



Universidad Católica del Norte

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Matemáticas

Deformación de estructuras complejas de 3-variedades Calabi Yau.

Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias mención Matemática.

Francisco Iván Rubilar Arriagada

Profesor Tutor: Dra. Elizabeth Gasparim

Antofagasta, Chile 2017.

Agradecimientos

Agradezco a todos quienes hicieron posible que este trabajo de tesis finalizara de forma exitosa. A Margarita, por su apoyo y comprensión. A mi familia por su apoyo incondicional. A mi orientadora por su apoyo y entusiasmo para trabajar ciencia. A mis compañeros de postgrado y finalmente a la Universidad Católica del Norte, particularmente a su departamento de postgrado por haberme acogido y darme la posibilidad de ser parte de su programa.

Todo lo que pueda decir es poco para describir mi gratitud, de modo que simplemente diré gracias y hasta la próxima.

Tabla de Contenidos

	Página
Resumen	IV
Introducción	v
I Teoría general de estructuras complejas	VIII
1. Varias variables complejas	1
1.1. Funciones holomorfas	1
1.2. Aplicaciones holomorfas	6
1.3. Variedades complejas	7
1.4. Fibrados vectoriales	11
2. Teoría general de deformaciones	17
2.1. Familia diferenciable	17
2.1.1. Introducción	17
2.1.2. Familia diferenciable	19
2.2. Deformación infinitesimal	23
2.2.1. Deformación infinitesimal	23
2.2.2. Familia diferenciable trivial	26
2.3. Obstrucción	28
3. Cohomología con coeficientes en haces	34
3.1. Haces	34
3.1.1. Definición y Ejemplos	34

3.1.2. Aplicaciones entre haces	36
3.2. Cohomología de Čech	38
II Resultados originales	41
4. Deformaciones de superficies locales	42
5. Cohomología de $W_k; k = 1, 2.$	45
5.1. Cohomología con coeficientes en fibrados de línea.	45
5.1.1. Cohomología de W_2 con coeficientes en $\mathcal{O}_{W_2}(n)$	45
5.1.2. Cohomología de W_2 con coeficientes en $\mathcal{O}_{W_2}(-n)$	48
5.1.3. Ejemplos	49
5.2. Cohomología con coeficientes en el fibrado tangente.	50
6. Deformaciones de $W_k; k=1,2.$	55
6.1. Deformaciones de W_1	56
6.2. Deformaciones de W_2	56
6.2.1. Deformación del Fibrado Tangente	56
6.3. Una familia de deformaciones de dimensión infinita para W_2	64
A. Un fibrado holomorfo que no es algebraico.	66
A.1. Un fibrado holomorfo sobre $Z_{(-1)}$ que no es algebraico.	66
A.1.1. A similar bundle on Z_1	68
B. Comparación con la teoría de Kuranishi.	69
B.1. $H^1(W_2, \text{End}(TW_2))$	69

Resumen.

La teoría de deformaciones de estructuras complejas tiene dos corrientes principales, por un lado K. Kodaira con su trabajo “Complex manifolds and deformations of complex structures” [Ko] y por otro, M. Kuranishi, con “On deformations of compact complex structures” [Ku]. En el presente trabajo, comenzamos con una descripción, a nivel general, de la teoría de deformaciones de estructuras complejas, basada esencialmente en el trabajo de Kodaira. La teoría de deformaciones para variedades no compactas está aún en franco desarrollo, en este sentido, desarrollamos y probamos algunos nuevos resultados para el caso de 3-variedades Calabi-Yau, concretamente, variedades del tipo:

$$W_k := \text{Tot}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-k) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k-2)); \quad k \geq 1.$$

Por un lado, en Teorema 6.1.1 probamos que W_1 es formalmente rígido, esto es, su primer grupo de cohomología con coeficientes en el haz tangente es igual cero. Por otro lado, en Teorema 6.3.2 mostramos que W_2 tiene un espacio de deformaciones infinito dimensional, más aún, construimos una familia de deformaciones de dimensión infinita y damos explícitamente los cambios de coordenadas de tales variedades. Que la familia de deformaciones de W_2 sea de dimensión infinita, es un resultado que sorprende, pues esto no ocurre en el caso 2-dimensional para un cierto tipo de superficies, las cuales también corresponden a espacios totales de fibrados de línea sobre la línea proyectiva compleja. Concretamente, hacemos referencia a los resultados en [BG], donde se prueba que las superficies $Z_k := \text{Tot}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-k)); k \geq 1$, tienen espacio de deformaciones de dimensión finita, específicamente de dimensión $k - 1$. Finalmente, cabe mencionar que para W_k con $k \geq 3$, caracterizar su espacio de deformaciones, es aún un problema abierto.

Introducción

La teoría geométrica de deformaciones de estructuras complejas tiene importantes aplicaciones a la física matemática. Particularmente interesante es el caso de las 3-variedades Calabi-Yau, las cuales corresponden a variedades complejas de dimensión real seis. En tal caso, una dirección de deformación no trivial, da origen, en un cierto sentido, a una teoría de Gravedad de tipo Kodaira-Spencer. El objetivo de esta tesis es describir en detalle casos concretos de deformación de la estructura compleja en que la 3-variedad Calabi-Yau es tórica.

En términos históricos, el punto de partida de la teoría de deformaciones de estructuras complejas, se puede situar en la segunda mitad del siglo XIX, concretamente en una memoria de Bernhard Riemann, sobre *Funciones Abelianas*, trabajo publicado en 1857, donde se interesó por deformaciones de la estructura compleja de superficies de Riemann. En este trabajo, Riemann calculó el número de parámetros efectivos sobre los cuales dependía la deformación. En tanto que, para el caso de *Superficies Algebraicas*, Max Noether fue quien primero se interesó por esta área en trabajos que se remontan a 1888. No obstante, para dimensiones más altas, no hubo grandes avances hasta mediados del siglo XX, cuando Frölicher y Nijenhuis, en un trabajo publicado en 1957, obtuvieron un importante resultado sobre estabilidad de estructuras complejas usando técnicas de geometría diferencial.

Ya bien entrado el siglo XX, Kunihiko Kodaira y Donald C. Spencer, desarrollaron la teoría de deformación de estructuras complejas para variedades complejas compactas en un sentido más general. Importantes resultados fueron recogidos en el libro de introducción a la teoría de deformaciones “*Complex manifolds and deformations of complex structures*”, ver [Ko]. El estudio de las deformaciones de estructuras complejas sobre variedades compactas, surge a partir de la teoría de *operadores diferenciales elípticos*. Aunque la teoría de deformaciones en el caso

compacto cuenta con una gran cantidad de importantes resultados, todavía queda mucho por saber. En lo que respecta a variedades no compactas, la teoría no está completamente desarrollada, más bien hay mucho por estudiar y es en esta línea que dirigimos el presente trabajo.

En esta oportunidad estamos interesados en el estudio de las deformaciones de la estructura compleja de variedades no compactas del tipo:

$$W_k := \text{Tot}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-k) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k-2)).$$

Tales W_k , corresponden a lo que se conoce como *Calabi-Yau 3-folds*, variedades de dimensión compleja tres (esto es, dimensión real seis) con fibrado canónico trivial.

Las variedades Calabi-Yau fueron originalmente definidas como Variedades Kähler Compactas con primera clase de Chern nula y, en particular, una métrica de Ricci plana, sin embargo, hoy en día también se usan otras definiciones alternativas no necesariamente equivalentes. Eugenio Calabi (1954, 1957) primero conjeturó la existencia de superficies con las características antes mencionadas, posteriormente Shing-Tung Yau (1978) fue quien probó la conjetura de Calabi, es decir, demostró la existencia de tales espacios; inicialmente denominados *espacios Calabi-Yau* por Candelas et al. (1985). Algunos ejemplos de variedad Calabi-Yau son:

- En una dimensión, el único ejemplo compacto corresponde al *Toro*. Una 1-variedad Calabi-Yau es una *curva elíptica compleja*, en particular, algebraica.
- En dos dimensiones, las *superficies K3* son los únicos ejemplos compactos simplemente conexos. Las *superficies Abelianas* son ejemplos de variedades Calabi-Yau no simplemente conexas.
- En tres dimensiones, clasificar las variedades Calabi-Yau es aún un problema abierto. Un ejemplo es la 3-variedad cuántica en $\mathbb{C}\mathbb{P}^4$, variedad algebraica dada por todos los ceros de un polinomio homogéneo de grado cinco en $\mathbb{C}\mathbb{P}^4$.

En el presente trabajo, estudiaremos deformaciones de la estructura compleja de 3-variedades Calabi-Yau definidas como espacios totales de fibrados. Concretamente, estudiaremos aquellas del tipo:

$$W_k = \text{Tot}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-k) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k-2)); \quad k = 1, 2.$$

Aquí la suma en paréntesis, corresponde a la suma de Whitney y Tot indica espacio total del fibrado. Además, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-k)$ y $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k-2)$, corresponden a fibrados de rango uno sobre la línea proyectiva \mathbb{P}^1 con primera clase de chern $-k$ y $k-2$ respectivamente. En particular, es común escribir $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ para referirnos a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(0)$. En adelante se hará uso de esta notación siempre que no haya lugar a confusión.

Este trabajo está dividido en dos partes, la primera, enfocada a una revisión de la teoría general y la segunda, donde se presentan los resultados obtenidos en el estudio de las deformaciones propiamente tal. La primera parte comprende los capítulos uno, dos y tres. El primero corresponde a una revisión de algunos resultados elementales del cálculo en varias variables complejas, variedades complejas y fibrados vectoriales. El segundo, es una revisión a modo general, de la teoría de deformaciones para variedades complejas compactas, en el sentido de Kodaira [Ko]. El capítulo tres contempla una breve introducción a la teoría de haces y cohomología, con especial énfasis en la cohomología de Čech, la cual será utilizada posteriormente para el desarrollo de los resultados originales presentados. La segunda parte corresponde a los capítulos cuatro al seis. El cuarto capítulo está dedicado a una breve revisión de los resultados obtenidos por Barmerier y Gasparim en [BG], donde estudiaron las deformaciones de superficies locales, es decir, teoría de deformaciones en el contexto 2-dimensional. El capítulo cinco, recoge los principales cálculos de cohomología de Čech que son necesarios para comprender los resultados presentados en el capítulo seis. En el último capítulo, presentamos nuestros principales resultados, esto es, la rigidez de W_1 , en el sentido de que no tiene deformaciones y para W_2 , probaremos que tiene un espacio de deformaciones infinito dimensional, además presentamos una familia de deformaciones de dimensión infinita. Finalmente, incluimos un apéndice, donde miramos nuestros resultados en el contexto de la teoría de deformaciones presentada por Kuranishi en [Ku].

Parte I

Teoría general de estructuras complejas

Capítulo 1

Varias variables complejas

En este capítulo, hacemos una revisión de los hechos básicos sobre cálculo en variable compleja. Salvo que se afirme lo contrario, todos los lemas, teoremas y/o corolarios fueron extraídos de [Ko].

1.1. Funciones holomorfas

Denotamos por \mathbb{C}^n , al espacio complejo n -dimensional, que corresponde al conjunto de n -tuplas (z_1, \dots, z_n) de números complejos $z_i, i = 1, \dots, n$. Notemos que \mathbb{C}^n no es más que el producto cartesiano de n -copias del plano complejo \mathbb{C} . Escribimos $z = (z_1, \dots, z_n)$ para referirnos a un punto de \mathbb{C}^n y z_1, \dots, z_n son las coordenadas o componentes de z . Por otro lado, haciendo $z_j = x_{2j-1} + ix_{2j}, j = 1, \dots$, llamamos parte real de z_j a x_{2j-1} y parte imaginaria a x_{2j} , aquí i corresponde a la unidad imaginaria, esto es $i^2 = -1$. Con esta descomposición, tenemos un isomorfismo entre \mathbb{C}^n y el espacio Euclidiano $2n$ -dimensional \mathbb{R}^{2n} , mediante la identificación:

$$z = (x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}).$$

Sean $z = (z_1, \dots, z_n)$ y $w = (w_1, \dots, w_n)$ puntos en \mathbb{C}^n . Se define la combinación lineal $\lambda z + \mu w$ de z y w , vistos como vectores, por:

$$\lambda z + \mu w = (\lambda z_1 + \mu w_1, \dots, \lambda z_n + \mu w_n),$$

donde λ y μ son números complejos. Esto convierte a \mathbb{C}^n en un espacio vectorial sobre los números complejos. La norma usual en \mathbb{C}^n está dada por:

$$|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}. \quad (1.1)$$

De (1.1), es inmediato que:

$$|\lambda z| = |\lambda| |z|, \quad (1.2)$$

$$|z + w| \leq |z| + |w|. \quad (1.3)$$

La distancia entre dos puntos $z, w \in \mathbb{C}^n$ está dada por:

$$|z - w| = \sqrt{|z_1 - w_1|^2 + \cdots + |z_n - w_n|^2}.$$

La topología usual en \mathbb{C}^n es la inducida por la topología euclidiana en \mathbb{R}^{2n} . Así, por ejemplo, un subconjunto $D \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio en \mathbb{C}^n si D es un dominio, considerado como un subconjunto de \mathbb{R}^{2n} . Una función a valores complejos $f(z) = f(z_1, \dots, z_n)$ definida sobre un dominio D en \mathbb{C}^n es continua, si $f(z)$ es continua como función en las variables reales x_1, x_2, \dots, x_{2n} .

Ahora consideremos una función a valores complejos $f(z) = f(z_1, \dots, z_n)$ de n variables z_1, \dots, z_n definida sobre un dominio D en \mathbb{C}^n .

Definición 1.1.1. Si $f(z) = f(z_1, \dots, z_n)$ es continua en $D \subset \mathbb{C}^n$ y holomorfa en cada variable z_k , $k = 1, \dots, n$, por separado, $f(z_1, \dots, z_n)$ es dicha holomorfa en D . También se dice que $f(z) = f(z_1, \dots, z_n)$ es una función holomorfa de n variables z_1, \dots, z_n .

Aquí, decir que $f(z) = f(z_1, \dots, z_n)$ es holomorfa en cada variable z_k por separado, significa que $f(z_1, \dots, z_n)$ es una función holomorfa en z_k cuando las otras variables están fijas.

Ahora veamos cómo, la fórmula integral de Cauchy con respecto a un círculo para funciones holomorfas de una variable, se puede extender al caso de funciones holomorfas de n -variables.

Dado un punto $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^n$ y números reales positivos r_1, \dots, r_n , definimos

$$U_r(c) = \{z = (z_1, \dots, z_n); |z_k - c_k| < r_k, k = 1, \dots, n\}, \quad (1.4)$$

1.1. FUNCIONES HOLOMORFAS

donde r_k denota la k -ésima componente de $r = (r_1, \dots, r_n)$. Sea $U_{r_k}(c_k)$ el disco de centro en c_k y radio r_k sobre el plano z_k . Entonces tenemos:

$$U_r(c) = U_{r_1}(c_1) \times \cdots \times U_{r_n}(c_n). \quad (1.5)$$

Así, llamamos a $U_r(c)$ el polidisco con centro c . Denotamos por C_k al *borde* o *frontera* de $U_r(c)$, esto es, el círculo de radio r_k con centro c_k sobre el z_k -plano. C_k es parametrizado por $\theta_k \mapsto \gamma(\theta_k) = c_k + r_k e^{i\theta_k}$, donde $0 \leq \theta_k \leq 2\pi$. El producto de C_1, C_2, \dots, C_n

$$C^m = C_1 \times \cdots \times C_n \quad (1.6)$$

es llamado el conjunto determinante del polidisco $U_r(C)$. C^n corresponde a un *toro* n -dimensional. Dada una función continua $\psi(\zeta) = \psi(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, con $\zeta_1 \in C_1, \dots, \zeta_n \in C_n$, definimos su integral sobre C^n por

$$\begin{aligned} \int_{C^n} \psi(\zeta) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n &= \int_{C_1} \cdots \int_{C_n} \psi(\zeta) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n \\ &= \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \psi(\gamma_1(\theta_1), \dots, \gamma_n(\theta_n)) \gamma_1'(\theta_1) \cdots \gamma_n'(\theta_n) d\theta_1 \cdots d\theta_n. \end{aligned}$$

Teorema 1.1.2. Sea $f = f(z_1, \dots, z_n)$ una función holomorfa en un dominio $D \subset \mathbb{C}^n$. Considere un polidisco $U_r(c)$ con $[U_r(c)] \subset D$. Entonces, para $z \in U_r(c)$, $f(z)$ es representada por:

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{C^n} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n,$$

donde $[\]$ denota la clausura.

Teorema 1.1.3. Una función holomorfa $f(z) = f(z_1, \dots, z_n)$ de n -variables en un dominio $D \subset \mathbb{C}^n$ es arbitrariamente diferenciable en z_1, \dots, z_k en D , y todas sus derivadas parciales $\partial^{m_1 + \cdots + m_n} f(z) / \partial z_1^{m_1} \cdots \partial z_n^{m_n}$ son holomorfas en D . Más aún, tomando un polidisco $U_r(c)$ tal que $[U_r(c)] \subset D$, tenemos

$$\frac{\partial^{m_1 + \cdots + m_n}}{\partial z_1^{m_1} \cdots \partial z_n^{m_n}} f(z_1, \dots, z_n) = \frac{m_1! \cdots m_n!}{(2\pi i)^n} \int_{C^n} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1)^{m_1+1} \cdots (\zeta_n - z_n)^{m_n+1}}$$

en $U_r(c)$.

Teorema 1.1.4. Sea $f(z) = f(z_1, \dots, z_n)$ una función holomorfa en un dominio $D \subset \mathbb{C}^n$, y $c = (c_1, \dots, c_n) \in D$. Entonces, en un polidisco $U_\rho(c) \subset D$ con centro en c , $f(z)$ tiene una expansión en serie de potencias de $z_1 - c_1, \dots, z_n - c_n$,

$$f(z) = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{+\infty} a_{m_1 \dots m_n} (z_1 - c_1)^{m_1} \cdots (z_n - c_n)^{m_n},$$

la cual es absolutamente convergente en $U_\rho(c)$. El coeficiente $a_{m_1 \dots m_n}$ está dado por

$$a_{m_1 \dots m_n} = \frac{1}{m_1! \cdots m_n!} f^{(m_1 \dots m_n)}(c_1, \dots, c_n).$$

Series de Potencias

En esta sección, vamos a considerar series de potencias del tipo:

$$P(z) = P(z_1, \dots, z_n) = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{+\infty} a_{m_1 \dots m_n} z_1^{m_1} \cdots z_n^{m_n}$$

con centro en 0. Si $P(z)$ es convergente en z , denotamos su suma por la misma notación $P(z)$.

Teorema 1.1.5. Sea $w = (w_1, \dots, w_n)$ tal que $w_1 \neq 0, \dots, w_n \neq 0$. Si $P(z)$ es convergente en $z = w$, entonces $P(z)$ es absolutamente convergente para $|z_1| < |w_1|, \dots, |z_n| < |w_n|$, y su suma $P(z)$ es una función holomorfa de n variables z_1, \dots, z_n en $U_\rho(0)$ donde $\rho = (|w_1|, \dots, |w_n|)$.

Reemplazando z_k por $z_k - c_k, k = 1, \dots, n$, obtenemos una serie de potencias

$$P(z - c) = P(z_1 - c_1, \dots, z_n - c_n) = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} a_{m_1 \dots m_n} (z_1 - c_1)^{m_1} \cdots (z_n - c_n)^{m_n}$$

con centro en $c = (c_1, \dots, c_n)$.

Corolario 1.1.6. Si una serie $P(z - c)$ es convergente en $w = (w_1, \dots, w_n)$ con $w_1 \neq c_1, \dots, w_n \neq c_n$, $P(z - c)$ es absolutamente convergente si $|z_k - c_k| < |w_k - c_k|, k = 1, \dots, n$, y su suma $P(z - c)$ es una función holomorfa en $U_\rho(c)$, donde $\rho = (|w_1 - c_1|, \dots, |w_n - c_n|)$.

La *región de convergencia* de una serie de potencias $P(z - c)$ es la unión $D = \bigcup U_p(c)$ de todos los poldiscos $U_p(c)$ donde $P(z - c)$ es absolutamente convergente. Una región de convergencia D es un dominio si no es vacía. En el caso $n = 1$, la región de convergencia de una serie de potencias es un conjunto vacío, un disco abierto o todo \mathbb{C} , pero en el caso $n \geq 2$, la región de convergencia de una serie de potencias, puede tomar varias formas.

El siguiente teorema, se sigue directamente del corolario 1.1.6 y del teorema 1.1.4.

