j\delta^{(3)}(x, y) \\ \{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\} &= \gamma^{ij} (\mathcal{H}_i\partial_j\delta^{(3)}(x, y) + \mathcal{H}_j\partial_i\delta^{(3)}(x, y)) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Las relaciones anteriores, muestran claramente que para un mismo tiempo pero diferentes puntos del espacio-tiempo, el álgebra cierra sobre los vínculos ya existentes. Los cuales se anulan débilmente sobre la sub-variedad Γ_p del espacio de fase. Claramente si se evalúan los objetos en un mismo punto, los corchetes son directamente nulos.

Apéndice B

Análisis perturbativo

Este apéndice presentará en detalle el desarrollo en teoría de perturbaciones de los objetos utilizados en el capítulo 3, tales como los símbolos de Christoffel, derivada covariante, determinante de la tri-métrica y escalar de Ricci tri-dimensional, con los cuales se han obtenido tanto la densidad Lagrangeana como Hamiltoniana de la teoría *aer*.

Un objeto recurrente en todo cálculo en teorías de gravedad, son los símbolos de Christoffel, los cuales tienen la siguiente forma general:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{g^{\gamma\lambda}}{2} \left[\partial_{\mu}g_{\gamma\nu} + \partial_{\nu}g_{\gamma\mu} - \partial_{\gamma}g_{\mu\nu} \right], \quad (\text{B.1})$$

utilizando las expresiones de la descomposición *ADM* para la métrica $g_{\mu\nu}$ y su inversa $g^{\mu\nu}$, como también así las expresiones (3.26) y (3.31), los símbolos de Christoffel involucrados en el desarrollo del cálculo hasta segundo orden en perturbaciones

son:

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{g^{00}}{2} \partial_0 g_{00} + \frac{g^{oi}}{2} \left[2\partial_0 g_{0i} - \partial_i g_{00} \right], \quad (\text{B.2})$$

$$\Gamma_{00}^0 = -\frac{1}{2N^2} \left[-\partial_0 N^2 + \partial_0 \gamma_{ij} N^i N^j \right] + \frac{N^m}{2N^2} \left[2\partial_0 \gamma_{mj} N^j + \partial_m N^2 \right. \\ \left. - \partial_m \gamma_{ij} N^i N^j \right] \quad (\text{B.3})$$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} \left[2\epsilon \partial_0 n - 4\epsilon^2 n \partial_0 n - \epsilon^2 \delta_{ij} n^j \partial_0 n^i + 2\epsilon^2 \delta_{ij} n^i \partial_0 n^j + 2\epsilon^2 n^i \partial_i n \right] \quad (\text{B.4})$$

$$\Gamma_{00}^0 = \epsilon \partial_0 n + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (\text{B.5})$$

$$\Gamma_{00}^m = \frac{g^{mi}}{2} \left[2\partial_0 g_{0i} - \partial_i g_{00} \right] \quad (\text{B.6})$$

$$\Gamma_{00}^m = \frac{\gamma^{mi}}{2} \left[2\partial_0 \gamma_{ij} N^j + \partial_i N^2 - \partial_i \gamma_{ij} N^i N^j \right] \quad (\text{B.7})$$

$$\Gamma_{00}^m = \frac{1}{2} \left[2\epsilon \delta^{mi} \delta_{ij} \partial_0 n^j + 2\epsilon \delta^{mi} \partial_i n + 2\epsilon^2 \delta^{mi} \delta_{ij} n^j \partial_0 h_{ij} - \epsilon^2 \delta^{mi} \delta_{ij} n^j \partial_i n^i \right. \\ \left. - 2\epsilon^2 h^{mi} \delta_{ij} \partial_0 n^j - \epsilon^2 h^{mi} \partial_i n \right] \quad (\text{B.8})$$

$$\Gamma_{00}^m = \epsilon \left[\partial_0 n^m + \partial_m n \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (\text{B.9})$$

$$\Gamma_{0i}^0 = \frac{g^{0\omega}}{2} \left[\partial_i g_{0\omega} + \partial_0 g_{\omega i} - \partial_\omega g_{i0} \right] \quad (\text{B.10})$$

$$\Gamma_{0i}^0 = -\frac{1}{2N^2} \left[\partial_i \gamma_{ij} N^i N^j - \partial_i N^2 \right] + \frac{N^j}{2N^2} \left[\partial_i \gamma_{ij} N^i + \partial_0 \gamma_{ij} - \partial_j \gamma_{ij} N^j \right] \quad (\text{B.11})$$

$$\Gamma_{0i}^0 = \frac{1}{2} \left[2\epsilon \partial_i n - 4\epsilon^2 n \partial_i n - \epsilon^2 \delta_{ij} n^j \partial_i n^i \right] + \frac{1}{2} \left[\epsilon n^j - 2\epsilon^2 n n^j \right] \times \\ \left[\epsilon \delta_{ij} \partial_i n^i + \epsilon \partial_0 h_{ij} - \epsilon \delta_{ij} \partial_j n^j - \epsilon^2 \delta_{ij} \partial_i n^i + \epsilon^2 n^i \partial_i h_{ij} \right] \quad (\text{B.12})$$

$$\Gamma_{0i}^0 = \epsilon \partial_i n + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (\text{B.13})$$

