UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACCIONES PARÁMETRO RÍGIDO DEL GRUPO DE HEISENBERG

Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias Mención Matemática

JULIO CÉSAR SÁNCHEZ VILLALOBOS

Profesor Tutor: Dr. Richard Urzúa Luz

Antofagasta, Chile.
2017.

Dedicado a
Beatriz, mi Madre

Agradecimientos

A Dios por ser la luz y guía en este proceso lleno de adversidades, a mi madre por su ejemplo de lucha y constancia, por su carácter y todo el tiempo invertido en mi crianza, por creer siempre en mi, y por su amor incondicional.

A Richard Urzúa, quién además de ser mi tutor, lo considero un amigo. Le agradezco su paciencia, confianza y sinceridad, por creer en mi y en este proyecto, así como también, por sus enseñanzas, por el conocimiento compartido y su particular forma de ver las matemáticas. Muchas gracias profesor.

A mi familia, sin duda ustedes son mi motor, gracias por su amor y apoyo incondicional durante este tiempo lejos de casa.

A mis amigos por estar siempre presentes, y a todas las personas que me apoyaron de diversas formas antes de emprender este largo viaje, sin ustedes nada de esto sería posible.

A la Universidad Católica del Norte por el financiamiento en el Programa de Magister. A los profesores del programa por sus enseñanzas. A la Dra. Elva Ortega, por su apoyo y receptividad en todo momento.

Y por último, gracias a la vida, que me ha dado tanto.

Resumen

Se demuestra que dada una acción localmente libre del grupo de Heisenberg H, cuyo primer grupo de cohomología foliado de $\mathcal{F}$ (la foliación dada por las órbitas de la acción) es isomorfo al primer grupo de cohomología del álgebra de Lie de H, entonces la acción es parámetro rígido. Usando esto, damos un ejemplo explícito de acciones parámetro rígido del grupo Heisenberg.

Índice general

Introducción

Sea G un grupo de Lie y A una acción a derecha de G sobre una variedad M cerrada, orientable y conexa.
Decimos que A es localmente libre si el subgrupo de isotropía de A es discreto en G para todo punto de M. Este tipo de acción define una foliación $\mathcal{F}$ dada por las órbitas de A de dimensión igual a la dimensión de G.
Estaremos interesados en estudiar el espacio de las acciones a la derecha de G sobre M que definen la misma foliación $\mathcal{F}$, en el siguiente sentido: diremos que A es parámetro rígido si cualquier acción a derecha B de G sobre M con la misma foliación $\mathcal{F}$ es suavemente conjugada a la acción A, más precisamente, existe un automorfismo Φ de G y un difeomorfismo F suave de M que preserva cada hoja de $\mathcal{F}$ y es homotópico a la identidad a través de aplicaciones que preservan cada hoja de $\mathcal{F}$ tal que

$$B(F(x), \Phi(g)) = F(A(x, g)),$$

para todo $x \in M$ y todo $g \in G$.
La *cohomología foliada* $H^*(\mathcal{F})$ de una foliación $\mathcal{F}$ sobre una variedad es la cohomología del complejo de De Rham constituido por las formas foliadas, es decir, las secciones del producto exterior del fibrado cotangente de la foliación $\mathcal{F}$. La cohomología foliada es en general de dimensión finita y no Hausdorff en algunas ocaciones.
El ejemplo más conocido de una foliación con $H^1(\mathcal{F})$ de dimensión 1 es dado por una foliación lineal con vector inclinación mal aproximado (vector diofantino) sobre el toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Este ejemplo goza de la propiedad rigidez paramétrica. El caso donde el vector inclinación sea bien aproximado $H^1(\mathcal{F})$ es no Hausdorff, en particular de dimensión infinita.
Para una foliación $\mathcal{F}$ dada por las órbitas de una acción localmente libre de $\mathbb{R}^k$ sobre M, es fácil ver que

$$\dim H^1(\mathcal{F}) \geq k$$

y la igualdad se obtiene si y solo si la acción es parámetro rígida, ver [11].
Este hecho hace que nos interesemos en foliaciones cuyo primer grupo de cohomología foliada sea de dimensión finita.
En el ejemplo 2.2 se construye una acción localmente libre del grupo afín sobre una variedad cerrada de dimensión 3. Se puede mostrar que este ejemplo nos da una acción

parámetro rígido, la demostración no será tratada en esta tesis, para más detalles ver [11].

Esta tesis está basada en el trabajo de dos Santos [6], donde se estudian las propiedades generales de las acciones localmente libres y se construyen ejemplos de acciones del grupo de Heisenberg que son parámetro rígido. Para el estudio de estas acciones se introduce la cohomología de una acción: sea A una acción a derecha localmente libre de G sobre M. La acción A induce una estructura de G-módulo sobre el anillo $C^{\infty}(M)$ de las funciones suaves sobre M, que será denotado por $C_A^{\infty}(M)$. La *cohomología de la acción* A es por definición la cohomología $H^*(G, C_A^{\infty}(M))$ del G-módulo $C_A^{\infty}(M)$. Probaremos que el primer grupo de cohomología foliada $H^1(\mathcal{F})$ de la foliación dada por las órbitas de A es isomorfa a la primera cohomología de la acción A.

Decimos que la acción A es cohomológicamente rígida 1-dimensional si la primera cohomología de A es isomorfa al primer grupo de cohomología $H^1(\mathcal{G}^*)$ del álgebra de Lie $\mathcal{G}$ de G. Un hecho importante de las acciones cohomológicamente rígidas 1-dimensional es que preservan una forma de volumen suave.

El resultado central de esta tesis es mostrar que una acción localmente libre y cohomológicamente rígida 1-dimensional del grupo de Heisenber sobre una variedad cerrada, es parámetro rígido. Usando este resultado daremos un ejemplo explícito de acciones parámetro rígido del grupo de Heisenberg.

Recientemente Maruhashi, H. en [10] generaliza los resultados de dos Santos para grupos de Lie nilpotentes simplemente conexos.

En el capítulo 1 mostraremos las herramientas necesarias para que la teoría quede bien respaldada. Para esto, consideraremos los campos de vectores como derivaciones sobre el álgebra de las funciones C^{∞} sobre la variedad M. Esto nos proporciona el ambiente ideal para la definición de conceptos importantes, como por ejemplo la definición de una fórmula global de la *derivada exterior* (que no depende de coordenadas). Para esto será util la *derivada de Lie*, ésta nos permite derivar campos de vectores y formas diferenciables a lo largo de otro campo de vectores. En la definición de derivada de Lie entran las nociones de trasladar formas diferenciables y campos de vectores, éste último problema de trasladar campos de vectores lo viene a solucionar los campos de vectores relacionados cuya propiedad fundamental es la de conservar el *corchete de Lie*.

Dado que consideraremos acciones localmente libres de grupos de Lie sobre variedades, daremos la definición de estos grupos y sus álgebras de Lie, estudairemos algunos ejemplos importantes y veremos como se define el álgebra de Lie de algunos grupos de Lie, así como también la importancia de la aplicación exponencial, la cual actúa como conector entre los grupos de Lie y sus álgebras de Lie.

En el capítulo 2 introduciremos las acciones localmente libres de un grupo de Lie sobre una variedad diferenciable M, y observaremos que las órbitas de ésta acción definirán las hojas de una foliación sobre M. Estudiaremos el tipo topológico de las órbitas de la acción de algunos grupos de Lie sobre M y estudiaremos un par de proposiciones que serán útiles para probar que para cada acción B con la misma foliación $\mathcal{F}$ dada por

las órbitas de A, le corresponde un cociclo sobre la acción A. Esto como veremos mas adelante estará estrechamente relacionado con la rigidez paramétrica.
También definiremos la cohomología de álgebras de Lie, la cohomología foliada y la cohomología de una acción, éstas serán una herramienta muy importante para estuadiar las acciones localmente libres. Daremos también una descripción dual de acciones localmente libres en términos de formas diferenciables, esto nos conducirá a establecer ciertas relaciones entre las cohomologías descritas anteriormente.
Por último, en el capítulo 3 definiremos las acciones parámetro rígido, estudiaremos un ejemplo muy conocido de rigidez paramétrica de $\mathbb{R}$-acciones localmente libres dado por el flujo lineal diofantino sobre el toro $\mathbb{T}^n$. Luego veremos que la condición *cociclo rígido* y *parámetro rígido* son equivalentes, conduciendo así al resultado más relevante de este trabajo, el cual muestra que las acciones cohomológicamente rígidas 1-dimensionales del grupo de Heisenberg (grupo de Lie no abeliano) son parámetro rígido. Usando este resultado mostraremos la existencia de acciones parámetro rígido del grupo de Heisenberg.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Definiciones y resultados básicos

El espacio tangente

Un vector v con componentes $v_1, \cdots, v_n$ en un punto p en el espacio euclideano $\mathbb{R}^n$ puede pensarse como un operador sobre las funciones diferenciables. Específicamente, si f es diferenciable sobre una vecindad de p, entonces v asigna a f el número real $v(f)$, el cual es la derivada direccional de f en la dirección del vector v en el punto p. Es decir,

$$v(f) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}|_p + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}|_p.$$

Esta operación del vector v sobre las funciones diferenciables satisface dos propiedades importantes

1. $v(f + \lambda g) = v(f) + \lambda v(g)$,
2. $v(f.g) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$,

donde f y g son funciones diferenciables en una vecindad de p y λ es un número real. La primera propiedad dice que v actúa linealmente sobre las funciones, y la segunda dice que v es una *derivación*. Esto motiva nuestra definición de vector tangente sobre una variedad.

Sea M una variedad diferenciable. Una curva sobre M es una aplicación diferenciable $\alpha : I \to M$ de un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ en M. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $0 \in I$. Dado un punto $p \in M$ y una curva α sobre M, se dice que α pasa por p si existe un valor $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(t_0) = p$. Si una curva α pasa por un punto p siempre podemos reparametrizar la curva para que $\alpha(0) = p$.

Definición 1.1. Sea α una curva sobre M que pasa por p, $\alpha(0) = p$. El vector tangente a α en p es la aplicación $\alpha'(0) : C^\infty(p)$[1] $\to \mathbb{R}$ definida por

$$\alpha'(0)(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \alpha). \tag{1.1}$$

Luego, por un razonamiento análogo al que se realiza en $\mathbb{R}^n$, se puede demostrar que $\alpha'(0)$ es una derivación sobre $C^\infty(p)$

Definición 1.2. Un *vector tangente* a M en p es un vector tangente a una curva α en el punto p. El conjunto de todos los vectores tangentes a M en p se denomina el *espacio tangente* a M en p y se denota por T_pM.

Definición 1.3. Sea $p \in M$ y consideremos (U, φ) una carta local alrededor del punto p con funciones coordenadas $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Dada una función $f \in C^\infty(p)$, la *derivada parcial* de f con respecto a x_i en el punto p esta dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i}(x(p)), \tag{1.2}$$

donde $(u_1, \cdots, u_n)$ son las coordenadas naturales de $\mathbb{R}^n$.

Sea (U, φ) una carta local, consideremos un punto $p \in U$. Entonces podemos construir la aplicación

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p : C^\infty(p) \to \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

definida por

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p). \tag{1.4}$$

Es fácil demostrar que dicha aplicación es una derivación sobre $C^\infty(p)$. Ahora, probaremos que ésta aplicación es también un vector tangente a M en p. La idea será construir una curva α_i que pase por p y tenga a $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ como vector tangente.
Sea $\{e_1, \cdots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y consideremos la curva en M definida por $\alpha_i(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i)$, denominada la i-ésima curva coordenada de φ en el punto p. Supongamos ahora que las representaciones locales de α_i y f están dadas por

$$\tilde{\alpha}_i(t) = (\varphi \circ \alpha_i)(t) = (u_1(t), \cdots, u_n(t)) \tag{1.5}$$

y

$$\tilde{f}(u_1, \cdots, u_n) = (f \circ \varphi^{-1})(u_1, \cdots, u_n). \tag{1.6}$$

[1] conjunto de las funciones diferenciables sobre una vecindad de p

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\alpha_i'(0)(f) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\tilde{f} \circ \tilde{\alpha}_i)(t) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \tilde{f}(u_1(t), \cdots, u_n(t)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_j}(\tilde{\alpha}_i(0)) \frac{du_i}{dt}(0) = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f),
\end{aligned}$$

probando de esta forma la afirmación anterior.

Proposición 1.1. *El conjunto de todas las derivaciones sobre $C^\infty(p)$ tiene estructura de espacio vectorial. Si $(U, (x_1, \cdots, x_n))$ es una carta local cuyo dominio contiene al punto p, entonces $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p \right\}$ es una base para T_pM.*

Tenemos entonces la siguiente proposición:

Proposición 1.2. *Sea $p \in M^n$. El espacio tangente T_pM es un espacio vectorial (real) de dimensión n.*

Hemos probado que cada sistema de coordenadas o carta local que contenga al punto p en su dominio nos proporciona una base canónica de T_pM, luego, dos bases asociadas a sistemas de coordenadas distintos están relacionadas a través de la siguiente proposición:

Proposición 1.3. *La matriz del cambio de base es la matriz jacobiana del cambio de cartas.*

El espacio cotangente

Definición 1.4. Un covector tangente a una variedad M en un punto p es una función lineal sobre T_pM. El conjunto de tales covectores constituye el espacio vectorial dual del espacio tangente y se denomina espacio cotangente a M en p, denotándose, como es habitual, por $(T_pM)^*$.

Dada una función diferenciable $f \in C^\infty(M)$, se define la diferencial de f en un punto p como el covector df_p dado por

$$df_p(v) = v(f),$$

para todo vector $v \in T_pM$. Vamos a obtener ahora una base distinguida de T_p^*M. Sea (U, φ) un sistema de coordenadas con funciones coordenadas asociadas $(x_1, \cdots, x_n)$ y sea $p \in U$. Entonces el conjunto $\{dx_{1p}, \cdots, dx_{np}\}$ constituye una base de T_p^*M. Es fácil ver que todo covector $w \in T_p^*M$ se expresa de forma única como

$$w = \sum_{i=1}^{n} w\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \right) dx_{ip}.$$

En particular, para toda función diferenciable f y todo punto p se satisface lo siguiente

$$df_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_{ip}.$$

La diferencial de una aplicación

Sea $\psi : M \to N$ una aplicación diferenciable, y sea $p \in M$. La diferencial de ψ en p es la aplicación lineal

$$d\psi : T_pM \to T_{\psi(p)}N \tag{1.7}$$

definida de siguiente manera. Si $v \in T_pM$, entonces $d\psi(v)$ es también un vector tangente a $\psi(p)$, describamos ahora como éste opera sobre funciones. Sea g una aplicación suave sobre una vecindad de $\psi(p)$. Definimos $d\psi(v)(g)$ por

$$d\psi(v)(g) = v(g \circ \psi). \tag{1.8}$$

Se puede verificar fácilmente que $d\psi$ es una aplicación lineal de T_pM en $T_{\psi(p)}N$. La aplicación dual

$$\psi^* : T^*_{\psi(p)}N \to T^*_pM \tag{1.9}$$

es definida por

$$\psi^*(w)(v) = w(d\psi(v)) \tag{1.10}$$

siempre que $w \in T^*_{\psi(p)}N$ y $v \in T_pM$.

Proposición 1.4 (Regla de la cadena)**.** *Sean $\psi : M \to N$ y $\varphi : N \to X$ dos aplicaciones diferenciables y sea p un punto del dominio de $\varphi \circ \psi$. Entonces*

$$d(\varphi \circ \psi)_p = d\varphi_{f(p)} \circ d\psi_p. \tag{1.11}$$

Fibrado tangente y cotangente

A continuación probaremos que la unión TM de todos los espacios tangentes a una variedad diferenciable, en todos sus puntos, admite una estructura de variedad diferenciable de dimensión el doble de la dimensión de la variedad M y se denomina el fibrado tangente de M. Dualmente introducimos el fibrado cotangente de M, que también posee una estructura diferenciable de la misma dimensión de TM. Sea el conjunto TM definido por

$$TM = \underset{p \in M}{\cup} T_pM,$$

Se puede comprobar fácilmente que podemos identificar TM con el siguiente conjunto

$$TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_pM\}.$$

Además, podemos construir una aplicacion proyección de manera natural entre TM y M de la siguiente forma: $\pi : TM \to M$, $\pi(p, v) = p$. Veamos ahora que el conjunto TM admite estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$, siendo n la dimension de M.
Sea $\{(V_i, \varphi_i)\}_i$ un atlas de M y consideremos los siguientes subconjuntos de TM:

$$W_i = \{(p, v) \in TM : p \in V_i\}$$

y las siguientes aplicaciones:

$$\psi_i : W_i \to \mathbb{R}^{2n}, \qquad \psi(p, v) = (\varphi_i(p), d\varphi_{ip}(v))$$

donde $d\varphi_{ip}(v) = (v(x_1), \cdots, v(x_n))$, siendo $(x_1, \cdots, x_n)$ las funciones coordenadas de la carta φ_i. No es dificil probar que $\{(W_i, \psi_i)\}_i$ es un atlas $2n$-dimensional sobre TM, con el cual recibe el nombre de fibrado tangente de M. De manera análoga podemos construir el fibrado cotangente de M. Sea el conjunto T^*M definido por

$$T^*M = \underset{p \in M}{\cup} T_p^*M,$$

que podemos identificar con el siguiente conjunto:

$$T^*M = \{(p, w) : p \in M, w \in T_p^*M\}.$$

Acá también se define de manera natural una aplicacion proyección entre T^*M y M de la siguiente forma: $\pi^* : T^*M \to M, \pi^*(p, w) = p$.
Si $\phi : M \to N$ es una aplicación diferenciable, entonces podemos construir una aplicación entre los fibrados tangentes de la siguiente manera: $d\phi : TM \to TN$ dada por $d\phi(p, v) = (\phi(p), d\phi_p(v))$.

Campo de vectores

Definición 1.5. Un campo de vectores X sobre una variedad diferenciable M es una correspondencia que asigna a cada punto p de M un vector tangente $X_p \in T_pM$.

Teniendo en cuenta el conjunto de todos los vectores tangentes a M, el fibrado tangente TM, puede dotarse de estructura de variedad diferenciable, un campo de vectores X puede interpretarse como una aplicación de M en su fibrado tangente tal que si π es la proyección natural del fibrado en la variedad, se tiene que $\pi \circ X$ es la identidad sobre M; esto es, X es una sección de π.

Definición 1.6. Un campo de vectores X se dirá diferenciable si como aplicación $X : M \to TM$ entre la variedad y su fibrado tangente es diferenciable. El conjunto de todos los campos de vectores diferenciables sobre M se denotará por $\mathfrak{X}(M)$.

Sea X un campo de vectores sobre M. Para cada punto p de M, $X(p) \equiv X_p$ es un vector tangente a M en p y, por lo tanto, es una derivación local (en el conjunto de las funciones diferenciables en un entorno de p) de manera que los campos de vectores se pueden considerar como derivaciones sobre el álgebra de las funciones diferenciables sobre la variedad:

$$X : C^\infty(M) \to C^\infty(M) \tag{1.12}$$

dada por

$$\begin{array}{rcl} X(f) : M & \to & \mathbb{R} \\ p & \mapsto & X(f)_p := X_p(f). \end{array}$$

Esta interpretacion permite caracterizar a los campos de vectores diferenciables como aquellos que transforman funciones diferenciables en funciones diferenciables. Es decir,

Proposición 1.5. *Un campo de vectores X es diferenciable si y solo si $X(f)$ es una función diferenciable para toda función diferenciable f.*

En el conjunto de los campos de vectores diferenciables sobre M podemos definir dos operaciones naturales, la suma y el producto por funciones diferenciables, del siguiente modo:
Suma: Si $X,\ Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $X + Y : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ está definida por

$$(X + Y)(f) : M \to \mathbb{R}, \qquad (X + Y)(f)(p) = X_p(f) + Y_p(f).$$

Producto: Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in C^\infty(M)$, entonces $fX : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ está definida por

$$(fX)(g) : M \to \mathbb{R}, \qquad (fX)(g)(p) = f(p)Xp(g).$$

Con las dos operaciones anteriores, el conjunto $\mathfrak{X}(M)$ admite estructura de módulo sobre el anillo $C^\infty(M)$ de las funciones diferenciables.
Hemos definido entonces un vector tangente a M en un punto p como el vector tangente a una curva que pasa por p y hemos visto que puede interpretarse como una derivacion sobre $C^\infty(p)$. Veamos a continuación que es posible caracterizar un campo de vectores de una manera similar.

Definición 1.7. Una derivación sobre $C^\infty(M)$ es una función $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. $\mathbb{R}$-linealidad: $D(af + bg) = aD(f) + bD(g)$, para $a,\ b \in \mathbb{R}$ y $f,\ g \in C^\infty(M)$,

2. Regla de Leibnitz: $D(fg) = D(f)g + fD(g)$.

Como una consecuencia de esta definición, todo campo diferenciable de vectores X es una derivación sobre $C^\infty(M)$, considerando X como una aplicación $f \mapsto X(f)$. El siguiente resultado nos proporciona el recíproco.

Proposición 1.6. *Toda derivación sobre $C^\infty(M)$ proviene de un campo de vectores diferenciable.*

El corchete de Lie

Otra consecuencia interesante de considerar los campos de vectores como derivaciones es que nos permite considerar las derivaciones iteradas. Si X e Y son dos campos de vectores diferenciables y f es una función diferenciable, entonces $X(Y(f))$ e $Y(X(f))$ son funciones diferenciables. Sin embargo, este tipo de operaciones no conduce en general a nuevos campos de vectores diferenciables, ya que envuelven derivadas de orden superior a la primera. No obstante, la diferencia de ambas iteraciones sí conduce a un nuevo campo de vectores.

Proposición 1.7. *Sean X e Y dos campos de vectores diferenciables sobre M. Entonces existe un único campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ tal que*

$$Z(f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

para toda función $f \in C^\infty(M)$. El campo Z se denomina el corchete de Lie de X e Y y se denota por $[X, Y]$.

Esta forma de construir nuevos campos a partir de otros ya existentes nos permite definir la operación corchete:

$$\begin{aligned} [\ ,\ ] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}(M), \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y], \end{aligned}$$

que a cada par de campos le asocia su corchete de Lie, el cual posee interesantes propiedades.

Proposición 1.8. *Sean X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$ campos de vectores diferenciables sobre M, a, $b \in \mathbb{R}$ y f, $g \in C^\infty(M)$ funciones diferenciables. Entonces:*

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ (*antisimetria*),
2. $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ ($\mathbb{R}$-*linealidad*),
3. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (*identidad de Jacobi*),
4. $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Campos relacionados

Sea $\varphi : M \to N$ una aplicación suave entre variedades, y sea $d\varphi : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ la diferencial sobre un punto p en M. Si $X_p \in T_pM$, llamamos a $d\varphi(X_p)$ el $pushforward$ del vector X_p en p, y está dado por

$$d\varphi_p(X)(f) = X(f \circ \varphi).$$

Claramente esta aplicación traslada vectores tangentes a M en vectores tangentes a N. Sin embargo, no hay ninguna forma, en general, de trasladar campos de vectores. Este problema lo vienen a solucionar, de forma satisfactoria, los campos de vectores relacionados por una aplicacion diferenciable, siendo una de sus propiedades más importantes la de conservar el corchete de Lie de dos campos.