Teorema 1.1.7. *Una función $f(z) = f(z_1, \dots, z_n)$ de n variables complejas es holomorfa en un dominio $D \in \mathbb{C}^n$ si y sólo si, para todo punto $c \in D$, $f(z)$ tiene una expansión en serie de potencias $P(z - c)$ la cual es convergente en alguna vecindad de c .*

Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Primero consideremos una función $f(z)$ de una variable compleja z continuamente diferenciable en un dominio $D \subset \mathbb{C}$. Descompongamos z y $f(z)$ en sus partes real e imaginaria, escribiendo $z = x + iy$ y $f(z) = u + iv$. Entonces $u := u(x, y)$ y $v := v(x, y)$ son funciones continuamente diferenciables de coordenadas reales x, y en D . Usando z y \bar{z} , tenemos

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Aunque z y \bar{z} no son variables independientes, podemos considerar como si lo fueran, definimos entonces la derivadas parciales de $f(z)$ con respecto a z y \bar{z} por

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right). \quad (1.7)$$

En términos de u y v , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} (u_x + v_y) + \frac{i}{2} (-u_y + v_x), \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} (u_x - v_y) + \frac{i}{2} (u_y + v_x). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Por lo tanto, usando (1.7), las ecuaciones de Cauchy-Riemann: $u_x = v_y, u_y = -v_x$, es escrita como

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Así, una función continuamente diferenciable $f(z)$ es una función holomorfa de z en un dominio D si y sólo si, $\partial f/\partial \bar{z} = 0$ idénticamente en D . Si $f(z)$ es holomorfa, $\partial f/\partial z = u_x + iv_x = f'(z)$ por (1.8), es decir, para una función holomorfa $f(z)$, la derivada parcial $(\partial f/\partial z)(z)$ es idéntica a la derivada compleja o derivada total $df(z)/dz$. Ahora consideremos una función $f(z) = f(z_1, \dots, z_n)$ de n -variables complejas. Sea $f(z) = u + iv$ como antes. $f(z)$ se dice continuamente diferenciable, C^r, C^∞ , etc. en las coordenadas reales x_1, \dots, x_{2n} . Sea $f(z)$ una función continuamente diferenciable en un dominio $W \subset \mathbb{C}^n$.

Como $x_{2k-1} = \frac{1}{2}(z_k + \bar{z}_k), \quad x_{2k} = \frac{1}{2i}(z_k - \bar{z}_k), \quad k = 1, \dots, n$, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial z_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{2k-1}} - i \frac{\partial f}{\partial x_{2k}} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{2k-1}} + i \frac{\partial f}{\partial x_{2k}} \right).$$

Como $f(z) = f(z_1, \dots, z_n)$ es continuamente diferenciable, con mayor razón continua, $f(z)$ es una función holomorfa de n -variables si y sólo si $f(z)$ es holomorfa en cada z_k separadamente. Por lo tanto, de los resultados previos, obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.1.8. *Sea $f(z) = f(z_1, \dots, z_n)$ una función continuamente diferenciable de n -variables complejas en un dominio $D \subset \mathbb{C}^n$. Entonces $f(z)$ es holomorfa en D si y sólo si,*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

1.2. Aplicaciones holomorfas

En esta sección, vamos a considerar una aplicación $\Phi: z \mapsto w = \Phi(z)$ de un dominio $D \subset \mathbb{C}^n$ en \mathbb{C}^m .

En coordenadas complejas, podemos escribir Φ de la siguiente manera:

$$\Phi: z = (z_1, \dots, z_n) \mapsto (w_1, \dots, w_m) = (\varphi_1(z), \dots, \varphi_m(z)).$$

Entonces Φ es continua, continuamente diferenciable, C^∞ en D si cada $\varphi_i(z), i = 1, \dots, m$, lo es en D respectivamente.

Definición 1.2.1. Φ se dice holomorfa en D , si $w_1 = \phi_1(z), \dots, w_m = \phi_m(z)$ son funciones holomorfas de n variables z_1, \dots, z_n . Si una aplicación $\Phi : z \mapsto w = \Phi(z)$ es holomorfa, la matriz

$$\left(\frac{\partial w_j}{\partial z_k} \right)_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial w_1}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial w_m}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial w_m}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

es llamada la Matriz Jacobiana de Φ , y se denota por $\partial(w_1, \dots, w_m)/\partial(z_1, \dots, z_n)$. En particular, si $m = n$, el determinante de la matriz Jacobiana de Φ :

$$J(z) = \det \frac{\partial(w_1, \dots, w_m)}{\partial(z_1, \dots, z_n)} \quad (1.9)$$

es llamado el Jacobiano de Φ .

1.3. Variedades complejas

Definición 1.3.1. Una variedad topológica de dimensión $n \geq 0$ es un espacio topológico M tal que para cada $p \in M$ existe un entorno abierto $U_p \subset M$ homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n mediante $\varphi_p : U_p \rightarrow V_p \subset \mathbb{R}^n$. Un par (U_p, φ_p) bajo estas condiciones se denomina carta o sistema coordinado sobre M .

Sean $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (U_β, φ_β) dos cartas para una variedad M , tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Dado un punto $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, a la composición $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ se le denomina función de transición, cambio de cartas o cambio de coordenadas de M . Notemos que $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Definición 1.3.2. Una variedad diferenciable M de clase C^k , es una variedad topológica tal que el cambio de coordenadas es diferenciable de clase C^k .

Es común hablar de variedades suaves para referirnos a variedades de clase C^∞ .

Definición 1.3.3. Una variedad compleja suave de dimensión n es una variedad suave que admite un cubrimiento $\{U_\alpha\}$ y cartas $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$ tales que las funciones de transición $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ son holomorfas en $U_\alpha \cap U_\beta$ para cada α, β .

La figura 1.1 ilustra una variedad compleja M con cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (U_β, φ_β) con cambio de coordenadas $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$

Ejemplo 1.3.4. Una variedad compleja de dimensión uno es llamada una superficie de Riemann.

Definición 1.3.5. Dado un cubrimiento abierto $\mathfrak{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ de una variedad M . Decimos que \mathfrak{U} es un cubrimiento localmente finito si, dado un punto cualquiera $p \in M$, la cantidad de abiertos U_j que contienen al punto p es finita.

El siguiente ejemplo será usado más adelante, (en el caso en que el cuerpo $\mathbb{K} \cong \mathbb{C}$ y $n = 1$):

Ejemplo 1.3.6. El espacio proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ sobre un cuerpo \mathbb{K} es una variedad cuyos puntos parametrizan los subespacios de dimensión 1 del espacio \mathbb{K}^{n+1} , esto es,

$$\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n := \frac{\mathbb{K}^{n+1} - \{0\}}{z \sim \lambda z, \lambda \in \mathbb{K} - \{0\}}.$$

Escribimos $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ ó $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ para los espacios proyectivos sobre \mathbb{R} o \mathbb{C} , respectivamente. Cada punto en $\mathbb{K}^n - \{0\}$ define una clase de equivalencia $[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ a las cuales llamamos coordenadas homogéneas. Dado $\lambda \in \mathbb{K}^n - \{0\}$, las coordenadas homogéneas satisfacen $[\lambda x_0, \dots, \lambda x_n] = [x_0, \dots, x_n]$ por definición. Se definen las cartas canónicas del espacio proyectivo (como variedad compleja) de la siguiente forma: $U_i = \{[x_0, \dots, x_n] | x_i \neq 0\}$ y la aplicación

$$\phi_i: U_i \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

$$[x_0, \dots, x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \hat{1}_i, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

es un difeomorfismo para cada $i = 0, \dots, n$. (Aquí $\hat{1}_i$ significa omitir la i -ésima coordenada.)

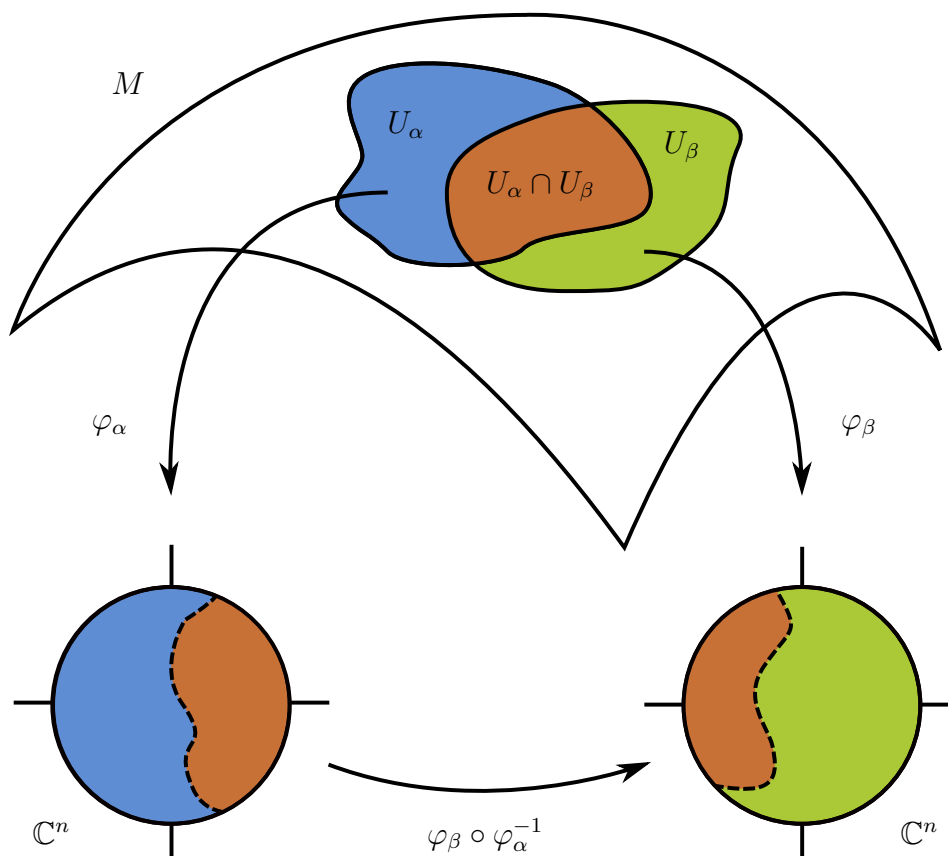


Figura 1.1: Una variedad compleja M de dimensión n , con cartas φ_α y φ_β .

Definición 1.3.7. Sean M^m y N^n dos variedades complejas y $f: M \rightarrow N$ una aplicación entre ellas. Decimos que f es holomorfa si existen cartas $\varphi: U \rightarrow \mathbb{C}^m$ de M y $\psi: V \rightarrow \mathbb{C}^n$ de N tales que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U)}$ está bien definida y es holomorfa.

Denotamos por $\mathcal{O}_M(U) := \{f: U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es holomorfa}\}$ el anillo de aplicaciones holomorfas sobre M .

Definición 1.3.8. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Un endomorfismo $J: V \rightarrow V$ tal que $J^2 = -Id_V$, se dice un estructura casi compleja sobre V .

Ejemplo 1.3.9. Sea V un espacio vectorial. La aplicación $J: v \mapsto i \cdot v$ define una

estructura casi compleja, pues para cada $v \in V$, tenemos que $J^2(v) = I \circ J(v) = J(i \cdot v) = i^2 \cdot v = -v$, es decir: $J^2 = -\text{id}_V$.

Lema 1.3.10. *Si J es una estructura casi compleja en un espacio vectorial real V , entonces V admite de manera natural, una estructura de espacio vectorial complejo.*

Demostración. Para cada $v \in V$, definimos $(a + ib)v = av + bJ(v)$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Como J es un endomorfismo, se sigue que:

$$(a + ib)(v + w) = (a + ib)v + (a + ib)w,$$

para cualesquiera v, w . Como $J^2 = -\text{id}$, tenemos que

$$\begin{aligned} (a + ib)((c + id)v) &= (a + ib)(cv + dJ(v)) \\ &= a(cv + dJ(v)) + ibJ(cv + dJ(v)) \\ &= acv + adJ(v) + ibcJ(v) - bdv \\ &= (ac - bd)v + (ad + bc)J(v) \\ &= (ac - bd + i(ad + bc))v \\ &= ((a + ib)(c + id))v. \end{aligned}$$

□

Observación 1.3.11. *Dos variedades complejas pueden ser difeomorfas como variedades reales (es decir, que existen aplicaciones invertibles, sobreyectivas y diferenciables entre ambas), pero puede no existir un difeomorfismo analítico compleja entre ellas (entonces decimos que tienen diferentes estructuras complejas). Igualmente, dos variedades homeomorfas pueden tener diferentes estructuras como variedades diferenciables. La diferenciabilidad depende de la elección de las cartas φ_α , ver [Hori et al, Ejemplo 1.2.1].*

Definición 1.3.12. *Una estructura casi compleja J en V , es compatible con el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, si $\langle J(v), J(w) \rangle = \langle v, w \rangle$, para todo $v, w \in V$.*

Definición 1.3.13. *Una métrica Riemanniana g en una variedad compleja M , es una estructura Hermitiana en M , si para todo $x \in M$, el producto escalar g_x en $T_x M$ es compatible con la estructura cuasi compleja J_x . La $(1, 1)$ -forma real inducida $\omega := g(J(\cdot), (\cdot))$ es llamada forma fundamental.*

Definición 1.3.14. *Una estructura Kähler (o métrica Kähler), es una estructura Hermitiana g , para la cual la forma fundamental es cerrada, es decir $d\omega = 0$. En este caso, la forma fundamental ω es llamada forma Kähler.*

Definición 1.3.15. *Una variedad Kähler, es una variedad compleja equipada con una estructura Kähler.*

Definición 1.3.16. *Una variedad Calabi–Yau es una variedad compleja suave Kähler, con fibrado canónico trivial.*

Ver la definición de fibrado canónico en 1.4.9.

Existen otras definiciones de variedades Calabi–Yau, las cuales no son necesariamente equivalentes. A continuación, listamos algunas de tales definiciones. Una variedad Calabi–Yau de dimensión compleja n es una variedad Kähler M , que satisface alguna de las siguientes condiciones:

- M posee una métrica Kähler con curvatura de Ricci nula;
- M posee una n -forma compleja ($2n$ -forma real) de volumen que nunca se anula;
- El grupo estructural de M puede ser reducido de $U(n)$ a $SU(n)$;
- M tiene una métrica Kähler con holonomía global contenida en $SU(n)$.

Si bien es cierto, existen estas y otras definiciones alternativas, nosotros hablaremos de variedad Calabi–Yau en el sentido de 1.3.16.

1.4. Fibrados vectoriales

Definición 1.4.1. *Sean B y E variedades diferenciables. Un fibrado vectorial sobre B dado por (E, B, F, π) está dado por:*

- I. *Una aplicación $\pi : E \rightarrow B$ sobreyectiva de clase C^∞ .*
- II. *Para cada $b \in B$, $\pi^{-1}(b) \cong F$, donde F es un espacio vectorial.*

1.4. FIBRADOS VECTORIALES

III. Para cada $p \in B$, existe una vecindad $U \subset B$ de p y un homeomorfismo

$$\varphi_U: U \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U)$$

tal que $v \mapsto \varphi(p, v)$ define un isomorfismo entre los espacios vectoriales $F \cong \mathbb{C}^n$ y $\pi^{-1}(p)$.

Se denomina *espacio total* a la variedad E . $\pi^{-1}(p)$ se le llama la *fibra* de E sobre p , y se denota por E_p , B es llamado el *espacio base* y π la *proyección*. Si B es conexa entonces n es constante y se llama el *rango del fibrado*. En el caso $n = 1$ decimos que E es un fibrado de línea. La condición III es llamada condición de *trivialidad local* y la podemos caracterizar en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xleftarrow{\varphi_U} & U \times F \\ \pi \downarrow & \swarrow pr_U & \\ U & & \end{array}$$

las aplicaciones φ_U son llamadas *trivializaciones locales*.

Definición 1.4.2. Para cualesquiera dos trivializaciones φ_U y φ_V , las aplicaciones

$$\begin{aligned} g_{UV}: U \cap V &\rightarrow \text{GL}(F) \\ b &\mapsto \{(\varphi_U^{-1} \circ \varphi_V)\}_{\{b\} \times F} \end{aligned}$$

se llaman aplicaciones de transición.

Definición 1.4.3. Un fibrado vectorial suave es un fibrado vectorial tal que E y B son variedades suaves, y $\pi: E \rightarrow B$ y las trivializaciones φ_U son aplicaciones suaves. Un fibrado vectorial complejo es un fibrado vectorial suave, tal que $F \cong \mathbb{C}^n$ y las aplicaciones de transición $g_{UV}(b) \in \text{GL}(\mathbb{C}^n) \subset \text{GL}(\mathbb{R}^{2n})$ para cada $b \in U \cap V$.

Definición 1.4.4. Un fibrado vectorial holomorfo es un fibrado vectorial complejo tal que E y B son variedades complejas, y $\pi: E \rightarrow B$ y las trivializaciones $\varphi_U: U \times \mathbb{C}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ son holomorfas.

Ejemplo 1.4.5. Dada una variedad M , el fibrado (co)tangente es un fibrado vectorial de rango $= \dim M$.

Lema 1.4.6 (Cociclo de Čech). Las aplicaciones de transición satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} g_{UV}(b) \cdot g_{VU}(b) &= \text{id} & \forall b \in U \cap V \\ g_{UV}(b) \cdot g_{VW}(b) \cdot g_{WU}(b) &= \text{id} & \forall b \in U \cap V \cap W. \end{aligned}$$

La segunda es llamada cociclo de Čech.

Proposición 1.4.7. Sea B un espacio topológico con cubrimiento \mathcal{U} . Dado un espacio vectorial real F , y aplicaciones $\{g_{UV}|U, V \in \mathcal{U}\}$ con $g_{UV}(b) \in \text{GL}(F)$ para cada dos abiertos $U, V \subset B$ y $b \in U \cap V$ que satisfacen las relaciones de lemma 1.4.6, entonces existe un único fibrado vectorial $\pi: E \rightarrow B$ con fibra F y aplicaciones de transición $\{g_{UV}|U, V \in \mathcal{U}\}$.

Si exigimos además que B sea una variedad compleja, $F \cong \mathbb{C}^n$, y las aplicaciones $g_{UV}(b) \in \text{GL}(\mathbb{C}^n)$ para cada dos abiertos $U, V \in \mathcal{U}$ y $b \in U \cap V$, entonces existe un único fibrado vectorial complejo con fibra F y aplicaciones de transición $\{g_{UV}|U, V \in \mathcal{U}\}$.

Si exigimos que las aplicaciones de transición sean holomorfas, entonces existe un único fibrado vectorial holomorfo con fibra F y aplicaciones de transición $\{g_{UV}|U, V \in \mathcal{U}\}$.

Dem. (esbozo). Defina

$$E := \left(\sum_U U \times F \right) / \sim$$

donde la relación de equivalencia está definida de la siguiente manera. Sea $(x, \lambda) \in U \times F$ e $(y, \mu) \in V \times F$. Entonces decimos que $(x, \lambda) \sim (y, \mu)$ si $x = y$ y existe una aplicación de transición g_{UV} tal que $\lambda = g_{UV}(x) \cdot \mu$. La proyección

$$\begin{aligned} \pi: E &\rightarrow B \\ [(x, \lambda)] &\mapsto x \end{aligned}$$

está bien definida y tiene fibra F . □

Observación 1.4.8. *Proposition 1.4.7 muestra que para definir un fibrado vectorial sobre una base B , sólo necesitamos saber cuál es el rango y cuáles son las aplicaciones de transición. Entonces el principio para la construcción de fibrados vectoriales es que las operaciones canónicas entre espacios vectoriales (independientes de la elección de base) definen también operaciones entre fibrados vectoriales.*

Ejemplo 1.4.9. *Sea $E \rightarrow B$ un fibrado vectorial con fibra F y aplicaciones de transición $\{g_{UV}\}$. Entonces definimos los siguientes fibrados vectoriales:*

- fibrado dual: $E^* \rightarrow B$ con fibra F^* por las aplicaciones de transición $h_{UV}(b) := (g_{UV}^{-1})^t(b)$;
- fibrado canónico: si consideramos la r -ésima potencia exterior del fibrado E , la cual denotamos por $\bigwedge^r E$. Tenemos que este es también un fibrado con fibra $\bigwedge^r F$ y aplicaciones de transición $h_{UV}(b) := \bigwedge^r g_{UV}(b)$. En el caso que $r = \dim F$, el fibrado vectorial de rango 1 es llamado fibrado canónico.

Ejemplo 1.4.10. *Sean $E_1 \rightarrow B$ y $E_2 \rightarrow B$ dos fibrados vectoriales sobre B con fibras F_1, F_2 y funciones de transición $\{f_{UV}\}, \{g_{UV}\}$, respectivamente. Entonces definimos los siguientes fibrados vectoriales:*

- suma de Whitney: $E \oplus E_2$ como el único fibrado vectorial con fibra $F_1 \oplus F_2$ y funciones de transición $\{h_{UV}\}$ donde

$$h_{UV}(b) := \begin{pmatrix} f_{UV}(b) & 0 \\ 0 & g_{UV}(b) \end{pmatrix};$$

- fibrado tensor: $E_1 \otimes E_2$ como el único fibrado vectorial con fibra $F_1 \otimes F_2$ y funciones de transición $\{h_{UV}\}$ donde $h_{UV}(b) := f_{UV}(b) \otimes g_{UV}(b)$

Ejemplo 1.4.11. *La variedad \mathbb{P}^1 con funciones de transición z^{-n} definen el fibrado de rango 1 denotado por $\mathcal{O}(n)$. Es claro de la definición que*

- $(\mathcal{O}(1))^* = \mathcal{O}(-1)$,
- $\mathcal{O}(m) \otimes \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(m+n)$, y
- $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(1)^{\otimes n}$.