$$\Gamma_{0i}^m = \frac{g^{mj}}{2} \left[\partial_0 g_{ij} + \partial_i g_{0j} - \partial_j g_{0i} \right] \quad (\text{B.14})$$

$$\Gamma_{0i}^m = \frac{1}{2} \left[\gamma^{mj} - \frac{N^m N^j}{N^2} \right] \left[\partial_0 \gamma_{ij} + \partial_i \gamma_{ij} N^i - \partial_j \gamma_{ij} N^j \right] \quad (\text{B.15})$$

$$\Gamma_{0i}^m = \frac{1}{2} \left[\epsilon \partial_0 h_{mi} + \epsilon \delta^{jm} \delta_{ij} \partial_i n^i - \epsilon \delta^{jm} \delta_{ij} \partial_j n^j + \epsilon^2 \delta^{jm} n^i \partial_i h_{ij} \right. \\ \left. - \epsilon^2 \delta^{jm} n^j \partial_j h_{ij} - \epsilon^2 h^{mj} \partial_0 h_{ij} - \epsilon^2 h^{mj} \delta_{ij} \partial_i n^i + \epsilon^2 h^{mj} \delta_{ij} \partial_j n^j \right] \quad (\text{B.16})$$

$$\Gamma_{0i}^m = \frac{\epsilon}{2} \left[\partial_0 h_{mi} + \delta_i^m \partial_k n^k - \delta_i^m \partial_l n^l \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (\text{B.17})$$

$$\Gamma_{ji}^0 = \frac{g^{0\omega}}{2} \left[\partial_i g_{\omega j} + \partial_j g_{\omega i} - \partial_\omega g_{ji} \right] \quad (\text{B.18})$$

$$\Gamma_{ji}^0 = \frac{N^k}{2N^2} \left[-\partial_i \gamma_{jk} - \partial_j \gamma_{ik} + \partial_0 \gamma_{ij} + \partial_i \gamma_{kj} + \partial_j \gamma_{ki} - \partial_k \gamma_{ij} \right] \quad (\text{B.19})$$

$$\Gamma_{ji}^0 = \frac{1}{2} \left[2\epsilon n - 1 \right] \left[\epsilon \delta_{kj} \partial_i n^k + \epsilon \delta_{ik} \partial_j n^k - \epsilon \partial_0 h_{ij} + \epsilon^2 n^k \partial_j h_{ik} \right. \\ \left. + \epsilon^2 n^k \partial_i h_{jk} \right] + \frac{1}{2} \left[\epsilon n^k - 2\epsilon^2 n n^k \right] \left[\epsilon \partial_i h_{kj} + \epsilon \partial_j h_{ki} - \epsilon \partial_k h_{ij} \right] \quad (\text{B.20})$$

$$\Gamma_{ji}^0 = \frac{\epsilon}{2} \left[\partial_0 h_{ji} + \delta_{kj} \partial_i n^k - \delta_{ki} \partial_j n^k \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (\text{B.21})$$

$$\Gamma_{ji}^m = \frac{g^{ml}}{2} \left[\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ji} \right] \quad (\text{B.22})$$

$$\Gamma_{ji}^m = \frac{1}{2} \left[\gamma^{ml} - \frac{N^m N^l}{N^2} \right] \left[\partial_i \gamma_{lj} + \partial_j \gamma_{li} - \partial_l \gamma_{ij} \right] \quad (\text{B.23})$$

$$\Gamma_{ji}^m = \frac{1}{2} \left[\delta^{ml} - \epsilon h_{ml} - \epsilon^2 n^m n^l \right] \left[\epsilon \partial_i h_{lj} + \epsilon \partial_j h_{li} - \epsilon \partial_l h_{ij} \right] \quad (\text{B.24})$$

$$\Gamma_{ji}^m = \frac{\epsilon}{2} \delta^{ml} \left[\partial_i h_{jl} + \partial_j h_{li} - \partial_l h_{ij} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (\text{B.25})$$

Los cálculos anteriores además han tenido en cuenta la siguiente expansión:

$$\frac{1}{N^2} = \frac{1}{[1 + \epsilon n + \mathcal{O}(\epsilon^2)]^2} \approx 1 - 2\epsilon n + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (\text{B.26})$$

Los resultados anteriores, permitirán establecer el desarrollo de las derivadas covariantes de u_α . Pero antes serán obtenidas sus componentes espaciales y temporales en forma perturbada. Recordando:

$$u_\alpha = \frac{\partial_\alpha T}{\sqrt{-g^{\beta\gamma} \partial_\beta T \partial_\gamma T}}, \quad (\text{B.27})$$

entonces:

$$u_i = \epsilon \partial_i \tau + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{B.28})$$

$$u_0 = 1 + \epsilon n + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (\text{B.29})$$

donde de ha considerado:

$$T = t + \epsilon \tau + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (\text{B.30})$$