Definición 1.8. Sea $\varphi : M \to N$ una aplicación diferenciable, $X \in \mathfrak{X}(M), \ Y \in \mathfrak{X}(M)$. Se dice que X e Y están φ-relacionados, y se denota por $X \sim_\varphi Y$, si

$$d\varphi_p(Xp) = Y_{\varphi(p)},$$

para todo punto $p \in M$.

Podríamos reformular la definición anterior de la siguiente manera

Proposición 1.9. *Dos campos de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ están φ-relacionados si, y solo si,*

$$X(f \circ \varphi) = Y(f) \circ \varphi,$$

para toda función $f \in C^\infty(N)$.

Demostración. $(\Rightarrow)$
Supongamos que X e Y son φ-relacionados, entonces para cualquier $f \in C^\infty(N)$ y $p \in M$

$$\begin{array}{rcll} d\varphi_p(X_p)(f) &=& Y_{\varphi(p)}(f) & \text{(definición de } \varphi\text{-relacionados)}, \\ X_p(f \circ \varphi) &=& (Yf)(\varphi(p)) & \text{(definición de } d\varphi \text{ y de } Yf), \\ (X(f \circ \varphi))(p) &=& (Yf)(\varphi(p)). & \end{array}$$

Luego, $X(f \circ \varphi) = (Yf) \circ \varphi$.
$(\Leftarrow)$
El recíproco se prueba yendo en reversa a través del conjunto de ecuaciones anteriores.

□

La siguiente proposición, muestra que el corchete de Lie se conserva mediante φ-relación. Esto es;

Proposición 1.10. *Sean* $X_1,\ X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $Y_1,\ Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$, *campos de vectores tales que* $X_i \sim_\varphi Y_i$, $i = 1, 2$. *Entonces*

$$[X_1, X_2] \sim_\varpi [Y_1, Y_2].$$

Demostración. Sea $m \in M$ y $f \in C^\infty(N)$. Entonces debemos mostrar que

$$d_\varphi([X_1, X_2]_m)(f) = [Y_1, Y_2]_{\varphi(m)}(f).$$

Usando simplemente las definiciones tenemos

$$\begin{aligned}
d_\varphi([X_1, X_2]_m)(f) &= [X_1, X_2]_m(f \circ \varphi) \\
&= X_1|_m(X_2(f \circ \varphi)) - X_2|_m(X_1(f \circ \varphi)) \\
&= X_1|_m((d\varphi \circ X_2)(f)) - X_2|_m((d\varphi \circ X_1)(f)) \\
&= X_1|_m(Y_2(f) \circ \varphi) - X_2|_m(Y_1(f) \circ \varphi) \\
&= Y_{1\varphi(m)}(Y_2(f)) - Y_{2\varphi(m)}(Y_1(f)) \\
&= [Y_1, Y_2]_{\varphi(m)}(f).
\end{aligned}$$

□

Formas Diferenciables

Definición 1.9. Sea M una variedad diferenciable. Denotemos por $\Lambda(V)$ el álgebra exterior de V (donde V es un espacio vectorial sobre un cuerpo K), y por $\Lambda^k(V)$ [2] la k-ésima potencia exterior de V . Definimos entonces

$$\begin{aligned}
\Omega^k(M) &= \bigcup_{p\in M} \Lambda^k(T_p^* M) \qquad \text{(k-fibrado exterior sobre } M\text{)}, \\
\Omega(M) &= \bigcup_{p\in M} \Lambda(T_p^* M) \qquad \text{(fibrado álgebra exterior sobre } M\text{)}.
\end{aligned}$$

$\Omega^k(M)$ y $\Omega(M)$ tienen una estructura natural de variedad tal que la aplicación canónica es suave. Si (U, φ) es un sistema de coordenadas sobre M con funciones coordenadas $x_1, \cdots, x_n$, entonces las bases $\{\partial/\partial x_i\}$ de T_pM y $\{dx_i\}$ de T_p^*M para cada $p \in U$, induce una base de $\Omega^k(M)$ y $\Omega(M)$. Por ejemplo, la base de $\Omega^k(M)$ es $\{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} : i_1 < \cdots < i_k\}$. Usando estas bases podemos definir aplicaciones de la imagen inversa de U en $\Omega^k(M)$ y $\Omega(M)$ bajo la aplicación proyección respectiva para $\varphi\times$ Espacios euclideanos de dimensión adecuada. Exigiendo que estas aplicaciones sean sistemas de coordenadas, obtenemos una estructura natural de variedad sobre $\Omega^k(M)$ y $\Omega(M)$ tal como hicimos anteriormente para TM y T^*M (el cual casualmente es simplemente $\Omega^1(M)$).

[2] éste es el subespacio vectorial de $\Lambda(V)$ generado por elementos de la forma $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_k$, $x_i \in V$, $i = 1, 2, \ldots, k$, (" $\wedge$ " representa el producto exterior, el cual definiremos en (1.1)

Definición 1.10. Una forma diferenciable es una sección de $\Omega(M)$. Entonces w es una forma diferenciable si $w(p) \in \Lambda(T_p^*M)$ para todo $p \in M$. Similarmente, w es una k-forma diferenciable (o solo una k-forma) si es una sección de $\Omega^k(M)$. Notar que para $1-$formas, ésta definición coincide con la dada en (1.4) ya que como mencionamos anteriormente $\Omega^1(M) = T^*M$. Notemos también que una $0-$forma es solo una función a valores reales sobre M (por la identificación de $\Lambda^0(T_p^*M)$ con $\mathbb{R}$).

Definición 1.11. $\Lambda^k(M)$ denotará el conjunto de todas las k-formas suaves sobre M, y $\Lambda(M)$ el conjunto de todas las formas diferenciables. $\Lambda^0(M)$ podemos identificarlo con $C^\infty(M)$; en efecto, la variedad diferenciable $\Omega^0(M)$ es simplemente $M \times \mathbb{R}$ y una sección acá es simplemente el gráfico de una función C^∞ sobre M.

Las formas pueden ser sumadas, multiplicadas por escalares, y dado un producto $(\wedge)$. Si $w, \tilde{w} \in \Lambda(M)$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $w + \tilde{w}$, cw y $w \wedge \tilde{w}$ son formas, las cuales en p tienen los valores $w_p + \tilde{w}_p$, cw_p y $w_p \wedge \tilde{w}_p$ respectivamente. El caso en que f sea una 0-forma y $w \in \Lambda(M)$, escribiremos $f \wedge w$, simplemente como fw. $\Lambda(M)$ tiene entonces una estructura de un módulo sobre el anillo $C^\infty(M)$ y de un álgebra graduada sobre $\mathbb{R}$ con el producto exterior.

Sea $w \in \Lambda^k(M)$. Entonces $w_p \in \Lambda^k(T_p^*M)$ y puede ser considerados como una función multilineal alternante sobre T_pM[3]. Así, si $X_1, \cdots, X_k$ son campos de vectores sobre M, $w(X_1, \cdots, X_k)$ tiene sentido, y es la función cuyo valor en p es

$$w(X_1, \cdots, X_k)(p) = w_p(X_1(p), \cdots, X_k(p)). \tag{1.13}$$

En consecuencia, si $\mathfrak{X}(M)$ denota el C^∞ módulo de los campos de vectores suaves sobre M, entonces

$$w : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{\text{k-copias}} \to C^\infty(M), \tag{1.14}$$

y es una aplicación multilineal del módulo $\mathfrak{X}(M)$ en $C^\infty(M)$.
Que w sea multilineal sobre el $C^\infty(M)$ módulo $\mathfrak{X}(M)$ es

$$\begin{aligned} w(X_1, \cdots, X_{i-1}, fX + gY, X_{i+1}, \cdots, X_k) &= fw(X_1, \cdots, X_{i-1}, X, X_{i+1}, \cdots, X_k) \\ &+ gw(X_1, \cdots, X_{i-1}, Y, X_{i+1}, \cdots, X_k) \end{aligned}$$

siempre que $f, g \in C^\infty(M)$ y $X_1, \cdots, X_{i-1}, X, Y, X_{i+1}, \cdots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$.
Recíprocamente es muy útil observar que cualquier aplicación multilineal (1.13) del módulo $\mathfrak{X}(M)$ en $C^\infty(M)$ define una forma (ver [15]), de esta manera $w(X_1, \cdots, X_k)(p)$ solo depende de los valores del campo de vectores X_i en p.

Definición 1.12. Si $f \in C^\infty(M)$, la diferencial *df* es una aplicación suave de TM en $\mathbb{R}$ la cual es lineal sobre cada espacio tangente. Entonces *df* puede considererse como una

[3]Por propiedades del álgebra exterior (ver [15])

1-forma; $df : M \to \Omega^1(M)$. La 1-forma df es llamada la *derivada exterior* de la 0-forma f, y este *operador derivada exterior* d tiene una importante extensión a $\Lambda(M)$ dada por el siguiente

Teorema 1.1. *Existe una única antiderivación $d : \Lambda(M) \to \Lambda(M)$ de grado $+1$ tal que:*
a) $d^2 = 0$.
b) Si $f \in C^\infty(M) = \Lambda^0(M)$, df es la diferencial de f.
c) Si $w = \sum f_I dx_I$, entonces $dw = \sum df_I \wedge dx_I$, ($I$: muli-índice)

El pullback

Sea $\psi : M \to N$ una aplicación suave entre variedades. Y sea w una forma en N. Para todo $p \in M$, la diferencial

$$d\psi : T_pM \to T_{\psi(p)}N,$$

induce un homomorfismo de álgebras

$$\psi^* : \Lambda(T^*_{\psi(p)}N) \to \Lambda(T^*_pM).$$

Entonces, definimos el *pull-back* de una forma w sobre N, como la forma ψ^*w sobre M definida en el punto p, dada por

$$(\psi^*w)(p) = \psi^*(w(\psi(p))). \tag{1.15}$$

Proposición 1.11. *Sea $\psi : M \to N$ una aplicación suave. Entonces*

1. *$\psi^* : \Lambda(N) \to \Lambda(M)$ es un homomorfismo de álgebras.*
2. *ψ^* conmuta con d; es decir, $d(\psi^*(w)) = \psi^*(dw) \qquad (w \in \Lambda(N))$*
3. *$\psi^*(w)(X_1, \cdots, X_k)(p) = w_{\psi(p)}(d\psi(X_1(p)), \cdots, d\psi(X_k(p)))$ para $w \in \Lambda^k(N)$ y para $X_1, \cdots, X_k$ campos de vectores sobre M.*

La definición de derivada exterior dada anteriormente es local. A continuación presentaremos una fórmula para d que sea global e intrinseca a la variedad, es decir que no dependa de sistemas de coordenadas locales. En efecto, para una 1-forma diferenciable w y campos de vectores suaves X, Y sobre M tendremos la fórmula

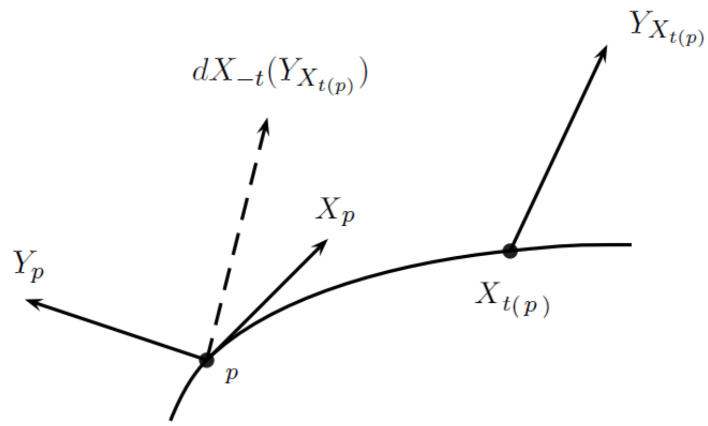
$$(dw)(X, Y) = Xw(Y) - Yw(X) - w([X, Y]).$$

La *derivada de Lie* y el *producto interior*, serán herramientas necesarias, ambas son operaciones intrínsecas sobre una variedad y de gran importancia en topología diferencial y geometría. Cabe destacar que la derivada de Lie es una manera de derivar un campo de vectores o una forma diferenciable sobre una variedad a lo largo de otro campo de vectores.

Derivada de Lie

Campos vectoriales y formas diferenciables pueden derivarse con respecto a un campo de vectores. La derivada resultante es conocida como la *derivada de Lie* y es definida como sigue. Fijamos un campo de vectores suave sobre una variedad M. Sea X_t el grupo local a un parámetro de transformaciones asociadas con X. Sea Y otro campo de vectores suave sobre M. Definiremos la derivada de Y con respecto a X en el punto $p \in M$. Primero seguimos la curva integral de X a través de p hasta el punto $X_{t(p)}$ y luego evaluamos Y en ese punto. Entonces llevamos $Y_{X_{t(p)}}$ de regreso a T_pM a través de la diferencial dX_{-t} del difeomorfismo X_{-t}. En T_pM tomamos la diferencia de los vectores $dX_{-t}(Y_{X_{t(p)}})$ y Y_p, dividimos la diferencia por t y tomamos el límte cuando $t \to 0$. Entonces definimos

$$(L_XY)_p = \lim_{t\to 0} \frac{dX_{-t}(Y_{X_{t(p)}}) - Y_p}{t} = \frac{d}{dt}|_{t=0}(dX_{-t}(Y_{X_{t(p)}})).$$



De una forma similar definimos la *derivada de Lie de una forma diferenciable* w con respecto al campo de vectores X. Excepto que en este caso evaluamos w en $X_t(p)$ y tomamos el pull back vía ${X_t}^*$ a $\Lambda(T_p^*M)$ donde tomamos la diferencia con $w(p)$, dividiendo por t y tomando el límite cuando $t \to 0$. Entonces definimos

$$(L_Xw)_p = \lim_{t\to 0} \frac{{X_t}^*(w_{X_{t(p)}}) - w_p}{t} = \frac{d}{dt}|_{t=0}(X_{-t}^*(w_{X_{t(p)}})).$$

Derivada interior

Recordemos que dada una k-forma α sobre un espacio vectorial V, la multiplicación interior de α es la $k-1$-forma definida por

$$(i_v\alpha)(v_2, \cdots, v_k) = \alpha(v, v_2, \cdots, v_k), \qquad v_2, \cdots, v_k \in V.$$

Proposición 1.12. *Para v en un espacio vectorial V, sea $i_v : \Lambda(V) \to \Lambda(V)$ la multiplicación interior por v. Entonces:*
i) $i_v \circ i_v$=0.
ii) Para $\alpha \in \Lambda^k(V)$ y $\beta \in \Lambda^l(V)$

$$(i_v(\alpha \wedge \beta)) = (i_v\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i_v\beta.$$

El producto interior sobre una variedad es definida puntualmente. Si X es un campo de vectores suave sobre M y $w \in \Lambda^k(M)$, entonces $i_X w$ es la $k-1$ forma definida por $(i_X w)_p = i_{X_p} w_p$ para todo $p \in M$. La forma $i_X w$ sobre M es suave ya que para cualesquiera campos de vectores $X_2, \cdots, X_k$ sobre M

$$(i_X w)(X_2, \cdots, X_k) = w(X, X_2, \cdots, X_k)$$

es una función suave sobre M. Por las propiedades del producto interior para cada punto $p \in M$ (1.12), la aplicación $i_X : \Lambda(M) \to \Lambda(M)$ es una antiderivación de grado -1 tal que $i_X \circ i_X = 0$.

La siguiente proposición nos muestra algunas propiedades de la derivada de Lie y nos da una fórmula global de derivada exterior.

Proposición 1.13. *Sea X un campo de vectores suave sobre M. Entonces*

1. *$L_X f = X(f)$ siempre que $f \in C^\infty(M)$.*
2. *$L_X Y = [X, Y]$ para cada campo de vectores suaves Y sobre M.*
3. *$L_X : \Lambda(M) \to \Lambda(M)$ es una derivación que conmuta con d*
4. *En $\Lambda(M)$, $L_X = i(X) \circ d + d \circ i(X)$.*
5. *Sea $w \in \Lambda^p(M)$, y sea $Y_0, \cdots, Y_p$ campos de vectores suaves sobre M entonces*

$$\begin{aligned} L_{Y_0}(w(Y_1, \cdots, Y_p)) &= (L_{Y_0} w)(Y_1, \cdots, Y_p) \\ &+ \sum_{i=1}^{p} w(Y_1, \cdots, Y_{i-1}, L_{Y_0} Y_1, Y_{i+1}, \cdots, Y_p). \end{aligned}$$

6. *Bajo las hipótesis de (5). Entonces*

$$\begin{aligned} dw(Y_0,\cdots,Y_p) &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i Y_i w(Y_0,\cdots,\widehat{Y_i},\cdots,Y_p) \\ &+ \sum_{i<j}(-1)^{i+j} w([Y_i,Y_j],Y_0,\cdots,\widehat{Y_i},\cdots,\widehat{Y_j},\cdots,Y_p). \end{aligned}$$

Distribuciones e Ideales Diferenciales

El teorema de Frobenius es un resultado fundamental en topología diferencial y en el cálculo de variedades. En términos geométricos modernos, este teorema da condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una foliación dada por variedades integrales maximales, cuyos fibrados tangentes están cubiertos por una familia dada de campos de vertores (satisfaciendo la condición de integrabilidad). Este resultado será útil para definir la cohomología foliada en el siguiente capítulo.

Definición 1.13. Sea k un entero, $1 \leq k \leq n$. Una distribución k-dimensional $\mathcal{D}$ es una disposición de subespacios k-dimensionales $\mathcal{D}(p)$ de T_pM uno para cada $p \in M$. $\mathcal{D}$ es suave si para cada $p \in M$, existe una vecindad U de p y $X_1,\cdots,X_k$ campos de vectores suaves sobre U los cuales generan $\mathcal{D}$ para cada punto de U.
Un campo de vectores X sobre M pertenece a la distribución $\mathcal{D}$ ($X \in \mathcal{D}$) si $X_p \in \mathcal{D}(p)$ para cada $p \in M$. Una distribución suave se dice involutiva (o completamente integrable) si $[X,Y] \in \mathcal{D}$ siempre que X e Y sean campos de vectores en $\mathcal{D}$.

Definición 1.14. Una subvariedad (N,ψ) de M es una variedad integrable de una distribución $\mathcal{D}$ sobre M si

$$d\psi(T_pN) = \mathcal{D}(\psi(p)), \qquad \text{para cada } p \in N.$$

Proposición 1.14. *Sea $\mathcal{D}$ una distribución suave sobre M tal que a través de cada punto de M pasa una variedad integrable de $\mathcal{D}$. Entonces $\mathcal{D}$ es involutiva.*

Demostración. Sea X e Y campos de vectores suaves contenidos en $\mathcal{D}$ y sea $p \in M$. Debemos probar que $[X,Y]_p \in D(p)$. Sea (N,ψ) una variedad integrable de $\mathcal{D}$ que pasa por p, y supongamos que $\psi(q) = p$. Dado que $d\psi : T_qN \to \mathcal{D}(\psi(q))$ es un isomorfismo para cada q en N, existen campos de vectores $\tilde{X},\tilde{Y}$ sobre N tal que

$$\begin{aligned} d\psi \circ \tilde{X} &= X \circ \psi \\ d\psi \circ \tilde{Y} &= Y \circ \psi. \end{aligned}$$

Se puede probar fácilmente que que $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ son suaves. Por (1.10), $[\tilde{X},\tilde{Y}]$ y $[X,Y]$ están ψ-relacionados. Por lo tanto $[X,Y]_p = d\psi([\tilde{X},\tilde{Y}]) \in \mathcal{D}(p)$. $\square$

Definición 1.15. Sea $\mathcal{D}$ una distribución de planos k-dimensional sobre M. Una q-forma w se dice que anula a $\mathcal{D}$ si para cada $m \in M$, $w_m(v_1, \cdots, v_q) = 0$ siempre que $v_1, \cdots, v_q \in \mathcal{D}(m)$.
Una forma $w \in \Lambda(M)$ se dice que anula a $\mathcal{D}$ si cada una de las partes homogéneas de w anulan $\mathcal{D}$.

Definición 1.16. Una colección $w_1, \cdots, w_n$ de 1-formas sobre M se dice independiente si ellas forman un conjunto independiente en T_p^*M para cada $p \in M$

Proposición 1.15. *Sea $\mathcal{I}(\mathcal{D}) = \{w \in \Lambda(M) : w \text{ anula a } \mathcal{D}\}$ con $\mathcal{D}$ una distribución k-dimensional suave sobre M. Entonces*

1. *$\mathcal{I}(\mathcal{D})$ es un ideal en $\Lambda(M)$.*
2. *$\mathcal{I}(\mathcal{D})$ es localmente generado por $n-k$ 1-formas independientes, es decir, a cada $p \in M$ le corresponde una vecindad U de p y un conjunto de 1-formas independientes $w_1, \cdots, w_{n-k}$ sobre U tal que*
   a) *Si $w \in \mathcal{I}(\mathcal{D})$, entonces $w|U$ pertenece al ideal $\Lambda(U)$ generado por $w_1, \cdots, w_{n-k}$*
   b) *Si $w \in \Lambda(M)$, y si existe un cubrimiento de M por conjuntos U como antes, tal que para cada U en el cubrimiento, $w|U$ pertenece al ideal generado por $w_1, \cdots, w_{n-k}$, entonces $w \in \mathcal{I}(\mathcal{D})$*
3. *Si $\mathcal{I} \subset \Lambda(M)$ es un ideal localmente generado por $n-k$ 1-formas independientes, entonces existe una única distribución suave $\mathcal{D}$ de dimensión k sobre M para la cual $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathcal{D})$.*

Definición 1.17. Un ideal $\mathcal{I} \subset \Lambda(M)$ es llamado *ideal diferencial* si es cerrado bajo la diferencial exterior d; ie

$$d(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}. \tag{1.16}$$

Proposición 1.16. *una distibución suave $\mathcal{D}$ sobre M es involutiva si, y solo si, el ideal $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ es un ideal diferencial.*

1.2. Grupos y álgebras de Lie

Definición 1.18. Un grupo de Lie $(G, \cdot\ )$ es una variedad diferenciable dotada de una estructura de grupo tal que la operación

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (\sigma, \tau) &\mapsto \sigma.\tau^{-1}, \end{aligned}$$

es suave.

Observación 1.1. Consecuencias de la definición:

1. Que la operacion anterior sea C^∞ es equivalente a que las operaciones del grupo $\tau \to \tau^{-1}$ y $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma.\tau$ sean funciones C^∞. En efecto, la primera se obtiene como composicion de $\tau \mapsto (e, \tau) \mapsto e.\tau^{-1}$, y la segunda como $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma.\tau^{-1} \mapsto \sigma.(\tau^{-1})^{-1} = \sigma\tau$, donde e es el elemento identidad de G.