Lema 1.4.12. *Sea E un fibrado vectorial holomorfo de rango r sobre \mathbb{P}^1 . Entonces existen enteros $a_1 \leq \dots \leq a_r$ tales que $E \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(a_r)$.*

Observación 1.4.13. *El análogo del lema 1.4.12 para \mathbb{P}^n , $n > 1$, es completamente falso.*

Definición 1.4.14. *Dada $f: M \rightarrow N$ y un fibrado $\pi: E \rightarrow N$, se define el pullback de E por f como el único fibrado que completa el diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \longrightarrow & E \\ f^*\pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

donde $f^*E := \{(m, e) \in M \times E \mid f(m) = \pi(e)\}$ y $f^*\pi = (pr_M) \mid_{f^*E}$, donde pr_M es la proyección en la primera coordenada.

Ejemplo 1.4.15 (Suma de Whitney). *Dados los fibrados vectoriales $\pi_1: E_1 \rightarrow M$ y $\pi_2: E_2 \rightarrow M$, defina la suma de Whitney $E_1 \oplus E_2$ como el pullback del fibrado producto $\pi_1 \times \pi_2$ por la aplicación diagonal $\Delta: M \rightarrow M \times M$:*

$$\begin{array}{ccc} E_1 \oplus E_2 & \longrightarrow & E_1 \times E_2 \\ \Delta^*(\pi_1 \times \pi_2) \downarrow & & \downarrow \pi_1 \times \pi_2 \\ M & \xrightarrow{\Delta} & M \times M \end{array}$$

Definición 1.4.16. *Sea $\pi: E \rightarrow B$ un fibrado vectorial (holomorfo). Una sección de E es una aplicación $s: M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = id$ (ver fig. 1.2).*

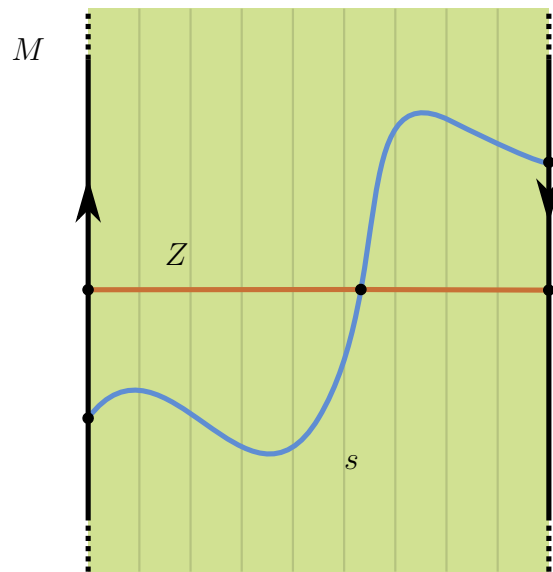


Figura 1.2: El fibrado vectorial de la banda de Möbius M sobre el círculo Z . El círculo es encajado en M como la sección cero del fibrado. En el caso de la banda de Möbius, cada sección s del fibrado interseca a la sección cero en un número impar de puntos.

Como en un fibrado vectorial, las fibras $\pi^{-1}(p)$ corresponden a espacios vectoriales de dimensión finita, siempre existe una sección cero $s: B \rightarrow E$ definida en cada trivialización $\varphi: U \times F \rightarrow \pi^{-1}(U)$ como

$$\begin{aligned} s|_U: U &\rightarrow \pi^{-1}(U) \\ b &\mapsto \varphi(b, 0). \end{aligned}$$

Esta sección está bien definida pues las funciones de transición son lineales y llevan el cero en el cero.

Definición 1.4.17. El fibrado tangente holomorfo de una variedad compleja suave M , de dimensión n , es el fibrado vectorial holomorfo TM de rango n dado por las funciones de transición $\psi_{ij}(z) = J(\varphi_{ij})(\varphi_j(z))$. El fibrado cotangente holomorfo, denotado T^*M es el dual de TM .

Capítulo 2

Teoría general de deformaciones

2.1. Familia diferenciable

2.1.1. Introducción

Recordemos que una variedad diferenciable compleja $M = M^n$ puede considerarse como el pegado de los dominios $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_j, \dots$ en \mathbb{C}^n , es decir, $M = \bigcup_j \mathcal{U}_j$. Si escribimos como f_{jk} las transformaciones de coordenadas, tenemos que

$$f_{jk} : z_k \longrightarrow z_j = (z_j^1, \dots, z_j^n) = f_{jk}(z_k),$$

aquí f_{jk} es una aplicación biholomorfa del conjunto abierto $\mathcal{U}_{k,j} \subset \mathcal{U}_k$ en $\mathcal{U}_{j,k} \subset \mathcal{U}_j$, y $z_j \in \mathcal{U}_j$ y $z_k \in \mathcal{U}_k$ son el mismo punto de M si $z_j = f_{jk}(z_k)$. Escrita en detalle, $z_j = f_{jk}(z_k)$ es de la forma:

$$z_j^\alpha = f_{jk}^\alpha(z_k) = f_{jk}^\alpha(z_k^1, \dots, z_k^n), \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

En adelante, escribiremos U_j en vez de \mathcal{U}_j por simplicidad, esto es, $U_j = \mathcal{U}_j$. Por teorema 2,1 [Ko], pág. 33, podemos asumir que $\mathfrak{U} = \{U_j | j = 1, 2, \dots\}$ es una cubrimiento abierto localmente finito de M , y que cada U_j es un polidisco del tipo:

$$U_j = \{z_j \in \mathbb{C}^n | |z_j^1| < r_j^1, \dots, |z_j^n| < r_j^n\}. \quad (2.2)$$

Reemplazando z_j^α por z_j^α / r_j^α , podemos asumir que U_j es de radio 1:

$$U_j = \{z_j \in \mathbb{C}^n \mid |z_j^1| < 1, \dots, |z_j^n| < 1\}. \quad (2.3)$$

Más aún, si M es compacta, $\mathfrak{U} = \{U_j\}$ puede considerarse un cubrimiento abierto finito. Así, una variedad compleja compacta, es obtenido pegando un número finito de polidiscos $U_1, \dots, U_j, \dots, U_l$ identificando $z_k \in U_k$ y $z_j = f_{jk}(z_k) \in U_j : M = \bigcup_{j=1}^l U_j$. Intuitivamente, una *deformación* de M se puede entender como el pegado de los mismos polidiscos U_j , vía una identificación diferente, esto es, variando las funciones de transición asociadas a la variedad. En otras palabras, reemplazando $f_{jk}^\alpha(z_k)$ en (2.1), por las funciones

$$f_{jk}^\alpha(z_k, t) = f_{jk}^\alpha(z_k, t_1, \dots, t_m), \quad f_{jk}^\alpha(z_k, 0) = f_{jk}^\alpha(z_k),$$

de z_k y el parámetro $t = (t_1, \dots, t_m)$, obtenemos deformaciones M_t de $M = M_0$ pegando los polidiscos U_1, \dots, U_l , identificando $z_k \in U_k$ con $z_j = f_{jk}(z_k, t) \in U_j$. En un principio, esta idea de deformación fue considerada como la idea fundamental de la teoría de deformaciones de estructuras complejas por Kodaira y Spencer. Sin embargo, esta idea causó cierto escepticismo en los autores, pues la estructura compleja de la variedad $M_t = \bigcup_j U_j$, definida mediante la identificación $z_j = f_{jk}(z_k, t)$ podría no variar con respecto a t .

Veamos un ejemplo de esto, sea $\zeta_j = (\zeta_j^1, \dots, \zeta_j^n)$ las coordenadas locales de M , y elijamos funciones holomorfas $z_j^\alpha = z_j^\alpha(\zeta_j, t)$, $\alpha = 1, \dots, n$, de $(n+1)$ variables $(\zeta_j, t) = (\zeta_j^1, \dots, \zeta_j^n, t)$, definidas en $\zeta_j \in U_j$, $|t| < 1$, tal que la aplicación

$$z_j : \zeta_j \longrightarrow z_j(\zeta_j, t) = (z_j^1(\zeta_j, t), \dots, z_j^n(\zeta_j, t))$$

nos da nuevas coordenadas locales de M sobre U_j . Sea

$$z_k \longrightarrow z_j = f_{jk}(z_k, t)$$

la transformación de coordenadas. Entonces, como

$$z_j^\alpha(\zeta_j, t) = f_{jk}^\alpha(z_k(\zeta_k, t), t), \quad \zeta_j = f_{jk}(\zeta_k),$$

$f_{jk}^\alpha(z_k, t)$ en general depende de t . Pero como $\{z_1, \dots, z_j, \dots\}$ es un sistema de coordenadas locales complejas de la variedad compleja dada M , $M_t = \bigcup_j U_j$ obtenida vía la identificación $z_j = f_{jk}(z_k, t)$ es solo M , por lo tanto M_t no varía con respecto a t . Así, en apariencia M_t depende de t , pero en realidad no es así.

De este modo, al no contar con un criterio que permita determinar cuándo una deformación M_t depende del parámetro t , la idea antes mencionada, no es tan eficiente como se desea. La forma en que se modifican o perturban las funciones de transición no es antojadiza, producto de esto, veremos más tarde cómo las deformaciones de la estructura compleja dada por las funciones de transición de la variedad se relacionan con el primer y segundo grupo de cohomología de la variedad.

No obstante lo anterior, A. Frölicher en conjunto con A. Nijenhuis, siguiendo un método de geometría diferencial, mostraron la rigidez de \mathbb{P}^n , lo cual dió un nuevo impulso a la teoría de deformaciones iniciada por K. Kodaira y D. C. Spencer.

2.1.2. Familia diferenciable

En un principio, no era claro el hecho de que el parámetro que aparecía en la definición de una variedad compleja es en general un complejo, y que por lo tanto, como una familia de variedades complejas M_t dependiendo del parámetro $t = (t_1, \dots, t_m)$, es más natural, considerar una familia analítica compleja, en el sentido de ([Ko], Def. 2.8, pág. 59). De esta forma, consideremos el caso en que $f_{jk}^\alpha(z_k, t) = f_{jk}^\alpha(z_k, t_1, \dots, t_m)$ son funciones C^∞ de parámetros reales t_1, \dots, t_m . Para esto, se introduce el concepto de una familia diferenciable de variedades complejas compactas.

La definición de una familia diferenciable de variedades complejas compactas es el análogo C^∞ de la definición de familia analítica compleja $\{M_t | t \in B\} = (\mathcal{M}, B, \bar{\omega})$ dada en ([Ko], sección 2.3 (a)). Veamos a continuación, una definición más precisa.

Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable, B un dominio en \mathbb{R}^n y $\bar{\omega}$ una aplicación C^∞ de \mathcal{M} sobre B . Supongamos que el rango que la matriz Jacobiana de $\bar{\omega}$ es igual a m en todo punto de \mathcal{M} . Entonces podemos elegir un sistema de coordenadas locales $C^\infty \{x_1, \dots, x_j, \dots\}$, $x_j : p \rightarrow x_j(p)$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. $x_j(p) = (x_j^1(p), \dots, x_j^k(p), t_1, \dots, t_m), (t_1, \dots, t_m) = \bar{\omega}(p)$,
2. $\{\mathcal{U}_j\}$ es un cubrimiento abierto localmente finito de \mathcal{M} , donde \mathcal{U}_j es el dominio de x_j .

Por lo tanto, para cada punto $t \in B$, si $\bar{\omega}^{-1}(t)$ es conexa, $\bar{\omega}^{-1}(t)$ es una variedad

diferenciable, cuyo sistema de coordenadas locales C^∞ está dado por

$$\{p \rightarrow (x_j^1(p), \dots, x_j^k(p)) \mid \mathcal{U}_j \cap \bar{\omega}^{-1}(t) \neq \emptyset\}.$$

Más aún, si $\bar{\omega}^{-1}(t)$ es compacta, tomando cada $t^0 \in B$, un multiintervalo I tal que $t^0 \in I \subset [I] \subset B$, vemos que por ([Ko], Teo. 2.4, pág 64), $\bar{\omega}^{-1}(I) = \bar{\omega}^{-1}(t^0) \times I$.

Definición 2.1.1. Sea $M_t = M_t^n$ una variedad compleja compacta para cada punto t de un dominio $B \subset \mathbb{R}^m$. Entonces $\{M_t \mid t \in B\}$ es llamada una familia diferenciable de variedades complejas compactas si hay una variedad diferenciable \mathcal{M} y una aplicación C^∞ $\bar{\omega}$ de \mathcal{M} sobre B , satisfaciendo las siguientes condiciones:

- (I) El rango de la matriz Jacobiana de $\bar{\omega}$ es igual a m en todo punto de \mathcal{M} .
- (II) Para $t \in B$, $\bar{\omega}^{-1}(t)$ es un subconjunto conexo de \mathcal{M} .
- (III) $\bar{\omega}^{-1}(t) = M_t$.
- (IV) Existe un cubrimiento abierto localmente finito $\{\mathcal{U}_j \mid j = 1, 2, \dots\}$ de \mathcal{M} y funciones C^∞ de valor complejo $z_j^1(p), \dots, z_j^n(p)$, $j = 1, 2, \dots$, definida sobre \mathcal{U}_j tal que, para cada t

$$\{p \rightarrow (z_j^1(p), \dots, z_j^n(p)) \mid \mathcal{U}_j \cap \bar{\omega}^{-1}(t) \neq \emptyset\} \quad (2.4)$$

forma un sistema de coordenadas locales complejas de M_t .

Por (I) y (II), cada $\bar{\omega}^{-1}(t)$ es una variedad diferenciable compacta. La condición (III) significa que $\bar{\omega}^{-1}(t)$ es la variedad diferenciable subyacente de M_t . Decimos que $t \in B$ es el parámetro de la familia diferenciable $\{M_t \mid t \in B\}$ y que B es el espacio parámetro o espacio base.

Denotamos la familia diferenciable $\{M_t \mid t \in B\}$ por $(\mathcal{M}, B, \bar{\omega})$ o simplemente por \mathcal{M} . Si escribimos $z_j^\alpha(p) = x_j^{2\alpha-1}(p) + ix_j^{2\alpha}(p)$, $\alpha = 1, \dots, n$, para separar en sus partes real e imaginaria y colocamos

$$x_j(p) = (x_j^1(p), x_j^2(p), \dots, x_j^{2n}(p), t_1, \dots, t_m), \quad (t_1, \dots, t_m) = \bar{\omega}(p),$$

entonces por la condición (IV), $\{x_j \mid j = 1, 2, \dots\}$, $x_j : p \rightarrow x_j(p)$ forma un sistema de coordenadas locales C^∞ de la variedad diferenciable \mathcal{M} . Además, x_j aplica \mathcal{U}_j diferenciablemente en $\mathbb{R}^{2n} \times B$. Introduciendo coordenadas complejas en \mathbb{R}^{2n} por

$$(z^1, \dots, z^n) = (x^1 + ix^2, \dots, x^{2n-1} + ix^{2n}),$$

2.1. FAMILIA DIFERENCIABLE

consideramos a \mathbb{R}^{2n} como \mathbb{C}^n , y x_j como una aplicación C^∞ de \mathcal{U}_j en $\mathbb{C}^n \times B$:

$$x_j : p \rightarrow x_j(p) = (z_j^1(p), \dots, z_j^n(p), t_1, \dots, t_m), \quad (t_1, \dots, t_m) = \bar{\omega}(p). \quad (2.5)$$

Notemos que, al considerar x_j como una aplicación de \mathcal{U}_j en $\mathbb{C}^n \times B$, entonces $\{x_j | j = 1, 2, \dots\}$ es llamado un sistema de coordenadas locales de la variedad diferenciable \mathcal{M} . Como la transformación de coordenadas $x_k(p) \rightarrow x_j(p)$ para $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k \neq \emptyset$ no afecta a t_1, \dots, t_m se escribe en la forma

$$\begin{aligned} (z_k^1(p), \dots, z_k^n(p), t) &\rightarrow (z_j^1(p), \dots, z_j^n(p)) \\ &= (f_{jk}^1(z_k(p), t), \dots, f_{jk}^n(z_k(p), t), t) \end{aligned}$$

donde $t = \bar{\omega}(p)$.

Como por (IV), para un t fijo, $p \rightarrow (z_j^1(p), \dots, z_j^n(p))$ nos da las coordenadas locales complejas de la variedad diferenciable compleja M_t , la transformación de coordenadas sobre $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k \cap \bar{\omega}^{-1}(t) \neq \emptyset$

$$(z_k^1(p), \dots, z_k^n(p)) \rightarrow (z_j^1(p), \dots, z_j^n(p))$$

es biholomorfa. Por lo tanto, las funciones C^∞

$$f_{jk}^\alpha(z_k, t) = f_{jk}^\alpha(z_k^1, \dots, z_k^n, t_1, \dots, t_m), \quad \alpha = 1, \dots, n,$$

de $z_k^1, \dots, z_k^n, t_1, \dots, t_m$ son holomorfas en z_k^1, \dots, z_k^n .

Hay infinitas elecciones de sistemas de coordenadas locales de una variedad diferenciable \mathcal{M} dada. Dado un cubrimiento abierto localmente finito $\{\mathcal{W}_\lambda | \lambda = 1, 2, \dots\}$, y un difeomorfismo

$$u_\lambda : p \rightarrow u_\lambda(p) = (w_\lambda^1(p), \dots, w_\lambda^n(p), t_1, \dots, t_m)$$

de \mathcal{W}_λ sobre un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^n \times B$ para λ , $\{u_1, \dots, u_\lambda, \dots\}$ forma un sistema de coordenadas locales de la variedad diferenciable \mathcal{M} si y sólo si, para cada $t \in B$, $w_{\lambda_j}^\alpha(p)$, con, $p \in M_t \cap \mathcal{W}_\lambda$ es una función holomorfa sobre M_t . Así, si $\{u_\lambda\}$ es un sistema de coordenadas locales de la familia \mathcal{M} , colocando

$$w_\lambda^\alpha(p) = g_{\lambda_j}^\alpha(z_j^1(p), \dots, z_j^n(p), t_1, \dots, t_m), \quad (t_1, \dots, t_m) = \bar{\omega}(p),$$

2.1. FAMILIA DIFERENCIABLE

sobre cada $\mathcal{W}_\lambda \cap \mathcal{U}_j$, vemos que las funciones C^∞

$$g_{\lambda_j}^\alpha(z_j^1, \dots, z_j^n, t_1, \dots, t_m), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad (2.6)$$

de $z_j^1, \dots, z_j^n, t_1, \dots, t_m$, son holomorfas en z_j^1, \dots, z_j^n .

Dada una familia diferenciable $\{\mathcal{M}, B, \bar{\omega}\}$, por ([Ko], Thm. 2.1, pág.), podemos escoger un sistema de coordenadas locales $\{x_j\}, x_j : p \rightarrow x_j(p)$,

$$x_j(p) = (z_j^1, \dots, z_j^n, t_1, \dots, t_m), \quad (t_1, \dots, t_m) = \bar{\omega}(p)$$

tal que para cada j , tenemos

$$x_j(\mathcal{U}_j) = U_j \times I_j, \quad (2.7)$$

donde $U_j = \{z_j \in \mathbb{C}^n \mid |z_j^\alpha| < r_j^\alpha, \alpha = 1, \dots, n\}$, e $I_j = \{t \in B \mid a_{jk} < t_k < b_{jk}, k = 1, \dots, m\}$. Así, identificando $p \in \mathcal{U}_j$ con $x_j(p)$, consideramos $\mathcal{M} = \bigcup_j U_j \times I_j$. Desde este punto de vista, $(z_j, t) \in U_j \times I_j$ y $(z_k, t) \in U_k \times I_k$ son el mismo punto sobre \mathcal{M} si $z_j = f_{jk}(z_k, t)$. En términos de coordenadas locales (z_j, t) , $\bar{\omega}$ se escribe como

$$\bar{\omega} : (z_j^1, \dots, z_j^n, t) \rightarrow t.$$

En consecuencia, $\bar{\omega}(U_j \times I_j) = I_j$. Así $M_t = \bar{\omega}^{-1}(t)$ es la unión de todos los $U_j \times t$ con $t \in I_j$. Identificando $U_j \times t$ con U_j , podemos considerar

$$M_t = \bigcup_{t \in I_j} U_j.$$

Entonces $z_j \in U_j$ y $z_k \in U_k$ son el mismo punto sobre M_t si $z_j = f_{jk}(z_k, t)$. Así, M_t es variedad compacta obtenida al pegar los polidiscos U_j con $t \in I_j$, identificando $z_k \in U_k$ con $z_j = f_{jk}(z_k, t) \in U_j$.