$$\begin{aligned} \sqrt{-g^{\beta\gamma} \partial_\beta T \partial_\gamma T} &= \sqrt{-g^{00} \dot{T}^2 - 2g^{0i} \dot{T} \partial_i T - g^{ij} \partial_i T \partial_j T} \\ &= \sqrt{\frac{\dot{T}^2}{N^2} - 2 \frac{N^i}{N^2} \dot{T} \partial_i T - \partial_i T \partial_j T \left[\gamma^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \right]} \\ &= \sqrt{\frac{(1 + \epsilon \dot{\tau})^2}{(1 + \epsilon n)^2} - \frac{2\epsilon^2 n^i \partial_i \tau}{(1 + \epsilon n)^2} - \epsilon^2 (\partial_i \tau)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3)} \\ &= \sqrt{1 + \epsilon \dot{\tau} - 2\epsilon n + \mathcal{O}(\epsilon^2)} \\ &\approx 1 - \epsilon \dot{\tau} + \epsilon n + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

entonces las derivadas covariantes del campo aether, involucradas en el cálculo son:

$$\begin{aligned} \nabla_0 u_0 &= \dot{u}_0 - \Gamma_{00}^0 u_0 - \Gamma_{00}^m u_m \\ &= \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

$$\begin{aligned} \nabla_i u_0 &= \partial_i u_0 - \Gamma_{i0}^0 u_0 - \Gamma_{i0}^m u_m \\ &= \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

$$\begin{aligned}
\nabla_0 u_i &= \dot{u}_i - \Gamma_{0i}^m u_m - \Gamma_{0i}^0 u_0 \\
&= \epsilon \partial_i \dot{\tau} - \epsilon \partial_i n + \mathcal{O}(\epsilon^2),
\end{aligned} \tag{B.34}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_i u_j &= \partial_i u_j - \Gamma_{ij}^0 u_0 - \Gamma_{ij}^k u_k \\
&= \epsilon \partial_i \partial_j \tau + \frac{\epsilon}{2} \left[\partial_i n^j + \partial_j n^i - \dot{h}_{ij} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2).
\end{aligned} \tag{B.35}$$

Tal y como exhiben las expresiones anteriores, algunas tienen como mínimo orden cuadrático en ϵ , lo que significa que en la ecuación (3.37) se desprecian varios términos, ya que la exigencia del tratamiento es sólo hasta orden cuadrático en ϵ . Con ello las componentes de la matriz $\mathcal{M}^{\alpha\beta\lambda\gamma}$ que anteceden al producto de derivadas covariantes que sobrevive en la expresión (3.44), deben ser considerados solamente a orden cero:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{00ij} &= c_1 g^{00} g^{ij} + c_2 g^{0i} g^{0j} + c_3 g^{0j} g^{0i} + c_4 u^0 u^0 g^{ij} \\
&= -c_1 \delta^{ij} + c_4 \delta^{ij} + \mathcal{O}(\epsilon),
\end{aligned} \tag{B.36}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{ijkl} &= c_1 g^{ij} g^{kl} + c_2 g^{ik} g^{jl} + c_3 g^{il} g^{jk} + c_4 u^i u^j g^{kl} \\
&= c_1 \delta^{ij} \delta^{kl} + c_2 \delta^{ik} \delta^{jl} + c_3 \delta^{il} \delta^{jk} + \mathcal{O}(\epsilon).
\end{aligned} \tag{B.37}$$

Para la parte gravitacional se obtendrán ahora la forma perturbada del tensor de curvatura extrínseca K_{ij} y su traza K , como también así la del escalar de Ricci tri-dimensional ${}^{(3)}R$. Para la curvatura extrínseca se tiene:

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left[\dot{\gamma}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i \right], \tag{B.38}$$

reemplazando las expresiones correspondientes a las formas perturbadas de γ_{ij} , N y N_i , se arriba a:

$$K_{ij} = \frac{\epsilon}{2} \left[\dot{h}_{ij} - \partial_i n_j - \partial_j n_i \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{B.39}$$

donde claramente el orden cero es idénticamente nulo. Considerando que:

$$\begin{aligned}
n_i &= \gamma_{ik} n^k \\
&= (\delta_{ik} + \epsilon h_{ij}) n^k,
\end{aligned} \tag{B.40}$$

entonces:

$$K_{ij} = \frac{\epsilon}{2} \left[\dot{h}_{ij} - \delta_{jk} \partial_i n^k - \delta_{ik} \partial_j n^k \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (\text{B.41})$$

mientras que para la traza basta con contraer índices, de lo cual resulta:

$$K = \frac{\epsilon}{2} \left[\dot{h} - 2\partial_i n_i \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (\text{B.42})$$

Para el escalar de Ricci tri-dimensional, primero se calculará el tensor de Ricci y luego se hará la contracción de índices. La definición del tensor de Ricci es:

$${}^{(3)}R_{ij} = \partial_m \Gamma_{ij}^m - \partial_j \Gamma_{mi}^m + \Gamma_{ml}^m \Gamma_{ij}^l - \Gamma_{jl}^m \Gamma_{mi}^l, \quad (\text{B.43})$$

tomando en cuenta que los símbolos de Christoffel son puramente espaciales:

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{\gamma^{km}}{2} \left[\partial_j \gamma_{ki} + \partial_i \gamma_{kj} - \partial_k \gamma_{ij} \right]. \quad (\text{B.44})$$

Desarrollando el álgebra se llega a:

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R_{ij} = & -\frac{\epsilon}{2} \left[\Delta h_{ij} + \partial_i \partial_j h \right] + \frac{\epsilon^2}{4} \left[\partial_l h \partial_j h_{li} + \partial_l h \partial_i h_{lj} - \partial_l h \partial_l h_{ij} \right. \\ & - \partial_j h_{ml} \partial_i h_{ml} - \partial_j h_{ml} \partial_m h_{li} + \partial_j h_{ml} \partial_l h_{mj} - \partial_l h_{mj} \partial_i h_{ml} \\ & - \partial_l h_{mj} \partial_m h_{li} + \partial_l h_{mj} \partial_l h_{mj} + \partial_m h_{lj} \partial_i h_{ml} + \partial_m h_{lj} \partial_m h_{li} \\ & \left. - \partial_m h_{lj} \partial_l h_{mj} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3) + \text{Derivadas totales}, \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

a este resultado se ha llegado aplicando el gauge de Lorentz. Recordando que el escalar de Ricci está bajo el símbolo integral sobre todo el espacio físico, sólo tres términos del corchete en la expresión anterior correspondeientes a orden cuadrático en ϵ son no nulos. A este resultado se arriba integrando por partes, ya que esta arroja derivadas totales que son desconsideradas debido al comportamiento asintótico de los campos, como también así se hace uso del gauge de Lorentz. Los

términos que sobreviven son:

$$\int_V d^3x \beta \sqrt{\gamma} N \gamma^{ij(3)} R_{ij} = \int_V d^3x \beta \xi_{ij} \left[-\frac{\epsilon}{2} \left(\Delta h_{ij} + \partial_i \partial_j h \right) + \frac{\epsilon^2}{4} \left(\partial_m h_{lj} \partial_m h_{li} - \partial_j h_{ml} \partial_i h_{ml} - \partial_l h \partial_l h_{ij} \right) \right] \quad (\text{B.46})$$

donde se ha definido a ξ_{ij} como:

$$\xi_{ij} \equiv \delta_{ij} + \epsilon \left(\delta_{ij} n + \frac{\delta_{ij}}{2} h - h_{ij} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (\text{B.47})$$

procediendo:

$$\int_V d^3x \beta \sqrt{\gamma} N^{(3)} R = - \int_V d^3x \beta \left[\epsilon \Delta h + \epsilon^2 \left(n \Delta h - \frac{h}{4} \Delta h + \frac{h_{ij}}{4} \Delta h_{ij} \right) \right], \quad (\text{B.48})$$

utilizando el teorema de Gauss generalizado, el término de orden ϵ se anula, con lo que finalmente se obtiene:

$$\int_V d^3x \beta \sqrt{\gamma} N^{(3)} R = -\epsilon^2 \int_V d^3x \beta \left[n \Delta h - \frac{h}{4} \Delta h + \frac{h_{ij}}{4} \Delta h_{ij} \right]. \quad (\text{B.49})$$

Apéndice C

Corchetes de Poisson

Este apéndice, pretende clarificar el cálculo de la conservación de los vínculos secundarios (4.33) y (4.35). Para ello se definirán primero las herramientas necesarias para dicho cómputo, tales como la definición en teoría de campos para los corchetes de Poisson y sus propiedades, como también así la definición de derivada funcional.

La definición del corchete de Poisson en teoría de campos, viene dada por:

$$\{X, Y\} = \int_V d^3\vec{z} \sum_{\xi=1}^S \left(\frac{\delta X}{\delta \varphi_\xi} \frac{\delta Y}{\delta \pi^\xi} - \frac{\delta X}{\delta \pi^\xi} \frac{\delta Y}{\delta \varphi_\xi} \right), \quad (\text{C.1})$$

considerando la dependencia funcional para los campos $X = X(\varphi_\xi(\vec{x}, t), \pi^\xi(\vec{x}, t))$ y $Y = Y(\varphi_\xi(\vec{y}, t), \pi^\xi(\vec{y}, t))$. Mientras que para la derivada funcional se ha de utilizar:

$$\frac{\delta u(\vec{x}, t)}{\delta u(\vec{x}', t)} = \delta^{(3)}(\vec{x}, \vec{x}'), \quad \frac{\delta u_i(\vec{x}, t)}{\delta u_j(\vec{x}', t)} = \delta_i^j \delta^{(3)}(\vec{x}, \vec{x}'), \quad \frac{\delta u_{kl}}{\delta u_{ij}} = \delta_{kl}^{ij} \delta^{(3)}(\vec{x}, \vec{x}'). \quad (\text{C.2})$$