2. La componente conexa de la identidad de un grupo de Lie G, forma él mismo un grupo de Lie; en efecto, por ser un subgrupo cerrado, admite una estructura diferenciable y es cerrado para las operaciones de grupo. Por otra parte, las componentes conexas de un grupo de Lie son todas difeomorfas entre sí.

3. En la definición de variedad diferenciable estamos suponiendo la condición de ser segundo contable, ie. la topología tiene una base numerable; aunque en realidad todo grupo de Lie con una cantidad numerable de componentes conexas es necesariamente segundo contable como consecuecia de que todo grupo de Lie conexo es unión numerable de potencias de un entorno cualquiera de la identidad.

Ejemplos de grupos de Lie

1. Consideremos $G = \mathbb{R}^n$ considerado como una variedad diferenciable y la operación de grupo $\cdot = +_{\mathbb{R}^n}$ la suma en $\mathbb{R}^n$, entonces $(\mathbb{R}^n, +_{\mathbb{R}^n})$.

2. El conjunto de los numeros complejos no nulos $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ es un grupo de Lie con la multiplicación usual de números complejos.

3. Consideremos $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ y la operación $\cdot = \cdot_{\mathbb{C}}$ (producto de números complejos), entonces $(S^1, \cdot_{\mathbb{C}})$ es un grupo de Lie.

4. Si G y H son grupos de Lie, entonces $G \times H$ es un grupo de Lie con la estructura de variedad producto y la estructura de grupo de producto directo, es decir coordenada a coordenada

$$(g, h).(g', h') = (gg', hh')$$

   para todo $(g, h) \in G \times H$.

5. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el toro $\mathbb{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ es un grupo de Lie con la estructura producto.

6. La variedad $GL(n, \mathbb{R})$ de todas las matrices $n \times n$ no singulares reales es un grupo de Lie con la multiplicación usual de matrices.
   En efecto, es un abierto del conjunto de las matrices $n \times n$ el cual es isomorfo a $\mathbb{R}^{n^2}$, por lo tanto hereda su estructura diferenciable. Las operaciones de grupo son claramente diferenciables pues: $A \mapsto A^{-1}$ es una funcion racional en los coeficientes,

por la formula de la matriz cofactor, es decir $A^{-1} = \frac{1}{\det A} Cof(A)^t$ (A_{ij} es la matriz que resulta al eliminar la fila i y la columna j de A), entonces $(Cof(A))_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$. Esta función es diferenciable pues $\det A \neq 0$. Por otra parte la multiplicación de matrices en diferenciable, en efecto $(A, B) \mapsto A.B$ es polinomial en los coeficientes, ie . $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

7. Sea $G = H(n, \mathbb{R})$ el grupo de matrices triangulares superiores con 1 en la diagonal. Es un grupo de Lie cuya variedad subyacente es $\mathbb{R}^{(n^2-n)/2}$, por lo cual es conexo. Este grupo se conoce como el *Grupo de Heisenberg generalizado*.

8. El conjunto $T_n(\mathbb{R})$ de las matrices $n \times n$ reales triangulares superiores no singulares es un grupo de Lie con la multiplicacion usual de matrices. (Se identifica con un abierto de $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ o se piensa como un cerrado de $GL(n, \mathbb{R})$)

Definición 1.19. Sea K un cuerpo. Un álgebra de Lie sobre K es un K-espacio vectorial $\mathcal{G}$ dotado de una operación bilineal $[\ ,\ ] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ llamada corchete de Lie, que satisface:

1. Antisimetría: $[X, Y] = -[X, Y]$ para todo $X, Y \in \mathcal{G}$.

2. Identidad de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathcal{G}$.

Ejemplos de álgebras de Lie

1. El espacio vectorial de todos los campos vectoriales suaves sobre una variedad M, forma un álgebra de Lie bajo la operación corchete de Lie sobre campos vectoriales.

2. Todo espacio vectorial es un álgebra de Lie con el corchete nulo, en este caso se dice un álgebra de Lie abeliana.

3. El espacio vectorial $gl(n, \mathbb{R})$ de todas las matrices reales $n \times n$ forman un álgebra de Lie, con corchete definido por

$$[A, B] = AB - BA.$$

4. Un espacio vectorial de dimensión 2 con base $\{X, Y\}$ es un álgebra de Lie con el corchete $[X, X] = 0$, $[Y, Y] = 0$, $[X, Y] = Y$ y los demás se obtienen extendiendo bilinealmente.

5. $\mathbb{R}^3$ con la operación bilineal de *producto cruz* de vectores es un álgebra de Lie.

Definición 1.20. Sea G un grupo de Lie y sea $g \in G$. Se definen las traslaciones a izquierda y a derecha como los difeomorfismos de G, $l_g : G \to G$ y $r_g : G \to G$ respectivamente, dados por

$$l_g(h) = g.h,$$
$$r_g(h) = h.g,$$

para todo $h \in G$.

Definición 1.21. Un campo de vectores X sobre G (no necesariamente suave a priori) es llamado invariante por izquierda si para todo $g \in G$

$$dl_g X = X.$$

Ahora, usaremos los campos de vectores invariantes a izquierda para mostrar que el espacio tangente a G en la identidad, denotado por T_eG, es un álgebra de Lie.

Proposición 1.17. *Sea G un grupo de Lie. Y sea $\mathcal{G}$ el espacio vectorial de todos los campos vectoriales invariantes a izquierda sobre G. Entonces:*

1. *$\mathcal{G}$ es isomorfo (como espacio vectorial) a T_eG. Luego,* $\dim \mathcal{G} = \dim T_eG = \dim G$. *y además, los campos de vectores invarianes a izquierda son diferenciables.*
2. *El corchete de Lie de dos campos vectoriales invariantes a izquierda es también un campo vectorial invariante a izquierda.*
3. *$\mathcal{G}$ forma un álgebra de lie bajo la operación corchete de Lie sobre campos vectoriales.*

Demostración.

1. Dado que X es invariante a izquierda, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} TG \arrow[r, "dl_g"] & TG \\ G \arrow[u, "X"] \arrow[r, "l_g"] & G \arrow[u, "X"'] \end{tikzcd}$$

así que $X(g) = (dl_g)_e(X(e))$ para todo $g \in G$. Definamos la aplicación $\alpha : \mathcal{G} \to T_eG$ por $\alpha : X \mapsto X(e)$. Entonces α es lineal e inyectiva, ya que si $X, Y \in \mathcal{G}$ y $\alpha(X) = \alpha(Y)$, entonces para cada $g \in G$ $dl_g(X(e)) = dl_g(Y(e))$, además, sabemos por definición que

$$X(g) = X(l_g(e)) = dl_g(X(e)) = dl_g(Y(e)) = Y(g),$$

luego $X = Y$.
Veamos que α es también sobreyectiva. En efecto, para $v \in T_eG$, definamos $X_v \in \mathcal{G}$ por $X_v(g) = (dl_g)_e(v)$, para cada $g \in G$. Afirmamos que X_v es un campo de vectores invariantes a izquierda. Ahora $X_v : G \to TG$ es una aplicación suave entre variedades, dado que si $f \in C^\infty(G)$, entonces para $g \in G$

$$\begin{aligned}(X_v(f))(g) &= (dl_g(v))f \\ &= v(f \circ l_g).\end{aligned}$$

Ahora, si $x \in G$ tenemos

$$(f \circ l_g)(x) = (f \circ m)(g, x).$$

la cual es una aplicación suave (aquí, m es la aplicación multiplicación sobre G). Entonces, $v(f \circ l_g)$ es suave y por lo tanto también lo es X_v.
Mostremos ahora que X_v es invariante a izquierda. Para todo $g, h \in G$, tenemos

$$dl_h(X_v(g)) = dl_h(dl_g)_e(v) = d(l_h \circ l_g)_e(v) = (dl_{hg})_e(v) = X_v(hg) = X_v(l_h(g)),$$

así que X_v es invariante a izquierda. Por lo tanto α es sobreyectiva y $\mathcal{G} \simeq T_eG$.

2. Por lo anterior sabemos que los campos de vectores invariantes a izquierda son C^∞, luego su corchete de Lie está definido. Ahora si X está l_g-relaciondo consigo mismo e Y está l_g-relacionado consigo mismo, entonces por (1.10), $[X, Y]$ está l_g-relacionado con $[X, Y]$ es decir, $dl_g \circ [X, Y] = [X, Y] \circ l_g$, entonces el corchete de Lie de dos campos invariantes a izquierda es nuevamente un campo de vectores invariante a izquierda.

3. Es una consecuencia inmediata de la proposición (1.17)

□

Definición 1.22. Sea G un grupo de Lie, definimos el álgebra de Lie de G como el álgebra de Lie $\mathcal{G}$ de los campos de vectores invariantes a izquierda sobre G. Alternativamente podríamos definir el álgebra de Lie de G como el espacio tangente T_eG en la identidad con la estructura de álgebra de Lie inducida por el isomorfismo de espacios vectoriales de la proposición anterior de $\mathcal{G}$ con T_eG como un isomorfismo de álgebras de Lie. A partir de ahora será conveniente ver las álgebras de Lie bajo éste último enfoque.

Ejemplos de álgebras de Lie de algunos grupos de Lie

1. Consideremos $G = (\mathbb{R}^n, +)$ grupo de Lie, en este caso quién sería $\mathcal{G}$?. Notar que para este grupo $l_g(x) = g + x$ para todo $x \in G$, así que $(dl_g) = id_{T_0\mathbb{R}^n}$, luego $(dl_g)_0(v) = v$ para todo $v \in T_0\mathbb{R}^n$ y entonces $\mathcal{G} = T_0\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$, así el álgebra de Lie contiene todos los campos de vectores constantes.

2. Sea $gl(n, \mathbb{R})$ el conjunto de todas las matrices reales $n \times n$. Éste es un espacio vectorial real de dimensión n^2. Afirmamos que $gl(n, \mathbb{R})$ es un álgebra de Lie si

definimos $[A,B] = AB - BA$. Consideremos ahora el grupo $GL(n,\mathbb{R})$, éste como subconjunto abierto de $gl(n,\mathbb{R})$ hereda su estructura de variedad y como vimos antes es un grupo de Lie con la multiplicación de matrices como la operación de grupo. Sea ahora $\mathcal{G}$ el álgebra de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$ y sea $\alpha : T_e gl(n,\mathbb{R}) \to gl(n,\mathbb{R})$. Entonces para todo $v \in T_e gl(n,\mathbb{R})$

$$\alpha(v)_{ij} = v(x_{ij}),$$

donde $x_{ij} : A \to A_{ij}$, con $A \in gl(n,\mathbb{R})$ es la función coordenada global. Dado que $T_e GL(n,\mathbb{R}) = T_e gl(n,\mathbb{R})$ tenemos una apliacción natural

$$\beta : \mathcal{G} \to gl(n,\mathbb{R})$$

definida por $\beta(X) = \alpha(X(e))$.
Afirmamos que β es un isomorfismo de álgebras de Lie, y de esta forma $gl(n,\mathbb{R})$ es el álgebra de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$.
Claramente β es un isomorfismo de espacios vectoriales. Solo necesitamos mostrar que $\beta[X,Y] = [\beta(X), \beta(Y)]$ siempre que $X, Y \in \mathcal{G}$.
Ahora $(x_{ij} \circ l_g)(h) = x_{ij}(gh) = \sum_k x_{ik}(g).x_kj(h)$. Dado que Y es un campo invariante a izquierda, tenemos

$$\begin{aligned} (Y(x_{ij}))(g) &= dl_g(Y_e)(x_{ij}) = Y_e(x_{ij} \circ l_g) \\ &= \sum_k x_{ik}(g).Y_e(x_{kj}) \\ &= \sum_k x_{ik}(g).\alpha(Y_e)_{kj}) \\ &= \sum_k x_{ik}(g).\beta(Y)_{kj}. \end{aligned}$$

Usando el hecho anterior, calculemos la ij-ésima componente de $\beta([X,Y])$.

$$\begin{aligned} \beta([X,Y])_{ij} &= [X,Y]_e(x_{ij}) = X_e(Y(x_{ij}) - Y_e(X(x_{ij}))) \\ &= \sum_k \{X_e(x_{ik})\beta(Y)_{kj} - Y_e(x_{ik})\beta(Y)_{kj}\} \\ &= \sum_k \{\beta(X)_{ik}\beta(Y)_{kj} - \beta(Y)_{ik}\beta(Y)_{kj}\} \\ &= [\beta(X), \beta(Y)]_{ij}. \end{aligned}$$

Así β es un isomorfismo de álgebras de Lie.

3. Sea V un espacio vectorial real de dimensión n. Consideremos el conjunto $\mathrm{End}(V)$ de los endomorfismos de V y sea $\mathrm{Aut}(V) \subset \mathrm{End}(V)$ el conjunto de los automorfismos de V. $\mathrm{End}(V)$ es un espacio vectorial real n^2 dimensional y además es un

álgebra de Lie si se define el corchete como

$$[l_1, l_2] = l_1 \circ l_2 - l_2 \circ l_1. \tag{1.17}$$

Una base de V determina un difeomorfismo de $\mathrm{End}(V)$ con $gl(n, \mathbb{R})$ que envía $\mathrm{Aut}(V)$ en $GL(n, \mathbb{R})$, por lo tanto $\mathrm{Aut}(V)$ hereda una estructura de variedad como subconjunto abierto de $\mathrm{End}(V)$ y es un grupo de Lie bajo la composición. Bajo la identificación natural de $\mathrm{End}(V)$ con $T_e\mathrm{End}(V) = T_e\mathrm{Aut}(V)$ (e:=transformación identidad sobre V), $\mathrm{End}(V)$ hereda la estructura de álgebra de Lie del álgebra de Lie de $\mathrm{Aut}(V)$ que no es otra que la descrita en (1.17). De esta forma $\mathrm{End}(V)$ es el álgebra de Lie del grupo de Lie $\mathrm{Aut}(V)$.

Definición 1.23. Una p-forma diferencial w sobre G es llamada invariante a izquierda si para todo $\in G$ ésta es invariante bajo el pullback de una traslación a izquierda l_g,

$$(lg)^* w = w$$

esto es, si para todo $g \in G$ se tiene que:

$$(l_g^* w)(h)(X_1, \cdots, X_p) = w_{lg(h)} \circ (dl_g(h)X_1, \cdots, dl_g(h)X_p) \equiv w_{gh} \circ (dl_g(h)X_1, \cdots, dl_g(h)X_p),$$

para cada $h \in G$.

Como en el caso de campos vectoriales invariantes a izquierda, no es necesario asumir que las formas invariantes a izquierda son C^∞, la suavidad es consecuencia de la invarianza a izquierda.

Denotaremos el espacio vectorial de las p-formas invariantes a izquierda sobre G por $\Lambda^p_{l\ inv}(G)$ y sea

$$\Lambda^*_{l\ inv}(G) = \sum_{p=0}^{\dim G} \Lambda^p_{l\ inv}(G).$$

Las 1-formas invariantes a izquierda también son conocidas como formas de Maurer-Cartan.

La siguiente proposición es el análogo de 1.17 para formas invariantes a izquierda

Proposición 1.18. *1. Las formas invariantes a izquierda son suaves.*

2. *$\Lambda^*_{l\ inv}(G)$ es un subálgebra del álgebra $\Lambda^*(G)$ de todas las formas suaves sobre G y la aplicación $w \to w(e)$ es un isomorfismo de álgebras, de $\Lambda^*_{l\ inv}(G)$ en $\Lambda(T_e^* G)$. En particular, ésta aplicación da un isomorfismo natural de $\Lambda^1_{l\ inv}(G)$ con $(T_e^* G)$ y por lo tanto con $\mathcal{G}^*$ (en este sentido $\Lambda^1_{l\ inv}(G)$ es considerado como el espacio dual del álgebra de Lie de G).*

3. *Si w es una 1-forma invariante a izquierda y X un campo de vectores invariante a izquierda, entonces $w(X) : G \to \mathbb{R}$ es constante, y esta constante es justo el efecto de w como elemento del dual $\mathcal{G}^*$ sobre $X \in \mathcal{G}$ según (2), a saber, $w(e)(X_e)$.*

4. *Si* $w \in \Lambda^1_{l\ inv}(G)$ *y* $X, Y \in \mathcal{G}$, *entonces se sigue de (1.13) que*

$$dw(X,Y) = -w([X,Y]). \tag{1.18}$$

5. *Sea* $\{X_1, \cdots, X_d\}$ *una base de* T_eG *con base dual* $\{w_1, \cdots, w_d\}$ *para* $\Lambda^1_{l\ inv}(G)$ *entonces existen constantes* C_{ijk} *tal que*

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{d} C_{ijk} X_k, \tag{1.19}$$

(El coeficiente C_{ijk} *es llamado constante estructural de* G *con respecto a la base* $\{X_i\}$ *de* $\mathcal{G}$*).*
Las derivadas exteriores de w_i *están dadas por las ecuaciones de Maurer-Cartan*

$$dw_i = \sum_{j \leq k} C_{jki} w_k \wedge w_j. \tag{1.20}$$

Subgrupos y subálgebras de Lie

Definición 1.24. Sea G un grupo de Lie. Un subconjunto H de G es un *subgrupo de lie* si

1. H es un subgrupo abstracto de G,
2. H es un grupo de Lie y,
3. la inclución $i : H \to G$ es una inmersión.

Un subespacio lineal $\mathcal{H}$ de un álgebra de Lie $\mathcal{G}$ es una *subálgebra de Lie* si $\mathcal{H}$ es cerrado bajo el corchete de Lie en $\mathcal{G}$.

Homomorfismos

Definición 1.25. Una aplicación $\varphi : G \to H$ es un *homomorfismo de grupos de Lie* si φ es suave y es un homomorfismo de grupos abstractos.
Diremos que φ es un isomorfismo si además es un *difeomorfismo*. Un isomorfismo de grupos de Lie consigo mismo es llamado *automorfismo*.
Si $H = \mathrm{Aut}(V)$ para algún espacio vectorial V, o si $H = Gl(n, \mathbb{R})$ entonces un homomorfismo $\varphi : G \to H$ es llamado una representación del grupo de Lie G.

Definición 1.26. Si $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ son álgebras de Lie, una aplicación $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ es un *homomorfismo de álgebras de Lie*, si es lineal y preserva el corchete $(\psi[X,Y] = [\psi(X), \psi(Y)]$

para todo $X,\ Y\ \in \mathcal{G}$).
Si además, ψ es inyectiva y sobreyectiva, entonces es un *isomorfismo*. Un isomorfismo de $\mathcal{G}$ consigo mismo es un *automorfismo*.
Si $\mathcal{H} = \mathrm{End}(V)$ para algún espacio vectorial V o si $\mathcal{H} = gl(n, \mathbb{R})$, entonces, el homomorfismo $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ es llamado una representación del álgebra de Lie $\mathcal{G}$.

Proposición 1.19. *Supongamos que $\varphi : G \to H$ es un homomorfismo de grupos de Lie. Escribimos $d\varphi_e = \delta\varphi$. Entonces, $\delta\varphi : T_eG \to T_eH$ es un homomorfismo de álgebras de Lie.*

El siguiente es un resultado importante cuando consideramos G un grupo de Lie conexo y simplemente conexo.

Teorema 1.2. *Sea G un grupo de Lie conexo y simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathcal{G}$, y H un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathcal{H}$. Dado un homomorfismo $\tau : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, existe un único homomorfismo de grupos de Lie $\rho : G \to H$ tal que $\delta\rho = \tau$.*

Demostración. (Ver [15]). □

La aplicación exponencial

Sea G un grupo de Lie y $\mathcal{G}$ su álgebra de Lie. Nos gustaría construir una aplicación exponencial de $\mathcal{G} \to G$ la cual nos ayude a dar alguna información acerca de la estructura de $\mathcal{G}$

Proposición 1.20. *Sea G un grupo de Lie y $\mathcal{G}$ su álgebra de Lie. Entonces, para cada $X \in \mathcal{G}$ existe una aplicación $c_X : \mathbb{R} \to G$ que satisface*

1. $c_X(0) = e$,
2. $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} c_X(t) = X$, *y*
3. $c_X(s+t) = c_X(s)c_X(t)$.

Demostración. Considerar la aplicación de álgebras de Lie $\tau : \mathbb{R} \to \mathcal{G}$ definida por $\tau : t \mapsto tX$, con $X \in \mathcal{G}$. Ahora, $\mathbb{R}$ es conexo y simplemente conexo, así por (1.2) existe una única aplicación de grupos de Lie $c_X : \mathbb{R} \to G$ tal que $(dc_X)_0 = \tau$, esto es:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} c_X(t) = X.$$

□

Esto motiva la siguiente definición

Definición 1.27. Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathcal{G}$. Definimos la *aplicación exponencial* $\exp : \mathcal{G} \to G$ por $\exp(X) = c_X(1)$

Lema 1.1. *Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathcal{G}$ y $X \in \mathcal{G}$. Si denotamos $\tilde{X}$ el campo de vectores invariantes a izquierda sobre $\mathcal{G}$ con $\tilde{X}(1) = X$, entonces,*

$$\phi_t(g) = gc_X(t), \qquad g \in G$$

es el flujo de $\tilde{X}$, en particular, $\tilde{X}$ es completo, es decir, el flujo existe para todo $t \in \mathbb{R}$

No es dificil probar que la aplicación exponencial es suave y que además, para todo $X \in \mathcal{G}$ y para todo $t \in \mathbb{R}$, $c_{tX}(1) = c_X(t)$.

Proposición 1.21. *Sea G un grupo de Lie y $\mathcal{G}$ su álgebra de Lie. Identificando $T_0\mathcal{G}$ y T_eG con $\mathcal{G}$. Entonces, $(d\ \exp)_0 : T_0\mathcal{G} \to T_eG$ es la aplicación identidad.*

Demostración. Usando el resultado del lema anterior, tenemos

$$\begin{aligned} (d\ \exp)_0(X) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(0 + tX) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} c_{tX}(1) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} c_X(t) \\ &= X. \end{aligned}$$

□

Corolario 1.
a) Para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $\exp((t_1 + t_2)X) = \exp t_1X \cdot \exp t_2X$.
b) $\exp(-tX) = (\exp(tX))^{-1}$.

A continuación mostraremos una propiedad muy importante que relaciona morfismos de grupos de Lie y morfismos de álgebras de Lie.

Proposición 1.22. *Sea $\phi : G \to H$ un morfismo de grupos de Lie. Entonces, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] & H \\ \mathcal{G} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\delta\phi"] & \mathcal{H} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

Es decir, exp *es natural.*

Demostración. Fijando $X \in \mathcal{G}$. Considerar las curvas

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \phi(\exp(tX)),\\ \tau(t) &= \exp(\delta\phi(tX)).\end{aligned}$$

Ahora, $\sigma, \tau : \mathbb{R} \to G$ son homomorfismos de grupos de Lie con $\sigma(0) = \tau(0) = 1$. Así

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \sigma(t) &= (d\phi)1(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tX)),\\ &= (\delta\phi)(X),\\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \tau(t).\end{aligned}$$

Así, $\sigma(t) = \tau(t)$ para todo t. $\square$

Capítulo 2

Acciones localmente libres y cohomología

2.1. Acciones loalmente libres de grupos de Lie

En lo que sigue, todas las variedades y grupos de Lie serán conexos.