Como $\{\mathcal{U}_j \mid j = 1, 2, \dots\}$ es localmente finito, para cualquier $t^0 \in B$ fijo, hay sólo una cantidad finita de \mathcal{U}_j tales que $\mathcal{U}_j \cap M_{t^0} \neq \emptyset$. Por simplicidad, sea $t^0 = 0$, y asumamos que $\mathcal{U}_j \cap M_0 \neq \emptyset$ para $j = 1, \dots, l$, y que $\mathcal{U}_j \cap M_0 = \emptyset$ para $j \geq l + 1$.

Entonces

$$M_0 \subset \bigcup_{j=1}^l U_j \times I_j.$$

Haciendo $I = \bigcap_{j=1}^l I_j$, y $M_I = \bar{\omega}^{-1}(I)$, tenemos

$$M_I = \bar{\omega}^{-1}(I) = \bigcup_{j=1}^l U_j \times I. \quad (2.8)$$

Por supuesto, I es un multiintervalo abierto con $0 \in I \subset B$. Por o tanto, para cada $t \in I$, $M_t = \bigcup_{j=1}^l U_j$ es un variedad compleja, obtenida al pegar U_1, \dots, U_l identificando $z_k \in U_k$ con $z_j = f_{jk}(z_k, t) \in U_j$.

Así, considerando una familia diferenciable $(\mathcal{M}, B, \bar{\omega})$, podemos obtener una idea un poco más clara de la deformación de variedades complejas compactas. Es decir, dada una variedad compleja compacta M , si hay una familia diferenciable $(\mathcal{M}, B, \bar{\omega})$ con $\bar{\omega}^{-1}(t^0) = M$ para algún $t^0 \in B$, cada $M_t = \bar{\omega}^{-1}(t)$ es llamada una *deformación* de M . Por ([Ko], Thm. 2.4), si M_t es una deformación de M , M_t y M son difeomorfas. Restringiendo el dominio del parámetro t a un multiintervalo I suficientemente pequeño, vemos que $M_t = \bar{\omega}^{-1}(t) = \bigcup_{j=1}^l U_j$ para $t \in I$, donde cada U_j es una polidisco, es independiente de t y sólo las transformaciones de coordenadas $z_k \rightarrow z_j = f_{jk}(z_k, t)$ dependen de t . De esta forma, sólo la manera de pegar los U_1, \dots, U_l depende de t . cada punto de M_t pertenece a unos de los U_j 's. Consecuentemente, la estructura compleja, de una vecindad suficientemente pequeña de cada punto de M_t no varía bajo deformación. Esta situación, es muy distinta a la que ocurre cuando se deforma un cuerpo elástico, pues en ese caso, toda porción del cuerpo, por muy pequeña que sea, se ve distorsionada por una deformación. Sea p un punto en $M_t = \bigcup_{j=1}^l U_j$, supongamos que $p \in U_i \cap U_j \cap U_k$. Entonces, haciendo $z_i = z_i(p)$, $z_j = z_j(p)$, $z_k = z_k(p)$, tenemos que

$$z_i = f_{ij}(z_j, t) = f_{ik}(z_k, t), \quad z_j = f_{jk}(z_k, t).$$

Por lo tanto, sobre $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k \neq \emptyset$, obtenemos la siguiente igualdad, que será de importancia más adelante.

$$f_{ik}(z_k, t) = f_{ij}(f_{jk}(z_k, t), t). \quad (2.9)$$

2.2. Deformación infinitesimal

2.2.1. Deformación infinitesimal

Dada una familia diferenciable $(\mathcal{M}, B, \bar{\omega})$ de variedades complejas compactas es natural preguntarse ¿cómo saber si la estructura compleja de $M_t = \bar{\omega}^{-1}(t)$

depende en realidad de t ? Primero vamos a considerar el problema para el caso $m = 1$, esto es, el caso donde B es un intervalo abierto de \mathbb{R} . Primero, consideremos la siguiente idea: dada una función diferenciable $f(t)$ de variable real, derivando con respecto a t , podemos saber si ella depende o no de t . Luego, es natural pensar en tener una técnica de este tipo para saber si una deformación M_t de una variedad M es o no independiente de t . Para esto, la diferenciación la haremos sobre (2.9). Notemos que (2.9) escrita en detalle, es de la forma

$$f_{ik}^\alpha(z_k, t) = f_{ij}^\alpha(f_{jk}^1(z_k, t), \dots, f_{jk}^n(z_k, t), t), \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

Haciendo $z_j^\beta = f_{jk}^\beta(z_k, t)$, obtenemos

$$\frac{\partial f_{jk}^\alpha(z_k, t)}{\partial t} = \frac{\partial f_{ij}^\alpha(z_j, t)}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial f_{ij}^\alpha(z_j, t)}{\partial z_j^\beta} \frac{\partial f_{jk}^\beta(z_k, t)}{\partial t}.$$

y escribiendo $z_i^\beta = f_{ij}^\beta(z_j, t)$, tenemos

$$\frac{\partial f_{jk}^\alpha(z_k, t)}{\partial t} = \frac{\partial f_{ij}^\alpha(z_j, t)}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial z_i^\alpha}{\partial z_j^\beta} \frac{\partial f_{jk}^\beta(z_k, t)}{\partial t}.$$

Usando campos de vectores holomorfos, podemos reescribir estas igualdades en la siguiente forma intrínseca:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f_{ik}^\alpha(z_k, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f_{ij}^\alpha(z_j, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} \\ &+ \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial f_{ik}^\beta(z_k, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z_i^\beta}, \end{aligned}$$

donde usamos la igualdad

$$\frac{\partial}{\partial z_j^\beta} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial z_i^\alpha}{\partial z_j^\beta} \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}$$

Introduciendo el campo de vectores

$$\theta_{jk}(t) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f_{jk}^\alpha(z_k, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}, \quad z_k = f_{kj}(z_j, t), \quad (2.10)$$

podemos escribir la ecuación anterior como:

$$\theta_{ik}(t) = \theta_{ij}(t) + \theta_{jk}(t). \quad (2.11)$$

De esta forma, sobre cada conjunto abierto $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ de $M_t = \bigcup_j U_j$, está definido un campo de vectores holomorfo $\theta_{jk}(t)$, y la igualdad (2.11), se tiene sobre $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$. Observemos que (2.11) puede escribirse también como

$$\theta_{ij}(t) - \theta_{ik}(t) + \theta_{jk}(t) = 0. \quad (2.12)$$

Haciendo $i = k$, como $f_{kk}^\alpha = z_k^\alpha$, tenemos que $\theta_{kk}(t) = 0$. A consecuencia de (2.11), se tiene que

$$\theta_{kj}(t) = -\theta_{jk}(t). \quad (2.13)$$

De (2.12) y (2.13), vemos que $\{\theta_{jk}(t)\}$ es un 1-cociclo. Es decir, sea Θ_t el haz de gérmenes de campos de vectores holomorfos sobre M_t . Entonces

$$\theta_{jk}(t) \in \Gamma(U_j \cap U_k, \Theta_t), \quad \theta_{kj}(t) = -\theta_{jk}(t).$$

De (2.12), $\{\theta_{jk}(t)\}$ es un 1-cociclo con respecto al cubrimiento abierto $\mathfrak{U}_t = \{U_j\}$ sobre $M_t = \bigcup_j U_j$: $\{\theta_{jk}(t)\} \in Z^1(\mathfrak{U}_t, \Theta_t)$. Denotamos por $\theta(t)$ el elemento del grupo de cohomología $H^1(M_t, \Theta_t)$ determinado por el 1-cociclo $\{\theta_{jk}(t)\}$. Por ([Ko], Cor. Thm 3.4, pág. 121), $H^1(\mathfrak{U}_t, \Theta_t)$ es un subgrupo de $H^1(M_t, \Theta_t)$:

$$H^1(\mathfrak{U}_t, \Theta_t) \subset H^1(M_t, \Theta_t). \quad (2.14)$$

Así, $\theta(t)$ es considerado como un elemento de $H^1(M_t, \Theta_t)$. Entonces, $\theta(t)$ es la clase en cohomología de $\{\theta_{jk}(t)\}$. Como (2.10) se obtiene por diferenciación de $f_{jk}^\alpha(z_k, t)$ la cual define la estructura compleja de M_t , es esperable, que $\theta(t)$ represente en algún sentido u otro la “derivada” de la estructura compleja de M_t respecto a t . Por lo tanto, $\theta(t)$ es llamada la *deformación infinitesimal* de M_t y se considerada como la *derivada de la estructura compleja* de M_t , con respecto a t . De ahí la notación

$$\frac{dM_t}{dt} = \theta(t). \quad (2.15)$$

Esta definición de $\theta(t)$ como deformación infinitesimal no depende del sistema de coordenadas locales escogido, ([Ko], pág. 190).

2.2.2. Familia diferenciable trivial

Producto de lo anterior, surge la cuestión de saber si se justifica el hecho de considerar que una deformación infinitesimal $\theta(t)$ representa la derivada de la estructura compleja de M_t con respecto a t .

Si $\theta(t)$ es la derivada de la estructura compleja de M_t con respecto a t , entonces debe tenerse que $\theta(t) = 0$ si M_t no depende de t . Para tal efecto, vamos a necesitar una definición precisa de lo que significa que M_t no dependa de t . Veamos primero la definición de equivalencia de familias diferenciables.

Definición 2.2.1. *Supongamos que $(\mathcal{M}, B, \bar{\omega})$ y (\mathcal{N}, B, π) son dos familias diferenciables, con el mismo espacio base $B \subset \mathbb{R}^n$. \mathcal{M} y \mathcal{N} se dicen equivalentes, si existe un difeomorfismo Φ de \mathcal{M} en \mathcal{N} , tal que, para $t \in B$, Φ aplica $M_t = \bar{\omega}^{-1}(t)$ biholomórficamente sobre $N_t = \pi^{-1}(t)$.*

Definición 2.2.2. *Una familia diferenciable $(\mathcal{M}, B, \bar{\omega})$ se dice trivial, si es equivalente a $(M \times B, B, \pi)$ donde $M = \bar{\omega}^{-1}(t^0)$, $t^0 \in B$ y π es la proyección de $(M \times B)$ sobre B .*

Definición 2.2.3. *Una familia $(\mathcal{M}, B, \bar{\omega})$ es llamada localmente trivial, si para cada $t \in B$, hay un subdominio I con $t \in I \subset B$ tal que $(\mathcal{M}_I, I, \bar{\omega})$ es trivial.*

Decir que la estructura compleja de $M_t = \bar{\omega}^{-1}(t)$ de la familia diferenciable $(\mathcal{M}, B, \bar{\omega})$ no varía con respecto a t , significa que

$$(\mathcal{M}, B, \bar{\omega})$$

es localmente trivial. Si $(\mathcal{M}, B, \bar{\omega})$ es localmente trivial, cada $M_t = \bar{\omega}^{-1}(t)$ es biholomórficamente equivalente a una $M = \bar{\omega}^{-1}(t^0)$ fija.

Teorema 2.2.4. *Si la dimensión de $H^1(M_t, \Theta_t)$ es independiente de $t \in I \subset B$, entonces podemos escoger una 0-cocadena $\{\theta_j(t)\}$ con $\delta\{\theta_j(t)\} = \{\theta_{jk}(t)\}$, tal que cada $\theta_j^\alpha(z_j, t)$ es una función C^∞ de z_j^1, \dots, z_j^n, t donde $\theta_j(t) = \sum_{\alpha=1}^n \theta_j^\alpha(z_j, t)(\partial/\partial z_j^\alpha)$*

Demostración. [Ko, Sect. 7.2(b)] □

Teorema 2.2.5. *Sea $M_t = \bar{\omega}^{-1}(t)$. Si $\dim H^1(M_t, \Theta_t)$ es independiente de t , y $\theta(t) = dM_t/dt \equiv 0$, entonces $(\mathcal{M}, B, \bar{\omega})$ es localmente trivial.*

En síntesis, si $\dim H^1(M_t, \Theta_t)$ es constante y $\theta(t) \equiv 0$, entonces la estructura compleja de M_t no varía con respecto a t . De este modo, es razonable considerar $\theta(t)$ como la derivada de la estructura compleja de M_t con respecto a t .

Hasta ahora, hemos considerado B como un intervalo abierto en \mathbb{R} , sin embargo, la noción de deformación infinitesimal es fácilmente extendible a un dominio cualquiera en \mathbb{R}^n . Supongamos que $(\mathcal{M}, B, \bar{\omega})$ es una familia diferenciable de variedades complejas compactas, donde B es un dominio en \mathbb{R}^n . Sea $\{x_1, \dots, x_j, \dots\}$, $x_j = (z_j, t) = (z_j^1, \dots, z_j^n, t_1, \dots, t_m)$ un sistema de coordenadas locales sobre \mathcal{M} , y \mathcal{U}_j el dominio de x_j . Supongamos que sobre $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k \neq \emptyset$, tenemos

$$z_j^\alpha = f_{jk}^\alpha(z_j^1, \dots, z_j^n, t_1, \dots, t_m), \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

Como es usual, identificando un punto de \mathcal{M} con sus coordenadas locales, podemos considerar que $\mathcal{U}_j = x_j(\mathcal{U}_j) \subset \mathbb{C}^n \times B$, y que $\mathcal{M} = \bigcup_j \mathcal{U}_j$ se obtiene del pegado de los dominios $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k, \dots$ de $\mathbb{C}^n \times B$ al identificar (z_j, t) y (z_k, t) si $z_j = f_{jk}(z_k, t)$. $\mathfrak{U}_t = \{U_{jt} | U_{jt} = \mathcal{U}_j \cap M_t \neq \emptyset\}$ forma un cubrimiento abierto finito de $M_t = \bar{\omega}^{-1}(t)$.

El espacio tangente $T_t(B)$ de B en t , consiste en todos los vectores tangentes $\partial/\partial t = \sum_{\lambda=1}^m c_\lambda \partial/\partial t_\lambda$, $c_\lambda \in \mathbb{R}$. Para $\partial/\partial t \in T_t(B)$, hacemos

$$\theta_{jk}(t) = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial f_{jk}^\alpha(z_k, t_1, \dots, t_m)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}, \quad z_k = f_{kj}(z_j, t). \quad (2.16)$$

Al igual que en el caso $m = 1$, tenemos que $\{\theta_{jk}(t)\} \in Z^1(\mathfrak{U}_t, \Theta_t)$. La clase en cohomología $\theta(t) \in H^1(M_t, \Theta_t)$ del 1-cociclo $\{\theta_{jk}(t)\}$ es llamada la *deformación infinitesimal* de M_t a lo largo de $\partial/\partial t$ y es denotada por $\partial M_t/\partial t$: $\partial M_t/\partial t = \theta(t)$. La deformación infinitesimal $\partial M_t/\partial t$ es independiente de la elección del sistema de coordenadas. Definimos la aplicación ρ_t por

$$\rho_t: \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \rho_t \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\partial M_t}{\partial t}. \quad (2.17)$$

tal que ρ_t es una aplicación \mathbb{R} -lineal de $T_t(B)$ en $H^1(M_t, \Theta_t)$.

Si $\rho_t(\partial/\partial t) = 0$ para cualquier $\partial/\partial t \in T_t(B)$, ρ_t es llamada la aplicación cero y es denotada por $\rho_t = 0$. Si $(\mathcal{M}, B, \bar{\omega})$ es trivial, como en el caso $m = 1$, se tiene que $\rho_t \equiv 0$, usando el hecho que $\theta(t)$ es independiente del sistema de coordenadas escogido.

Teorema 2.2.6. *Si $\dim H^1(M_t, \Theta_t)$ es independiente de t , y $\rho_t \equiv 0$, entonces $(\mathcal{M}, B, \bar{\omega})$ es localmente trivial.*

Demostración. [Ko, pág. 199]. □

Teorema 2.2.7. *Para una familia diferenciable $(\mathcal{M}, B, \bar{\omega})$, $\dim H^1(M_t, \Theta_t)$ es una función semicontinua superior de t , donde $M_t = \bar{\omega}^{-1}(t)$.*

Semicontinuidad superior en el sentido que, para cada $s \in B$,

$$\dim H^1(M_t, \Theta_t) \leq \dim H^1(M_s, \Theta_s), \quad \text{si } |t - s| < \varepsilon$$

con ε suficientemente pequeño.

Demostración. [Ko, Sect. 7.2(b)] □

Teorema 2.2.8. *Sea $(\mathcal{M}, B, \bar{\omega})$ una familia diferenciable de variedades diferenciables complejas compactas, donde B es un dominio en \mathbb{R}^m y $0 \in B$. Si $H^1(M_0, \Theta_0) = 0$, con $M_0 = \bar{\omega}^{-1}(0)$, entonces para un intervalo abierto I , suficientemente pequeño con $0 \in I \subset B$, $(\mathcal{M}_I, I, \bar{\omega})$ es trivial.*

Una variedad compleja compacta M es llamada *rígida*, si para cualquier familia diferenciable $(\mathcal{M}, B, \bar{\omega})$ con $0 \in B$ y $M = \bar{\omega}^{-1}(0)$, existe un intervalo abierto I con $0 \in I \subset B$ tal que $(\mathcal{M}_I, I, \bar{\omega})$ es trivial. Si $(\mathcal{M}_I, I, \bar{\omega})$ es trivial, $M_t = \bar{\omega}^{-1}(t)$ tiene la misma estructura diferencial que $M = M_0 = \bar{\omega}^{-1}(0)$ para $t \in I$. Así, si M es rígida, la estructura compleja de $M = M_0$ es invariante bajo cualquier perturbación de t . Por 2,2,8, una variedad compleja compacta es rígida si $H^1(M, \Theta) = 0$, donde Θ es el haz de gérmenes de campos de vectores holomorfos sobre M .

2.3. Obstrucción

Sea $(\mathcal{M}, B, \bar{\omega})$ una familia analítica compleja de variedades complejas compactas, donde B es un dominio de \mathbb{C} . Entonces la deformación infinitesimal dM_t/dt de $M = \bar{\omega}^{-1}(t)$, es un elemento de $H^1(M, \Theta)$. Consecuentemente, dada una variedad compleja compacta M , si $(\mathcal{M}, B, \bar{\omega})$ con $0 \in B \subset \mathbb{C}$ es una familia analítica compleja, tal que $\bar{\omega}^{-1}(0) = M$, $(dM_t/dt)_{t=0} \in H^1(M, \Theta)$, donde

2.3. OBSTRUCCIÓN

Θ es el haz de gérmenes de campos de vectores holomorfos sobre M . Así, si hay una familia analítica compleja $(\mathcal{M}, B, \bar{\omega})$ con $\bar{\omega}^{-1}(0) = M$, el correspondiente elemento $\theta = (dM_t/dt)_{t=0}$ de $H^1(M, \Theta)$ está determinado.

Ahora consideremos la siguiente situación, dado un elemento $\theta \in H^1(M, \Theta)$, ¿existe una familia analítica compleja $(\mathcal{M}, B, \bar{\omega})$ con $0 \in B \subset \mathbb{C}$ tal que

$$\bar{\omega}^{-1}(0) = M, \quad \left(\frac{dM_t}{dt} \right)_{t=0} = \theta?$$

No daremos aquí una respuesta completa a esta pregunta, más bien algunas ideas que ilustren qué situaciones pueden tenerse. Para una versión extendida de estos resultados, ver [Ko].

Lema 2.3.1. [Ko, Lema 5.1] Sea $U = \{(z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{C}^n \mid |z^1| < r, \dots, |z^n| < r\}$ un polidisco, y Θ el haz de gérmenes de campos de vectores holomorfos sobre U . Entonces

$$H^q(U, \Theta) = 0, \quad q \geq 1. \quad (2.18)$$

Sea $\mathfrak{U} = \{U_j\}$ un cubrimiento abierto finito de una variedad compleja compacta M , y supongamos que cada U_j es un polidisco coordinado. Por el lema 2.3.1 anterior, $H^1(U_j, \Theta) = 0$. Luego, por [Ko, Teo. 3.5 y 3.6], tenemos lo siguiente:

Lema 2.3.2.

$$H^1(\mathfrak{U}, \Theta) = H^1(M, \Theta), \quad (2.19)$$

$$H^2(\mathfrak{U}, \Theta) \hookrightarrow H^2(M, \Theta). \quad (2.20)$$

Supongamos que M es una variedad compleja compacta dada y sea $(\mathcal{M}, B, \bar{\omega})$ con $0 \in B \subset \mathbb{C}$ una familia analítica compleja, tal que $\bar{\omega}^{-1}(0) = M$. Tomemos un disco pequeño Δ con centro en 0 tal que $0 \in \Delta \subset B$, y representemos $\mathcal{M}_\Delta = \bar{\omega}^{-1}(\Delta)$ en la forma:

$$\mathcal{M}_\Delta = \bigcup_{j=1}^l U_j \times \Delta, \quad (2.21)$$

donde cada U_j es un polidisco y $(z_j, t) \in U_j \times \Delta$ y $(z_k, t) \in U_k \times \Delta$ son el mismo punto sobre \mathcal{M}_Δ si $z_j^\alpha = f_{jk}^\alpha(z_k, t)$ para $\alpha = 1, \dots, n$. Aquí, cada $f_{jk}^\alpha(z_k, t) =$

2.3. OBSTRUCCIÓN

$f_{jk}^\alpha(z_k^1, \dots, z_k^n, t)$ es una función holomorfa definida sobre $U_k \times \Delta \cap U_j \times \Delta \neq \emptyset$. La deformación infinitesimal $\theta(t) = dM_t/dt \in H^1(M_t, \Theta_t)$ es, por definición, la clase de cohomología del 1-cociclo $\{\theta_{jk}(t)\} \in Z^1(\mathfrak{U}_t, \Theta_t)$ donde $\mathfrak{U}_t = \{U_j \times t\}$, y el campo de vectores

$$\theta_{jk}(t) = \sum_{\alpha} \theta_{jk}^{\alpha}(z_j, t) \frac{\partial}{\partial z_j^{\alpha}}$$

está dado por

$$\theta_{jk}^{\alpha}(z_j, t) = \frac{\partial f_{jk}^{\alpha}(z_k, t)}{\partial t}, \quad z_k = f_{kj}(z_j, t). \quad (2.22)$$

Note que las funciones $\theta_{jk}^{\alpha}(z_j, t)$ de z_j^1, \dots, z_j^n, t son obtenidas por diferenciación primero de las funciones $f_{jk}^{\alpha}(z_k, t)$ de z_k^1, \dots, z_k^n, t con respecto a t , y luego sustituyendo $z_k^{\alpha} = f_{kj}^{\alpha}(z_j, t)$.