De aquí en adelante se asumirá la dependencia funcional de los campos, en aras de reducir el tamaño de las ecuaciones. Para $\tilde{\mathcal{H}}^i$ se tiene:

$$\{\tilde{\mathcal{H}}^i, H_{ext}\} = \int_V d^3\vec{z} \left[\frac{2\delta\partial_j\pi^{ij}}{\delta h_{kl}} \frac{\delta H_{ext}}{\delta \pi^{kl}} - \frac{2\delta\partial_j\pi^{ij}}{\delta \pi^{kl}} \frac{\delta H_{ext}}{\delta h_{kl}} \right], \quad (\text{C.3})$$

donde el primer término dentro del corchete se anula debido a que las variables del espacio de fase son independientes. Reemplazando la expresión de H_{ext} , y aplicando las propiedades de linealidad y producto de los corchetes de Poisson, como también las definiciones de derivada funcional, el término restante de la expresión (C.3) queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \{\tilde{\mathcal{H}}^i, H_{ext}\} = & -2 \int_V d^3 \vec{z} \delta_{ij}^{kl} \partial_j \delta^{(3)}(\vec{x}, \vec{z}) \left[\frac{\delta \langle n(p_\tau + \beta \Delta h) \rangle}{\delta h_{kl}} - 2 \frac{\delta \langle n_i \partial_i \pi^{ij} \rangle}{\delta h_{kl}} + \frac{\delta \langle \kappa_{ij}^2 \rangle}{\delta h_{kl}} \right. \\ & - \lambda \frac{\delta \langle \kappa^2 \rangle}{\delta h_{kl}} + (\lambda - 1) \frac{\delta \langle (\Delta \tau)^2 \rangle}{\delta h_{kl}} - \frac{1}{4\alpha} \frac{\delta \langle p_\tau \Delta^{-1} p_\tau \rangle}{\delta h_{kl}} + u_0 \frac{\delta \langle \phi \sigma \rangle}{\delta h_{kl}} + u_i \frac{\delta \langle \phi^i \rangle}{\delta h_{kl}} \\ & \left. + \frac{\beta}{4} \frac{\delta \langle h \Delta h \rangle}{\delta h_{kl}} - \frac{\beta}{4} \frac{\delta \langle h_{ij} \Delta h_{ij} \rangle}{\delta h_{kl}} \right], \end{aligned} \quad (C.4)$$

donde los términos que se han cancelado, es debido a la misma consideración antes expuesta. Recordando además que los corchetes $\langle \rangle$, significan integración del objeto sobre todo el espacio físico. Finalmente el único término no nulo del corchete arroja el siguiente resultado:

$$\{\tilde{\mathcal{H}}^i, H_{ext}\} = \frac{\beta}{2} \int_V d^3 \vec{z} \delta_{kl}^{ij} \partial_j \delta^{(3)}(\vec{x}, \vec{z}) \int_V d^3 \vec{y} [\delta_{kl}^{ij} \delta^{(3)}(\vec{y}, \vec{z}) \Delta h_{ij} + \delta_{kl}^{ij} \Delta \delta^{(3)}(\vec{y}, \vec{z}) h_{ij}], \quad (C.5)$$

integrando por partes y aplicando las propiedades de la delta de Dirac y de Kronecker, se arriba a:

$$\{\tilde{\mathcal{H}}^i, H_{ext}\} = -\beta \Delta \partial_i h_{ij}, \quad (C.6)$$

aplicando el gauge de Lorentz, la expresión anterior se anula débilmente, no dando paso a nuevos vínculos:

$$\{\tilde{\mathcal{H}}^i, H_{ext}\} \approx 0. \quad (C.7)$$

El otro corchete, aplicando la propiedad de linealidad se puede expresar de la siguiente manera:

$$\{\tilde{\mathcal{H}}, H_{ext}\} = \{p_\tau, H_{ext}\} + \{\beta \Delta h^T, H_{ext}\}, \quad (C.8)$$

se procede ahora a calcular cada corchete, del lado derecho de la expresión anterior:

$$\{p_\tau, H_{ext}\} = \int_V d^3 \vec{z} \left[\frac{\delta p_\tau}{\delta \tau} \frac{\delta H_{ext}}{\delta p_\tau} - \frac{\delta p_\tau}{\delta p_\tau} \frac{\delta H_{ext}}{\delta \tau} \right], \quad (C.9)$$

$$\begin{aligned} \{p_\tau, H_{ext}\} = & - \int_V d^3 \vec{z} \delta^{(3)}(\vec{x}, \vec{z}) \left[\frac{\delta \langle n p_\tau \rangle}{\delta \tau} - 2 \frac{\delta \langle n^j \partial_i \pi^{ij} \rangle}{\delta \tau} - \frac{1}{4\alpha} \frac{\delta \langle p_\tau \Delta^{-1} p_\tau \rangle}{\delta \tau} + \beta \frac{\delta \langle n \Delta h^T \rangle}{\delta \tau} \right. \\ & \left. + \frac{\beta}{4} \frac{\delta \langle h^T \Delta h^T \rangle}{\delta \tau} - \frac{\beta}{4} \frac{\delta \langle h_{ij} \Delta h_{ij} \rangle}{\delta \tau} + \frac{\delta \langle \kappa_{ij}^2 \rangle}{\delta \tau} - \lambda \frac{\delta \langle \kappa^2 \rangle}{\delta \tau} + (\lambda - 1) \frac{\delta \langle (\Delta \tau)^2 \rangle}{\delta \tau} \right], \end{aligned} \quad (C.10)$$

desarrollando:

$$\begin{aligned} - \int_V d^3 \vec{z} \delta^{(3)}(\vec{x}, \vec{z}) \frac{\delta \langle \kappa_{ij}^2 \rangle}{\delta \tau} = & -2 \int_V d^3 \vec{z} \delta^{(3)}(\vec{x}, \vec{z}) \int_V d^3 \vec{y} \left[(1 - \beta) \partial_i \partial_j \delta^{(3)}(\vec{y}, \vec{z}) \right. \\ & \left. + \frac{\beta(1 - \lambda)}{1 - 3\lambda} \delta_{ij} \Delta \delta^{(3)}(\vec{y}, \vec{z}) \right] \kappa_{ij}, \end{aligned} \quad (C.11)$$