Definición 2.1. Sea G un grupo de Lie con identidad e y una variedad M. Una *acción a derecha* sobre M es una aplicación

$$\begin{array}{rcl} A : M \times G & \to & M \\ (x\ ,\ g) & \mapsto & x \cdot g, \end{array}$$

que satisface

1. $x \cdot e = x$,
2. $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot gh$,

para todo $g,\ h \in G$ y $x \in M$.

Si denotamos por $A_g : M \to M$ a la aplicación $A_g(x) = x \cdot g$. Entonces, A es una acción si y solo si la aplicación $g \mapsto A_g$ es un anti-homomorfismo de G en el grupo $\mathrm{Diff}^{\infty}(M)$ (difeomorfismos de M).
La órbita de un punto $x \in M$ por la acción A es el subconjunto $\mathcal{O}_x = \{x \cdot g \ / \ g \in G\}$. Una acción de G sobre M define una relación de equivalencia cuyas clases de equivalencia son las órbitas. La relación es $x_1 \sim x_2$ si y solo si existe $g \in M$ tal que $x_2 = x_1 \cdot g$, esto quiere decir que dos elementos x_1 y x_2 son equivalentes si y solo si sus óbitas son iguales, es decir, $x_1 \cdot G = x_2 \cdot G$. Al cociente de M por esta relación $(M/\!\sim)$ se le conoce

como el espacio de órbitas.

Definición 2.2. Sea G un grupo de Lie. Un G-fibrado principal es una variedad M equipada con una acción de G tal que:

1. $B = M/G$ es una variedad suave y la proyección $\pi : M \to B$ es una submersión.
2. Para cualquier $b \in B$, existe $U \subset B$ con $b \in U$ y un difeomorfismo G-equivariante

$$\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G.$$

Esto es, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \times G \arrow[r, "\psi\times 1", "\cong"'] \arrow[d, "A"] & U \times G \times G \arrow[d, "1\times\mathbf{mult.}"] \\
\pi^{-1}(U) \arrow[r, "\psi", "\cong"'] & U \times G
\end{tikzcd}$$

donde G actúa sobre $U \times G$ por $(u, h) \cdot g = (u, hg)$.

Ejemplo 2.1. Sea G un grupo de Lie, $H \subseteq G$ un subgrupo cerrado. Entonces $\pi : G \to G/H$ es un H-*fibrado principal*.
En este caso G será el espacio total, $B = G/H$ será el espacio base y H será la fibra. Entonces podemos escribir el fibrado como $H \hookrightarrow G \xrightarrow{\pi} B$.

Este ejemplo en particular será de nuestro interés. Consideremos entonces el subgrupo G_x de G, definido por $G_x = \{g \in G \ / \ x \cdot g = x\}$ (comunmente llamado **grupo de isotropía** de x). Por la definición, es evidente que G_x es un subgrupo cerrado de G. Consideremos ahora la relación de equivalencia $\sim$ sobre G tal que $g_1 \sim g_2$ si, y solo si, $g_1 \cdot g_2^{-1} \in G_x$. Sea G/G_x el espacio cociente de G por $\sim$, y $\pi : G \to G/G_x$ la proyección que envía a g en su clase de equivalencia $\pi(g)$. Tenemos entonces la siguiente

Proposición 2.1. *$\pi : G \to G/G_x$ define un G_x-fibrado principal. En particular, si G_x es discreto, entonces π es una aplicación de recubrimiento*

Demostración. Sea $\bar{g} = \pi(g)$, luego, tenemos que $\pi^{-1}(\bar{g}) = G_x \cdot g = \{g' \cdot g \ / \ g' \in G_x\}$, este conjunto es difeomorfo a G_x por una traslación a derecha $r_g : G \to G$, $r_g(g') = g' \cdot g$. Consideremos ahora un disco D, incrustado en G de clase C^∞, transverso a G_x, con $e \in D$ y tal que $\dim(D) = \operatorname{cod}(G_x)$. Haciendo D pequeño si es necesario, podemos asumir que para todo $g \in D$, D es transverso a $G_x \cdot g$ en g y también que D no tiene puntos equivalentes distintos. Tenemos entonces que $\pi^{-1}(\pi(D)) = G_x \cdot D = \{h \cdot g \ / \ g \in D, \ h \in G_x\}$, así la aplicación

$$\psi : G_x \times D \to \pi^{-1}(\pi(D))$$

dada por $\psi(h, g) = h \cdot g$ es una biyección, ya que es sobreyectiva y además si $h \cdot g = h' \cdot g'$ con $g, \ g' \in D$ y $h, \ h' \in G_x$, implica que $g \sim g'$ y como D no tiene puntos equivalentes distintos, se concluye que $g = g'$ y por lo tanto $h = h'$. Ademaś, ya que $G_x \cdot g$ es transverso a D en g para todo $g \in D$ y $\dim(D) = \text{cod}(G_x)$, se sigue que ψ es un difeomorforfismo suave. Por lo tanto $\pi^{-1}(\pi(D))$ es abierto en G, y así por definición de topología cociente, $\pi(D)$ es abierto en G/G_x y $\pi|D : D \to \pi(D)$ es un homeomorfismo ya que es una biyección continua y abierta.
Ahora bien, para cada $g \in G$, consideremos el disco $D_g = g \cdot D = r_g(D)$.
Entonces si $g \in D_g$, $r_g|D : D \to D_g$ es un difeomorfismo, y para todo $g' \in D_g$, D_g es transverso a $g' \cdot G_x$ en g'. Por un argumento análogo al anterior, tenemos que $\pi(D_g)$ es abierto en G/G_x y $\pi|D_g : D_g \to \pi(D_g)$ es un homeomorfismo. Además la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \psi_g : G_x \times D_g & \to & \pi^{-1}(\pi(D_g)) \\ (h, g') & \mapsto & h \cdot g' \end{array}$$

es un difeomorfismo suave. Esto prueba que $\pi : G \to G/G_x$ define una estructura de espacio fibrado. La colección $A = \{(\pi/D_g)^{-1} : \pi(D_g) \to D_g \ / \ g \in G\}$ es un atlas C^∞ en G/G_x el cual define una estructura diferenciable suave sobre G/G_x. □

Proposición 2.2. *Sea $A : M \times G \to M$, una acción suave a derecha, y sea $x \in M$. Existe una única inmersión suave biunivoca $\overline{A_x} : G/G_x \to \mathcal{O}_x$ tal que $\overline{A_x} \circ \pi = A_x$. Si G_x es discreto, la aplicación $A : G \to \mathcal{O}_x$ es una aplicación de recubrimiento.*

Demostración. Sea $\bar{g} = \pi(g)$. Definimos $\overline{A}_x : G/G_x \to \mathcal{O}_x$ por $\overline{A}_x(\bar{g}) = A(x, g)$. Es inmediato que $\overline{A}_x$ está bien definida y que es una biyección. Mostraremos ahora que $\overline{A}_x$ es una inmersión. Dado $D_g \subset G$ como en la demostración del teorema anterior, tenemos que $\overline{A}_x \circ (\pi|D_g) : D_g \to \mathcal{O}_x$ es dado por $\overline{A}_x \circ (\pi|D_g)(g') = A(x, g') = A_x(g')$, que es suave por ser composición de aplicaciones suaves, y si u es un vector tangente a D_g en g', tenemos que $D(\overline{A}_x \circ (\pi|D_g)) \cdot u = DA_x(g') \cdot u$.
Por otra parte $G_x \cdot g' = \{h \in G \ / \ A(x, h) = A(x, g')\} = \overline{A}_x^{-1}(A_x(g'))$ por lo tanto se ve que $T_{g'}(G_x \cdot g') = \{u \in T_{g'}(G) \ / \ DA_x(g') \cdot u = 0\}$, ahora si $DA_x(g') \cdot u = 0$ y $u \in T_{g'}(D_g)$ entonces $u = 0$ ya que $G_x \cdot g'$ y D_g tienen dimensiones complementarias. Esto muestra que $\mathcal{O}_x$ es una variedad inmersa biunivocamente en M. Si G_x es un subgrupo discreto de G, $\pi : G \to G/G_x$, es un espacio de recubrimiento, así $A_x : G \to \mathcal{O}_x$ es una aplicación de recubrimiento dado que $A_x = \overline{A_x} \circ \pi$. En particular $\dim(G) = \dim(G/G_x) = \dim(\mathcal{O}_x)$.
Recíprocamente si $\dim(G) = \dim(\mathcal{O}_x)$, tenemos que $\dim(G) = \dim(G/G_x)$, lo cual implica que G_x es dicreto. □

Decimos que $A : M \times G \to M$ es una acción foliada si para cada $x \in M$ el espacio tangente a la órbita de A que pasa a través de x tiene una dimensión fija k. Cuando k es la dimensión de G decimos que la acción A es localmente libre.

Otra caracterización de acción localmente libre es cuando el grupo de isotropía $G_x = \{g \in G \ / \ A(x, g) = x\}$ es un subgrupo discreto de G para todo $x \in M$.

Proposición 2.3. *Las órbitas de una acción foliada definen las hojas de una foliación.*

Demostración. (Ver [4]) □

Dado un grupo de Lie G y un subgrupo de Lie $H \subset G$, la aplicación

$$H \times G \to G \tag{2.1}$$

$$(h, g) \mapsto g \cdot h, \tag{2.2}$$

define una acción de H sobre G. El grupo de isotropía de cada elemento $g \in G$ es la identidad. Así esta acción es localmente libre y las órbitas definen una foliación de G cuyas hojas son todas homeomorfas a H. Las hojas de esta foliación están incrustadas si y solo si H es cerrado en G [4].

La siguiente proposición nos muestra como puede ser el tipo topológico de las órbitas de una acción de $\mathbb{R}^2$ sobre una variedad M.

Proposición 2.4. *Sea G un subgrupo cerrado de $\mathbb{R}^2$. Entonces G es isomorfo a uno de los grupos $\mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^l$ donde k y l son enteros con $0 \le k + l \le 2$. En particular, las órbitas de una acción de $\mathbb{R}^2$ son inmersiones de alguna de las siguientes variedades: un punto, S^1, $\mathbb{R}$, $S^1 \times S^1$, $S^1 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$.*

Demostración. (Ver [4]) □

A continuación estudiaremos algunas acciones del grupo de transformaciones afines de la recta. Primero recordemos como se define este grupo.

El grupo de Lie de transformaciones afines de la recta es el conjunto G_2 de todos los difeomorfismos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la operación de composición $(f, g) \mapsto f \circ g$. Las transformaciones afines son de la forma $f(x) = ax+b$ donde $a, b \in \mathbb{R}$, son fijos, con $a \neq 0$. Sean f y g en G_2, dados por $f(x) = ax+b$, $g(x) = a'x+b'$, la composición $f \circ g(x) = (aa')x+(ab'+b)$ es tambien afín, así, G_2 es un grupo de Lie dos-dimensional que posee dos componentes conexas. Consideremos solo la componente conexa $G_2^+ = \{f(x) = ax + b \mid a > 0\}$ de transformaciones afines que preservan la orientación de $\mathbb{R}$.
Puede verificarse fácilmente que:

a) G_2^+ no es abeliano y por lo tanto no es isomorfo a $\mathbb{R}^2$,

b) G_2^+ es difeomorfo a $\mathbb{R}^2$, luego es simplemente conexo,

c) G_2^+ es isomorfo al subgrupo G^+ de $GL(2,\mathbb{R})$, definido por el conjunto de matrices

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tal que $b \in \mathbb{R}$ y $a > 0$.

La siguiente proposición nos indica como son las órbitas dos-dimensionales de una acción de G_2^+ sobre una variedad M.

Proposición 2.5. *Sea $A : M \times G^+ \to M$ una acción de G^+ sobre una variedad M^n. Entonces las órbitas dos dimensionales de A son difeomorfas a planos o cilindros*

Demostración. Sea $p \in M$ y $G_p = \{g \in G \mid A(p,g) = p\}$ el grupo de isotropía de p. Como sabemos $\mathcal{O}(p)$ es difeomorfo a la variedad G^+/G_p, obtenida como el cociente de G^+ por la relación de equivalencia $\sim$ en G^+, la cual identifica g_1 y g_2 si $g_1^{-1}g_2 \in G_p$. Por otra parte si $\mathcal{O}(p)$ tiene dimensión 2, claramente G_p es un subgrupo discreto de G^+. Entonces será suficiente probar que todo subgrupo discreto de G^+ es de la forma $H = \{g^n \ / \ n \in \mathbb{Z}\}$, con g fijo, dado por

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Identifiquemos G^+ con el plano $P^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$. Con esta identificación, el producto en P^+ está dado por $(x,y) \circ (x',y') \mapsto (xx', xy' + y)$ y $g = (a,b)$. Ahora bien, se presentan varios casos.
Primero supongamos que $a \neq 1$, en este caso la línea $r = \{(1,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ está identificada por $\sim$ con la línea $r \circ g = \{(a, b+y) = (1,y) \circ (a,b) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
Las líneas r y $r \circ g$ son los bordes de la banda $A = \{(x,y) \ / \ 1 \leq x \leq \text{máx}(a, a^{-1})\}$. Claramente dos puntos distintos contenidos en el interior de A no están identificados por $\sim$, luego $\mathcal{O}(p)$ es difeomorfo al cociente de A por $\sim$; que es la variedad obtenida de A identificando los bordes r y $r \circ g$ por el difeomorfismo $(1,y) \in r \mapsto (a, b+y) \in r \circ g$, que claramente es un cilindro.
En el caso donde $a = 1$ y $b \neq 0$ podemos usar el mismo argumento, sustituyendo la línea r por la linea $s = \{(x, 0 \mid x \in \mathbb{R})\}$ y la banda A por la banda $B = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq |b|x\}$ acotada por las lineas s y $s \circ g = \{(x,y) \mid y = |b|x\}$.
En el caso donde $a = 1$ y $b = 0$, claramente $\mathcal{O}(p)$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^2$.
Consideremos entonces un subgrupo discreto $H \subset G^+$ primero probaremos que H está

contenido en una línea l que pasa a través de $(1,0)$. Supongamos que (a,b), $(c,d) \in H$ donde $a \neq 1$. En este caso es fácil ver que $(a,b)^n = (a^n, b(a^n-1)(a-1)^{-1})$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto

$$h_n = (a,b)^{-n} \circ (c,d) \circ (a,b)^n = \left(c, \frac{1}{a-1}[bc(1-a^{-n}) + b(a^{-n}-1)] + da^{-n}\right)$$

Si $a > 1$, dado que $h_n \in H$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y que H es cerrado, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = (c, (bc-b)/(a-1)) = h \in H$. Además dado que H es discreto se concluye que $h_n = h$ para todo $n \geq n_0$, lo cual implica que (a,b) y (c,d) conmutan como puede verse usando la relación $h_{n+1} \circ h_n^{-1} = (1,0)$. Por otra parte esto implica la relación $b(c-1) = d(a-1)$ y así $(c,d) \in l = \{(x,y) \mid b(x-1) = (a-1)y\}$. En el caso que $a = 1$ y $c \neq 1$ utilizamos el mismo argumento, luego podemos asumir que $a = c = 1$ y en este caso $H \subset \{(1,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Supongamos ahora que $H \subset l \cap P^+ = \{(x,y) \mid x > 0 \text{ y } y = k(x-1)\}$ En este caso $l \cap P^+$ es una subgrupo de G^+ isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{R}$ por el isomorfismo $f(t) = (e^t, k(e^t-1))$ como se puede ver facílmente. Por lo tanto $f^{-1}(H)$ es un subgrupo discreto de $\mathbb{R}$, así $H = \{g^n \ / \ n \in \mathbb{Z}\}$ para algún $g \in H$. En el caso que $H \subset l = \{(1,y) \ / \ y \in \mathbb{R}\}$, el argumento es similar.

$\square$

A continuación veremos un ejemplo de una acción localmente libre de G_2^+ sobre una variedad compacta M^3 que tiene un conjunto infinito contable de órbitas cilindricas cuyos complementos constan de órbitas difeomorfas al plano. Como veremos todas las órbitas de ésta acción son densas en M^3.

Ejemplo 2.2.

Primero definiremos una acción localmente libre $\tilde{\varphi} : G^+ \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. La variedad M^3 será construida como el cociente de $\mathbb{R}^3$ por una relación de equivalencia $\sim$ de tal forma que $\tilde{\varphi}$ induce una acción φ de G^+ en M, $\varphi : G^+ \times M \to M$ y por último veremos la naturaleza de las órbitas de φ

(A) **Construcción de la acción $\tilde{\varphi}$.**
Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Se puede verificar fácilmente que los autovalores de A son λ y λ^{-1}, consideremos $0 < \lambda = \frac{(3-\sqrt{5})}{2} < 1$. Sea $v = (v_2, v_3)$ un autovector de A asociado a λ.
Definimos $\tilde{\varphi} : G^+ \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por $\tilde{\varphi}(g;(x,z)) = \left(x + \frac{1}{a}\ln\alpha \ , \ z + \frac{\beta}{\alpha}e^{-ax} \cdot v\right)$, donde $g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $z \in \mathbb{Z}^2$ y $a = \ln(\lambda) < 0$. Puede verificarse directamente que:

a) $\tilde{\varphi}(g' \circ g, p) = \tilde{\varphi}(g', \tilde{\varphi}(g,p))$,

b) $\tilde{\varphi}(e,p) = p$,

para todo $g, g' \in G^+$ y $p \in \mathbb{R}^3$. Por lo tanto $\tilde{\varphi}$ es una acción de G^+ sobre $\mathbb{R}^3$.

(B) **Construcción de la variedad M.**
Considerar en $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, la relación de equivalencia $\sim$ la cual identifica dos puntos (x, z) y (x', z') si se safisface una de las siguientes condiciones

a) $x = x'$ y $z - z' \in \mathbb{Z}^2$,

b) $x - x' = k \in \mathbb{Z}$ y $z' = A^k z$.

Haciendo la identificación (a) obtenemos la variedad $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$.
Por otra parte si $z - z' \in \mathbb{Z}^2$, entonces $A^k z - A^k z' \in \mathbb{Z}^2$ (dado que A y A^{-1} tienen entradas enteras), Luego A induce un difeomorfismo $\overline{A} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$. Luego, tenemos que la identificación b) es equivalente a identificar dos puntos (x, p) y $(x', p') \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$ cuando $x - x' = k \in \mathbb{Z}$ y $p' = \overline{A}^k(p)$.
Notar que las relación de equivalencia $\sim$ es generada por los difeomorfismos $f_1,\ f_2,\ f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que actúan propiamente discontinuamente, definidos por $f_1(x, z) = (x + 1, A^{-1}z)$, $f_2(x, z) = (x, z + e_1)$, $f_3(x, z) = (x, z + e_2)$, donde $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, esto significa que dos puntos q y $q' \in \mathbb{R}^3$ están identificados, si, y solo si $q = h(q')$ donde $h = f_1^{m1} \circ f_2^{n_1} \circ f_3^{l_1} \circ \cdots \circ f_1^{mk} \circ f_2^{n_k} \circ f_3^{l_k}$, $k \in \mathbb{N}$, $m_i,\ n_i,\ l_i\ \in \mathbb{Z}$ para $i = 1, \cdots, k$. Denotemos por H el conjunto de todos los difeomorfismos de este tipo.
Sea $M = \mathbb{R}^3/\sim$ con la topología cociente y $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/\sim$ la proyección natural de $\sim$. Claramente π es un espacio de recubrimiento y por lo tanto podemos inducir en M una C^∞ estructura de variedad diferenciable, donde un atlas de M es el conjunto de todas las cartas locales $(\pi(V), (\pi|V)^{-1})$ donde $V = \{(x, z_2, z_3)\ /\ |x - \alpha| < 1/2,\ |z_2 - \beta_2| < 1/2,\ |z_3 - \beta_3| < 1/2\}$, con $(\alpha, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$. Los cambios de coordenadas de éste atlas son restricciones de difeomorfismos de H.

(C) **Construcción de la acción φ.**
Veamos que $\tilde{\varphi}$ conmuta con los difeomorfismos $f_1,\ f_2$ y f_3, ie. $\forall (g, p) \in G^+ \times \mathbb{R}^3$, $\tilde{\varphi}(g, f_i(p)) = f_i(\tilde{\varphi}(g, p))$. En efecto para f_1 tenemos

$$\begin{aligned}
f_1(\tilde{\varphi}(g,p)) &= f_1\left(x + \frac{1}{a}\ln\alpha\ ,\ z + \frac{\beta}{\alpha}e^{-ax}\cdot v\right) \\
&= \left(x + \frac{1}{a}\ln\alpha + 1,\ A^{-1}(z + \frac{\beta}{\alpha}e^{-ax}\cdot v)\right) \\
&= \left(x + \frac{1}{a}\ln\alpha + 1,\ A^{-1}z + \frac{\beta}{\alpha}e^{-ax}\cdot A^{-1}\cdot v)\right) \\
&= \left(x + \frac{1}{a}\ln\alpha + 1,\ A^{-1}z + \frac{\beta}{\alpha\lambda}e^{-ax}\cdot v)\right) \\
&= \left(x + \frac{1}{a}\ln\alpha + 1,\ A^{-1}z + \frac{\beta}{\alpha}e^{-ax-a}\cdot v)\right) \\
&= \tilde{\varphi}(x + 1, A^{-1}z) = \tilde{\varphi}(g, f_1(p)).
\end{aligned}$$

Y en los casos $i = 2, 3$ claramente se verifica la igualdad $\tilde{\varphi}(g, f_i(p)) = f_i(\tilde{\varphi}(g, p))$. Podemos entonces definir una acción C^∞ en M dada por

$$\varphi(g, \pi(p)) = \pi(\tilde{\varphi}(g, p)). \tag{2.3}$$

Es fácil ver que φ está bien definida por esta expresión, ie. si $\pi(p) = \pi(p')$ entonces $\pi(\tilde{\varphi}(g, p)) = \pi(\tilde{\varphi}(g, p'))$.

(D) **Descripción geométrica de las órbitas de φ**

Primero veremos que pasa con las órbitas de $\tilde{\varphi}$ cuando hacemos la identificación a). Observemos que $\tilde{\mathcal{O}}(p)$ de un punto $p \in \mathbb{R}^3$ por $\tilde{\varphi}$ es el plano que pasa por p y es paralelo al subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, v_2, v_3)$. Ahora, haciendo la identificación a), dejando igual la primera coordenada y pasando al cociente, cada plano $\{x\} \times \mathbb{R}^2$ se transforma en la superficie $\{x\} \times \mathbb{T}^2$, donde $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Por otra parte $\tilde{\mathcal{O}}(p)$ corta al plano $\{x\} \times \mathbb{R}^2$ a lo largo de la línea $t \mapsto p' + tv$, $p' = (p_2, p_3)$ la cuál tiene inclinación $\theta = v_3/v_2 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ en este plano. Por lo tanto después de la identificación a), la órbita $\tilde{\mathcal{O}}(p)$ es transformada en una subvariedad inmersa $\mathbb{R} \times \xi$, donde ξ es una órbita del flujo irracional de pendiente θ en $\mathbb{T}^2$. Como sabemos ξ es densa en $\mathbb{T}^2$, por lo tanto $\mathbb{R} \times \xi$ es densa en $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$. Esto implica que todas las órbitas de φ son densas en M.