Sobre $U_k \times \Delta \cap U_i \times \Delta \cap U_j \times \Delta \neq \emptyset$, tenemos las igualdades

$$f_{ik}^{\alpha}(z_k, t) = f_{ij}^{\alpha}(f_{jk}(z_k, t), t), \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (2.23)$$

Diferenciando en t ambos lados de estas igualdades, obtenemos

$$\theta_{ik}^{\alpha}(z_k, t) = \theta_{ij}^{\alpha}(z_i, t) + \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial z_i^{\alpha}}{\partial z_i^{\beta}} \theta_{jk}^{\beta}(z_k, t), \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (2.24)$$

Se sigue que $\{\theta_{jk}(t)\}$ es un 1-cociclo. Por otro lado, diferenciando en t ambos lados de (2.24) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_j^{\alpha}} &= \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial z_i^{\beta}}{\partial z_i^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial z_i^{\beta}}, \quad \frac{\partial z_i^{\beta}}{\partial z_i^{\alpha}} = \frac{\partial f_{ij}^{\beta}(z_j, t)}{\partial z_j^{\alpha}}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t_j} \right) &= \sum_{\beta=1}^n \left(\frac{\partial z_i^{\beta}}{\partial t} \right)_j \frac{\partial}{\partial z_i^{\beta}} + \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_i, \quad \left(\frac{\partial z_i^{\beta}}{\partial t} \right)_j = \frac{\partial f_{ij}^{\beta}(z_j, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_j \theta_{ik}^{\alpha}(z_i, t) &= \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial f_{ij}^{\beta}(z_j, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z_i^{\beta}} \theta_{ik}^{\alpha}(z_i, t) + \frac{\partial \theta_{ik}^{\alpha}(z_i, t)}{\partial t} \\ &= \sum_{\beta=1}^n \theta_{ij}^{\beta}(z_i, t) \frac{\partial}{\partial z_i^{\beta}} \theta_{ik}^{\alpha}(z_i, t) + \frac{\partial \theta_{ik}^{\alpha}(z_i, t)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, haciendo

$$\dot{\theta}_{ik}^\alpha(z_i, t) = \frac{\partial \theta_{ik}^\alpha(z_i, t)}{\partial t},$$

tenemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_j \theta_{ik}^\alpha(z_i, t) = \theta_{ij}(t) \cdot \theta_{ik}^\alpha(z_i, t) + \dot{\theta}_{ik}^\alpha(z_i, t).$$

Similarmente tenemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_j \theta_{ik}^\alpha(z_i, t) = \theta_{ij}(t) \cdot \theta_{ik}^\alpha(z_i, t) + \dot{\theta}_{ik}^\alpha(z_i, t),$$

y

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t_j} \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial z_i^\alpha}{\partial z_j^\beta} \theta_{jk}^\beta(z_j, t) \right) = \\ & = \sum_{\beta} \frac{\partial f_{ij}^\alpha(z_j, t)}{\partial z_j^\beta \partial t} \theta_{jk}^\beta(z_j, t) + \sum_{\beta} \frac{\partial z_i^\alpha(z_j, t)}{\partial z_j^\beta} \dot{\theta}_{jk}^\beta(z_j, t) \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$= \sum_{\beta} \theta_{jk}^\beta(z_j, t) \frac{\partial}{\partial z_j^\beta} \theta_{ij}^\alpha(z_i, t) + \sum_{\beta} \frac{\partial z_i^\alpha}{\partial z_j^\beta} \dot{\theta}_{jk}^\beta(z_j, t) \quad (2.27)$$

$$= \theta_{jk}(t) \cdot \theta_{ik}^\alpha(z_i, t) + \sum_{\beta} \frac{\partial z_i^\alpha}{\partial z_j^\beta} \dot{\theta}_{jk}^\beta(z_j, t). \quad (2.28)$$

Por consiguiente, diferenciando (2,24) con respecto a t , obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \theta_{ij} \cdot \theta_{ik}^\alpha(z_i, t) + \dot{\theta}_{ik}^\alpha(z_i, t) &= \theta_{ij}(t) \cdot \theta_{ij}^\alpha(z_i, t) + \dot{\theta}_{ij}^\alpha(z_i, t) \\ &+ \theta_{jk}(t) \cdot \theta_{ij}^\alpha(z_i, t) + \sum_{\beta} \frac{\partial z_i^\alpha}{\partial z_j^\beta} \dot{\theta}_{jk}^\beta(z_j, t). \end{aligned}$$

Como

$$\theta_{ik}^\alpha(z_i, t) - \theta_{ij}^\alpha(z_i, t) = \sum_{\beta} \frac{\partial z_i^\alpha}{\partial z_j^\beta} \theta_{jk}^\beta(z_j, t),$$

podemos escribir las ecuaciones anteriores en la forma

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{ik}^\alpha(z_i, t) - \dot{\theta}_{ij}^\alpha(z_i, t) + \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial z_i^\alpha}{\partial z_j^\beta} \dot{\theta}_{jk}^\beta(z_j, t) \\ = \theta_{ij}(t) \cdot \sum_{\beta} \frac{\partial z_i^\alpha}{\partial z_j^\beta} \theta_{jk}^\beta(z_j, t) - \theta_{jk}(t) \cdot \theta_{ij}^\alpha(z_i, t). \end{aligned} \quad (2.29)$$

2.3. OBSTRUCCIÓN

En general, se define el *corchete* de dos campos de vectores holomorfos $v = \sum_{\alpha=1}^n v_j^\alpha (\partial/\partial z_j^\alpha)$ y $u = \sum_{\alpha=1}^n u_j^\alpha (\partial/\partial z_j^\alpha)$ por

$$[v, u] = \sum_{\alpha=1}^n (v \cdot u_j^\alpha - u \cdot v_j^\alpha) \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}. \quad (2.30)$$

Este corchete, no depende de la elección de coordenadas, es bilineal en u y v y antisimétrico.

Haciendo $\dot{\theta}_{ij}(t) = \sum_{\alpha=1}^n \dot{\theta}_{ij}^\alpha(z_i, t) \partial/\partial z_i^\alpha$ y usando el corchete, podemos reescribir (2,29) como

$$\dot{\theta}_{ij}(t) - \dot{\theta}_{ik}(t) + \theta_{jk}(t) = [\theta_{ij}(t), \theta_{jk}(t)]. \quad (2.31)$$

Sustituyendo $t = 0$, obtenemos

$$\dot{\theta}_{ij}(0) - \dot{\theta}_{ik}(0) + \theta_{jk}(0) = [\theta_{ij}(0), \theta_{jk}(0)]. \quad (2.32)$$

Como $M = M_0$ por supuesto, identificando U_j con $U_j \times 0$, podemos considerar $\mathfrak{U} = \{U_j\}$ como un cubrimiento abierto finito de M . Para un $\theta \in H^1(M, \Theta)$ dado, si $\theta = (dM_t/dt)_{t=0}$, θ es la clase de cohomología del 1-cociclo $\{\theta_{jk}(0)\} \in Z^1(\mathfrak{U}, \Theta)$ anterior, por lo tanto (2,32) impone una cierta restricción sobre tal θ . Para clarificar el significado de esta condición, hacemos para un 1-cociclo cualquiera $\{\theta_{jk}\} \in Z^1(\mathfrak{U}, \Theta)$

$$\zeta_{ijk} = [\theta_{ij}, \theta_{jk}]$$

sobre $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$. ζ_{ijk} es un campo de vectores holomorfo sobre $U_i \cap U_j \cap U_k$. $\{\zeta_{ijk}\}$ forma un 2-cociclo sobre U .

Para 1-cociclos arbitrarios $\{\theta_{jk}\}$ y $\{\eta_{jk}\} \in Z^1(\mathfrak{U}, \Theta)$, hacemos

$$\zeta_{ijk} = \frac{1}{2}([\theta_{ij}, \eta_{jk}] + [\eta_{ij}, \theta_{jk}]).$$

Entonces como

$$2\zeta_{ijk} = [\theta_{ij} + \eta_{ij}, \theta_{jk} + \eta_{jk}] - [\theta_{ij}, \theta_{jk}] - [\eta_{ij}, \eta_{jk}],$$

$\{\zeta_{ijk}\}$ es también un 2-cociclo en $Z^2(\mathfrak{U}, \Theta)$, cuya clase de cohomología ζ está únicamente determinada por las clases de cohomología θ de $\{\theta_{jk}\}$ y η de $\{\eta_{jk}\}$. De hecho, si $\theta_{jk} = \theta_k - \theta_j$, se sigue de un simple cálculo que

$$2\zeta_{ijk} = [\theta_j + \theta_k, \eta_{jk}] - [\theta_i + \theta_k, \eta_{jk}] + [\theta_i + \theta_j, \eta_{ij}],$$

es decir, que $\{\zeta_{ijk}\} = \delta\{[\theta_j + \theta_k, \eta_{jk}]\}$. Definimos el corchete de θ y η en $H^1(M, \Theta)$ por

$$[\theta, \eta] = \zeta. \quad (2.33)$$

Este corchete es bilineal en ambas entradas y antisimétrico. Más aún, haciendo $i = k$ en (2,32), obtenemos que $\dot{\theta}_{kj}(0) + \dot{\theta}_{jk}(0) = 0$ como $\dot{\theta}_{kk} = 0$. Así, $\{\dot{\theta}_{jk}(0)\}$ es una 1-cocadena y (2,32) puede ser escrito como

$$\delta\{\dot{\theta}_{jk}(0)\} = \{\zeta_{ijk}\}, \quad \zeta_{ijk} = [\theta_{ij}(0), \theta_{jk}(0)].$$

Por lo tanto obtnemos

$$[\theta(0), \theta(0)] = 0.$$

De estos resultados, obtenemos el siguiente teorema de forma inmediata.

Teorema 2.3.3. *Supongamos que M es un variedad compleja compacta dada, y $\theta \in H^1(M, \Theta)$. Para que exista una familia analítica compleja $(\mathcal{M}, B, \bar{\omega})$ tal que $\bar{\omega}^{-1}(0) = M$ y que $(dM_t/dt)_{t=0} = 0$, es necesario que $[\theta, \theta] = 0$.*

En otras palabras, si $[\theta, \theta] \neq 0$, no existe una deformación M_t con $M_0 = M$ y $(dM_t/dt)_{t=0} = 0$. En este sentido, llamamos a $[\theta, \theta] \in H^2(M, \Theta)$ la *obstrucción* a deformación de M . El teorema 2.3.3 anterior, se tiene también para el caso de una familia diferenciable.

Este capítulo fue concebido a modo de introducción a la teoría de deformaciones de variedades complejas compactas, constituye apenas, una pequeña muestra de la teoría desarrollada por Kodaira. Un desarrollo más completo y detallado puede hallarse en [Ko].

Capítulo 3

Cohomología con coeficientes en haces

3.1. Haces

3.1.1. Definición y Ejemplos

Antes de definir haces, vamos a retomar algunas propiedades de las secciones de un fibrado vectorial. La importancia de estudiar las secciones de un fibrado, radica, entre otras muchas razones, en que las soluciones de ecuaciones diferenciales sobre una variedad son secciones de fibrados vectoriales sobre la variedad. Además podemos analizar el fibrado mirando el comportamiento de sus secciones, pues, un fibrado vectorial está completamente determinado por el conjunto de sus secciones locales. Sea E un fibrado vectorial sobre una variedad M con proyección $\pi : E \rightarrow M$.

Recordemos que dado $\pi : E \rightarrow B$ un fibrado vectorial (holomorfo). Una sección de E es una aplicación $\sigma : M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \sigma = id_M$.

En términos sencillos, una sección elige un punto en cada fibra de E . Si $U \subset M$ es un subconjunto abierto de M , entonces una sección de $E|_U$ (el fibrado E restringido a U) es llamada una *sección local* de E .

Toda sección local de un fibrado vectorial verifica las siguientes condiciones:

1. Sean $W \subset V \subset U$ subconjuntos abiertos de M . Si σ_U es una sección local de E definida sobre U , entonces la restricción de σ_U a V y luego a W es equivalente

a restringir σ_U a W directamente.

2. Sean U y V subconjuntos abiertos de M y sean σ_U una sección local definida sobre U y σ_V una sección local definida sobre V las cuales coinciden en la intersección $U \cap V$. Entonces existe una sección ρ definida sobre la unión $U \cup V$ la cual coincide con σ_U sobre U y coincide con σ_V sobre V .
3. Sean U y V subconjuntos abiertos de M y sea σ una sección local definida sobre la unión $U \cup V$ tal que σ se anula sobre U y σ se anula sobre V , entonces σ se anula sobre $U \cup V$.

El concepto de haz es más general que el de fibrado, en el sentido que el conjunto de secciones locales de un fibrado vectorial forma un haz, pero hay haces que no corresponden a secciones de un fibrado como se ve en el ejemplo 3.1.2. Una ventaja de trabajar con haces, es que pueden ser usados como coeficientes para el cálculo de cohomología. Veamos ahora la definición y principales propiedades de los haces.

Definición 3.1.1. *Dado un espacio topológico X , un haz \mathcal{F} sobre X asocia a cada conjunto abierto $U \subset X$ un grupo $\mathcal{F}(U)$, llamado las secciones de \mathcal{F} sobre U y a cada par de conjuntos abiertos $U \subset V$ un aplicación $r_{V,U} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ llamada aplicación restricción, la cual satisface las siguientes condiciones:*

I. *Para cualesquiera $U \subset V \subset W$ abiertos en M ,*

$$r_{W,U} = r_{V,U} \circ r_{W,V}.$$

Es usual escribir $\sigma|_U$ para referirse a $r_{V,U}$.

II. *Para cualquier par de conjuntos abiertos $U, V \subset M$ y secciones $\sigma \in \mathcal{F}(U)$, $\tau \in \mathcal{F}(V)$ tales que $\sigma|_{U \cap V} = \tau|_{U \cap V}$ existe una sección $\rho \in \mathcal{F}(U \cup V)$ tal que $\rho|_U = \sigma$ y $\rho|_V = \tau$.*

III. *Si $\sigma \in \mathcal{F}(U \cup V)$ y $\sigma|_U = \sigma|_V = 0$, entonces $\sigma = 0$.*

Veamos ahora, algunos ejemplos de haces:

1. Para cualquier variedad diferenciable M y un conjunto abierto $U \subset M$, se definen los siguientes haces:

- a) $C^\infty(U)$: funciones C^∞ sobre U con la adición de funciones.
 - b) $C^*(U)$: grupo multiplicativo de funciones no nulas (distintas de cero en cualquier punto) sobre U .
 - c) $\mathcal{A}^p(U)$: p -formas C^∞ sobre U con adición punto a punto.
 - d) $\mathbb{Z}(U)$: funciones a valores enteros localmente constantes con la adición de funciones. Análogamente con $\mathbb{Q}(U)$, $\mathbb{R}(U)$ o $\mathbb{C}(U)$.
2. Si M es una variedad compleja, $V \subset M$ un subvariedad analítica de M , y $E \rightarrow M$ un fibrado vectorial holomorfo, se definen los haces:
- a) $\mathcal{O}(U)$ de funciones holomorfas sobre (U) con la adición punto a punto de funciones.
 - b) $\mathcal{O}^*(U)$ que corresponde a funciones holomorfas distintas de cero sobre U . Aquí $\mathcal{O}^*(U)$ es un grupo con la multiplicación de funciones.
 - c) $\Omega^p(U)$ de las p -formas holomorfas sobre U .
 - d) El haz $\mathcal{O}(E)(U)$ de secciones holomorfas de E sobre U .
 - e) $\mathcal{I}_V(U)$ funciones holomorfas sobre U que se anulan en $U \cap V$.

Ejemplo 3.1.2. *Sobre cualquier espacio topológico X , el skyscraper sheaf o haz rascacielos asociado a un punto cerrado x y un grupo o anillo G se define de la siguiente manera:*

$$\mathcal{F}(U) = G \text{ si } x \in U \text{ y } 0 \text{ en otro caso.}$$

Aquí, U es un abierto cualquiera de X . El nombre del haz proviene del hecho que cuando uno mira el comportamiento del germen (clase de equivalencia de funciones que coinciden en alguna vecindad de x en X), este es cero fuera del punto x .

3.1.2. Aplicaciones entre haces

Sean \mathcal{F} y \mathcal{G} haces sobre una variedad M .

Definición 3.1.3. *Una aplicación entre haces $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es una colección de morfismos (homomorfismos de grupo en rigor) $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ con $U \subset M$ tales que para cualesquiera dos subconjuntos abiertos $U \subset V$ de M , α_U y α_V conmutan con las aplicaciones restricción.*

El kernel de la aplicación α corresponde justamente al haz $\ker(\alpha)$ dado por

$$\ker(\alpha)(U) = \ker(\alpha_U : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{G}(U)) \quad (3.1)$$

No es difícil ver que $\ker(\alpha)$ es efectivamente un haz. Por otro lado, el CoKer es un poco más difícil de definir: si hacemos $\text{CoKer}(\alpha)(U) = \mathcal{G}(U)/\alpha_U \mathcal{F}(U)$, podría ocurrir que $\text{CoKer}(\alpha)$ no sea un haz en el sentido de (3.1.1). Un ejemplo clásico de esta situación, está dado por la aplicación de haces

$$\exp : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^*$$

sobre $\mathbb{C} - \{0\}$ que envía cada función $f \in \mathcal{O}(U)$ a $e^{(2\pi\sqrt{-1}f)} \in \mathcal{O}^*(U)$. La sección $z \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C} - \{0\})$ no está en la imagen de $\mathcal{O}(\mathbb{C} - \{0\})$ bajo \exp , pero su restricción a cualquier conjunto abierto contráctil $U \subset \mathbb{C} - \{0\}$ sí está en la imagen de $\mathcal{O}(U)$ de modo que el CoKer no queda bien definido.

Sean $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ haces sobre una variedad M . Decimos que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

es *exacta*, si $\mathcal{E} = \ker(\beta)$ y $\mathcal{G} = \text{CoKer}(\alpha)$; en este caso, también decimos que \mathcal{E} es un *subhaz* de \mathcal{F} y que \mathcal{G} es el *haz cociente* de \mathcal{F} por \mathcal{E} , lo cual escribimos \mathcal{F}/\mathcal{E} . Más en general, la sucesión

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}_n \xrightarrow{\alpha_n} \mathcal{F}_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} \mathcal{F}_{n+2} \longrightarrow \cdots$$

es exacta si $\alpha_{n+1} \circ \alpha_n = 0$ y

$$0 \longrightarrow \ker(\alpha_n) \longrightarrow \mathcal{F}_n \longrightarrow \ker(\alpha_{n+1}) \longrightarrow 0$$

es exacta para cada n .

Ejemplo 3.1.4. *Sobre cualquier variedad diferenciable compleja, la sucesión*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$$

es exacta, donde i es la inclusión y \exp es la aplicación exponencial dada por $\exp(f) = e^{2\pi\sqrt{-1}f}$. Esta sucesión fundamental es llamada *sucesión exponencial de haces*.

3.2. Cohomología de Čech

En esta sección, veremos los aspectos generales de la cohomología de haces y su relación con la cohomología de Čech, la cual provee un muy buen método para el cálculo de ciertas cohomologías que nos serán de interés.