integrando por partes dos veces, y haciendo uso de las expresiones (4,11) y (4,12), se obtiene:

$$\begin{aligned} - \int_V d^3 \vec{z} \delta^{(3)}(\vec{x}, \vec{z}) \frac{\delta \langle \kappa_{ij}^2 \rangle}{\delta \tau} = & -2 \left[\frac{2\beta\lambda}{(1 - 3\lambda)^2} + \frac{\lambda + \beta - \beta\lambda}{1 - 3\lambda} \right] \Delta \pi - 2 \left[\left(\beta + \frac{2\beta\lambda}{1 - 3\lambda} \right) \times \right. \\ & \left. \left(1 + \frac{2\beta}{1 - 3\lambda} \right) + 1 - \beta + \frac{2\beta\lambda(1 - \beta)}{1 - 3\lambda} \right] \Delta^2 \tau, \end{aligned} \quad (C.12)$$

para el siguiente término de tiene:

$$\lambda \int_V d^3 \vec{z} \delta^{(3)}(\vec{x}, \vec{z}) \frac{\delta \langle \kappa^2 \rangle}{\delta \tau} = \frac{2\lambda}{1 - 3\lambda} (1 - 3\lambda + 2\beta) \int_V d^3 \vec{z} \delta^{(3)}(\vec{x}, \vec{z}) \int_V d^2 \vec{y} \Delta \delta^{(3)}(\vec{y}, \vec{z}) \kappa, \quad (C.13)$$

de lo cual resulta:

$$\lambda \int_V d^3 \vec{z} \delta^{(3)}(\vec{x}, \vec{z}) \frac{\delta \langle \kappa^2 \rangle}{\delta \tau} = \frac{2\lambda(1 - 3\lambda + 2\beta)}{1 - 3\lambda} [\Delta \pi + (1 - 3\lambda + 2\beta) \Delta^2 \tau], \quad (C.14)$$

finalmente el último término da:

$$(\lambda - 1) \int_V d^3 \vec{z} \delta^{(3)}(\vec{x}, \vec{z}) \frac{\delta \langle (\Delta \tau)^2 \rangle}{\delta \tau} = -2(\lambda - 1) \int_V d^3 \vec{z} \delta^{(3)}(\vec{x}, \vec{z}) \int_V d^3 \vec{y} \Delta \tau \Delta \delta^{(3)}(\vec{y}, \vec{z}), \quad (\text{C.15})$$

de donde se obtiene:

$$(\lambda - 1) \int_V d^3 \vec{z} \delta^{(3)}(\vec{x}, \vec{z}) \frac{\delta \langle (\Delta \tau)^2 \rangle}{\delta \tau} = -2(\lambda - 1) \Delta^2 \tau. \quad (\text{C.16})$$

Agrupando los resultados de las expresiones (C.12), (C.14) y (C.16), el primer corchete del lado derecho de la expresión (C.8) da como resultado:

$$\{p_\tau, H_{ext}\} = -\frac{2\beta(1-\lambda)}{1-3\lambda} [\Delta \pi + 2\beta \Delta^2 \tau]. \quad (\text{C.17})$$

Procediendo de igual manera para el otro corchete:

$$\{\beta \Delta h^T, H_{ext}\} = \int_V d^3 \vec{z} \left[\frac{\delta \beta \Delta h^T}{\delta h^T} \frac{\delta H_{ext}}{\delta \pi^T} - \frac{\delta \beta \Delta h^T}{\delta \pi^T} \frac{\delta H_{ext}}{\delta h^T} \right], \quad (\text{C.18})$$

$$\begin{aligned} \{\beta \Delta h^T, H_{ext}\} &= \beta \int_V d^3 \vec{z} \Delta \delta^{(3)}(\vec{x}, \vec{z}) \left[\frac{\delta \langle n p_\tau \rangle}{\delta \pi^T} - 2 \frac{\delta \langle n^j \partial_i \pi^{ij} \rangle}{\delta \pi^T} - \frac{1}{4\alpha} \frac{\delta \langle p_\tau \Delta^{-1} p_\tau \rangle}{\delta \pi^T} \right. \\ &\quad + \beta \frac{\delta \langle n \Delta h^T \rangle}{\delta \pi^T} + \frac{\beta}{4} \frac{\delta \langle h^T \Delta h^T \rangle}{\delta \pi^T} - \frac{\beta}{4} \frac{\delta \langle h_{ij} \Delta h_{ij} \rangle}{\delta \pi^T} + (\lambda - 1) \frac{\delta \langle (\Delta \tau)^2 \rangle}{\delta \pi^T} \\ &\quad \left. + \frac{\delta \langle \kappa_{ij}^2 \rangle}{\delta \pi^T} - \lambda \frac{\delta \langle \kappa^2 \rangle}{\delta \pi^T} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