Veremos ahora que ocurre despues de la identificación b). La subvariedad inmersa $\mathbb{R} \times \xi$ coincide con $\{k\} \times \mathbb{T}^2$ en la línea $\{k\} \times \xi$ ($k \in \mathbb{Z}$) y esta línea puede ser identificada por b) con la línea $\{0\} \times \bar{A}^k(\xi)$. Ahora dado que v es un autovector de A se tiene que el flujo irracional de pendiente θ es invariante bajo $\bar{A}$, luego $\bar{A}(\xi)$ es una órbita de éste flujo. En el caso que ξ contenga un punto periódico q de A, de periodo k ($\bar{A}^k(q) = q$), los extremos $\{0\} \times \xi$ y $\{k\} \times \xi$ de la banda $\{x\} \times \xi$ estarían identificados y entonces tendríamos una órbita cilíndrica de φ. Recíprocamente, si los extremos $\{0\} \times \xi$ y $\{k\} \times \xi$ ($k > 0$) están identificados, tenemos que $\bar{A}^k(\xi) = \xi$, y esto implica que ξ contiene un único punto fijo q_0 de $\bar{A}^k$, dado que $\bar{A}^k|\xi$ es una contracción, es decir, si q y $q' \in \xi$ entonces $d(\bar{A}^k(q), \bar{A}^k(q')) \leq \lambda^k d(q, q')$. Con éste argumento establecemos una correspondencia biyectiva entre órbitas cilindricas de ξ y órbitas periódicas de $\bar{A}$. Como sabemos, $\bar{A}$ tiene infinitas órbitas periódicas contables (ver [12]), así φ tiene infinitas órbitas cilíndricas contables. El resto de las órbitas son difeomorfas al plano por la proposición anterior.

2.2. Cohomología foliada y Cohomología de álgebras de Lie

A continuación definiremos la *cohomología foliada* y la *cohomología de álgebras de Lie* ya que son una herramienta muy importante para el estudio de acciones localmente libres de grupos de Lie.

Dada una foliación $\mathcal{F}$ de M y $\Lambda(M)$ el álgebra graduada de todas las formas diferenciables sobre M. Si $I(\mathcal{F}) \subset \Lambda(M)$ es el ideal anulador de $\mathcal{F}$, entonces $\Lambda(\mathcal{F}) = \Lambda(M)/I(\mathcal{F})$ es el álgebra graduada de las formas diferenciables a lo largo de $\mathcal{F}$.

Los elementos de $\Lambda^k(\mathcal{F})$ podrían pensarse como las secciones de $\Omega^k(\mathcal{F})$ y se denominan *formas foliadas*. Dado que $dI(\mathcal{F}) \subset I(\mathcal{F})$, la diferencial $d : \Lambda(M) \to \Lambda(M)$ induce la *diferencial foliada* $d_f : \Lambda(\mathcal{F}) \to \Lambda(\mathcal{F})$ dada por

$$\begin{aligned} d_f w(Y_0, \cdots, Y_k) &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i Y_i w(Y_0, \cdots, \widehat{Y_i}, \cdots, Y_k) && (2.4) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} w([Y_i, Y_j], Y_0, \cdots, \widehat{Y_i}, \cdots, \widehat{Y_j}, \cdots, Y_k). && (2.5) \end{aligned}$$

para $Y_0, \cdots, Y_k \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$. Similarmente a la derivada exterior usual, la derivada foliada satiface $d_f \circ d_f = 0$. El kernel $Z(\mathcal{F})$ de d_f es el conjunto de las d_f-formas cerradas y la imagen $B(\mathcal{F})$ de d_f es el conjunto de las d_f-formas exactas. La cohomología $H^*(\mathcal{F})$ del complejo diferencial $(\Lambda(\mathcal{F}), d_f)$ es la cohomología de la variedad foliada $(M, \mathcal{F})$.

Sea $\mathcal{G}$ un álgebra de Lie de dimensión finita. Por *Teoremas de Lie* (ver [7]) a ésta le corresponde un grupo de Lie G simplemente conexo. A cada $\mathcal{G}$-módulo N podemos asociarle un complejo de cocadenas $C^k(\mathcal{G}; N)$ definido por

$$C^k(\mathcal{G}; N) := Hom(\Lambda^k \mathcal{G}, N), \qquad k = 0, 1, \cdots, \dim\mathcal{G},$$

El operador diferencial

$$\delta : C^k(\mathcal{G}; N) \to C^{k+1}(\mathcal{G}; N)$$

es definido por

$$\begin{aligned} \delta w(Y_0, \cdots, Y_k) &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i Y_i w(Y_0, \cdots, \widehat{Y_i}, \cdots, Y_k) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} w([Y_i, Y_j], Y_0, \cdots, \widehat{Y_i}, \cdots, \widehat{Y_j}, \cdots, Y_k). \end{aligned}$$

Es fácil verificar, usando la identidad de Jacobi y las propiedades de la $\mathcal{G}$-acción sobre N que $\delta \circ \delta = 0$

Tenemos entonces el complejo diferencial $(C^k(\mathcal{G}; N), \delta)$, llamado el complejo **Chevalley-Eilenberg** de $\mathcal{G}$ con valores en N. Cuya cohomología

$$H^k(\mathcal{G}, N) = \frac{\ker\ \delta : C^k(\mathcal{G}; N) \to C^{k+1}(\mathcal{G}; N)}{\mathrm{im}\ \delta : C^{k-1}(\mathcal{G}; N) \to C^k(\mathcal{G}; N)}$$

es llamada la cohomología del álgebra de Lie de $\mathcal{G}$ con valores en N.

Dado que nuestro objetivo de interés será la cohomología con valores en $\mathbb{R}$, consideremos

$N = \mathbb{R}$ con la acción trivial de $\mathcal{G}$.

Observemos que el grupo de cohomología así obtenido es justamente el grupo de cohomología de las formas invariantes a izquierda sobre G (debido a la equivalencia 1.18(2)) y δ es exactamente d (definido en 1.13(6)). Por definición $C^0(\mathcal{G};\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ y $C^1(\mathcal{G};\mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{G},\mathbb{R}) = \mathcal{G}^*$.

Las primeras tres aplicaciones de coborde son:

$$(\delta\alpha)(X) = 0, \tag{2.6}$$

$$(\delta\beta)(X,Y) = -\beta([X,Y]), \tag{2.7}$$

$$(\delta\gamma)(X,Y,Z) = -\gamma([X,Y],Z) - \gamma([Y,Z],X) - \gamma([Z,X],Y), \tag{2.8}$$

donde $X, Y, Z \in \mathcal{G}$ y α, β, γ son 0, 1 y 2-cocadenas respectivamente.

La primera ecuación implica que

$$H^0(\mathcal{G},\mathbb{R}) = \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Usando la segunda ecuación vemos que $H^1(\mathcal{G},\mathbb{R})$ es exactamente el kernel de $\delta : C^1(\mathcal{G};\mathbb{R}) \to C^2(\mathcal{G};\mathbb{R})$ ya que la aplicación $\delta : C^0(\mathcal{G};\mathbb{R}) \to C^1(\mathcal{G};\mathbb{R})$ es cero. Los elementos α del kernel son precisamente los que se anulan sobre el conmutador, es decir $\alpha([X,Y]) = 0$ para todo $X, Y \in \mathcal{G}$. Alternativamente, podemos verlo como aplicaciones de $\mathcal{G}/[\mathcal{G},\mathcal{G}]$ a $\mathbb{R}$, por lo tanto

$$H^1(\mathcal{G},\mathbb{R}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{G}/[\mathcal{G},\mathcal{G}],\mathbb{R}). \tag{2.10}$$

2.3. Cohomología de una acción

Sea G un grupo de Lie contráctil, y sea $A : M \times G \to M$ una acción a derecha localmente libre de G sobre una variedad cerrada, conexa y orientable. La acción A induce una acción de G por automorfismos del anillo $C^\infty(M)$ de las funciones C^∞ sobre M (por composición), es decir

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathrm{Aut}(C^\infty(M)) & \to & \mathrm{Aut}(C^\infty(M)), \\ (\ g \ \ , \ \ f\ ) & \mapsto & g \cdot f = f \circ A_g, \end{array}$$

para todo $g \in G$ y $f \in C^\infty(M)$, definiendo una estructura de G-módulo $C^\infty_A(M)$ sobre $C^\infty(M)$. La cohomología de la acción A es por definición la cohomología de grupos[1] $H^*(G, C^\infty_A(M))$ de G con coeficientes en el G-módulo $C^\infty_A(M)$. El primer grupo de cohomología $H^1(G, C^\infty_A(M))$ juega un papel muy importante en el estudio de acciones localmente libres.

Un 1-cociclo sobre la acción $A(x,g) = x \cdot g$ es una aplicación suave $a : M \times G \to \mathbb{R}$ tal

[1] (ver[3])

que satisface la condición

$$a(x, gh) = a(x, g) + a(xg, h) \quad \text{para todo } \; x \in M, \quad g, h \in G.$$

Un 1-cociclo es llamado 1-coborde si existe una aplicación suave $b : M \to \mathbb{R}$ tal que

$$a(x, g) = -b(x) + b(xg) \quad \text{para todo } \; x \in M, \quad g \in G.$$

Denotaremos por $Z^1(G, C_A^\infty)$ al conjunto de los 1-cociclos sobre A y por $B^1(G, C_A^\infty)$ al conjunto de los 1-cobordes sobre A. Cabe destacar que el conjunto $Z^1(G, C_A^\infty)$ es un espacio vectorial y $B^1(G, C_A^\infty)$ es un subespacio vectorial de $Z^1(G, C_A^\infty)$. Definimos entonces el primer grupo de cohomología

$$H^1(G, C_A^\infty) := \frac{Z^1(G, C_A^\infty)}{B^1(G, C_A^\infty)}.$$

Definición 2.3. Una acción localmente libre $A : M \times G \to M$ es cohomológicamente rígida 1-dimensional si todo 1-cociclo $a : M \times G \to \mathbb{R}$ es cohomólogo al homomorfismo $\phi : G \to \mathbb{R}$, es decir, existe una aplicación suave $b : M \to \mathbb{R}$ tal que

$$a(x, g) = -b(x) + \phi(g) + b(xg) \quad \text{para todo } \; x \in M, \quad g \in G.$$

claramente a así definido satisface la condición de cociclo.
Que la acción A sea cohomológicamente rígida 1-dimensional es equivalente a que $H^1(G, C_A^\infty)$ sea isomorfo al primer grupo de cohomología $H^1(\mathcal{G}^*)$ del álgebre de Lie $\mathcal{G}$ de G. En efecto, $H^1(G, C_A^\infty) \simeq \mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})$ luego, G contráctil, implica que G es simplemente conexo y así por *Teoremas de Lie* [7], tenemos una equivalencia entre homomorfismos de grupos de Lie en sus correspondientes homomorfismos de álgebras de Lie, es decir $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R})$, y además, tenemos que $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{G}/[\mathcal{G}, \mathcal{G}], \mathbb{R}) \simeq H^1(\mathcal{G}^*)$, obteniendo así el isomorfismo $H^1(G, C_A^\infty) \simeq H^1(\mathcal{G}^*)$.

2.4. Descripción dual de acciones localmente libres

Sea $\mathcal{F}$ la foliación dada por las órbitas de A, asociado a ésta tenemos un homomorfismo no-singular $j_A : \mathcal{G} \to \mathfrak{X}(\mathcal{F})$ del álgebra de Lie de G en el álgebra de todos los campos vectoriales tangentes a $\mathcal{F}$, dado por $j_A(E) = \overline{E}$, donde $\overline{E}(x) = DA_x(e).E$, y $A_x : G \to M$, $A_x(g) = x \cdot g$, con $E \in \mathcal{G}$. No-singular significa que si $\overline{E}(x) = 0$ para algún $x \in M$, entonces $E = 0$. Dualmente tenemos un homomorfismo natural i_A no-singular, del álgebra exterior $\Lambda_R(\mathcal{G}^*)$ de las formas invariantes sobre G en el álgebra exterior $\Lambda(\mathcal{F})$ de las formas foliadas de la variedad foliada $(M, \mathcal{F})$. Este homomorfismo conmuta con las diferenciales, ie. $i_A(dw) = d_f i_A(w)$ y está dado por $i_A w(\overline{E}(x)) = w(E)$. No-singular significa que si $(i_A w)_x = 0$ para algún $x \in M$, entonces $w = 0$.

Formalmente hablando, la siguiente proposición nos da una descripción dual de acciones localmente libres en terminos de formas diferenciables, conduciendo así a la cohomología.

Proposición 2.6. *Sea M una variedad orientable, cerrada y conexa, sea $\mathcal{F}$ una foliación p-dimensional y G un grupo de Lie simplemente conexo de la misma dimensión de $\mathcal{F}$. Las siguientes premisas son equivalentes:*

1. *Una acción localmente libre A de G, cuyas órbitas son las hojas de $\mathcal{F}$,*

2. *Un homomorfismo no-singular del álgebra de Lie $\mathcal{G}$ de G en el álgebra de Lie $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ de todos los campos vectoriales C^∞ tangentes a las hojas de $\mathcal{F}$,*

3. *Un homomorfismo no-singular del álgebra exterior $\Lambda_R(\mathcal{G}^*)$ en el álgebra exterior $\Lambda(\mathcal{F})$ de las formas foliadas de $(M, \mathcal{F})$, el cual conmuta con los diferenciales.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2)
Sea $A : M \times G \to M$ una acción C^∞ localmente libre, G simplemente conexo. Dado $E \in \mathcal{G}$, $\varphi_t(x) = A(x, \exp tE)$ es un flujo sobre M. Sea $\overline{E}$ el campo de vectores que generan φ_t. Notemos que

$$\overline{E}(x) = DA_x(e).E, \tag{2.11}$$

donde $A_x : G \to M$, $A_x(g) = xg$, con $x \in M$ y $g \in G$.
A continuación mostraremos que la aplicación [2]

$$j_A : \mathcal{G} \to \mathfrak{X}(\mathcal{F}) \tag{2.12}$$

es un homomorfismo no-singular . Para eso, primero definamos para cada $g \in G$ el homomorfismo interno de G por $I_g(h) = ghg^{-1}$. Dado que $I_g = l_g \circ r_{g^{-1}} = r_{g^{-1}} \circ l_g$, entonces por (1.22) tenemos que

$$\exp \circ r_{g*} = I_{g^{-1}} \circ \exp. \tag{2.13}$$

Por otra parte dado que A es una acción a izquierda, tenemos claramente que

$$A_{gh} = A_h \circ A_g. \tag{2.14}$$

Tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo

[2]Cada acción $A \in \mathcal{A}(G, \mathcal{F})$ determina una acción infinitesimal asociada $j_A : \mathcal{G} \to \mathfrak{X}(F)$ dada por $\overline{E}(x) = \frac{d}{dt}A(x, \exp tE)|_{t=0}$ (campo tangente al flujo), luego el homomorfismo j_A es la acción infinitesimal de A

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, "j_A"] & \mathfrak{X}(\mathcal{F}) \\ \mathcal{G} \arrow[u, "r_{g*}"] \arrow[r, "j_A"] & \mathfrak{X}(\mathcal{F}) \arrow[u, "A_{g*}"'] \end{tikzcd}$$

$$A_{g*} \circ j_A = j_A \circ r_{g*}, \tag{2.15}$$

En efecto, de 2.13 y 2.14 vemos que

$$(A_g \circ A_{g^{-1}\exp tE})(x) = A_{g^{-1}\exp tEg}(x) = A(x, I_g^{-1} \circ \exp tE) = A(x, \exp tr_{g*}E), \tag{2.16}$$

entonces

$$\begin{aligned} \overline{(r_{g*}E)}(x) = DA_x(e).r_{g*}E = DA_x(e)I_{g^{-1}*}E &= DA_x(e)(r_g \circ l_{g^{-1}}) * E \\ &= DA_x(e)r_{g*}(l_{g^{-1}*E}) \\ &= A_{g*} \circ DA_x(e)E \\ &= A_{g*} \circ \overline{E}. \end{aligned}$$

Usando este hecho, veamos que se cumple $j_A[E_1, E_2] = [j_AE_1, j_AE_2]$, probando así que la aplicación j_A es un homomorfismo no-singular entre álgebras de Lie. En efecto,

$$\begin{aligned} [j_AE_1, j_AE_2] &= \lim_{t\to 0} \frac{((A_{(\exp tE_1)*}j_AE_2) - j_AE_2)}{t}(x) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(j_A(r\exp tE_1)*E_2 - j_AE_2)}{t}(x) \\ &= j_A[E_1, E_2](x), \end{aligned}$$

para todo $E_1,\ E_2 \in \mathcal{G}$

2) $\Rightarrow$ 1)

Sea $\mathcal{G} \to \mathfrak{X}(\mathcal{F})$ un homomorfismo no-singular de álgebras de Lie. Si consideramos $\mathcal{G}\times\mathcal{M}$, como el álgebra de Lie de todos los campos vectoriales C^∞ sobre $G \times M$, entonces el conjunto $\{(E, \overline{E}), E \in \mathcal{G}\}$ es una subálgebra de $\mathcal{G} \times \mathcal{M}$. Luego por el teorema de Frobenius, ésta subálgebra determina una foliación $\mathcal{F}$ transversal a las fibras de $G \times M \xrightarrow{\pi} M$ e invariante por la acción a izquierda de G por traslación a izquierda en el primer factor. Dado que la fibra M es compacta, por un resultado muy conocido de *C. Ehresmann*, tenemos que $\pi|L : L \to G$ es un espacio de recubrimiento para toda hoja L de $\mathcal{F}$. Además por ser G simplemente conexo tenemos que $\pi|L : L \to G$ es un difeomorfismo. Esto implica que cada hoja de $\mathcal{F}$ intersecta a la fibra $\pi^{-1}(e)$ en exactamente un punto. Luego, tenemos una aplicación $\mu : G\times M \to M$, donde $(e, \mu(g, x))$

es la intersección de la hoja que pasa por (g, x), con la fibra $\pi^{-1}(e)$.
Es fácil ver que

a) $\mu(e, x) = x$, para todo $x \in M$,

b) $(h, x) \in L$ si y solo si $(e, \mu(h, x)) \in L$, para toda hoja L de $\mathcal{F}$.

Recordemos que $\mathcal{F}$ es invariante por la acción

$$\begin{array}{rcl} G \times (G \times M) & \to & G \times M, \\ (g, (h, x)) & \to & (gh, x), \end{array}$$

por traslación en el primer factor. Ahora, si $(h, x) \in L$, por b), se tiene que (gh, x), $(g, \mu(h, x) \in gL$. De esta forma $\mu : G \times M \to M$ es una acción a izquierda localmente libre, es decir, $\mu(gh, x) = \mu(g, \mu(h, x))$ para todo $g, h \in G$ y $x \in M$. Ahora $A : M \times G \to M$ defnida de la forma $A(x, g) = \mu(g^{-1}, x)$, es una acción localmente libre a derecha tal que $j_A E = \overline{E}$.

2) $\Rightarrow$ 3)
Elegir un fibrado normal para $T\mathcal{F}$ y considerar la apliacción lineal

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{G}^* & \to & \Lambda^1(M) \\ w & \mapsto & w^\nu, \end{array}$$

donde $w^\nu(\overline{E}) = w(E)$ y $\nu \subset \ker w^\nu$. Si τ es otro fibrado normal, entonces $w^\nu - w^\tau \in I(\mathcal{F})$. Luego, pasando al cociente por $I(\mathcal{F})$ tenemos una aplicación lineal bien definida $w \mapsto i_A w$, donde $i_A(w) = \pi(w^\nu)$, con $\pi : \Lambda(M) \to \Lambda(\mathcal{F}) = \frac{\Lambda(M)}{I(\mathcal{F})}$, además la aplicación i_A se extiende a un homomorfismo $\Lambda_R(\mathcal{G}^*) \xrightarrow{i_A} \Lambda(\mathcal{F})$ el cual conmuta con las diferenciales, para ver que conmuta con las diferenciales, consideremos $E_1, E_2 \in \mathcal{G}$, luego por definición tenemos que

$$i_A(dw)(\overline{E}_1, \overline{E}_2) = dw(E_1, E_2). \tag{2.17}$$

Por otra parte tenemos que

$$\begin{aligned} d_f(i_A w)(\overline{E}_1, \overline{E}_2) &= \overline{E}_1 i_A w(E_2) - \overline{E}_2 i_A w(E_1) - i_A w([\overline{E}_1, \overline{E}_2]) \\ &= -i_A w([\overline{E}_1, \overline{E}_2]) \\ &= -i_A w(\overline{[E_1, E_2]}) \\ &= d\ i_A w(\overline{[E_1, E_2]}) \\ &= dw(E_1, E_2). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Así, de (2.17) y (2.18) vemos claramente que $i_A(dw) = d_f(i_A w)$.

3) $\Rightarrow$ 2)
Sea

$$\begin{array}{rcl} \lambda_R(\mathcal{G}^*) & \to & \lambda(\mathcal{F}) \\ w & \mapsto & \overline{w} \end{array}$$

Un homomorfismo no singular que conmuta con la diferencial. Elegimos una base $\beta = \{E_1, \cdots, E_p\}$ de $\mathcal{G}$ y sea $\{w_1, \ldots, w_p\}$ la base dual. Entonces $\{\bar{w}_1, \cdots, \bar{w}_d\}$ es una base de $T\mathcal{F}^*$. El campo de vectores $\{X_1, \cdots, X_d\}$ dados por $\bar{w}_i(X_j)$, $1 \leq i, j \leq d$ son linealmente independientes. Dado que el homomorfismo conmuta con las diferenciales, entonces las ecuaciones de Maurer-Cartan

$$dw_k = \sum_{i<j} c_{ij}^k w_i \wedge w_j \tag{2.19}$$

son preservadas por el difeomorfismo $w \mapsto \bar{w}$. Luego, la aplicación $E_i \mapsto X_i$ define un homomorfismo $\mathcal{G} \to \chi(\mathcal{F})$. □

Ahora dado que $i_A : \Lambda_R(\mathcal{G}^*) \to \Lambda(\mathcal{F})$ conmuta con las diferenciales, entonces induce una aplicación

$$i_A : H^*(\mathcal{G}^*) \to H^*(\mathcal{F}). \tag{2.20}$$

Recordemos que $\overline{E}(x) = DA_x(e).E$ e $i_A w(\overline{E}) = w(E)$. Sea $A : M \times G \to M$ una acción localmente libre a derecha y sea μ una medida de probabilidad sobre M la cual es invariante bajo la acción A. Entonces tenemos una aplicación sobreyectiva de cocadenas

$$\tilde{P}_A : \Lambda^k(M) \to \Lambda_R^k(\mathcal{G}^*), \qquad 0 \leq k \leq m$$

dada por

$$(\tilde{P}_A w)(E_1, \cdots, E_k) = \int_M w(\overline{E}_1, \cdots, \overline{E}_k) d\mu.$$

Proposición 2.7.