Definición 3.2.1. Sea \mathcal{F} un haz sobre una variedad diferenciable M y $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ un cubrimiento abierto localmente finito. Definimos

$$\begin{aligned} C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) &= \prod_{\alpha} \mathcal{F}(U_\alpha) \\ C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) &= \prod_{\alpha \neq \beta} \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta) \\ &\vdots \\ C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) &= \prod_{\alpha_0 \neq \alpha_1 \neq \dots \neq \alpha_p} \mathcal{F}(U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_p}). \end{aligned}$$

Un elemento $\sigma = \{\sigma_l \in \mathcal{F}(\cap U_{l_k})\}_{1 \leq l_k \leq p+1}$ de $C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ es llamado una p -cocadena de \mathcal{F} . Es decir, un p -cocadena es una sección definida sobre la intersección de $p+1$ abiertos de \mathfrak{U} .

Definición 3.2.2. Luego se define el operador coborde

$$\delta : C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

por la fórmula

$$(\delta\sigma)_{i_0, \dots, i_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \sigma_{i_0, \dots, i_{p+1}}|_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}}.$$

En particular, si σ es una 0-cocadena, esto es, $\sigma = \{\sigma_U\} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$,

$$(\delta\sigma)_{U,V} = -\sigma_U + \sigma_V;$$

si es una 1-cocadena, es decir $\sigma = \{\sigma_{U,V}\} \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$,

$$(\delta\sigma)_{U,V,W} = \sigma_{UV} + \sigma_{VW} - \sigma_{UW}.$$

Note que en las identidades precedentes, se han omitido las restricciones para no saturar la notación.

Definición 3.2.3. Una p -cocadena $\sigma \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ es llamada un cociclo si $\delta\sigma = 0$. Además, todo cociclo σ debe satisfacer la condición de antisimetría

$$\sigma_{i_0, \dots, i_p} = -\sigma_{i_0, \dots, i_{q-1}, i_{q+1}, i_q, i_{q+2}, \dots, i_p}$$

Definición 3.2.4. Una p -cocadena σ es llamado un coborde, si existe $\tau \in C^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ tal que $\sigma = \delta\tau$.

De la definición del operador δ , es directo que $\delta^2 = 0$, así, todo coborde es un cociclo.

Definición 3.2.5. Dado el conjunto $Z^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \ker \delta \subset C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ de los p -cociclos, se define, como es usual

$$H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \frac{Z^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})}{\delta C^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})}.$$

Definición 3.2.6. Dados dos cubrimientos $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ y $\mathcal{U}' = \{U'_\beta\}_{\beta \in I'}$ de M , decimos que \mathcal{U}' es un refinamiento de \mathcal{U} si para cada $\beta \in I'$, existe $\alpha \in I$, tal que $U'_\beta \subset U_\alpha$. Usamos la notación $\mathcal{U}' < \mathcal{U}$ para indicar que \mathcal{U}' es un refinamiento de \mathcal{U} .

Definición 3.2.7. Definimos el p -ésimo grupo de cohomología de Čech de \mathcal{F} sobre M , como el límite directo de $H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ haciendo \mathfrak{U} más y más fino, es decir:

$$H^p(M, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

Si se quiere enfatizar que se está usando la cohomología de Čech, entonces se usa la notación \check{H} . Además, para cualquier cubrimiento \mathfrak{U} , se tiene que:

$$H^0(M, \mathcal{F}) = H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(M).$$

En la práctica, trabajar con la definición como límite directo puede ser difícil de manejar, no obstante, agregando una condición adicional, veremos que la cohomología de Čech puede ser realmente útil para el estudio de las deformaciones de W_k .

Teorema 3.2.8 (Teorema de Leray). *Si el cubrimiento \mathfrak{U} es acíclico para el haz \mathcal{F} , es decir,*

$$H^q(U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_p}, \mathcal{F}) = 0, \quad q > 0, \text{ y para cualesquiera } i_1, \dots, i_p,$$

entonces $H(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = H(M, \mathcal{F})$.

Demostración. Ver [GH]. □

En la práctica, hay tres tipos de haces con los cuales nos podemos encontrar, y dependiendo de la información que queramos obtener, es más útil trabajar con uno u otro, a saber:

1. *Haces C^∞* , cuyas secciones locales pueden ser expresadas como n -tuplas de funciones C^∞ .
2. *Haces constantes*, los cuales contienen información topológica de la variedad subyacente.
3. *Haces holomorfos*, cuyas secciones son dadas localmente por n -tuplas de funciones holomorfas y que para nuestro caso, son los que más información aportarán.

Parte II

Resultados originales

Capítulo 4

Deformaciones de superficies locales

En esta sección, vamos a revisar algunos de los resultados principales obtenidos por Barmeier y Gasparim en [BG], donde estudian deformaciones de superficies complejas no compactas del tipo:

$$Z_k := \text{Tot}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-k)); \quad k \geq 1.$$

Esto es, espacios totales de fibrados de línea sobre el espacio proyectivo complejo \mathbb{P}^1 . Las superficies Z_k pueden ser cubiertas por $U = \{(z, u)\}$ y $V = \{(\xi, v)\}$ con $U \cap V = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. La función de transición o cambio de coordenadas está dado por:

$$\boxed{(\xi, v) \longmapsto (z^{-1}, z^k u)}. \quad (4.1)$$

Definición 4.0.9. *Dada una variedad X , denotamos por $\text{Pic}(X)$ al grupo de clases de isomorfismo de fibrados de línea sobre X . Este es un grupo con la multiplicación dada por el producto tensorial.*

Definición 4.0.10. *Un fibrado E sobre una variedad X se dice filtrable (por fibrados de línea) si puede ser escrito como extensiones sucesivas por fibrados de líneas, es decir, si existe una filtración creciente:*

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_{r-1} \subset E_r = E$$

de subfibrados tales que $E_i/E_{i-1} \in \text{Pic}(X)$, donde $1 \leq i \leq r$.

Teorema 4.0.11. [EG, Lem. 3.1, Thm. 3.2] *Fibrados vectoriales holomorfos sobre Z_k son algebraicos y filtrables.*

Observación 4.0.12. *Un isomorfismo de fibrados E y F sobre W_2 , está dado por un par de matrices invertibles A_U y A_V con entradas holomorfas en las cartas U y V respectivamente, de modo que:*

$$A_V E = F A_U$$

o equivalentemente:

$$A_V E A_U^{-1} = F.$$

Lema 4.0.13. *Hay un isomorfismo $\text{Ext}^1(\mathcal{O}_X(n), \mathcal{O}_X(-n)) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X(-2n))$, el cual envía una clase de extensión p a una clase de cohomología $\sigma = z^{-n}p$.*

Demostración. Ver [Har, III.6.3.(c) y III.6.7.]. □

Definición 4.0.14. [BA]. *Sea E un fibrado de rango r sobre Z_k . Entonces, la restricción de E a la sección cero $l \cong \mathbb{P}^1$ es un fibrado de rango r sobre \mathbb{P}^1 , el cual por el lema de Escisión de Grothendieck se descompone como suma directa de fibrados de línea. Esto es,*

$$E|_l = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n_r).$$

Llamamos a n_1, \dots, n_r el tipo de escisión de E . Cuando E es un fibrado de rango 2 con primera clase de Chern $c_1(E) = n_1 + n_2 = 0$, entonces definimos $n = |n_1| = |n_2|$, tal que $n > 0$ y decimos que E tiene tipo de escisión n .

El teorema 4.0.11, nos dice que un fibrado E sobre Z_k , de rango 2 con primera clase de Chern $c_1(E) = 0$ y tipo de escisión n , puede ser definido en coordenadas canónicas, mediante la matriz de transición:

$$\begin{pmatrix} z^n & p \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Esta matriz define una extensión de fibrados del tipo:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n) \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) \rightarrow 0. \tag{4.3}$$

Por lema 4.0.13, $p = z^n \sigma$, donde $\sigma \in H^1(Z_k, \mathcal{O}_{Z_k}(-2n))$. (Ver [EG], Teo. 3.3). En consecuencia:

$$\begin{pmatrix} z^n & p \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^n & z^n \sigma \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Más aún, por lema 5.1.2, σ es de la forma:

$$\sigma = \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \sum_{s=2r-n+1}^{-1} a_{s,r,t} z^s u_1^r u_2^t. \quad (4.5)$$

Sin embargo, $\sigma|_l = 0$, por lo tanto, consideramos:

$$\sigma = \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \sum_{s=2r-n+1}^{-1} a_{s,r,t} z^s u_1^r u_2^t. \quad (4.6)$$

En particular, cuando en (4.4) $p = 0$, tenemos $E|_l = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)$.

En [BG], los autores muestran dos estrategias diferentes para deformar la estructura compleja de las superficies Z_k . Por un lado, deformaciones del fibrado tangente en [BG, Sec. 5.1] y por otro, deformaciones de la función de transición en [BG, Sec. 5.2]. Para el primer método, las deformaciones no triviales del fibrado tangente TZ_k , son precisamente aquellas que provienen de agregar a la matriz de transición, un cociclo en $H^1(Z_k, TZ_k)$.

Lema 4.0.15. $H^1(Z_1, TZ_1) = 0$. Sea $k > 1$, entonces $H^1(Z_k, TZ_k) \cong \mathbb{C}^{k-1}$ y sus generadores, como espacio vectorial sobre \mathbb{C} , pueden ser expresados en las coordenadas canónicas en la forma:

$$\sigma_r = \begin{pmatrix} 0 \\ z^{-k+r} \end{pmatrix}$$

con $1 \leq r \leq k-1$.

Aquí consideramos coordenadas canónicas a las dadas en 4.1.

Teorema 4.0.16. Las superficies Z_k , admiten una familia de deformaciones de dimensión $(k-1)$ parametrizadas por $H^1(Z_k, TZ_k) \cong \mathbb{C}^{k-1}$.

Citamos este resultado, pues posteriormente nos permitirá hacer una comparación con teorema 6.3.2 y establecer una diferencia esencial, entre la teoría de deformaciones en 2 y 3 dimensiones complejas.

Capítulo 5

Cohomología de $W_k; k = 1, 2$.

En este capítulo, presentamos algunos cálculos de cohomología de Čech para $W_k, k = 1, 2$. Estos cálculos serán utilizados posteriormente, para obtener los resultados originales que serán mostrados en el capítulo 6. La sección 5.1, corresponde a cohomología de W_k con coeficientes en fibrados de línea y la sección 5.2 a cohomología de W_k con coeficientes en su fibrado tangente.

5.1. Cohomología con coeficientes en fibrados de línea.

5.1.1. Cohomología de W_2 con coeficientes en $\mathcal{O}_{W_2}(n)$.

En esta sección, calcularemos algunos grupos de cohomología del espacio W_2 que son de interés para el estudio de las deformaciones de la estructura compleja de dicho espacio. Concretamente, estamos interesados en los grupos de cohomología con coeficientes en $\mathcal{O}_{W_2}(n), n \in \mathbb{Z}$, los cuales denotan fibrados de línea complejos sobre W_2 con primera clase de Chern n . En cartas coordenadas canónicas, los fibrados $\mathcal{O}_{W_2}(n)$ tienen matriz de transición (z^{-n}) . Concretamente, vamos a calcular grupos de cohomología del tipo $H^1(W_2, \mathcal{O}_{W_2}(n))$.

Lema 5.1.1. *Sea $W_2 := \text{Tot}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$ y $n \geq -1$. Entonces,*

$$H^1(W_2, \mathcal{O}_{W_2}(n)) = 0.$$

Demostración. Por definición $W_2 := \text{Tot}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$, donde $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ es $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(0)$. Consideremos el cubrimiento acíclico (en el sentido de teo. 3.2.8) $\mathfrak{U} = \{U, V\}$ donde U y V son tales que:

- $U \cong \mathbb{C}^3 = \{(z, u_1, u_2) | z, u_1, u_2 \in \mathbb{C}\}$.
- $V \cong \mathbb{C}^3 = \{(\xi, v_1, v_2) | \xi, v_1, v_2 \in \mathbb{C}\}$.
- $U \cap V = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$.
- Dadas estas cartas, el cambio de coordenadas para W_2 es:

$$\boxed{(\xi, v_1, v_2) \mapsto (z^{-1}, z^2 u_1, u_2)}. \quad (5.1)$$

Un 0-cociclo τ es un par (τ_U, τ_V) , donde τ_U es una función holomorfa en U y τ_V holomorfa en V , por lo tanto, tienen la forma:

$$\begin{aligned} \tau_U &= \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{s=0}^{+\infty} \alpha_{s,r,t} z^s u_1^r u_2^t \\ \tau_V &= \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{s=0}^{+\infty} \beta_{s,r,t} \xi^s v_1^r v_2^t \end{aligned}$$

Una 1-cocadena genérica σ , tiene una expresión en serie de Taylor de la forma:

$$\sigma = \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} a_{s,r,t} z^s u_1^r u_2^t.$$

Los cobordes son sumas de secciones holomorfas en U con secciones holomorfas en V . Un 1-coborde es de la forma $\delta\tau = \tau_V - \tau_U$. Dado que no hay intersecciones triples, y el haz es coherente, todas las 1-cocadenas son 1-cociclos. Por definición, la matriz de transición de $\mathcal{O}_{W_2}(n)$ es $T = (z^{-n})$. Notemos que, quitando los términos holomorfos en la carta U , esto es, potencias de z no negativas, tenemos la relación

$$\sigma \sim \sigma' = \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{-1} a_{s,r,t} z^s u_1^r u_2^t.$$

donde el símbolo \sim significa que los cociclos son cohomólogos¹. Luego, para cambiar coordenadas, multiplicamos por la matriz de transición T , obteniendo:

$$\begin{aligned}
 T\sigma' &= z^{-n} \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{-1} a_{s,r,t} z^s u_1^r u_2^t \\
 &= \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{-1} a_{s,r,t} z^{s-n} u_1^r u_2^t \\
 &= \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{-1} a_{s,r,t} z^{s-n-2r} (z^2 u_1)^r u_2^t \\
 &= \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{-1} a_{s,r,t} \xi^{2r+n-s} v_1^r v_2^t.
 \end{aligned}$$

Como $s \leq -1 \Rightarrow -s \geq 1$, haciendo un cambio de índices, tenemos que:

$$T\sigma' = \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{s=1}^{+\infty} a_{-s,r,t} \xi^{2r+n+s} v_1^r v_2^t. \quad (5.2)$$

Por lo tanto, tenemos:

$$\begin{aligned}
 s \geq 1, \quad r \geq 0 &\implies 2r + s \geq 1 \\
 &\implies 2r + n + s \geq n + 1
 \end{aligned}$$

Así, para $n \geq -1 \Rightarrow n + 1 \geq 0 \Rightarrow 2r + n + s \geq 0$, es decir, todos los términos en $T\sigma'$ son holomorfos en la carta V , pues corresponden a potencias no negativas de ξ, v_1, v_2 . Así, todos los cociclos son cobordes y por tanto $T\sigma' \sim 0$. En consecuencia:

$$\boxed{H^1(W_2, \mathcal{O}(n)) = 0; \quad n \geq -1} \quad (5.3)$$

□

Para $n < -1$, la expresión $2r + n + s$ también puede tomar valores negativos, por tanto no tenemos la relación $T\sigma' \sim 0$ pues $T\sigma'$ no define secciones holomorfas en la carta V para todo n . Esta situación se discute de manera detallada en la siguiente sección.

¹Dos cociclos cohomólogos difieren en un coborde.

5.1.2. Cohomología de W_2 con coeficientes en $\mathcal{O}_{W_2}(-n)$.

Lema 5.1.2. *Si $n \geq 2$ es un entero, entonces los generadores de $H^1(W_2, \mathcal{O}_{W_2}(-n))$, son de la forma:*

$$\sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \sum_{s=2r-n+1}^{-1} a_{s,r,t} z^s u_1^r u_2^t.$$

Demostración. Por definición, la matriz de transición correspondiente a $\mathcal{O}_{W_2}(-n)$ es $T = z^n$. Sea \mathfrak{U} como en el lema 5.1.1. Análogamente al caso anterior, cambiamos coordenadas multiplicando por la matriz de transición, obteniendo:

$$\begin{aligned} T\sigma' &= z^n \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{-1} a_{s,r,t} z^s u_1^r u_2^t \\ &= \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{-1} a_{s,r,t} z^{s+n} u_1^r u_2^t \\ &= \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{-1} a_{s,r,t} z^{s+n} z^{-2r} (z^2 u_1)^r u_2^t \\ &= \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{-1} a_{s,r,t} \xi^{2r-n-s} v_1^r v_2^t. \end{aligned}$$

Los elementos no triviales en $H^1(W_2, \mathcal{O}_{W_2}(-n))$, son aquellos no holomorfos en la carta V , es decir, aquellos para los cuales

$$2r - n - s < 0. \tag{5.4}$$

Notemos que (5.4) no depende de t , luego seguimos considerando $t \geq 0$. Por otro lado, (5.4) es equivalente a:

$$2r - n - s \leq -1. \tag{5.5}$$

Despejando s en (5.5) y notando que $s \leq -1$ en $T\sigma'$, obtenemos:

$$2r - n + 1 \leq s \leq -1. \tag{5.6}$$

Tomando los extremos en (5.6), tenemos que:

$$\begin{aligned} 2r - n + 1 &\leq -1, \\ \text{luego } r &\leq \frac{n-2}{2}. \end{aligned}$$

Por tratarse de números enteros, necesariamente:

$$r \leq \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor. \quad (5.7)$$

De (5.6) y (5.7) se obtiene lo deseado. \square

5.1.3. Ejemplos

A continuación observemos algunos ejemplos, los cuales corresponden a casos particulares que serán útiles más adelante:

1. $H^1(W_2, \mathcal{O}_{W_2}(-2))$.
2. $H^1(W_2, \mathcal{O}_{W_2}(-4))$.

En virtud del lema 5.1.2, los generadores de $H^1(W_2, \mathcal{O}_{W_2}(-n))$ son de la forma:

$$\sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \sum_{s=2r-n+1}^{-1} a_{s,r,t} z^s u_1^r u_2^t.$$

Para $n = 2$ tenemos:

$$\begin{aligned} \sigma_{r,s,t} &= \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{2-1}{2} \rfloor} \sum_{s=2r-1}^{-1} a_{s,r,t} z^s u_1^r u_2^t. \\ &= \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^0 \sum_{s=-1}^{-1} a_{s,r,t} z^s u_1^r u_2^t. \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$H^1(W_2, \mathcal{O}(-2)) = \langle z^{-1} u_2^t \rangle_{t \geq 0}. \quad (5.8)$$

Para $H^1(W_2, \mathcal{O}(-4))$, los generadores son:

$$\begin{aligned}\sigma_{r,s,t} &= \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{4-t}{2} \rfloor} \sum_{s=2r-3}^{-1} a_{s,r,t} z^s u_1^r u_2^t. \\ &= \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^1 \sum_{s=2r-3}^{-1} a_{s,r,t} z^s u_1^r u_2^t.\end{aligned}$$

Es decir:

$$H^1(W_2, \mathcal{O}(-4)) = \langle z^{-1}u_2^t, z^{-2}u_2^t, z^{-3}u_2^t, z^{-1}u_1u_2^t \rangle_{t \geq 0}. \quad (5.9)$$

5.2. Cohomología con coeficientes en el fibrado tangente.

Primero, consideremos el siguiente hecho fundamental de la teoría de deformaciones de Kodaira: las deformaciones de la estructura compleja de una variedad X son parametrizadas por $H^1(X, TX)$, donde TX es el fibrado tangente de la variedad X con obstrucciones a deformaciones en $H^2(X, TX)$. Como W_k ; $k = 1, 2$ es cubierta por sólo dos abiertos, no hay triple intersección, luego no hay 2-cociclos y es inmediato que $H^2(W_i, TW_i) = 0$: $i = 1, 2$, por tanto no hay obstrucciones a deformación. Producto de lo dicho anteriormente, para estudiar las deformaciones de W_1 y W_2 primero debemos calcular $H^1(W_1, TW_1)$ y $H^1(W_2, TW_2)$ respectivamente. Estos cálculos se realizarán usando cohomología de Čech y mostrarán porqué, el estudio de las deformaciones de W_2 es de mayor interés al de W_1 .

Lema 5.2.1. $H^1(W_1, TW_1) = 0$.