$$\begin{aligned} \beta \int_V d^3 \vec{z} \Delta \delta^{(3)}(\vec{x}, \vec{z}) \frac{\delta \langle \kappa_{ij}^2 \rangle}{\delta \pi^T} &= 2\beta \int_V d^3 \vec{z} \Delta \delta^{(3)}(\vec{x}, \vec{z}) \int_V d^3 \vec{y} \left[\left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\Delta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\lambda \delta_{ij}}{1-3\lambda} \right] \delta^{(3)}(\vec{y}, \vec{z}) \kappa_{ij}, \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

integrando por partes y aplicando propiedades de la delta de Dirac y Kronecker, se obtiene:

$$\beta \int_V d^3 \vec{z} \Delta \delta^{(3)}(\vec{x}, \vec{z}) \frac{\delta \langle \kappa_{ij}^2 \rangle}{\delta \pi^T} = 2\beta \Delta \left[\left(1 + \frac{2\lambda}{1-3\lambda} \right) \kappa - \frac{\partial_i \partial_j}{\Delta} \kappa_{ij} \right], \quad (\text{C.21})$$

realizando el álgebra, finalmente se tiene:

$$\beta \int_V d^3 \vec{z} \Delta \delta^{(3)}(\vec{x}, \vec{z}) \frac{\delta \langle \kappa_{ij}^2 \rangle}{\delta \pi^T} = 2 \left[\frac{1 - \lambda}{(1 - 3\lambda)^2} - \frac{\lambda}{1 - 3\lambda} \right] \Delta \pi + 2 \left[\frac{1 - \lambda - 2\beta\lambda}{1 - 3\lambda} + \frac{2\beta(1 - \lambda)}{(1 - 3\lambda)^2} - 1 \right] \Delta^2 \tau. \quad (\text{C.22})$$

$$-\lambda\beta \int_V d^3 \vec{z} \Delta \delta^{(3)}(\vec{x}, \vec{z}) \frac{\delta \langle \kappa^2 \rangle}{\delta \pi^T} = -\frac{4\lambda\beta}{1 - 3\lambda} \int_V d^3 \vec{z} \Delta \delta^{(3)}(\vec{x}, \vec{z}) \int_V d^3 \vec{y} \Delta \delta^{(3)}(\vec{y}, \vec{z}) \kappa, \quad (\text{C.23})$$

$$-\lambda\beta \int_V d^3 \vec{z} \Delta \delta^{(3)}(\vec{x}, \vec{z}) \frac{\delta \langle \kappa^2 \rangle}{\delta \pi^T} = -\frac{4\beta\lambda}{(1 - 3\lambda)^2} [\Delta \pi + (1 - 3\lambda + 2\beta) \Delta^2 \tau], \quad (\text{C.24})$$

agrupando los resultados de las expresiones (C.22) y (C.24), se tiene:

$$\{\beta \Delta h^T, H_{ext}\} = \frac{2\beta(1 - \lambda)}{1 - 3\lambda} [\Delta \pi + 2\beta \Delta^2 \tau]. \quad (\text{C.25})$$

En virtud de las expresiones (C.17) y (C.25), se tiene finalmente:

$$\{p_\tau + \beta \Delta h^T, H_{ext}\} = \{\tilde{\mathcal{H}}, H_{ext}\} \approx 0. \quad (\text{C.26})$$

Bibliografía

- [1] C.J. Isham, *Prima facie questions in quantum gravity*, arXiv:gr-qc/9310031v1.
- [2] S. Carlip, *Quantum gravity: a progress report*, Rept.Prog.Phys. 64:885 (2001), arXiv:gr-qc/0108040v1.
- [3] C. M. Will, *The confrontation between general relativity and experiment*, Living Rev. Rel. **9**, (2005) 3, arXiv:gr-qc/0510072v2.
- [4] E. M. Lifshitz, Zh. Eksp. Toer. Fiz. **11**, 255; 269 (1941)
- [5] P. Hořava, *Quantum Gravity at a Lifshitz Point*, Phys. Rev. D **79**(2009) 084008, arXiv:gr-qc/0901.3775v2.
- [6] R. L. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, *The dynamics of general relativity*, in *Gravitation: an introduction to current research*, (Wiley, 1962), ed: Louis Witten, arXiv:gr-qc/0405109v1.
- [7] D. Blas, O. Pujolas and S. Sibiryakov, *On the extra mode and inconsistency of Horava gravity*, JHEP **0910** (2009) 029, arXiv:gr-qc/0906.3046v2.
- [8] D. Blas, O. Pujolas and S. Sibiryakov, *Comment on Strong coupling in extended Hořava-Lifshitz gravity*, Phys.Lett. **B688**:350-355 (2010), arXiv:gr-qc/0912.0550v2.
- [9] C. Charmousis, G. Niz, A. Padilla and P. M. Saffin, *Strong coupling in Horava gravity*, JHEP **0908** (2009) 070, arXiv:gr-qc/0905.2579v2.