1. *$\tilde{P}_A$ conmuta con las diferenciales.*

2. *$I(\mathcal{F}) \subset ker\tilde{P}_A$*

Demostración. Recordemos la fórmula

$$\begin{aligned} dw(\overline{E_0}, \cdots, \overline{E_k}) &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \overline{E}_i w(\overline{E}_0, \cdots, \widehat{\overline{E}_i}, \cdots, \overline{E}_k) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} w([\overline{E}_i, \overline{E}_j], \overline{E}_0, \cdots, \widehat{\overline{E}_i}, \cdots, \widehat{\overline{E}_j}, \cdots, \overline{E}_k). \end{aligned}$$

Donde $w \in \Lambda^k(M)$ y $E_i \in \mathcal{G}$, $1 \leq i \leq k$. Afirmamos que

$$\mu(\overline{E}h) = \int_M \overline{E}hd\mu = 0$$

para toda función real h sobre M y todo $E \in \mathcal{G}$. Esto se satisface dado que

$$\overline{E}h = \lim_{t\to 0} \frac{h \circ \varphi_t - h}{t}.$$

Donde $\varphi_t = A(\exp tE, x)$ es el flujo de $\overline{E}$. Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue obtenemos

$$\mu(\overline{E}h) = \lim_{t\to 0} \frac{\mu(h \circ \varphi_t) - \mu(h)}{t},$$

ya que $\mu((h\circ\varphi_t) = \mu(h)$ para todo t, por la invarianza de μ. Probando así la afirmación. Recordando ahora que $E \to \overline{E}$ es un homomorfismo del álgebra de Lie $\mathcal{G}$ en el álgebra de Lie $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ tenemos

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_A dw(E_0, \cdots, E_k) &= \int_M dw(\overline{E_0}, \cdots, \overline{E_k})d\mu \\
&= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \int_M w([\overline{E_i, E_j}], \overline{E}_0, \cdots, \widehat{\overline{E}_i}, \cdots, \widehat{\overline{E}_j}, \cdots, \overline{E}_k) \\
&= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \tilde{P}_A w([\overline{E}_i, \overline{E}_j], \overline{E}_0, \cdots, \widehat{\overline{E}_i}, \cdots, \widehat{\overline{E}_j}, \cdots, \overline{E}_k) \\
&= d\tilde{P}_A w(E_0, \cdots, X_k)
\end{aligned}$$

Por otra parte, 2) se satisface claramente de la definición de $I(\mathcal{F})$. □

De la proposición anterior se sigue que $\tilde{P}_A$ induce un operador

$$P_A : \Lambda(\mathcal{F}) \to \Lambda_R(\mathcal{G}^*) \tag{2.21}$$

que conmuta con las diferenciales, y de esta forma obtenemos una sucesión exacta corta de complejos diferenciables que se escinde

$$0 \to K \to \Lambda(\mathcal{F}) \underset{i_A}{\overset{P_A}{\rightleftarrows}} \Lambda_R(\mathcal{G}^*) \to 0 \tag{2.22}$$

donde $K = \ker P_A$. De (2.22) tenemos una sucesión exacta corta en cohomología que se escinde

$$0 \to H^j(K) \to H^j(\mathcal{F}) \to H^j(\mathcal{G}^*) \to 0, \qquad 0 \leq j \leq p, \tag{2.23}$$

luego

$$H^j(\mathcal{F}) = H^j(\mathcal{G}^*) \oplus H^j(K) \tag{2.24}$$

Notemos que si A tiene una medida de probabilidad invariante μ, entonces la aplicación lineal inducida $i_A : H^*(\mathcal{G}^*) \to H^*(\mathcal{F})$ es inyectiva ya que $P_A \circ i_A$ es la aplicación

identidad.
La siguiente proposición muestra que bajo ciertas condiciones, para dimensión 1, la cohomología foliada es isomorfa a la cohomología de grupos.

Proposición 2.8. *Sea $A : M \times G \to M$ una acción localmente libre a derecha. $\mathcal{F}$ la foliación dada por las órbitas de A. Si G es contractil, entoces $H^1(G, C^\infty_A(M))$ es isomorfo a $H^1(\mathcal{F})$*

Demostración. Consideremos la transformación $T : Z^1(G, C^\infty_A(M)) \to Z^1(\mathcal{F})$ la cual envía cada cociclo a, en la d_f-forma cerrada w, $w_x = i_A da_x(e)$, donde $a_x(g) = a(x, g)$, $x \in M$, $g \in G$. Notar que si σ es un camino suave sobre G, $\sigma(0) = e$, luego derivando la ecuación de cociclo

$$a(x, g\sigma(t)) = a(x, g) + a(xg, \sigma(t))$$

obtenemos

$$da_x(g).\sigma'(o) = da_{xg}(e).\sigma'(0)$$

entonces

$$w_{xg} = i_A da_x(g), \quad x \in M, \; g \in G$$

y dado que i_A conmuta con las diferenciales tenemos que $d_f w = 0$. La transformación T es claramente inyectiva. Mostremos que es sobreyectiva, entonces, dado $w \in Z^1(\mathcal{F})$ consideremos la aplicación $a : M \times G \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera

$$a(x, g) = \int_{x\alpha} w, \tag{2.25}$$

donde $\alpha : [0, 1] \to G$ es un camino suave tal que $\alpha(0) = e$ y $\alpha(1) = g$. Por ser G contractil, es claro que a no depende del camino elegido. Veamos que a definido en 2.25, es un cociclo, en efecto

$$\begin{aligned} a(x, g) + a(xg, h) &= \int_{x\alpha} w + \int_{(xg)\beta} w \\ &= \int_{x\sigma} w = a(x, gh) \end{aligned}$$

donde σ y β son caminos sobre G tales que $\sigma(0) = e,\ \sigma(1) = gh,\ \beta(0) = e,\ \beta(1) = h$ y

$$\sigma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \le t \le 1/2 \\ g.\beta(2t - 1), & 1/2 \le t \le 1 \end{cases} \tag{2.26}$$

Además

$$\begin{aligned} da_x(e).E &= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\int_0^s (A_x^* w(\alpha(t)))\alpha'(t)dt \\ &= w_x(\overline{E}) = i_A da_x(e).\overline{E}(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto T es sobreyectiva.

□

Proposición 2.9. *Sea G un grupo de Lie contractil y $A : M \times G \to M$ una acción localmente libre, cohomológicamente rígida 1-dimensional sobre una variedad M cerrada, orientable C^∞. Entonces existe una forma de volumen C^∞ A-invariante Ω sobre M, ie.*

$$A_g^*\Omega = \Omega.$$

Demostración. Elijamos una forma de volumen Ω_0 sobre M, y definamos $\det DA_g$ por

$$A_g^*\Omega_0(x) = \det DAg(x)\Omega_0(x), \quad \text{para todo} \;\; x \in M, \;\; g \in G.$$

Veamos ahora que $a : M \times G \to \mathbb{R}$, definido por $a(x, g) = \log|\det DA_g(x)|$ es un cociclo. En efecto

$$\begin{aligned} a(x,g) + a(xg,h) &= \log|\det DA_g(x)| + \log|\det DA_h(xg)| \\ &= \log|\det DA_h(xg). \det DA_g(x)| \\ &= \log|\det DA_h(A_g(x)) \circ \det DA_g(x)| \\ &= \log|\det D(A_h \circ A_g)(x)| \\ &= \log|\det D(A_{gh}(x)| = a(x, gh). \end{aligned}$$

Ahora, por hipótesis, dado que A es cohomologicamente rígida 1-dimensional, existe $\phi : G \to \mathbb{R}$ homomorfismo, y una función C^∞ $h : M \to \mathbb{R}$ tal que

$$a(x, g) - \phi(g) = h(x) - h(xg). \tag{2.27}$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que

$$\int_M e^h \Omega_0 = 1.$$

Afirmamos que $\Omega = e^h \Omega_0$ es una forma A-invariante. En efecto

$$\begin{aligned} A_g^*\Omega(x) &= \pm|\det DA_g(x)|e^{h(xg)}\Omega_0(x) \\ &= \pm e^{a(x,g)}.e^{h(xg)}\Omega_0(x) \\ &= \pm e^{\phi(g)}.e^{h(x)}\Omega_0(x) \quad \text{por } 2.27 \\ &= \pm e^{\phi(g)}\Omega(x) = \pm 1, \end{aligned}$$

donde $\pm$ es el grado de A_g. Luego, integrando y dado que $\int_M \Omega(x) = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_M A_g^*\Omega(x) &= \pm e^{\phi(g)} \int_M \Omega(x) \\ &= \pm e^{\phi(g)}, \end{aligned}$$

por lo tanto $e^{\phi(g)} = 1$, luego $a(x,g)$ es un coborde.

$\square$

Capítulo 3

Acciones parámetro rígido del Grupo de Heisenberg

3.1. Acciones parámetro rígido de grupos de Lie

Consideremos ahora un grupo de Lie contractil, con identidad e y una acción $A : M \times G \to M$, localmente libre $(L.L.)$ a derecha, entonces se tiene que $A(x, e) = e$, y $A(x, gh) = A(A(x, g), h)$, para todo $x \in M,\ g, h \in G$. Sea $G_A(x) = \{g \in G/\ A(x, g) = x\}$ el grupo de isotropía de A. Sabemos que cuando $G_A(x)$ es discreto, la acción A define una foliación $\mathcal{F}$ dada por sus órbitas. Consideremos también $\mathcal{A}(G, \mathcal{F})$, el espacio de todas las acciones localmente libres a derecha que tienen la misma foliacción $\mathcal{F}$. Afirmamos entonces que a cada $B \in \mathcal{A}(G, \mathcal{F})$ le corresponde un cociclo $\mathbf{a} : M \times G \to G$ sobre la acción A tal que

$$\begin{aligned} B(x, a(x, g)) &= A(x, g) \\ &o \\ x * a(x, g) &= xg, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $(*)$ representa la acción de B. Recordemos que un cociclo sobre A satisface las siguientes propiedades:

(1) Para cada $x \in M$, $a_x : G \to G$, $a_x(g) = a(x, g)$ es un difeomorfismo.

(2) $a(x, e) = e, \qquad \forall x \in M.$

(3) $a(x, gh) = a(x, g) \cdot a(xg, h), \qquad \forall x \in M,\ g, h \in G.$

Probemos la afirmación (3.1). Dado que A y B definen la misma foliación, por teorema 2.2 sabemos que existren inmersiones biunívocas $\bar{A}_x : G/G_A(x) \to \mathcal{O}_x$, $\bar{B}_x$:

$G/G_B(x) \to \mathcal{O}_x$ donde $G_A(x)$ y $G_B(x)$ son los grupos de isotropía de A y B respectivamente. Luego existe un único difeomorfismo $\bar{a}_x : G/G_A(x) \to G/G_B(x)$, $\bar{a}_x(\bar{g}) = (\bar{B}_x^{-1} \circ \bar{A}_x)(\bar{g})$ para todo $x \in M$. Ahora dado que A y B son $(L.L.)$, sus respectivos grupos de isotropía $G_A(x)$ y $G_B(x)$ son discretos, así, nuevamente por teorema 2.2 tenemos que dim$G/G_B(x)$ =dim$G$ =dim$G/G_A(x)$ y como G es contráctil, $\bar{a}_x$ tiene un único levantamiento C^∞, $a_x : G \to G$ tal que $a_x(e) = e$, $\forall x \in M$, además a_x satisface

$$B(x, a(x,g)) = A(x,g), \tag{3.2}$$

y es un difeomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "a_x"] \arrow[d, "\pi_A"] & G \arrow[d, "\pi_B"] \\
G/G_A(x) \arrow[r, "\bar{a}_x"] \arrow[d, "\overline{A}_x"] & G/G_B(x) \arrow[dl, "\overline{B}_x"] \\
\mathcal{O}_x &
\end{tikzcd}$$

Para mostrar que $a : M \times G \to G$ es suave, elijamos una base $\mathcal{B} = \{E_1, \cdots, E_d\}$ del álgebra de Lie $\mathcal{G}$ de G. Derivando (3.2) nos da

$$DB_x(a_x(g)).Da_x(g) = DA_x(g). \tag{3.3}$$

Sea

$$Da_x(g).E_j(g) = \sum_{i=1}^{d} L_{i,j}(x,g).E_i(a_x(g)). \tag{3.4}$$

Entonces expresando (3.3) y (3.4) en notación matricial, tenemos que

$$X(xg) = L(x,g)Y(xg),$$

donde $X_j(y) = DA_y(e).E_j$ y $Y_j(y) = DB_y(e).E_j$. Esto muestra que $L : M \times G \to GL(d, \mathbb{R})$ es suave, y de esto es fácil mostrar que $\mathbf{a} : M \times G \to G$ es suave.

Veamos ahora que $a : M \times G \to G$ cumple la propiedad (3)[1]. Notemos que:

$$\begin{aligned}
(xg) * a(xg,h) &= (xg)h, \\
x * a(x,gh) &= x(gh),
\end{aligned}$$

[1]ésta se conoce como propiedad de cociclo

y dado que $A(x, gh) = A(A(x, g), h)$, entonces $x(gh) = (xg)h$, luego

$$\begin{aligned} x * a(x, gh) &= (xg) * a(xg, h) \\ &= (x * a(x, g)) * a(xg, h) \\ &= x * (a(x, g)a(xg, h)) \end{aligned}$$

tenemos entonces que

$$x * p(x, g, h) = x$$

donde $p(x, g, h) = a(x, g)a(xg, h)a(x, gh)^{-1}$. Claramente $p(x, g, h) \in B(x)$, y dado que $G_B(x)$ es discreto y $p : M \times G \times G \to G$ es continua, entonces $p(x, g, h)$ ha de ser constante. Luego como $p(x, e, e) = e$, se tiene que $p(x, g, h) = e$, y así

$$a(x, gh) = a(x, g)a(xg, h) \tag{3.5}$$

$\forall x \in M,\ g, h \in G$.

Consideremos ahora el grupo $\mathrm{Diff}_0(M, \mathcal{F})$, de todos los difeomorfismos que preservan cada hoja de la foliación, isotópicos a la identidad a través de difeomorfismos que preservan las hojas de la foliación. El grupo $\mathrm{Aut}(G)$ de todos los automorfismos de G actuando a derecha sobre $\mathcal{A}(G, \mathcal{F})$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(G, \mathcal{F}) \times \mathrm{Aut}(G) & \to & \mathcal{A}(G, \mathcal{F}) \\ (\ B\ ,\ \Phi\ ) & \mapsto & B \circ \Phi, \end{array}$$

donde $B \circ \Phi$ es la reparametrización de B por Φ, es decir

$$(B \circ \Phi)(x, g) = B(x, \Phi(g)) = x * \Phi(g). \tag{3.6}$$

Notar que dar una acción a derecha B en $\mathcal{A}(G, \mathcal{F})$ es lo mismo que dar un homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} G & \to & \mathrm{Diff}_0(M, \mathcal{F}) \\ g & \mapsto & B_{g^{-1}}, \end{array} \tag{3.7}$$

donde $B_g(x) = B(x, g)$.

Definición 3.1. Una acción localmente libre a derecha $A : M \times G \to M$ es llamada *parámetro rígido*, si dada cualquier otra acción $B \in \mathcal{A}(G, \mathcal{F})$, existe $\Phi \in \mathrm{Aut}(G)$ y $F \in \mathrm{Diff}_0(M, \mathcal{F})$ tal que

$$\begin{aligned} B(F(x), \Phi(g)) &= F(A(x, g)) \\ &o \\ A_g &= F^{-1} \circ B_{\Phi(g)} \circ F \end{aligned} \tag{3.8}$$

para todo $x \in M$ y $g \in G$

También decimos que A es isotópica a una reparametrización de la acción B si (3.8) se satisface.

Example 3.1. ***Rigidez paramétrica de $\mathbb{R}$-acciones localmente libres***

La rigidez paramétrica de $\mathbb{R}$-acciones localmente libres está caracterizado por la solubilidad de una ecuación diferencial parcial.

Teorema 3.1. *Sea $A : M \times \mathbb{R} \to M$ una acción a derecha suave localmente libre de $\mathbb{R}$ sobre una variedad cerrada M y X el campo de vectores que genera a la acción A. Entonces A es parámetro rígido si y solo si la ecuación*

$$f = Xg + c \tag{3.9}$$

admite una solución $(g, c) \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ para cualquier $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

La ecuación anterior es llamada ecuación cohomológica sobre A.

Demostración. Supongamos primero que A es parámetro rígido. Sea $\mathcal{F}$ la foliación dada por las órbitas de A y tomemos $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Dado que M es cerrada, tenemos que $f_1 = f + c_1$ es una función a valores positivos para algún $c_1 > 0$. Sea $B \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathcal{F})$ el flujo generado por la reparametrización $Y = (1/f_1)X$.
Por hipotesis tenemos que existe $h \in \mathrm{Diff}_0(\mathcal{F})$ y $c_2 \in \mathbb{R}$ tal que [2]

$$B^{c_2 t} \circ h = h \circ A^t. \tag{3.10}$$

Y dado que h preserva las hojas de la foliación, tenemos que

$$h(x) = B^{-g(x)}(x) \tag{3.11}$$

para alguna $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.
De (3.10) y (3.11) tenemos

$$(h \circ A^t)(x) = B^{c_2 t} \circ B^{-g(x)}(x) = B^{c_2 t - g(x)}(x), \tag{3.12}$$

por otra parte, usando (3.11) obtenemos

$$(h \circ A^t)(x) = B^{-g(A^t(x))} \circ A^t(x). \tag{3.13}$$

De (3.12) y (3.13) concluimos que

$$A^t(x) = B^{g(A^t(x)) + c_2 t - g(x)}(x), \tag{3.14}$$

[2] En el caso de flujos usaremos la notación $A^t(x)$ en vez de $A(x, t)$.

Derivando, y evaluando en $t = 0$, (3.14) nos queda como

$$X = (c_2 + Xg)Y. \tag{3.15}$$

Luego, dado que $Y = (1/f_1)X$, (3.15) nos queda

$$c_2 + Xg = f_1$$

por lo tanto el par $(g, (c_2 - c_1))$ es una solución de (3.9)
Supongamos ahora que la ecuación (3.9) tiene solución para toda f $\in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Consideremos $B \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathcal{F})$. Sea Y el campo de vectores que genera a la acción B y f una función que no se anula satisfaciendo $fY = X$. Por hipotesis la ecuación (3.9) tiene una solución (g, c) para f. Dado que f no se anula y $Xg(x) = 0$ para algún $x \in M$, tenemos $c \neq 0$.
Ahora, si definimos $h : M \to M$ dada por

$$h(x) = B^{-g(x)}(x) \qquad \forall x \in M \tag{3.16}$$

en particular, (3.16) se cumple para $x = A^t(x)$, luego

$$h(A^t(x)) = B^{-g(A^t(x))}(A^t(x)) = B^{-g(A^t(x))} \circ A^t(x) \tag{3.17}$$

Luego, por (3.14), (3.17) nos queda

$$\begin{aligned} h(A^t(x)) &= B^{ct-g(x)}(x) \\ &= B^{ct} \circ B^{-g(x)}(x) \\ &= B^{ct} \circ h(x)(x) \qquad (3.16) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Dado que la aplicación $t \mapsto A^t(x)$ y $t \mapsto B^{ct}(h(x)) = h(A^t(x))$ son aplicaciones de recubrimiento de $\mathbb{R}$ a $\mathcal{F}(x)$ para cualquier $x \in M$, la aplicación h es en si mismo un cubrimiento de M. Y dado que h es homotópico a la identidad, éste es un difeomorfismo. Por lo tanto A es isotópica a una reparametrización de B $\square$

A continuación veremos un ejemplo clásico de un flujo paramétricamente rígido. Para $n \geq 1$ denotemos el toro n-dimensional $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ por $\mathbb{T}^n$. Para $v \in \mathbb{R}^n$, definimos el flujo lineal $R_v^t = x + tv$. El campo de vectores X_v correspondiente a R_v es un campo de vectores paralelos sobre $\mathbb{T}^n$.
Decimos que $v \in \mathbb{R}^n$ es diofantino si existe $\tau > 0$ tal que

$$\inf_{m \in \mathbb{Z}^n - \{0\}} |\langle m, v\rangle| \cdot ||m||^\tau > 0, \tag{3.19}$$

donde $\langle\ ,\ \rangle$ y $||\cdot||$ el producto interno euclideano y la norma sobre $\mathbb{R}^n$. Cuando v es diofantino, llamamos al flujo R_v, *flujo lineal Diofantino* y a la foliación dada por las órbitas una *foliación lineal diofantina*

Teorema 3.2 (Kolmogorov)**.** *La ecuación cohomológica (3.9) sobre un flujo lineal Diofantino sobre $\mathbb{T}^n$ admite una solución para cualquier $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$. Por teorema 3.1, todo flujo lineal Diofantino es parametricamente rígido.*

Demostración. Considerar la expansión de Fourier de f

$$f(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} a_m \exp(2\pi i\langle m, x\rangle).$$

Dado que f es una función suave, tenemos que

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}^n} ||m||^k |a_m| < \infty, \qquad \text{para } k \geq 1 \tag{3.20}$$

Ahora, fijemos un vector Diofantino $v \in \mathbb{R}^n$. Haciendo $b_0 = 0$ y

$$b_m = \frac{a_m}{2\pi i\langle m, v\rangle}, \qquad \text{para } m \neq 0.$$

Entonces

$$g(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} b_m \exp(2\pi i\langle m, x\rangle)$$

claramente es una solución formal de $f = X_v g + a_0$. Dado que v es Diofantino, existe $\tau > 0$ y $C_0 > 0$ tal que para todo $m \in \mathbb{Z}^n$, $|b_m| \leq C||m||^\tau |a_m|$, con $C = \frac{1}{2\pi i C_0}$. Luego, por (3.20) tenemos

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}^n} ||m||^k |b_m| < \infty \qquad \text{para } k \geq 1.$$

Y esto implica que g es una función suave. □

Cabe destacar que éste es el único ejemplo conocido de flujos paramétricamente rígidos.

Conjetura 3.3 (Katok)**.** *Todo flujo paramétricamente rígido sobre una variedad cerrada es conjugado a un flujo lineal Diofantino sobre un toro.*

Definición 3.2. Una acción localmente libre a derecha $A : M \times G \to M$ se dice *cociclo rígido*, si dada cualquier aplicación suave $a : M \times G \to G$ que cumple la condición de cociclo, existe un endomorfismo Φ de G y una aplicación suave $b : M \to G$ que satisface

$$a(x, g) = b(x)^{-1}\Phi(g)b(xg) \tag{3.21}$$

para todo $x \in M$ y $g \in G$.