Demostración. Por definición $W_1 = \text{Tot}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))$ y recordemos que puede ser cubierto por $U = \{(z, u_1, u_2)\}$ y $V = \{(\xi, v_1, v_2)\}$ con $U \cap V = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ con función de transición:

$$\boxed{(\xi, v_1, v_2) \mapsto (z^{-1}, zu_1, zu_2)}. \quad (5.10)$$

La matriz de transición del fibrado tangente de W_1 , es la Jacobiana del cambio de coordenadas definido en (5.10), esto es:

$$J_{W_1} = \begin{pmatrix} -z^{-2} & 0 & 0 \\ u_1 & z & 0 \\ u_2 & 0 & z \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Por definición, una sección $\sigma : W_1 \rightarrow TW_1$ es una aplicación tal que $\pi \circ \sigma = \text{Id}_{W_1}$. Un 1-cociclo general σ , es una función holomorfa en la intersección $U \cap V$, por lo tanto es de la forma:

$$\sigma = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} a_{ijk} \\ b_{ijk} \\ c_{ijk} \end{pmatrix} z^i u_1^j u_2^k.$$

Notemos que, quitando los términos holomorfos en la carta U , tenemos:

$$\sigma \sim \sigma' = \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} a_{ijk} \\ b_{ijk} \\ c_{ijk} \end{pmatrix} z^i u_1^j u_2^k.$$

Para quitar los elementos holomorfos en la carta V , primero multiplicamos por la matriz J_{W_1} definida en (5.11), obteniendo:

$$\begin{aligned} J_{W_1} \sigma' &= \begin{pmatrix} -z^{-2} & 0 & 0 \\ u_1 & z & 0 \\ u_2 & 0 & z \end{pmatrix} \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} a_{ijk} \\ b_{ijk} \\ c_{ijk} \end{pmatrix} z^i u_1^j u_2^k \\ &= \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} -z^{-2} a_{ijk} \\ u_1 a_{ijk} + z b_{ijk} \\ u_2 a_{ijk} + z c_{ijk} \end{pmatrix} z^i u_1^j u_2^k \\ &= \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} -z^{-2} a_{ijk} \\ u_1 a_{ijk} + z b_{ijk} \\ u_2 a_{ijk} + z c_{ijk} \end{pmatrix} z^{i-j-k} (z u_1)^j (z u_2)^k \\ &= \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} -\xi^2 a_{ijk} \\ \xi v_1 a_{ijk} + \xi^{-1} b_{ijk} \\ \xi v_2 a_{ijk} + \xi^{-1} c_{ijk} \end{pmatrix} \xi^{j+k-i} v_1^j v_2^k \\ &= \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} -\xi^2 a_{ijk} \\ \xi v_1 a_{ijk} + \xi^{-1} b_{ijk} \\ \xi v_2 a_{ijk} + \xi^{-1} c_{ijk} \end{pmatrix} \xi \cdot \xi^{j+k-i-1} v_1^j v_2^k \\ &= \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} -\xi^3 a_{ijk} \\ \xi^2 v_1 a_{ijk} + b_{ijk} \\ \xi^2 v_2 a_{ijk} + c_{ijk} \end{pmatrix} \xi^{j+k-i-1} v_1^j v_2^k. \end{aligned}$$

Los elementos de $J_{W_1}\sigma'$ holomorfos en V , son aquellos que verifican $j+k-i-1 \geq 0$, es decir:

$$\boxed{j + k - i \geq 1}. \quad (5.12)$$

Notemos que los índices verifican las relaciones $j, k \geq 0$, $i \leq -1 \Rightarrow -i \geq 1 \Rightarrow j + k - i \geq 1$, luego (5.12) se cumple para todo i, j, k . Por tanto $J_{W_1}\sigma' \sim 0$ y se sigue que:

$$H^1(W_1, TW_1) = 0.$$

□

Lema 5.2.2. $H^1(W_2, TW_2)$ es generado como espacio vectorial sobre \mathbb{C} , por los cociclos de la forma $(0, z^{-1}u_2^k, 0)^t, k \geq 0$ (escritos en coordenadas canónicas).

Demostración. En coordenadas canónicas, el cambio de coordenadas para W_2 es:

$$\boxed{(\xi, v_1, v_2) \mapsto (z^{-1}, z^2u_1, u_2)}. \quad (5.13)$$

La matriz de transición del fibrado tangente de W_2 es la jacobiana del cambio de coordenadas definido en (5.13), esto es:

$$J_{W_2} = \begin{pmatrix} -z^{-2} & 0 & 0 \\ 2zu_1 & z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

Procedemos ahora a calcular $H^1(W_2, TW_2)$. Análogamente a la prueba del lema 5.2.1, un 1-cociclo general, es de la forma:

$$\sigma = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} a_{ijk} \\ b_{ijk} \\ c_{ijk} \end{pmatrix} z^i u_1^j u_2^k.$$

Quitando los términos holomorfos en la carta U , tenemos:

$$\sigma \sim \sigma' = \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} a_{ijk} \\ b_{ijk} \\ c_{ijk} \end{pmatrix} z^i u_1^j u_2^k.$$

Para quitar los elementos holomorfos en la carta V , multiplicamos por la matriz J_{W_2} definida en (5.14), obteniendo:

$$\begin{aligned}
 J_{W_2}\sigma' &= \begin{pmatrix} -z^{-2} & 0 & 0 \\ 2zu_1 & z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} a_{ijk} \\ b_{ijk} \\ c_{ijk} \end{pmatrix} z^i u_1^j u_2^k \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} -z^{-2}a_{ijk} \\ 2zu_1a_{ijk} + z^2b_{ijk} \\ c_{ijk} \end{pmatrix} z^i u_1^j u_2^k \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} -z^{-2}a_{ijk} \\ 2zu_1a_{ijk} + z^2b_{ijk} \\ c_{ijk} \end{pmatrix} z^{i-2j} (z^2u_1)^j u_2^k \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} -\xi^2a_{ijk} \\ 2\xi v_1a_{ijk} + \xi^{-2}b_{ijk} \\ c_{ijk} \end{pmatrix} \xi^{2j-i} v_1^j v_2^k \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} -\xi^2a_{ijk} \\ 2\xi v_1a_{ijk} + \xi^{-2}b_{ijk} \\ c_{ijk} \end{pmatrix} \xi^2 \xi^{2j-i-2} v_1^j v_2^k \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} -\xi^4a_{ijk} \\ 2\xi^3v_1a_{ijk} + b_{ijk} \\ \xi^2c_{ijk} \end{pmatrix} \xi^{2j-i-2} v_1^j v_2^k.
 \end{aligned}$$

Los elementos de $J_{W_2}\sigma'$ holomorfos en V , son aquellos que verifican $2j - i - 2 \geq 0$, es decir:

$$\boxed{2j - i \geq 2}. \tag{5.15}$$

Como $j \geq 0$ e $i \leq -1$, entonces $2j - i \geq 1$. Luego (5.15) no se verifica sólo en el caso $i = -1$ y $j = 0$. Por lo tanto, quitando en $J_{W_2}\sigma'$ los términos holomorfos en la carta V , esto es, haciendo $j = 0$ e $i = -1$ obtenemos la relación:

$$J_{W_2}\sigma' \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} -\xi^4a_{-10k} \\ 2\xi^3v_1a_{-10k} + b_{-10k} \\ \xi^2c_{-10k} \end{pmatrix} \xi^{-1}v_2^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} -\xi^3a_{-10k} \\ 2\xi^2v_1a_{-10k} + \xi^{-1}b_{-10k} \\ \xi c_{-10k} \end{pmatrix} v_2^k.$$

Notemos que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} -\xi^3 a_{-10k} \\ 2\xi^2 v_1 a_{-10k} \\ \xi c_{-10k} \end{pmatrix} v_2^k$$

es holomorfo en V , por lo tanto puede ser removido de $J_{W_2}\sigma'$. Se sigue que:

$$J_{W_2}\sigma' \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^{-1} b_{-10k} \\ 0 \end{pmatrix} v_2^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} 0 \\ b_{-10k} \\ 0 \end{pmatrix} \xi^{-1} v_2^k.$$

En consecuencia, los generadores de la cohomología en coordenadas V son:

$$\left(\begin{array}{c} 0 \\ \xi^{-1} v_2^k \\ 0 \end{array} \right)_{k \geq 0}.$$

Para volver a la notación en coordenadas U , multiplicamos por $J_{W_2}^{-1}$ (escrita en coordenadas V), es decir:

$$J_{W_2}^{-1} = \begin{pmatrix} -\xi^{-2} & 0 & 0 \\ 2\xi v_1 & \xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\xi^{-2} & 0 & 0 \\ 2\xi v_1 & \xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^{-1} v_2^k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi v_2^k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z^{-1} u_2^k \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Por lo tanto,

$$H^1(W_2, TW_2) = \langle z^{-1} u_2^k \rangle_{k \geq 0}.$$

Como k puede tomar infinitos valores, es inmediato que la dimensión de la cohomología es infinita, lo que denotamos:

$$h((W_2, TW_2)) = +\infty.$$

□

Capítulo 6

Deformaciones de W_k ; $k=1,2$.

Este capítulo está dedicado al estudio de las deformaciones de las 3-variedades Calabi-Yau del tipo:

$$W_k := \text{Tot}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-k) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k-2)), \quad k = 1, 2.$$

Hasta ahora hemos hablado de W_k , como variedades Calabi-Yau para todo k . Sin embargo no hemos probado que efectivamente lo sean. Antes de mostrar los resultados sobre deformaciones, veamos que efectivamente W_k es Calabi-Yau para todo k positivo. Vamos a probar que el fibrado canónico es trivial. Primero, recordemos que el cambio de coordenadas para W_k está dado por

$$(\xi, v_1, v_2) = (z^{-1}, z^k u_1, z^{2-k} u_2) \quad (6.1)$$

Por definición, el fibrado canónico está dado por la máxima potencia exterior de su fibrado cotangente. Si denotamos por K_{W_k} al fibrado canónico de W_k y TW_k^\vee es el dual del tangente, entonces:

$$K_{W_k} = \bigwedge^3 TW_k^\vee$$

Si denotamos por J a la matriz de transición del fibrado tangente (jacobiana del cambio de coordenadas en 6.1), entonces el fibrado TW_k^\vee tiene como función de transición, la matriz inversa traspuesta de la del fibrado tangente, esto es:

$$J^\vee = (J^{-1})^T = \begin{pmatrix} -z^2 & kzu_1 & (2-k)z^{-1} \\ 0 & z^{-k} & 0 \\ 0 & 0 & z^{k-2} \end{pmatrix}.$$

Luego

$$K_{W_k} = \bigwedge^3 TW_k^\vee = \det((J^{-1})^T) = -1$$

y por tanto el fibrado canónico es trivial para todo k positivo. De este modo, vemos que W_k es efectivamente Calabi-Yau. A continuación veremos los resultados obtenidos en el estudio de deformaciones de la estructura compleja para los $k = 1, 2$. Probaremos en 6.1 que W_1 no tiene deformaciones. Sin embargo, veremos que para W_2 , el estudio de las deformaciones, es mucho más interesante, probaremos que W_2 tiene un espacio de deformaciones infinito dimensional y mostraremos una familia de deformaciones de dimensión infinita. Dado el hecho de que es equivalente dar una variedad suave o dar su fibrado tangente, para estudiar las deformaciones de W_2 vamos a considerar 2 casos, por un lado las deformaciones del fibrado tangente y por otro, las de la variedad misma. Veremos que los 2 métodos dan información equivalente.

6.1. Deformaciones de W_1

Teorema 6.1.1. W_1 no posee deformaciones.

Demostración. Las deformaciones de estructuras complejas de una variedad X , son parametrizadas por $H^1(X, TX)$, por lema 5.2.1 $H^1(W_1, TW_1) = 0$, luego W_1 no tiene deformaciones. \square

6.2. Deformaciones de W_2 .

Hasta ahora, tenemos que, por lema 5.2.2, $H^1(W_2, TW_2)$ tiene dimensión infinita, lo cual sugiere que el espacio de deformaciones de esta 3 -fold es infinito dimensional.

6.2.1. Deformación del Fibrado Tangente

En primer lugar, para hallar deformaciones de W_2 mediante deformaciones de su fibrado tangente TW_2 , lo que haremos será deformar la matriz de transición que determina al fibrado en coordenadas canónicas. Dado que todo fibrado

vectorial algebraico sobre W_2 es filtrable [TK, Cor. 3.12.], se sigue que todo fibrado vectorial holomorfo sobre W_2 puede ser representado mediante una matriz triangular superior, por lo tanto, para deformar TW_2 lo que haremos será agregar elementos no triviales en cohomología para perturbar la matriz de cambio de coordenadas. Por mera simplicidad, trabajaremos con la matriz J' definida en (6.2), pues define un fibrado isomorfo a TW_2 . Vamos a perturbar J' agregando elementos no triviales en cohomología en las entradas (1,2), (1,3) y (2,3), (así la nueva matriz seguirá siendo triangular superior). Para esto, consideraremos primero subfibrados de rango dos, los cuales definen clases de extensiones y que por lema 4.0.13, podemos relacionar con las clases de cohomología asociadas.

Sea J_{W_2} la matriz de transición del fibrado tangente de W_2 definida en (5.14). En vista de la observación 4.0.12 y de la filtrabilidad de fibrados holomorfos sobre W_2 , notemos que:

$$J_{W_2} \sim J' = \begin{pmatrix} z^2 & 2zu_1 & 0 \\ 0 & -z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

aquí \sim significa que J y J' definen fibrados isomorfos sobre W_2 . Luego tenemos la siguiente situación:

Denotemos por $M_{m,l}$ la matriz resultante de eliminar la m -ésima fila y la l -ésima columna en J' . Entonces, obtenemos que

1. $M_{1,1} = \begin{pmatrix} -z^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
2. $M_{2,2} = \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
3. $M_{3,3} = \begin{pmatrix} z^2 & 2zu_1 \\ 0 & z^{-2} \end{pmatrix}$.

Lema 6.2.1. *La matriz*

$$M_{1,1} = \begin{pmatrix} -z^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

no da a lugar a deformaciones de TW_2 .

Demostración. El objetivo es encontrar un matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} z^2 & 2zu_1 & 0 \\ 0 & -z^{-2} & *_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $*_1 = z^{-2}\sigma_t$, con σ_t un elemento no trivial en cohomología. La matriz $M_{1,1}$ define una extensión de fibrados del tipo:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{W_2}(2) \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}_{W_2} \rightarrow 0.$$

Así, el fibrado E que es dado por la matriz $M_{1,1}$ define una clase de extensión en $\text{Ext}^1(\mathcal{O}_{W_2}, \mathcal{O}_{W_2}(2))$. Por lema 4.0.13, $\text{Ext}^1(\mathcal{O}_{W_2}, \mathcal{O}_{W_2}(2)) \cong H^1(W_2, \mathcal{O}_{W_2}(2))$. Por lema 5.1.1 $H^1(W_2, \mathcal{O}_{W_2}(2)) = 0$. Concluimos que $\text{Ext}^1(\mathcal{O}_{W_2}, \mathcal{O}_{W_2}(2)) = 0$, por tanto $\sigma_t = 0 \Rightarrow *_1 = 0$, luego $M_{1,1}$ no da lugar a deformaciones de W_2 . \square

Lema 6.2.2. *La matriz*

$$M_{2,2} = \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da lugar a deformaciones de TW_2 correspondientes a fibrados con matrices de transición σ_t de la forma:

$$\begin{pmatrix} z^2 & 2zu_1 & zu_2^t \\ 0 & -z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde σ_t es de la forma $\sigma_t = z^{-1}u_2^t; t \in \mathbb{Z}_0^+$.

Demostración. Nuevamente, el objetivo es encontrar un matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} z^2 & 2zu_1 & *_2 \\ 0 & -z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $*_2 = z^2\sigma_t$, con σ_t un elemento no trivial en cohomología. La submatriz

$$M_{2,2} = \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

define una extensión:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{W_2}(-2) \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}_{W_2} \rightarrow 0.$$

Es decir, un elemento en $\text{Ext}^1(\mathcal{O}_{W_2}, \mathcal{O}_{W_2}(-2)) \cong H^1(W_2, \mathcal{O}_{W_2}(-2))$. Como vimos en (5.8) el grupo $H^1(W_2, \mathcal{O}_{W_2}(-2))$ es generado por las secciones de la forma:

$$\sigma_t = z^{-1}u_2^t; \quad t \geq 0, \quad (6.3)$$

por tanto $*_2 = z^2 \cdot z^{-1}u_2^t = zu^t$. A cada clase de extensión σ_t , le corresponde una matriz $J(\sigma_t)$, con σ_t como en (6.3), luego $M_{2,2}$ da lugar a deformaciones de TW_2 de la forma:

$$\begin{pmatrix} z^2 & 2zu_1 & zu_2^t \\ 0 & -z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Lema 6.2.3. *La familia de fibrados obtenidos en lema 6.2.2, no da lugar a deformaciones de la variedad W_2 .*

Demostración. Supongamos que la matriz

$$J(\sigma_t) = \begin{pmatrix} z^2 & 2zu_1 & zu_2^t \\ 0 & -z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

define una deformación del fibrado tangente, que da lugar a una deformación de W_2 . Es decir, buscamos una variedad Y cuyo fibrado tangente TY , esté dado por la matriz $J(\sigma_t)$. Por lo tanto, buscamos $f : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ holomorfa, tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} &= z^2 \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} &= 2zu_1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_2} &= zu_2^t. \end{aligned}$$

Si tal f existiera, por ser holomorfa, deberían verificarse que estas derivadas son iguales:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f_1}{\partial u_2 \partial z} &= 0 \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial u_2} &= u_2^t.\end{aligned}$$

Como $u_2^t \neq 0, \forall t \in \mathbb{Z}$ concluimos que no existe tal función y por lo tanto, la matriz $J(\sigma_t)$ no define un fibrado tangente TY , pues no existe tal variedad Y . Luego, la familia de fibrados obtenidos en lema 6.2.2, no da lugar a deformaciones de la variedad W_2 . \square

Lema 6.2.4. *La matriz*

$$M_{3,3} = \begin{pmatrix} z^2 & 2zu_1 \\ 0 & z^{-2} \end{pmatrix}$$

da lugar a deformaciones de TW_2 de la forma:

$$\begin{aligned}1. & \begin{pmatrix} z^2 & 2zu_1 + zu_2^t & 0 \\ 0 & -z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 2. & \begin{pmatrix} z^2 & 2zu_1 + u_2^t & 0 \\ 0 & -z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 3. & \begin{pmatrix} z^2 & 2zu_1 + z^{-1}u_2^t & 0 \\ 0 & -z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 4. & \begin{pmatrix} z^2 & 2zu_1 + zu_1u_2^t & 0 \\ 0 & -z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Demostración. Vamos a obtener cada una de las matrices 1 a 4, mediante un procedimiento análogo a las demostraciones de los lemas 6.2.2, 6.2.3. El objetivo es encontrar un matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} z^2 & 2zu_1 + *_3 & 0 \\ 0 & -z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $*_3 = z^2\sigma_t$, con σ_t un elemento no trivial en cohomología. La matriz

$$M_{3,3} = \begin{pmatrix} z^2 & 2zu_1 \\ 0 & -z^{-2} \end{pmatrix},$$

define una extensión de la forma:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{W_2}(-2) \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}_{W_2}(2) \rightarrow 0,$$

es decir, un elemento en $\text{Ext}^1(\mathcal{O}_{W_2}(2), \mathcal{O}_{W_2}(-2)) \cong H^1(W_2, \mathcal{O}_{W_2}(-4))$. De (5.9) sabemos que $H^1(W_2, \mathcal{O}_{W_2}(-4))$ es generado por las secciones generadas por:

$$\sigma_t = z^{-1}u_2^t, z^{-2}u_2^t, z^{-3}u_2^t, z^{-1}u_1u_2^t; \quad t \geq 0. \quad (6.5)$$

A cada clase de extensión σ_t , le corresponde una matriz $J(\sigma_t)$, con σ_t como en (6.5), luego $M_{3,3}$ da lugar a deformaciones de TW_2 de la forma:

$$\begin{pmatrix} z^2 & 2zu_1 + z^2\sigma_t & 0 \\ 0 & -z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dependiendo del σ_t escogido, obtenemos cada una de las matrices deseadas, esto es:

1. Para $\sigma_t = z^{-1}u_2^t$ tenemos:

$$J_1(\sigma_t) = \begin{pmatrix} z^2 & 2zu_1 + zu_2^t & 0 \\ 0 & -z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Para $\sigma_t = z^{-2}u_2^t$ tenemos:

$$J_2(\sigma_t) = \begin{pmatrix} z^2 & 2zu_1 + u_2^t & 0 \\ 0 & -z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Para $\sigma_t = z^{-3}u_2^t$ tenemos:

$$J_3(\sigma_t) = \begin{pmatrix} z^2 & 2zu_1 + z^{-1}u_2^t & 0 \\ 0 & -z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Para $\sigma_t = z^{-1}u_1u_2^t$ tenemos:

$$J_4(\sigma_t) = \begin{pmatrix} z^2 & 2zu_1 + zu_1u_2^t & 0 \\ 0 & -z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir, hemos obtenido las cuatro familias de deformaciones esperadas. \square

Para determinar si la familia de fibrados obtenidos en lema 6.2.4, da lugar a deformaciones de W_2 procedemos como en la prueba del lema 6.2.3. Vamos a determinar la integrabilidad de las entradas de tales matrices, lo cual nos permitirá saber si ellas definen una deformación de TW_2 que dé lugar a una deformación de W_2 . Observemos la integrabilidad caso a caso:

- $J_1(\sigma_t)$: No verifica igualdad de las derivadas mixtas.
- $J_2(\sigma_t)$: Es integrable, pero la dirección es trivial, pues cada una de las deformaciones, define fibrados isomorfos al original.
- $J_3(\sigma_t)$: La entrada $2zu_1 + z^{-1}u_2^t$ no es integrable.
- $J_4(\sigma_t)$: No verifica igualdad de las derivadas mixtas.