- [10] D. Blas, O. Pujolas and S.Sibiryakov, *A healthy extension of Horava gravity*, Phys. Rev. Lett. **104** (2010) 181302, arXiv:gr-qc/0909.3525v1.
- [11] D. Blas, O. Pujolas and S.Sibiryakov, *Models of non-relativistic quantum gravity: the good, the bad and the healthy*, JHEP **1104** (2011) 018, arXiv:gr-qc/1007.5303v1.
- [12] J. Bellorín and A. Restuccia, *Consistency of the Hamiltonian formulation of the lowest-order effective action of the complete Hořava theory*, Phys.Rev. **D84** (2011) 104037 arXiv:1106.5766v3.
- [13] J. Bellorín and A. Restuccia, *Closure of the algebra of constraints for a non-projectable Hořava model*, Phys. Rev. **D83** (2011), arXiv:gr-qc/1010.5531v3.
- [14] J. Bellorín and A. Restuccia, *On the consistency of the Hořava theory*, Int. J. Mod. Phys. **D21**, 1250029 (2012), arXiv:gr-qc/1004.0055v3.
- [15] J. Bellorín and A. Restuccia, *Quantization of the Hořava theory at the kinetic-conformal point*, (2016) arXiv:gr-qc/1606.02606v2.
- [16] T. Jacobson and D. Mattingly, *Gravity with a dynamical preferred frame*, Phys. Rev. **D64**, 024028 (2001), arXiv:gr-qc/0007031v4.
- [17] T. Jacobson, *Einstein-aether gravity: a status report*, **PoS QGPH** (2007) 020, arXiv:gr-qc/0801.1547.
- [18] T. Jacobson and D. Mattingly, *Einstein-aether waves*, Phys. Rev. D. **70**, 024003 (2004), arXiv:gr-qc/0402005v2.
- [19] T. Jacobson and C. Eling, *Static post-Newtonian equivalence of GR and gravity with a dynamical preferred frame* Phys. Rev. D. **69**, 064005(2004), arXiv:gr-qc/0310044v3.

- [20] C. Eling, T. Jacobson and D. Mattingly, *Einstein-aether theory*, (2005), arXiv:gr-qc/0410001v2.
- [21] T. Jacobson and C. Eling, *Spherical solutions in Einstein-aether theory: Static aether stars*, *Class. Quant. Grav.* **23**, 5625 (2006), arXiv:gr-qc/0603058.
- [22] T. Jacobson and C. Eling, *Black holes in Einstein-aether theory*, *Class. Quant. Grav.* **23**, 5643 (2006), arXiv:gr-qc/0604088.
- [23] T. Jacobson and C. Eling, *Two dimensional gravity with dynamical aether*, *Phys. Rev. D.* **74**, 084027 (2006), arXiv:gr-qc/0608052.
- [24] T. Jacobson, *Extended Hořava gravity and Einstein-aether theory*, *Phys. Rev.* **D82**, 129901 (2010), arXiv:gr-qc/1001.4823v3.
- [25] T. Jacobson and D. Mattingly, *Undoing the twist: the Hořava limit of Einstein-aether*, *Phys. Rev.* **D89**, 081501(R) (2014), arXiv:gr-qc/1310.5115v2.
- [26] M. Gasperini, *Singularity prevention and broken Lorentz symmetry*, *Class. Quantum Grav.* **4** (1987) 485-494.
- [27] T.P. Sotiriou, M. Visser and S. Weinfurtner, *Phenomenologically viable Lorentz-violating quantum gravity*, *Phys.Rev.Lett.* 102:251601 (2009), arXiv:gr-qc/0904.4464v3.
- [28] T.P. Sotiriou, M. Visser and S. Weinfurtner, *Quantum gravity without Lorentz invariance*, *JHEP* 0910:033 (2009), arXiv:gr-qc/0905.2798v3.
- [29] S. M. Carroll and E. A. Lim, *Lorentz-Violating Vector Fields Slow the Universe Down*, *Phys. Rev.* **D70** (2004) 123525.
- [30] C. M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1993.

- [31] J. F. Bell, F. Camilo and T. Damour, *A Tighter Test of Local Lorentz Invariance using PSR J2317+1439*, *Astrophys. J.* **464**(1996) 857.
- [32] K. Nordtvedt, *Probing gravity to the second post-Newtonian order and to one part in 10 to the 7th using the spin axis of the sun*, *Astrophys. J.* **320** (1987) 871874.
- [33] H. Lu, J. Mei, and C. N. Pope, *Solutions to Hořava Gravity*, *Phys. Rev. Lett.* vol. **103** (2009) 091301.
- [34] R. M. Wald, *General Relativity*, The university of Chicago press, (1984), Chicago, USA.
- [35] T. Regge and C. Teitelboim, *Role of surface integrals in the Hamiltonian formulation of general relativity*, *Annals Phys.* **88** (1974) 286-318.
- [36] L. Landau and Lifshitz, *Mechanics*, Editorial Reverté S.A. (1965), Moscow, Russia.
- [37] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley (1972), New York, USA.
- [38] J. W. York Jr, *Conformally invariant orthogonal decomposition of symmetric tensors on Riemannian manifolds and the initial value problem of general relativity*, *J. Math. Phys.*, **14**, 4 (1973).
- [39] P.A.M. Dirac, *Lectures on quantum mechanics*, Dover Publications (2001), New York, USA.
- [40] B.S. DeWitt, *Quantum theory of gravity. I. the canonical theory*, *Phys. Rev.* **160** (1967) 1113.