El siguiente resultado muestra una equivalencia de rigidez paramétrica en función de cociclos.

Proposición 3.1. *Una reparametrización de $B \in \mathcal{A}(G, \mathcal{F})$ por $\Phi \in \mathrm{Aut}G$ es isotópica a la acción A, si y solo si el cociclo a sobre A dado por B es cohomólogo a Φ, es decir, si existe $b : M \to G$ tal que*

$$a(x, g) = b(x)^{-1}\Phi(g)b(xg), \tag{3.22}$$

para todo $x \in M$ y $g \in G$.

Demostración. Supongamos que existe $F \in \mathrm{Diff}_0(M, \mathcal{F})$ y $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ tal que

$$F(x) * \varphi(g) = F(xg). \tag{3.23}$$

Sea $B \in \mathcal{A}(G, \mathcal{F})$, $B : M \times G \to M$, entonces por proposición 2.2 existe una única aplicación $\overline{B}_x : G/G_B(x) \to \mathcal{O}_x \simeq \mathcal{F}_x$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "B_x"] \arrow[d, "\pi"] & \mathcal{O}_x \simeq \mathcal{F}_x \\
G/G_B(x) \arrow[ur, "\overline{B}_x"] &
\end{tikzcd}$$

tal que $B_x : G \to \mathcal{F}_x$ es un espacio de recubrimiento para todo $x \in M$. Consideremos una isotopía $\sigma(t) = F_t \in \mathrm{Diff}_0(M, \mathcal{F})$, tal que $\sigma(0) = \mathrm{id}$ y $\sigma(1) = F$. Sea $\tilde{\sigma} : [0, 1] \to G$, con $\tilde{\sigma}(0) = e$, el levantamiento de σ y definamos $\tilde{\sigma}(1) = b(x)^{-1}$, entonces $b : M \to G$ es suave y $x * \tilde{\sigma}(t) = F_t(x)$, $0 \le t \le 1$. Ahora, recordando que $x * a(x, g) = xg$, tenemos

$$F(xg) = (xg) * b(xg)^{-1} = x * (a(x, g).b(xg)^{-1}), \tag{3.24}$$

y

$$F(x) * \Phi(g) = (x * b(x)^{-1}) * \Phi(g) = x * (b(x)^{-1}\Phi(g)). \tag{3.25}$$

De las igualdades anteriores y de (3.23) vemos que

$$x * (b(x)^{-1}\Phi(g)b(x, g).a(x, g)^{-1}) = x, \tag{3.26}$$

luego, como en la prueba de (3.5) obtenemos

$$a(x, g) = b(x)^{-1}\Phi(g)b(xg). \tag{3.27}$$

Recíprocamente, asumamos (3.27) y $x * a(x,g) = xg$. Considerar la aplicación $F : M \to M$ dada por $F(x) = x * b(x)^{-1}$ la cual es claramente C^∞. Entonces

$$\begin{aligned} F(x) * \Phi(g) &= x * (b(x)^{-1}\Phi(g)) \\ &= x * (a(x,g)b(xg)^{-1}) \\ &= (xg) * b(xg)^{-1} \\ &= F(xg). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Mostremos que $F \in \mathrm{Diff}_0(M, \mathcal{F})$, para esto, notemos que como G es contráctil, entonces F es homotópico a la identidad. Ahora de (3.28) obtenemos

$$DB_{F(x)}(e).D\Phi(e).E = DF(x).DA_x(e).E \tag{3.29}$$

y dado que Φ es un automorfismo, vemos que

$$DF(x) : T_x\mathcal{F} \to T_{F(x)}\mathcal{F} \tag{3.30}$$

es inyectiva.
Dado que la derivada parcial $D_1B(x, b(x)^{-1}) = DB_{b(x)^{-1}}(x)$, esto muestra que la derivada de F en la dirección transversal a v para $T_x\mathcal{F}$ es también inyectiva.
Como F es homotópica a la identidad, entonces el grado de F es 1 y $F : M \to M$ es sobreyectiva, y dado que $DF(x) : T_xM \to T_M$ es no-singular, entonces $F \in \mathrm{Diff}_0(M, \mathcal{F})$ □

3.1.1. Acciones parámetro rígido del grupo de Heisenberg

El resultado central de esta sección será mostrar que las acciones cohomológicamente rígidas 1-dimensionales del grupo de Heisenberg son paramétricamente rígidas.
Definimos el grupo de Heisenberg H como el producto semidirecto $H = \mathbb{R}^2 \underset{\sigma}{\times} \mathbb{R}$, donde $\sigma : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}\mathbb{R}^2$ es el automorfismo dado por

$$\sigma(t)(z,u) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z + tu \\ u \end{bmatrix}, \qquad u, t, z \in \mathbb{R} \tag{3.31}$$

El producto en H está dado por

$$\begin{aligned} (z,u,t).(w,v,s) &= ((z,u) + [\sigma(t)(w,v)]^T, t+s) \\ &= (z + w + tv, u + v, t + s) \end{aligned}$$

Por otra parte si consideramos la representación matricial

$$g = \begin{bmatrix} 1 & t & z \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad g = (z,u,t) \in H \tag{3.32}$$

el álgebra de Lie $\mathcal{H}$ de H tiene la representación

$$E = \begin{bmatrix} 0 & u & w \\ 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E \in \mathcal{H} \tag{3.33}$$

La base estandar de $\mathcal{H}$ es $\mathcal{B} = \{U, V, W\}$ donde

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El corchete de Lie es cero excepto para

$$[U, V] = U.V = W \tag{3.34}$$

Si $\mathcal{B}^* = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ es la base dual de $\mathcal{B}$, entonces por (1.18(5)) y (3.34) tenemos

$$[U, V] = C_{uv1}U + C_{uv2}V + C_{uv3}W, \qquad \text{luego,} \quad C_{uv1} = 0, \ C_{uv2} = 0 \text{ y } C_{uv3} = 1 \tag{3.35}$$

además la constantes estructurales C_{uvi}, satisfacen las ecuaciónes $C_{uvi} + C_{vui} = 0$, para $1 \leq i \leq 3$, luego

$$d\alpha = 0, \qquad d\beta = 0, \qquad d\gamma = C_{vu3}(\alpha \wedge \beta) = -(\alpha \wedge \beta) \tag{3.36}$$

Consideremos $A : M \times H \to M$ una acción suave a derecha localmente libre de H, entonces tenemos la siguiente proposición:

Proposición 3.2. *Si la acción A es cohomológicamente rígida 1-dimensional y $\mathcal{F}$ la foliación dada por la órbitas de A, entonces para cada acción $B \in \mathcal{A}(H, \mathcal{F})$ existe un automorfismo Φ de H tal que si*

$$C(x, g) = B(x, \Phi^{-1}(g)) \qquad \textit{para} \ \ x \in M, \ g \in H$$

es la acción reparametrizada, entonces existen funciones h y k en $C^\infty(M)$ tal que

$$i_C\alpha = i_A\alpha + d_f h, \qquad \textit{y} \qquad i_C\beta = i_A\beta + d_f k,$$

donde i_C es como en (2.20)

Demostración. Sea μ una medida de probabilidad B-invariante sobre M y
$P_B : \Lambda(\mathcal{F}) \to \Lambda(H)$ definida por

$$P_B w(E_1, \cdots, E_j) = \int_M w(\overline{E_1}, \cdots, \overline{E_j}) d\mu, \qquad 1 \leq j \leq r$$

donde r es el grado del algebra graduada correspondiente. Recordemos que este operador conmuta con la diferencial.

De acuerdo a la *proposición* 2.6 tenemos un homomorfismo $i_A : \Lambda(\mathcal{H}^*) \to \Lambda(\mathcal{F})$ que conmuta con las diferenciales. Luego si definimos $L^\wedge : \Lambda(\mathcal{H}^*) \to \Lambda(\mathcal{H}^*)$ por
$L^\wedge = P_B \circ i_A$, éste es claramente un operador lineal que conmuta con las diferenciales.

Por otra parte dado que A es cohomológicamente rígido 1-dimensional
$H^1(H, C^\infty_A(M)) \simeq H^1(\mathcal{H}^*)$ y por *proposición* 2.8 $H^1(\mathcal{H}^*) \simeq H^1(\mathcal{F})$, entonces la restricción L_1^* de la aplicación inducida $L^\wedge : \Lambda^*(\mathcal{H}^*) \to \Lambda^*(\mathcal{H}^*)$ para el primer grupo de cohomología, es un isomorfismo, es decir, $L^\wedge$ es un isomorfismo sobre $H^1(\mathcal{H}^*)$.

En efecto, basta probar que es inyectiva. Si $L_1^*\theta = P_B i_A \theta = 0$ para una forma cerrada θ (ie. $\theta \in \ker L_1^* = \ker P_B$), y dado que por (2.24) y *proposición* 2.8 $H^1(\mathcal{F}) = i_A H^1(\mathcal{H}^*)$, entonces $i_A\theta = d_f h$. Luego $i_A\theta(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in M$ y por ser i_A no-singular tenemos que $\theta = 0$.

Notemos que $L^\wedge$ no es un homomorfismo del álgebra exterior $\Lambda(\mathcal{H}^*)$. La idea será extender L_1^* a un homomorfismo L^* de $\Lambda(\mathcal{H}^*)$ que conmute con las diferenciales, es decir, buscamos $L_1^*\gamma$ tal que $L_2^* d\gamma = dL_1^*\gamma$, donde[3] $L_2^* = \Lambda^2 L_1^*$. Por (3.36) esto es equivalente a

$$L_2^* d\gamma = -(L_1^*\alpha \wedge L_1^*\beta) = dL_1^*\gamma. \tag{3.37}$$

Ahora dado que A es cohomológicamente rígido 1-dimensional, tenemos que $i_B \circ P_B$ es la identidad de $H^1(\mathcal{F})$, entonces existen funciones h y k en $C^\infty(M)$ tal que

$$i_B \circ L_1^*\alpha = i_A\alpha + d_f h \qquad y \qquad i_B \circ L_1^*\beta = i_A\beta + d_f k. \tag{3.38}$$

De (3.37) y (3.38) obtenemos

$$\begin{aligned}
i_B L_2^* d\gamma &= -i_B(L_1^*\alpha \wedge L_1^*\beta)\\
&= -(i_B L_1^*\alpha \wedge -i_B L_1^*\beta)\\
&= -(i_A\alpha + d_f h \wedge i_A\beta + d_f k)\\
&= -(i_A(\alpha\wedge\beta) + d_f(h d_f k + h i_A\beta - k i_A\alpha))\\
&= -i_A\underbrace{(\alpha\wedge\beta)}_{-d\gamma} - d_f w\\
&= i_A d\gamma - d_f w.
\end{aligned}$$

Aplicando P_B a la igualdad anterior, tenemos

$$L_2^* d\gamma = d(L^\wedge\gamma - P_B w) \ \ (\text{dado que } \ P_B \text{ y } L^\wedge \text{ conmutan con las diferenciales}), \tag{3.39}$$

Luego eligiendo $L_1^*\gamma = L^\wedge - P_B w$, encontramos

$$L_2^* d\gamma = dL_1^*.$$

[3]**La segunda potencia exterior** $\Lambda^2 V$ de un espacio vectorial finito dimensional es el espacio dual del espacio vectorial de las formas biliniales alternadas sobre V.

Para mostrar que $L_1^* : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}^*$ es un isomorfismo, es suficiente mostrar que $dL_1^*\gamma \neq 0$, ya que $\mathcal{H}^* = L_1^*(\ker d) + L_1^*(\gamma)$. Para esto observemos que

$$L_2^*(\alpha \wedge \beta) = \triangle(\alpha \wedge \beta), \tag{3.40}$$

donde $\triangle$ es el determinante de la restricción de $L^\wedge$ a $H^1(\mathcal{H}^*)$.
Notar que $d\gamma = -(\alpha \wedge \beta)$, luego usando esta igualdad, (3.37) y (3.40) obtenemos

$$L_2^* d\gamma = dL_1^*\gamma = \triangle d\gamma \neq 0, \tag{3.41}$$

dado que $\triangle \neq 0$ porque $L^\wedge$ es un isomorfismo sobre $H^1(\mathcal{H}^*)$.
Ahora dado que L^* es un automorfismo del álgebra exterior $\Lambda(\mathcal{H}^*)$ y conmuta con la diferencial, la aplicación dual $L : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ de L_1^* es un automorfismo de álgebras de Lie, y como H es contráctil existe un único automorfismo $\Phi : H \to H$ tal que

$$D\Phi = \Phi_* = L \qquad \text{y} \qquad \Phi^* = L_1^*. \tag{3.42}$$

Ahora dado que C es una reparametrización de B por Φ tenemos que

$$\overline{E}(x) = DC_x(e).E = DB_x(e)D\Phi^{-1}.E = DB_x(e).\Phi_*^{-1}.E \tag{3.43}$$

para todo $E \in \mathcal{H}$, y de (3.43) obtenemos

$$i_B\Phi^*\theta(\overline{E}) = \theta(E) = i_C\theta(\overline{E}),$$

luego

$$i_C\theta = i_B \circ \Phi^*\theta \tag{3.44}$$

Finalmente de (3.44) vemos que

$$i_C\theta = i_B \circ L^\wedge\theta = (i_B \circ P_B)i_A\theta \tag{3.45}$$

de la igualdad anterior existe $l \in C^\infty$ tal que

$$i_C\theta = i_A\theta + d_f l,$$

para todo $\theta \in H^1(\mathcal{H}^*)$ ya que por hipótesis A es cohomológicamente rígido 1-dimensional, con lo que concluimos la prueba. $\square$

Si $\theta : TG \to \mathcal{G}$, definida por $\theta_g(E(g)) = E$, con $g \in G$ y $E \in \mathcal{G}$ es la forma de Maurer-Cartan de G, entonces ésta satisface la ecuación estructural

$$d\theta + [\theta \wedge \theta] = 0 \tag{3.46}$$

donde
$$[\theta \wedge \theta](E_1, E_2) = [\theta(E_1), \theta(E_2)] = [E_1, E_2]$$

para $E_1, E_2 \in \mathcal{G}$
Cada acción $A \in \mathcal{A}(G, \mathcal{F})$ tiene asociada una *forma canónica*, que es por definición la 1-forma foliada $w : T\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ dada por[4]

$$w = i_A\theta, \tag{3.47}$$

que satisface la ecuación
$$d_f w + [w \wedge w] = 0. \tag{3.48}$$

Además, si $\beta = \{E_1, \cdots, E_d\}$ es una base de $\mathcal{G}$ y $\beta^* = \{\theta^1, \cdots, \theta^d\}$ es su base dual, entonces
$$\theta(E) = \sum_i^d \theta^i(E).E_i = \theta(E),$$

por lo tanto
$$i_A\theta(\cdot) = \sum_i^d i_A\theta^i(\cdot).E_i. \tag{3.49}$$

Proposición 3.3. *Sea $B \in \mathcal{A}(G, \mathcal{F})$ donde $\mathcal{F}$ es la foliación dada por las órbitas de una acción localmente libre A. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El cociclo $a : M \times G \to G$ sobre la acción A dada por B es cohomólogo al automorfismo ϕ de G, esto es, existe una aplicación suave $b : M \to G$ tal que*
$$a(x, g) = b(x)^{-1}\phi(g)b(xg).$$

2. *Existe una función $b : M \to G$ tal que*
$$w_B = b^{-1}\phi^* w_A b + b^{-1} d_f b, \tag{3.50}$$
donde
$$(\phi^* w_A)(\overline{E}) = \theta(\phi_* E) = \phi_* E, \qquad E \in \mathcal{G}.$$

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$
Por hipotesis tenemos que

$$a(x, g) = b(x)^{-1}\phi(g)b(xg), \tag{3.51}$$

de (3.51) obtenemos

$$Da_x(g) = b(x)^{-1}(D\phi(g).b(xg) + \phi(g)Db(xg).DA_x(g)), \tag{3.52}$$

[4]Recordemos que: $i_A\theta(\overline{E}) = \theta(E)$, donde $\overline{E}(x) = DA_x(e).E$, con $x \in M,\ E \in \mathcal{G}$

y de (3.52) tenemos

$$Da_x(e).E = b(x)^{-1}D\phi(e).E\ b(x) + b(x)^{-1}Db(x).DA_x(e).E. \tag{3.53}$$

Luego, dado que $w_A(\overline{E}) = E$, con $\overline{E} = DA_x(e).E$, y notando que

$$DA_x(e) = DB_x(e).Da_x(e),$$

de (3.57) encontramos

$$Da_x(e).E = b(x)^{-1}D\phi(e).w_A(\overline{E}).b(x) + b(x)^{-1}Db(x).(DB_x(e)Da_x(e).E). \tag{3.54}$$

Dado que $Da_x(e).E = \theta(Da_x(e).E) = w_B(DB_x(e)Da_x(e).E) = w_B(Da_x(e).E)_B$, la ecuación (3.54) nos queda como

$$\begin{aligned} w_B(Da_x(e).E)_B &= b(x)^{-1}D\phi(e).w_A(Da_x(e).E)_B.b(x) + b(x)^{-1}Db(x).(Da_x(e).E)_B \\ &= (b^{-1}\phi^*.w_A.b + b^{-1}d_f b)(Da_x(e).E)_B. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$w_B = b^{-1}\phi^*.w_A.b + b^{-1}d_f b.$$

$(2 \Rightarrow 1)$
Consideremos el cociclo

$$c(x, g) = b(x)^{-1}\phi(g)b(xg) \tag{3.55}$$

Notar que 2. es equivalente a

$$Da_x(e).E = Dc_x(e).E, \qquad E \in \mathcal{G}. \tag{3.56}$$

Y dado que a y c son cociclos, (3.56) es equivalente a

$$a(x, g)^{-1}Da_x(g) = c(x, g)^{-1}Dc_x(g) \tag{3.57}$$

Lema 3.1. *Sea G un grupo de Lie conexo y $h_j : G \to G$, $1 \leq j \leq 2$ tal que*

$$h_1^{-1}dh_1 = h_2^{-1}dh_2. \tag{3.58}$$

Entonces $h_2 = gh_1$ para algún $g \in G$.

Demostración. Probaremos que

$$d(h_2h_1^{-1}) = 0$$

Para esto, dado que $h_1.h_1^{-1} = e$, tenemos que $0 = d(h_1.h_1^{-1}) = dh_1.h_1^{-1} + h_1dh_1^{-1}$, entonces

$$dh_1^{-1} = -h_1^{-1}dh_1h_1^{-1}, \tag{3.59}$$

usando la regla del producto, de (3.58) y (3.59) obtenemos

$$d(h_2h_1^{-1}) = dh_2h_1^{-1} + h_2h_1^{-1}dh_1h_1^{-1} = 0$$

y dado que G es conexo, $h_2h_1^{-1} = g$ para algún $g \in G$, luego $h_2 = gh_1$. □

Ahora, por *lema* 3.1 y (3.57) tenemos que

$$a(x, g) = h(x)c(x, g), \qquad \text{donde} \quad h : M \to G, \quad x \in M$$

y tomando $g = e$ vemos que $h(x) = e$ para todo $x \in M$, probando así la proposición. □

Teorema 3.4. *Sea A una acción suave L.L. del grupo de Heisenberg H en una variedad cerrada M. Supongamos que A es cohomológicamente rígido 1-dimensional. Entonces A es paramétricamente rígido.*

Demostración. Consideremos el referencial global $\overline{B} = \{\overline{U}, \overline{V}, \overline{W}\}$ sobre $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$, donde

$$\overline{U} = DA_x(e).U, \qquad \overline{V} = DA_x(e).V, \qquad \overline{W} = DA_x(e).W$$

para todo $x \in M$ y

$$\overline{B}^* = \{\xi^0, \eta^0, \zeta^0\}$$

el referencial dual de $\overline{B}$.
Notemos que

$$\xi^0 = i_A\alpha, \qquad \eta^0 = i_A\beta, \qquad \zeta^0 = i_A\gamma \tag{3.60}$$

Sea ahora $B \in \mathcal{A}(H, \mathcal{F})$ donde $\mathcal{F}$ es la foliación dada por la órbitas de A. Dado que A es cohomológicamente rígido, entonces por *proposición* 3.3, podríamos asumir, salvo una reparametrización por un automorfismo de H, que

$$i_B\alpha = i_A\alpha + d_fh^0 \qquad \text{y} \qquad i_B\beta = i_A\beta + d_fk^0,$$

donde $h^0, k^0 \in C^\infty(M)$, y si denotamos $i_B\alpha = \xi$, $i_B\beta = \eta$ y $i_B\gamma = \zeta$, entonces las igualdades anteriores quedan en la forma

$$\xi = \xi^0 + d_fh^0, \qquad \eta = \eta^0 + d_fk^0, \tag{3.61}$$

así $\mathcal{B}^* = \{\xi, \eta, \zeta\}$ es el referencial dual asociado a la acción B. Consideremos ahora la aplicación $b_0 : M \to H$ dada por

$$b_0 = \begin{bmatrix} 1 & h^0 & l^0 \\ 0 & 1 & k^0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde la función suave $l^0 : M \to \mathbb{R}$ debe determinarse. Claramente vemos que

$$b_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -h^0 & l^* \\ 0 & 1 & -k^0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $l^* = -h^0k^0 + l^0$.