Para ver que $J_1(\sigma_t)$ y $J_4(\sigma_t)$ no verifican igualdad de las derivadas mixtas, el procedimiento es análogo al visto en lema 6.2.3. Luego no dan lugar a deformaciones de W_2 .

A continuación, presentamos una familia de deformaciones de W_2 mediante el método de deformar su fibrado tangente TW_2 :

Lema 6.2.5. *La familia de fibrados dados por las matrices*

$$J(t) = \begin{pmatrix} z^2 & 2zu_1 + \frac{u_2^{t+1}}{t+1} & zu_2^t \\ 0 & -z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad t \geq 0$$

define una familia de dimensión infinita de deformaciones de W_2 .

Demostración. Primero vamos a mostrar la integrabilidad de las entradas de la matriz y luego describiremos la familia de deformaciones de W_2 a las que da lugar

$$J(t) = \begin{pmatrix} z^2 & 2zu_1 + \frac{u_2^{t+1}}{t+1} & zu_2^t \\ 0 & -z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

La primera fila, corresponde a las derivadas parciales de f_1 con respecto a u_1, z, u_2 respectivamente, es decir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} &= z^2 \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} &= 2zu_1 + \frac{u_2^{t+1}}{t+1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_2} &= zu_2^t. \end{aligned}$$

Tomando derivadas mixtas tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial u_1} &= 2z = \frac{\partial^2 f_1}{\partial u_1 \partial z} \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial u_2 \partial z} &= u_2^t = \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial u_2} \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial u_2 \partial u_1} &= 0 = \frac{\partial^2 f_1}{\partial u_1 \partial u_2}. \end{aligned}$$

Se sigue que f_1 debe ser de la forma:

$$f_1(u_1, z, u_2) = z^2 u_1 + \frac{zu_2^{t+1}}{t+1}; t \geq 0. \quad (6.7)$$

Esto significa que para cada entero $t \geq 0$, (6.6) define una deformación de TW_2 que denotamos $TY(t)$. Luego, para cada $t \geq 0$, tenemos una 3-variedad $Y(t)$ que corresponde a una deformación de W_2 . \square

Resumimos esto en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} TW_2 & \rightsquigarrow & TY(t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ W_2 & \rightsquigarrow & Y(t) \end{array}$$

donde notación \rightsquigarrow indica deformación. Tomando f_1 como en 6.7, tenemos una familia de deformaciones $Y(t)$ de W_2 de la forma:

$$(\xi, v_1, v_2) = \left(z^{-1}, z^2 u_1 + \frac{z u_2^{t+1}}{t+1}, u_2 \right), t \geq 0. \quad (6.8)$$

6.3. Una familia de deformaciones de dimensión infinita para W_2 .

En esta sección, vamos a demostrar el principal resultado de este trabajo de tesis que es: La existencia de una familia de dimensión infinita, que parametriza deformaciones de W_2 . Este es un resultado sorprendente, pues hasta antes de demostrar el teorema 6.3.2, solamente conocíamos una dirección de deformación de W_2 que provenía de deformaciones de la superficie Z_2 en [BG]. Primero probaremos un lema esencial para obtener el teorema principal y posteriormente, enunciaremos y probaremos dicho teorema.

Lema 6.3.1. *Todos los cociclos en $H^1(W_2, TW_2)$ son integrables.*

Demostración. En notación matricial, podemos escribir la función de transición de W_2 como:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{-1} \\ z^2 u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Como vimos en lema 5.2.2, $H^1(W_2, TW_2)$ es generado por las secciones

$$\begin{pmatrix} 0 \\ z^{-1} u_2^k \\ 0 \end{pmatrix}$$

para $k \geq 0$. Entonces, podemos expresar la familia de deformaciones para W_2

como:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} z \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \sum_{k \geq 0} t_k \begin{pmatrix} 0 \\ z^{-1}u_2^k \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} z^{-1} \\ z^2u_1 + \sum_{k \geq 0} t_k z u_2^k \\ u_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

es decir, tenemos una familia de deformaciones de dimensión infinita dada por

$$U = \mathbb{C}_{z,u_1,u_2}^3 \times \mathbb{C}[t_k] \quad y \quad V = \mathbb{C}_{\xi,v_1,v_2}^3 \times \mathbb{C}[t_k]$$

con

$$(\xi, v_1, v_2, t_0, t_1, \dots) = (z^{-1}, z^2u_1 + \sum_{k \geq 0} t_k z u_2^k, u_2, t_0, t_1, \dots)$$

sobre la intersección $U \cap V = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}[t_k]$. □

Teorema 6.3.2. *W_2 tiene una familia de deformaciones de dimensión infinita. Tal familia es de la forma:*

$$(\xi, v_1, v_2, t_0, t_1, \dots) = (z^{-1}, z^2u_1 + \sum_{j \geq 0} t_j z u_2^j, u_2, t_0, t_1, \dots)$$

con

$$U = \mathbb{C}_{z,u_1,u_2}^3 \times \mathbb{C}[t_j] \quad y \quad V = \mathbb{C}_{\xi,v_1,v_2}^3 \times \mathbb{C}[t_j],$$

sobre la intersección, se verifica que: $U \cap V = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}[t_j]$.

Demostración. La prueba se sigue de los lemas 5.2.2 y 6.3.1. El primero muestra que $H^1(W_2, TW_2)$ es infinito dimensional y el segundo, que sus cociclos son integrables, así, ellos parametrizan las deformaciones de W_2 . □

Observación 6.3.3. *Notemos que las direcciones de deformación de W_2 obtenidas en (6.8), mediante deformaciones del fibrado tangente TW_2 , corresponden a direcciones contempladas en la familia presentada en 6.3.2.*

Concluimos que el estudio de las deformaciones de W_2 , tanto por medio de deformaciones de su fibrado tangente como deformaciones de la variedad misma (deformando la función de transición) tiene un interesante desarrollo, por cuanto hemos probado que su espacio de deformaciones, es infinito dimensional y exhibimos una familia de dimensión infinita, que parametriza deformaciones de W_2 .

Apéndice A

Un fibrado holomorfo que no es algebraico.

Como se puede ver en [BG], todo fibrado vectorial holomorfo sobre Z_k , es algebraico. Sin embargo, así como el caso de las deformaciones es diferente para W_k es diferente al de Z_k , también tenemos que el resultado recién citado, no se verifica para W_3 , en particular, mostraremos un fibrado vectorial holomorfo sobre W_3 , que no es algebraico.

A.1. Un fibrado holomorfo sobre $Z_{(-1)}$ que no es algebraico.

Por definición $Z_{(-1)} = \text{Tot}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(+1))$, y en coordenadas canónicas $Z_{(-1)} = U \cup V$, donde $U = \{(z, u)\}$ y $V = \{(\xi, v)\}$, $U \cap V \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, con cambio de coordenadas dado por:

$$\boxed{(\xi, v) \mapsto (z^{-1}, z^{-1}u)}$$

Lemma 1. $H^1(Z_{(-1)}, \mathcal{O}(-2))$ es infinito dimensional, generado como espacio vectorial sobre \mathbb{C} por los monomios $z^l u^i$ con $l = -2, -1$ e $i = 1, 2, \dots$

Demostración. Un 1-cociclo σ puede ser escrito en la forma

$$\sigma = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sigma_{i,l} z^l u^i .$$

Como los monomios que contienen potencias no negativas de z , son holomorfos en U , estos son cobordes, así

$$\sigma \sim \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{-1} \sigma_{i,l} z^l u^i,$$

donde \sim denota equivalencia cohomológica. Cambiando coordenadas, obtenemos

$$T\sigma = z^2 \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{-1} \sigma_{i,l} z^l u^i = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{-1} \sigma_{i,l} z^{l+2} u^i,$$

donde los términos que satisfacen $l + 2 \leq -1$ son holomorfos en V . Así, los elementos no triviales en $H^1(Z_{(-1)}, \mathcal{O}(-2))$ son aquellos que tienen $l = -2$ ó $l = -1$. Por lo tanto

$$H^1(Z_{(-1)}, \mathcal{O}(-2)) = \langle z^l u^i : l = -2, -1, i \geq 1 \rangle.$$

□

Proposición A.1.1. *El fibrado E sobre $Z_{(-1)}$ definido en coordenadas canónicas por la matriz*

$$\begin{bmatrix} z^1 & z^{-1}e^u \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

es holomorfo pero no es algebraico.

Demostración. Este fibrado E puede ser representado por el elemento

$$z^{-1}e^u \in \text{Ext}^1(\mathcal{O}(1), \mathcal{O}(-1)) \simeq H^1(Z_{(-1)}, \mathcal{O}(-2)).$$

Tenemos que

$$\begin{bmatrix} z^1 & z^{-1}e^u \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^1 & z\sigma \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

con $z^{-2}e^u = \sigma \in H^1(Z_{(-1)}, \mathcal{O}(-2))$, ver [Har, p. 234]. Observemos que

$$\begin{aligned} z^{-2}e^u &= z^{-2} \left(1 + u + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^n}{n!} + \cdots \right) \\ &= z^{-2} + \underbrace{z^{-2} \left(u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \cdots + \frac{u^n}{n!} + \cdots \right)}_{(\gamma)}, \end{aligned}$$

donde los monomios en $\gamma \in \langle z^l u^i : l = -2, -1, i \geq 1 \rangle$ representan pares distintos de clases no triviales en $H^1(Z_{(-1)}, \mathcal{O}(-2))$ como se mostró en Lema 1. Consecuentemente, la clase $z\sigma \in \text{Ext}^1(\mathcal{O}(1), \mathcal{O}(-1))$ correspondiente al fibrado E no puede ser representada por un polinomio, por lo tanto E es holomorfo pero no algebraico. \square

Corolario A.1.2. *La 3-variedad W_3 tiene fibrados holomorfos que no son algebraicos.*

Demostración. Consideremos la aplicación $p: W_3 \rightarrow Z_{(-1)}$ dada por la proyección sobre la primera y tercera coordenada, esto es, en coordenadas canónicas como en (??) vemos $Z_{(-1)}$ como un corte dentro de W_3 por la ecuación $u_1 = 0$. Entonces el fibrado pullback p^*E es holomorfo pero no algebraico sobre W_3 . \square

A.1.1. A similar bundle on Z_1

Es instructivo, verificar el resultado de definir un fibrado por la misma matriz, pero sobre Z_1 . Recordemos que $Z_1 = U \cup V$, con cambio de coordenadas dado por:

$$\boxed{(\xi, v) \mapsto (z^{-1}, zu)}$$

Consideremos el fibrado E sobre Z_1 , dado por la matriz de transición

$$\begin{bmatrix} z^1 & z^{-1}e^u \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Note que es la matriz usando en (A.1). Así E corresponde al elemento $z^{-1}e^u \in \text{Ext}^1(\mathcal{O}(1), \mathcal{O}(-1)) \simeq H^1(Z_1, \mathcal{O}(-2))$. Consecuentemente, podemos reescribir la función de transición como

$$\begin{bmatrix} z^1 & z^{-1}e^u \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^1 & z\sigma \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

donde $z^{-2}u = \sigma \in H^1(Z_1, \mathcal{O}(-2))$. Pero $\sigma = \xi^3 v$ es holomorfo sobre la carta V , y por lo tanto un coborde. Así, $\sigma = 0 \in H^1(Z_1, \mathcal{O}(-2))$, y entonces $z^{-1}e^u = 0 \in \text{Ext}^1(\mathcal{O}(1), \mathcal{O}(-1))$. Por lo tanto, la extensión se escinde y

$$E = \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1) .$$

Apéndice B

Comparación con la teoría de Kuranishi.

En la sección 6.2 hemos calculado deformaciones de TW_2 necesarias para estudiar las deformaciones de W_2 . A continuación, presentamos una herramienta complementaria para el estudio de las deformaciones, en línea con la teoría de deformaciones desarrollada por Kuranishi, la cual está enfocada en las deformaciones de fibrados. Por contraparte, la teoría de Kodaira está dirigida al estudio de las deformaciones de variedades complejas. En este apéndice, vamos a calcular las deformaciones del fibrado TW_2 y veremos que su espacio de deformaciones es más amplio que el de W_2 , pues tiene más direcciones de deformación.

B.1. $H^1(W_2, \text{End}(TW_2))$

El resultado fundamental de la teoría de Kuranishi, es que el espacio de deformaciones de un fibrado E , está parametrizado por la primera cohomología, con coeficientes en $\text{End } E$. Dado un fibrado E sobre una variedad M , se define un nuevo fibrado $\text{End } E$, llamado *fibrado endomorfismo*, el cual está dado por:

$$\text{End}(E) = E^\vee \otimes E.$$

Para el caso TW_2 , tenemos:

$$\text{End}(TW_2) = TW_2^\vee \otimes TW_2$$

Aquí, E^\vee denota el fibrado dual de E . En términos de matrices, esto nos queda:

$$\text{End}(TW_2) = J^\vee \otimes J$$

donde J es la jacobiana del cambio de coordenadas y J^\vee su inversa traspuesta, esto es:

$$J = \begin{pmatrix} -z^{-2} & 0 & 0 \\ 2zu_1 & z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad J^\vee = (J^{-1})^T = \begin{pmatrix} -z^2 & 2zu_1 & 0 \\ 0 & z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego el producto $J^\vee \otimes J$ es:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -z^2 & 2zu_1 & 0 \\ 0 & z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot -z^{-2} & \begin{pmatrix} -z^2 & 2zu_1 & 0 \\ 0 & z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 0 & \begin{pmatrix} -z^2 & 2zu_1 & 0 \\ 0 & z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 0 \\ \begin{pmatrix} -z^2 & 2zu_1 & 0 \\ 0 & z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 2zu_1 & \begin{pmatrix} -z^2 & 2zu_1 & 0 \\ 0 & z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z^2 & \begin{pmatrix} -z^2 & 2zu_1 & 0 \\ 0 & z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 0 \\ \begin{pmatrix} -z^2 & 2zu_1 & 0 \\ 0 & z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 0 & \begin{pmatrix} -z^2 & 2zu_1 & 0 \\ 0 & z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 0 & \begin{pmatrix} -z^2 & 2zu_1 & 0 \\ 0 & z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 1 \end{pmatrix}$$

se sigue que

$$J^\vee \otimes J = \begin{pmatrix} 1 & -2z^{-1}u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2z^3u_1 & 4z^2u_1^2 & 0 & -z^4 & 2z^3u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2z^{-1}u_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2z_1^u & 0 & 0 & z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z^2 & 2zu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Recordemos que el cambio de coordenadas de W_2 es: $(\xi, v_1, v_2) = (z^{-1}, z^2u_1, u_2)$. Toda 1-cocadena σ con valores en $\text{End} TW_2$ es un 1-cociclo y se puede escribir en

la forma:

$$\sigma = \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} a_{ist}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{ist}^{(9)} \end{pmatrix} z^i u_1^s u_2^t.$$

Note que $a_{ist}^{(j)}$, $j = 1, \dots, 9$ denota la j -ésima componente del vector columna de los coeficientes. Además, quitando los términos holomorfos en la carta U , obtenemos:

$$\sigma \sim \sigma' = \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{-1} \begin{pmatrix} a_{ist}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{ist}^{(9)} \end{pmatrix} z^i u_1^s u_2^t.$$

Para cambiar coordenadas, multiplicamos por la matriz de transición del fibrado, obteniendo:

$$(J^\vee \otimes J)\sigma' = \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} a_{ist}^{(1)} - 2a_{ist}^{(2)} z^{-1} u_1 \\ -a_{ist}^{(2)} z^{-4} \\ -a_{ist}^{(3)} z^{-2} \\ -2a_{ist}^{(1)} z^3 u_1 + 4a_{ist}^{(2)} z^2 u_1^2 - a_{ist}^{(4)} z^4 + 2a_{ist}^{(5)} z^3 u_1 \\ 2a_{ist}^{(2)} z^{-1} u_1 + a_{ist}^{(5)} \\ 2a_{ist}^{(3)} z u_1 + a_{ist}^{(6)} z^2 \\ -a_{ist}^{(7)} z^2 + 2a_{ist}^{(8)} z u_1 \\ a_{ist}^{(8)} z^{-2} \\ a_{ist}^{(9)} \end{pmatrix} z^i u_1^s u_2^t. \quad (\text{B.2})$$

Observemos que del cambio de coordenadas, se tienen las relaciones:

$$\begin{aligned} z^{-1} u_1 &= z^{-3} z^2 u_1 &= \xi^3 v_1 \\ z^3 u_1 &= z^1 z^2 u_1 &= \xi^{-1} v_1 \\ z^2 u_1^2 &= z^{-2} (z^2 u_1)^2 &= \xi^2 v_1^2 \\ z u_1 &= z^{-1} z^2 u_1 &= \xi v_1 \end{aligned}$$

Sustituyendo en (B.2), tenemos:

$$\sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} a_{ist}^{(1)} - 2a_{ist}^{(2)} \xi^3 v_1 \\ -a_{ist}^{(2)} \xi^4 \\ -a_{ist}^{(3)} \xi^2 \\ -2a_{ist}^{(1)} \xi^{-1} v_1 + 4a_{ist}^{(2)} \xi^2 v_1^2 - a_{ist}^{(4)} \xi^{-4} + 2a_{ist}^{(5)} \xi^{-1} v_1 \\ 2a_{ist}^{(2)} \xi^3 v_1 + a_{ist}^{(5)} \\ 2a_{ist}^{(3)} \xi v_1 + a_{ist}^{(6)} \xi^{-2} \\ -a_{ist}^{(7)} \xi^{-2} + 2a_{ist}^{(8)} \xi v_1 \\ a_{ist}^{(8)} \xi^2 \\ a_{ist}^{(9)} \end{pmatrix} \xi^{2s-i} v_1^s v_2^t. \quad (\text{B.3})$$

Quitando en (B.3) los términos holomorfos en la carta V , nos queda:

$$(J^\vee \otimes J)\sigma' \sim \sum_{t=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -a_{-10t}^{(4)} \xi^{-3} - a_{-20t}^{(4)} \xi^{-2} - a_{-30t}^{(4)} \xi^{-1} - a_{-11t}^{(4)} \xi^{-3} v_1 \\ 0 \\ -a_{-10t}^{(6)} \xi^{-1} \\ -a_{-10t}^{(7)} \xi^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_2^t.$$

De modo que los generadores de $H^1(W_2, \text{End}(TW_2))$ son:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ z^{-1} u_2^t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ z^{-2} u_2^t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ z^{-3} u_2^t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ z^{-1} u_1 u_2^t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z^{-1} u_2^t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z^{-1} u_2^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \geq 0.$$

Este resultado, prueba que el espacio de deformaciones de TW_2 es infinito dimensional, así como también lo es el de W_2 , sin embargo, tenemos más direcciones de deformación para TW_2 que para W_2 . En términos geométricos, no todas las direcciones a partir del cálculo de la cohomología dan lugar a deformaciones ya sea de W_2 como de su fibrado tangente. A partir de este último cálculo, vemos que la cohomología con coeficientes en $\text{End } TW_2$ puede dar lugar a deformaciones de TW_2 como variedad, que no se corresponden con deformaciones de W_2 .

Bibliografía

- [BA] BALLICO, E., *Rank 2 vector bundles in a neighborhood of an exceptional curve of a smooth surface*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 29 (4):1185-1193, 1999.
- [BG] BARMEIER, S., GASPARIM, E., *Classical Deformations of local surfaces and their moduli of vector bundles*, 2016 (submitted).
- [EG] GASPARIM, E., *Holomorphic bundles on $\mathcal{O}(-k)$ are algebraic*, Communications in algebra, 25 (9):3001-3009, 1997.
- [GH] GRIFFITHS, P., HARRIS, J., *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1994, Reprint of the 1978 original. MR 1288523 (95d:14001).
- [Har] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No.52.
- [Hori et al] K. HORI, S. KATZ, A. KLEMM, R. PANDHARIPANDE, R. THOMAS, C. VAFA, R. VAKIL, AND E. ZASLOW, *Mirror symmetry*, vol. 1 of Clay Mathematics Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. With a preface by Vafa.
- [Hit] HITCHIN, N., “*Generalized Calabi–Yau manifolds*”, The Quarterly Journal of Mathematics, 2003. 54 (3): 281–308, arXiv:math.DG/0209099.
- [Ko] KODAIRA, K., *Complex manifolds and deformations of complex structures*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 283, Berlin: Springer, 1986.

- [Ku] KURANISHI, M., “*On deformations of compact complex structures*”, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 15–22 August 1962, Stockholm, 1, 357–359, Djursholm, Sweden: Institut Mittag-Leffler, 1963.
- [Tay] TAYLOR, J. L., *Several complex variables with connections to algebraic geometry and Lie groups*, Graduate Studies in Mathematics v. 46. American Mathematical Society, Providence, RI. 2002.
- [TK] KÖPPE, T., *Moduli of bundles on local surfaces and threefolds*, University of Edinburgh, 2009, PhD. Thesis.
- [MacD] MACDONALD, I. G., *Algebraic geometry. Introduction to schemes*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1968 vii+113 pp.