



**UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE**

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Matemáticas

**PROBLEMA INVERSO DE AUTOVALORES PARA  
MATRICES NO NEGATIVAS ESTRUCTURADAS.  
APLICACIONES A DIVISORES ELEMENTALES**

Tesis para optar al grado de  
Doctor en Ciencias Mención Matemática

**ANA ISABEL JULIO TORRES**

Orientador: Dr. Ricardo L. Soto Montero

**Antofagasta, Chile  
Agosto de 2015**



**PROBLEMA INVERSO DE AUTOVALORES PARA  
MATRICES NO NEGATIVAS ESTRUCTURADAS.  
APLICACIONES A DIVISORES ELEMENTALES <sup>1</sup>**

**ANA ISABEL JULIO TORRES**

**Programa de Doctorado en Ciencias Mención Matemática**

**Departamento de Matemáticas**

**Universidad Católica del Norte**

**Agosto de 2015**

---

<sup>1</sup> Tesis apoyada por Conicyt / PCHA / Doc. Nac. / 2013-63130010,  
y proyecto Fondecyt 1120180

---

A mis padres y hermanos,  
en especial a mi esposo Roberto Díaz y mi hijo  
Jeremy Andrés.

---

## Agradecimientos

Un trabajo de tesis de cuatro años, es sin duda alguna, un largo camino de conocimiento, aprendizaje y muchas personas conocidas.

- En primer lugar agradezco a Dios, por estar conmigo en cada una de las etapas de mi vida ayudándome a cumplir cada una de mis metas.

- A mi esposo Roberto Díaz por su amor, apoyo, y ayuda incondicional. Excelente compañero de aventuras.

A mi hijo Jeremy Andrés, el más grande de mis amores, quien llegó a nuestras vidas iniciando los estudios de doctorado y con el cual hemos vivido cada una de las experiencias de principio a fin, es mi fuente de ternura y de inspiración haciendo más ameno mi recorrido para conseguir con mayor fervor cada uno de mis propósitos. Que Dios lo bendiga siempre.

- A mis padres Sol Maria Torres, Guillermo Julio y hermanos Luis Fernando, Jorge Luis y Liseth por su infinito amor y apoyo incondicional en cada una de mis decisiones.

- A mis suegros Edwin Díaz y Ofelia Martínez, a los cuáles considero mis segundos padres.

- A mi profesor Ricardo Soto, quien se ganó mis respetos y admiración, por su paciencia, esfuerzo, dedicación y sobre todo por su motivación en los momentos no productivos y difíciles que se tienen en toda tesis. Estaré siempre infinitamente agradecida por toda su ayuda y sus valiosas enseñanzas.

- A la Universidad Católica del Norte y a todos mis profesores de postgrado por hacer parte de mi formación académica. Al Jardín Taqinki, por el cuidado y formación de mi hijo.

- A Conicyt por su apoyo financiero para realizar parte de mis estudios de postgrado.

- A todos mis compañeros de postgrado, en especial, Adriana, Guillermo, Exequiel, Nelda, Andrea, por todas aquellas ocasiones en la cual me prestaron su ayuda para el cuidado de mi hijo Jeremy, siempre tendrán un espacio en mi corazón. Finalmente, agradezco a todas aquellas personas que aquí no puedo mencionar, pero que son muy especiales para mi. A todos: muchas gracias.

Ana Isabel Julio Torres

# ÍNDICE GENERAL

<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Notación y definiciones básicas . . . . .	3
1.2. Resultados preliminares . . . . .	4
<b>2. Matrices normales no-negativas con espectro prescrito</b>	<b>9</b>
2.1. Perturbación normal de rango $r$ . . . . .	13
2.2. Una nueva condición suficiente para el <i>NNIEP</i> . . . . .	15
2.3. Matrices normales no negativas con autovalores y entradas diagonales prescritas . . . . .	17
2.4. Perturbación de Guo para matrices normales . . . . .	24
2.5. Una aplicación al <i>NIEDP</i> . . . . .	26
<b>3. Matrices persimétricas no-negativas con espectro prescrito</b>	<b>28</b>
3.1. Matrices reales persimétricas con espectro prescrito . . . . .	30
3.2. Perturbación persimétrica de rango $r$ . . . . .	33
3.3. Una nueva condición suficiente para el <i>PNIEP</i> . . . . .	34
3.4. Matrices persimétricas no negativas con autovalores y entradas diagonales prescritas . . . . .	42
3.5. Realizabilidad persimétrica de listas especiales . . . . .	43
3.6. Ejemplos . . . . .	46

<b>4. Matrices bisimétricas no-negativas con espectro prescrito</b>	<b>49</b>
4.1. Matrices reales bisimétricas con espectro prescrito . . . . .	50
4.2. Una nueva condición suficiente para el <i>BNIEP</i> . . . . .	51
4.3. Matrices bisimétricas no negativas con autovalores y entradas diagonales prescritas . . . . .	57
4.4. Realizabilidad bisimétrica de listas especiales . . . . .	59
4.5. Ejemplos . . . . .	61
<b>5. Matrices persimétricas no negativas con divisores elementales prescritos</b>	<b>62</b>
5.1. Problema inverso de los divisores elementales para matrices persimétricas no negativas . . . . .	64
5.2. Matrices compañeras son similares a matrices persimétricas . . .	67
5.3. Matrices persimétricas no negativas con autovalores y entradas diagonales prescritas . . . . .	72
5.4. Listas del tipo Šmigoc son realizables por matrices persimétricas no negativas con autovalores y entradas diagonales prescritas . .	77
5.5. Ejemplos . . . . .	80
<b>Conclusiones</b>	<b>85</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>87</b>

# RESUMEN

En 1907 Perron descubrió algunas notables propiedades de matrices cuadradas con entradas positivas, las cuales fueron generalizadas por Frobenius en 1912 a matrices no negativas irreducibles. Desde entonces la teoría de matrices no negativas ha sido una de las áreas más activas del álgebra lineal y durante mucho tiempo ha sido una fuente de interesantes problemas y desafíos matemáticos. Ellas aparecen en un número importante de áreas de aplicación como matemáticas, física, ciencias sociales, economía, ecología, sistemas de comunicación, ciencias de la computación, etc.