Sea $w^0 = i_A\theta$ y $w = i_B\theta$ las formas canónicas de las acciones A y B respectivamente. A continuación la idea será utilizar la proposición 3.3, entonces solo basta ver que existe una función suave $b : M \to H$ satisfaciendo (3.50). Para esto, primero consideremos la forma Ω^0 que toma valores en $\mathcal{H}$, dada por

$$\Omega^0 = (b_0)^{-1}w^0b_0 + (b_0)^{-1}d_fb_0 \tag{3.62}$$

Evaluando la forma Ω^0 en $\overline{E} \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$ y recordando que $w^0(E) = \xi^0(E).U + \eta^0(E).V + \zeta^0(E)W$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\Omega^0(E) &= (b_0^{-1}w^0b_0 + (b_0)^{-1}d_fb_0)(E) \\
&= b_0^{-1}w^0(E)b_0 + (b_0^{-1}d_fb_0)(E) \\
&= b_0^{-1}(\xi^0(E).U + \eta^0(E).V + \zeta^0(E)W)b_0 + (b_0^{-1}d_fb_0)(E) \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & -h^0 & l^* \\ 0 & 1 & -k^0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \xi^0 & \zeta^0 \\ 0 & 0 & \eta^0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & h^0 & l^0 \\ 0 & 1 & k^0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -h^0 & l^* \\ 0 & 1 & -k^0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & d_fh^0 & d_fl^0 \\ 0 & 0 & d_fk^0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)(E) \\
&= \left(\begin{bmatrix} 0 & \xi^0 & (\zeta^0 + k^0\xi^0 - h^0\eta^0) \\ 0 & 0 & \eta^0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & d_fh^0 & (d_fl^0 - h^0d_fk^0) \\ 0 & 0 & d_fk^0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)(E) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & (\xi^0 + d_fh^0) & (\zeta^0 + k^0\xi^0 - h^0\eta^0 + d_fl^0 - h^0d_fk^0) \\ 0 & 0 & (\eta^0d_fk^0) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}(E).
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Luego, si denotamos por $\Omega^0_{i,j}$ la posición ocupada por el elemento ij en Ω^0, tenemos

$$\begin{aligned}
\Omega^0_{1,2} &= \xi^0 + d_fh^0, \\
\Omega^0_{2,3} &= \eta^0d_fk^0, \\
\Omega^0_{1,3} &= \zeta^0 + k^0\xi^0 - h^0\eta^0 + d_fl^0 - h^0d_fk^0.
\end{aligned}$$

Ahora observando que

$$d_f\zeta^0 = -(\xi^0 \wedge \eta^0),$$

y por otra parte usando (3.61), obtenemos

$$\begin{aligned} d_f\zeta &= -(\xi\wedge\eta), \\ d_f\zeta &= d_f(\zeta^0 + k^0\xi^0 - h^0\eta^0 + d_f l^0 - h^0 d_f k^0). \end{aligned}$$

Luego

$$d_f(\underbrace{\zeta - d_f\zeta^0 - k^0\xi^0 + h^0\eta^0 - d_f l^0 + h^0 d_f k^0}_{\tau}) = 0$$

de lo anterior vemos que existe $\tau \in Z^1(\mathcal{F})$ tal que

$$\zeta = \zeta^0 + k^0\xi^0 - h^0\eta^0 + d_f l^0 - h^0 d_f k^0 + \tau,$$

y dado que A es cohomológicamente rígido 1-dimensional, podemos escribir τ de la siguiente manera

$$\tau = a\xi^0 + b\eta^0 + d_f l',$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ y $l' \in C^\infty(M)$.
Ahora, si hacemos el siguiente cambio de variables

$$h = h^0 - b, \qquad k = k^0 + a, \quad \text{y} \quad l = l' + ah - bk,$$

obtenemos

$$\zeta = \zeta^0 + k^0\xi^0 - h^0\eta^0 + d_f l^0 - h^0 d_f k^0 + d_f l.$$

Luego, si definimos $b : M \to H$ por

$$b = \begin{bmatrix} 1 & h & l \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por un cálculo similar al de (3.63), haciendo $b = b_0$ obtenemos que Ω^0 es la forma canónica buscada, es decir,

$$w = b^{-1}w^0 b + b^{-1}d_f b.$$

Luego, aplicando la proposición 3.3 el teorema queda demostrado. □

3.2. Existencia de acciónes parámetro rígido del grupo de Heisenberg

A continuación mostraremos un ejemplo de una acción parámetro rígido del grupo de Heisenberg. Para eso consideremos el subgrupo discreto cocompacto $\Sigma = \mathbb{Z}^2 \underset{\sigma}{\times} \mathbb{Z}$ del grupo de Heisenberg H como en (3.1.1) y la nilvariedad $M = H/\Gamma = \gamma H = \{\gamma g / g \in H\}$.

Identificamos las funciones suaves $f : M \to \mathbb{R}$ con las funciones Γ-periódicas sobre H, es decir

$$f(\gamma g) = f(g), \text{para} \qquad \gamma \in \Gamma \text{ y } g \in H. \tag{3.64}$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$ fijo, tenemos una función $\mathbb{Z}^2$-periódica

$$f_t(n+u) = f_t(u) = f(u,t), \; n \in \mathbb{R}^2 \; u \in \mathbb{Z}^2, \; n = (n_0, n_1) \tag{3.65}$$

ya que $(n, 0) \cdot (u, t) = (n + u, t)$ y f es Γ-invariante. Luego f se puede expresar como la siguiente serie de Fourier, la cual converge en la topología C^∞

$$f(u,t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}_k(t) e^{2\pi i \langle k, u\rangle}. \tag{3.66}$$

Los coeficientes de Fouirier son funciones suaves dadas por

$$\hat{f}_k(t) = \int_{\mathbb{T}^2} f(u,t) e^{-2\pi i \langle k,u\rangle} du \tag{3.67}$$

y las funciones $\hat{f}_k(t)$ son acotadas, es decir; $|\hat{f}_k|_0 \leq |f|_0$, donde $|\cdot|_0$ es la norma C^0. Por otra parte dado que

$$f((0,\ell)\cdot(u,t)) = f(\sigma(\ell)u, t+\ell) = f(u,t),$$

se tiene

$$\begin{aligned} \hat{f}_{k'}(t) &= \int_{\mathbb{T}^2} f(u,t) e^{-2\pi i\langle k',u\rangle} du \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} f(\sigma(\ell)u, t+\ell) e^{-2\pi i \langle k', u\rangle} du \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} f(v, t+\ell) e^{-2\pi i \langle k', \sigma(-\ell)v\rangle} dv, \qquad (v = \sigma(\ell)u) \\ &= \hat{f}_{k'\sigma(-\ell)}(t+\ell). \end{aligned}$$

Luego, haciendo el cambio de variables $k = k'\sigma(-\ell)$ obtenemos

$$\hat{f}_k(t+\ell) = \hat{f}_{k\sigma(\ell)}(t), \qquad \text{para } k \in \mathbb{Z}^2, \; \ell \in \mathbb{Z}, \; t \in \mathbb{R}. \tag{3.68}$$

Un conjunto canónico de generadores de Γ es dado por

$$B = \{\gamma_0, \gamma_1, \delta\},$$

donde

$$\gamma_0 = (1,0,0), \qquad \gamma_1 = (0,1,0), \qquad \delta = (0,0,1) \tag{3.69}$$

satisface las ecuaciones

$$\begin{aligned}\gamma_0\gamma_1 &= \gamma_1\gamma_0,\\ \gamma_0\delta_1 &= \delta_1\gamma_0,\end{aligned}$$

y

$$\delta_1\gamma_1 = \gamma_1\delta_1\gamma_0. \tag{3.70}$$

La traslación a derecha $H \times H \xrightarrow{R} H$ da una acción a derecha localmente libre

$$R^0 : M \times H \to M, \tag{3.71}$$

la cual usaremos para definir accciones cohomológicamente rígidas en dimensión 1

$$A : M \times \Gamma \to M \tag{3.72}$$

cuya suspensión dará (por [11]) acciones cohomológicamente rígidas en dimensión 1

$$\tilde{A} : \tilde{M} \times H \to \tilde{M} \tag{3.73}$$

donde $M \to (\tilde{M}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\tau} M$ es el fibrado suspensión foliado de A, y $\tilde{A}$ es la acción canónica de τ (ver [1]). Además, dado que H es contráctil, entonces por [[13], Teorema 2.1]

$$H^j(\Gamma, C^\infty_A(M)) \simeq H^j(\mathcal{F}), \quad 0 \leq j \leq 3. \tag{3.74}$$

Definamos una acción A de Γ (en las generadas de Γ) sobre M por

$$\begin{aligned} A(\gamma_0) = R^0_{\alpha_0} \quad &, \quad \alpha_0 = (a_0, 0, 0),\\ A(\gamma_1) = R^0_{\alpha_1} \quad &, \quad \alpha_0 = (0, a_1, 0),\\ &y\\ A(\delta) = R^0_{\beta} \quad &, \quad \beta = (0, 0, b). \end{aligned} \tag{3.75}$$

De 3.70 para definir una acción de Γ debemos tener

$$a_1 b = a_0 \tag{3.76}$$

Necesitaremos también el siguiente resultado

Proposición 3.4. *Existen números Diofantinos a_0, a_1 y $b1$ tales que*

1. $a_1 b = a_0$,
2. $\{1, a_0, a_1, b\}$ *son linealmente independientes sobre* $\mathbb{Q}$.

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ una raíz de un polinómio irreducible $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grado mayor a 3. Por lo tanto

$$\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$$

es linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$. Elijamos

$$a_0 = \alpha^3, \qquad a_1 = \alpha \qquad \text{y} \;\; b = \alpha^2.$$

Por un famoso teorema de Liouville, sabemos que todo número algebraico irracional es Diofantino, y con esto concluimos la prueba. □

Example 3.2.

Basta considerar el polinomio $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$, dado por $p(x) = x^4 - 2$. Es fácil ver que $x = \sqrt[4]{2}$ es una raíz de $p(x)$, luego $\{1, \sqrt[4]{2}\sqrt[4]{4}, \sqrt[4]{8}\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$. Eligiendo

$$a_0 = \sqrt[4]{8}, \qquad a_1 = \sqrt[4]{2} \qquad \text{y} \;\; b = \sqrt[4]{4}.$$

obtenemos el resultado deseado.

Teorema 3.5. *Sea $A : M \times \Gamma \to M$ la acción descrita en (3.75). Supongamos que los números en (3.76) están dados por la Proposición 3.4. Entonces A es cohomológicamente rígido en dimensión 1, es decir*

$$H^1(\Gamma, C_A^\infty(M)) \simeq H^1(\mathcal{H}^*).$$

Demostración. Para cada cociclo suave $c : M \times \Gamma \to \mathbb{R}$ sobre la acción A, consideremos el homomorfismo $\Phi : \Gamma \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi(g) = \int_M c(x, g) d\mu(x) \tag{3.77}$$

donde μ es la medida dada por la forma de volumen R^0-invariante sobre M. Para probar el teorema debemos mostrar que c es cohomólogo a Φ, es decir mostrar la existencia de una función suave $h : M \to \mathbb{R}$ tal que

$$c_0(x, \gamma) = c(x, \gamma) - \Phi(\gamma) = h(x) - h(x \cdot \gamma), \tag{3.78}$$

para todo $x \in M$, $\gamma \in \Gamma$, donde $x \cdot \gamma = A(x, \gamma)$. Dado que c_0 así definido es claramente un cociclo, basta demostrar que (3.78) es cierto para los generadores $\{\gamma_0, \gamma_1, \delta\}$ de Γ. Consideremos

$$\begin{aligned} F^0(x) &= c_0(x, \gamma_0), &(3.79)\\ F^1(x) &= c_0(x, \gamma_1), &(3.80)\\ G(x) &= c_0(x, \delta), \end{aligned}$$

donde $x = (u, t) \in H$.
Mostraremos entonces la existencia de una función $h : M \to \mathbb{R}$ que satisfaga las ecuaciones

$$\begin{aligned} h(x) - h(x \cdot \gamma_0) &= F^0(x), & (3.81)\\ h(x) - h(x \cdot \gamma_1) &= F^1(x), & (3.82) \end{aligned}$$

y

$$h(x) - h(x \cdot \delta) = G(x). \tag{3.83}$$

De la relación $\gamma_0 \cdot \gamma_1 = \gamma_1 \cdot \gamma_0$, tenemos que $c_0(x, \gamma_0 \cdot \gamma_1) = c_0(x, \gamma_1 \cdot \gamma_0)$, y de esta igualdad obtenemos la ecuación

$$c_0(x, \gamma_0) + c_0(x \cdot \gamma_0, \gamma_1) = c_0(x, \gamma_1) + c_0(x \cdot \gamma_1, \gamma_0), \tag{3.84}$$

de (3.79) y (3.80) tenemos

$$F^1(x) - F^1(x \cdot \gamma_0) = F^0(x) - F^0(x \cdot \gamma_1). \tag{3.85}$$

De (3.67) tenemos que

$$\begin{aligned} F^0_k(t) &= \int_{\mathbb{T}^2} F^0(u, t) e^{-2\pi i \langle k, u\rangle} du, & (3.86)\\ F^1_k(t) &= \int_{\mathbb{T}^2} F^1(u, t) e^{-2\pi i \langle k, u\rangle} du, & (3.87)\\ (F^0 \circ R_{\gamma_1})_k(t) &= \int_{\mathbb{T}^2} F^0((u, t) \cdot ((0, a_1), 0))) e^{-2\pi i \langle k, u\rangle} du, &\\ &= \int_{\mathbb{T}^2} F^0(u + (ta_1, a_1), t) e^{-2\pi i \langle k, u\rangle} du, &\\ &= \int_{\mathbb{T}^2} F^0(v, t) e^{-2\pi i \langle k, v-(ta_1, a_1)\rangle} dv, \qquad (v = u + (ta_1, a_1)) &\\ &= e^{2\pi i \langle k, (ta_1, a_1)\rangle} \int_{\mathbb{T}^2} F^0(v, t) e^{-2\pi i \langle k, v\rangle} dv, &\\ &= e^{2\pi i \langle k, (ta_1, a_1)\rangle} F^0_k(t). & (3.88) \end{aligned}$$

y similarmente,

$$(F^1 \circ R_{\gamma_0})_k(t) = e^{2\pi i \langle k, (a_0, 0)\rangle} F^1_k(t) \tag{3.89}$$

son los coeficientes de Fourier para $F^0(x),\ F^1(x),\ F^0(x \cdot \gamma_1)$ y $F^1(x \cdot \gamma_0)$ respectivamente. Así (3.85) expresada en términos de sus coeficientes de Fourier nos da

$$(1 - e^{2\pi i \langle k, (a_0, 0)\rangle}) F^1_k(t) = (1 - e^{2\pi i \langle k, (ta_1, a_1)\rangle}) F^0_k(t). \tag{3.90}$$

Luego, de (3.90), para $k = (0, k_1)$ tenemos

$$F^0_k(t) = 0, \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{3.91}$$

El coeficiente de fourier de una solución de las ecuaciones cohomológicas (3.81) y (3.82) debe satisfacer

$$\begin{aligned}(1-e^{2\pi i\langle k,(ta_1,a_1)\rangle})h_k(t) &= F_k^1(t), \\ (1-e^{2\pi i\langle k,(a_0,0)\rangle})h_k(t) &= F_k^0(t).\end{aligned} \tag{3.92}$$

Entonces para $k \neq 0$ tenemos

$$h_k(t) = \frac{F_k^1(t)}{1-e^{2\pi i k_1 a_1)}}, \qquad k_0 = 0,\ k_1 \neq 0 \tag{3.93}$$

y

$$h_k(t) = \frac{F_k^0(t)}{1-e^{2\pi i k_0 a_0)}}, \qquad k_0 \neq 0 \tag{3.94}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.
Dado que los números $a_0,\ a_1$, son Diofantinos, de (3.93) y (3.94) tenemos

$$|h_k(t)| \leq |F_k^j||k|^p, \tag{3.95}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}^2$, $k \leq 0$, $0 \leq j \leq 1$.
Dado que por (3.67)

$$|F_k^j|_0 \leq |F^j|, \qquad 0 \leq j \leq 1 \tag{3.96}$$

y que las F^j son funciones suaves, entonces

$$\lim_{|k|\to\infty} |k|^p|h_k(t)| = 0, \qquad p \geq 1. \tag{3.97}$$

Ahora, ¿ qué podemos decir de las expresiónes (3.92) cuando $k = 0$?
Afirmamos que

$$F_0^j(t) = 0, \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \ y\ 0 \leq j \leq 1. \tag{3.98}$$

En efecto, de la relación $\delta\gamma_0 = \gamma_0\delta$ y la ecuación de cociclo para c_0 obtenemos

$$G(u,t) + F^0(u,t+b) = F^0(u,t) + G(u+(a_0,0),t). \tag{3.99}$$

De las sucesiónes exactas

$$0 \to \mathbb{R}^2 \xrightarrow{j} H \xrightarrow{\pi} \mathbb{R} \to 0$$

y

$$0 \to \mathbb{Z}^2 \to \Gamma \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z} \to 0,$$

donde $j(u) = (u,0)$, $\pi(u,t) = t$ obtenemos el fibrado

$$\mathbb{T}^2 \to M \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}. \tag{3.100}$$

Integrando sobre la fibra de π (ver [8]) obtenemos

$$\begin{aligned} \cancel{\fint_{\mathbb{T}^2} G(u,t)du} + \fint_{\mathbb{T}^2} F^0(u,t+b)du &= \fint_{\mathbb{T}^2} F^0(u,t)du + \cancel{\fint_{\mathbb{T}^2} G(u+(a_0,0),t)du}, \\ F_0^0(t+b) &= F_0^0(t), \end{aligned} \tag{3.101}$$

donde

$$F_0^0(t) = \fint_{\mathbb{T}^2} F^0(u,t)du.$$

Luego, $F_0^0(t) : \mathbb{R} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ es 1-periódica, entonces (3.101) expresada en términos de sus coeficientes de Fourier satisface

$$\hat{F}_0^0(n) = e^{2\pi i n b}\hat{F}_0^0(n),$$

y por lo tanto

$$\hat{F}_0^0(n) = 0, \qquad \forall n \neq 0.$$

Ahora de (3.78) y (3.79) y el teorema de Fubini obtenemos

$$0 = \int_M F^0(u,t)d\mu = \int_{\mathbb{T}} \left(\fint_{\mathbb{T}^2} F^0(u,t)du \right) dt, \tag{3.102}$$

y por lo tanto

$$F_0^0(t) = 0, \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \tag{3.103}$$

Por otra parte de la relación $\delta\gamma_1 = \gamma_1\delta\gamma_0$ y la ecuación de cociclo para c_0 obtenemos

$$F^1(u,t+b) - F^1(u,t) = G(u+(ta_1,a_1),t) - G(u,t) + F^0(u+(ta_1,a_1),t+b). \tag{3.104}$$

Integrando (3.104) sobre la fibra π y por (3.103) encontramos

$$F_0^1(t+b) = F_0^1(t), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{3.105}$$

Luego por un razonamiento similar al que se hizo para $F_0^0(t)$ tenemos que

$$F_0^1(t) = 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

probando así la afirmación. Por lo tanto podemos elegir libremente cualquier función $h_0 : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ y la serie de Fourier

$$h(u,t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} h_k(t) e^{2\pi i \langle k,u \rangle}, \tag{3.106}$$

será convergente en la topología C^∞ por (3.97), dando una solución suave a las ecuaciónes cohomológicas (3.81), (3.82).

A continuación mostraremos que podemos elegir la función h_0 tal que h dada en la

ecuación anterior también satisfaga la ecuación cohomológica (3.83).
En efecto, de la relación $\delta\gamma_0 = \gamma_0\delta$ y las ecuaciones de cociclo para c_0 tenemos

$$G(x) - G(x \cdot \gamma_0)) = F^0(x) - F^0(x \cdot \delta), \tag{3.107}$$

o en térmninos de sus coeficientes de Fourier

$$(1 - e^{2\pi i k_0 a_0})G_k(t) = F_k^0(t) - F_k^0(t + b), \tag{3.108}$$

Ahora (3.92) y (3.108) nos da

$$(1 - e^{2\pi i k_0 a_0})G_k(t) = (1 - e^{2\pi i k_0 a_0})(h_k(t) - h_k(t + b)). \tag{3.109}$$

Luego,

$$G_k(t) = (h_k(t) - h_k(t + b)), \qquad \text{para todo } k \neq 0,\ k_0 \neq 0,\ t \in \mathbb{R}.$$

Ahora para $k_0 = 0, k_1 \neq 0$, consideremos la relación $\delta\gamma_1 = \gamma_1\delta\gamma_0$, entonces de la ecuación de cociclo para c_0 obtenemos

$$\begin{aligned} G(x) - G(x \cdot \gamma_1) &= F^1(x) - F^1(x \cdot \delta) + F^0(x \cdot \gamma_1\delta), \\ G(u, t) - G(u + (ta_1, a_1), t) &= F^1(u, t) - F^1(u, t + b) + F^0(u + (ta_1, a_1), t + b), \end{aligned}$$

o en términos de sus coeficientes de Fourier

$$(1 - e^{2\pi i k_1 a_1})G_k(t) = F_k^1(t) - F_k^1(t + b), \tag{3.110}$$

dado que por (3.91) $F_k^0(t) = 0$ para $k_0 = 0,\ k \neq 0$ y $t \in \mathbb{R}$,
Entonces, (3.92) y (3.110) nos da

$$G_k(t) = h_k(t) - h_k(t + b). \tag{3.111}$$

Por último veamos el caso $k = 0$, es decir, debemos encontrar una solución suave para la ecuación cohomológica

$$h_0(t) - h_0(t + b) = G_0(t), \tag{3.112}$$

la cual en términos de sus coeficientes de Fourier corresponde a

$$\hat{G}_0(n) = (1 - e^{2\pi i n b})\hat{h}_0(n). \tag{3.113}$$

De donde

$$\hat{h}_0(n) = \frac{\hat{G}_0(n)}{(1 - e^{2\pi i n b})}, \tag{3.114}$$

para todo $n \neq 0$. Dado que el número b es diofantino, entonces la serie de Fourier

$$h_0(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \hat{h}_0(n) e^{2\pi i \langle n, t \rangle} \tag{3.115}$$

converge en la topología C^∞ y define una función suave, así la correspondiente función $h : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ en (3.106) satisface la ecuación cohomológica (3.83), finalizando de esta forma la prueba del *Teorema* 3.5 $\square$

Bibliografía

[1] J. L. Arraut and N. M. dos Santos. *The characteristic mapping of a foliated bundle.* Topology **31** (1992), 545-555.

[2] M. Asaoka, A. Alaoui, S. Hurder, K. Richardson *Foliations: Dynamics, Geometry and Topology* . Advanced Courses in Mathematics - CRM Barcelona, Birkhäuser Basel, 2014.

[3] M. F. Atiyah and C. T. C. Wall. *Cohomology of groups.* Algebraic Number Theory. Eds. J. W. S. Cassels and A. Fröhlich. Academic Press, New York, 1967, pp. 95-117.

[4] Camacho C., Neto A., *Geometric theory of foliations.* Birkhäuser Boston, 1985.

[5] N. M. dos Santos. *Actions of Lie groups on closed manifolds.* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **22** (2002), 591-600.

[6] N. M. dos Santos, *Parameter rigid actions of the Heisenberg groups.* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **27** (2007), 1719-1735.

[7] J.J. Duistermaat, J.A.C. Kolk, *Lie groups.* Universitext, Springer, 2004.

[8] S. Halperin, G. Werner and R. Vanstone. *Connections, Curvature and Cohomology.* Academic Press, New York, 1972.

[9] A. Katok and R. J. Spatzier, *First cohomology of Anosov actions of higher rank abelian groups and applications to rigidity.* Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. **79** (1994), 131-156.

[10] H. Maruhashi, *Parameter rigid actions of simply connected nilpotent Lie groups.* Ergodic Theory Dynam. Systems **33** (2013), no. 6, 1864-1875.

[11] S. Matsumoto and Y. Mitsumatsu. *Leafwise cohomology and rigidity of certain Lie group action.* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **23** (2003), 1839-1866

[12] W. MELO e J. PALIS, *Geometric Theory of Dynamical Systems.* Springer Verlag, 1982.

[13] M. S. Pereira and N. M. dos Santos. *On the cohomology of foliated bundles.* Proyecciones 21(2) (2002), 173-195.

[14] F. A. Ramírez. *Cocycles over higher-rank abelian actions on quotients of semisimple Lie groups.* J. Mod. Dyn. **3** (2009), 335-357.

[15] Frank W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2010.