Los problemas inversos de autovalores constituyen una importante subclase de problemas inversos que surgen en el contexto del modelamiento matemático y la identificación de parámetros.

El *problema inverso de autovalores para matrices no negativas* (en inglés *Non-negative Inverse Eigenvalue Problem, NIEP*) es el problema de determinar condiciones necesarias y suficientes para que una lista  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  de números complejos sea el espectro de una matriz no negativa  $A$  de orden  $n$ . Si existe una matriz  $A$  no negativa con espectro  $\Lambda$ , decimos que  $A$  realiza a  $\Lambda$ . Si  $\Lambda$  es una lista de números reales, el problema se llama *problema inverso de autovalores reales para matrices no negativas (RNIEP)*. Si la matriz es requerida ser simétrica, el problema se conoce como el *problema inverso de autovalores para matrices simétricas no negativas (SNIEP)*.

El problema inverso de autovalores para matrices no negativas está resuelto solo para los casos  $n = 3$  y  $n = 4$ . Para  $n = 5$ , el *NIEP* está resuelto bajo la

condición que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0$ . Un número de condiciones suficientes para la existencia de una matriz no negativa con espectro dado, son conocidas en la literatura sobre el problema. En contraste, son pocas las condiciones necesarias conocidas.

El *NIEP* y sus problemas derivados (*RNIEP*, *SNIEP*) constituyen problemas abiertos difíciles, y se estima que una solución completa es muy improbable de hallar en un futuro cercano. En consecuencia, el propósito de esta tesis es avanzar en el estudio del *NIEP* para ciertas matrices estructuradas, mejorando o extendiendo condiciones suficientes ya conocidas como es el caso de las matrices normales, y generando nuevas condiciones suficientes para nuevos problemas asociados, tales como el *NIEP* para matrices persimétricas y bisimétricas, las cuales son comunes en ciencias físicas e ingenierías y surgen, por ejemplo, en el control de las vibraciones mecánicas y eléctricas, donde los autovalores de la matriz de Gram, la cual es simétrica y persimétrica, juegan un papel importante.

Si la matriz es requerida ser persimétrica (bisimétrica), el problema será llamado *problema inverso de autovalores para matrices persimétricas (bisimétricas) no negativas* (en inglés *Persymmetric (Bisymmetric) Nonnegative Inverse Eigenvalue Problem, PNIEP (BNIEP)*), respectivamente.

Otro problema estrechamente relacionado con el *NIEP* es el *problema inverso de los divisores elementales para matrices no negativas* (en inglés *Nonnegative Inverse Elementary Divisors Problem, NIEDP*) el cual busca determinar condiciones necesarias y suficientes para que ciertos polinomios dados sean los divisores elementales de una matriz no negativa de orden  $n$ . Es también objetivo de esta tesis estudiar este problema como aplicaciones de nuestros resultados para matrices estructuradas normales y persimétricas.

Las técnicas que hemos empleado para obtener nuestros resultados, requieren de la existencia de matrices no negativas (normales, persimétricas y bisimétricas en nuestro caso) de tamaño  $r < n$ , con autovalores y entradas diagonales prescritas. Este es también un problema abierto difícil, interesante en sí mismo, que nosotros estudiamos como una herramienta esencial para aplicar nuestros resultados, aunque con respuestas parciales para matrices de tamaño menor.

Nuestros resultados tienen la ventaja de ser constructivos, es decir, ellos generan procedimientos algorítmicos para computar una matriz solución.

La tesis está organizada en 5 capítulos. En el Capítulo 1 se dan las notaciones, definiciones básicas y algunos resultados preliminares que usaremos a

lo largo de la tesis y facilitarán su lectura.

En el Capítulo 2, estudiamos el *NIEP* para matrices normales, obteniendo nuevas condiciones suficientes que mejoran significativamente condiciones previas conocidas. Los resultados de este capítulo constituyen esencialmente la publicación [22] (A. I. Julio, C. B. Manzaneda, R. L. Soto, Normal nonnegative realization of spectra, *Linear and Multilinear Algebra*. 63, N°6 (2015) 1204-1215).

En los Capítulos 3 y 4, estudiamos el *NIEP* para matrices persimétricas y bisimétricas, respectivamente, obteniendo también condiciones suficientes constructivas. Hasta donde sabemos, los problemas *PNIEP* y *BNIEP* no han sido estudiados previamente. Los resultados de estos dos capítulos constituyen esencialmente la publicación [21] (A. I. Julio, R. L. Soto, Persymmetric and bisymmetric nonnegative inverse eigenvalue problem, *Linear Algebra Appl.* 469 (2015) 130-152).

En el Capítulo 5, consideramos el problema inverso de los divisores elementales para matrices persimétricas no negativas, obteniendo condiciones suficientes que generan procedimientos algorítmicos para computar una matriz solución. Los resultados de este capítulo constituyen esencialmente la publicación [59] (R. L. Soto, A. I. Julio, M. Salas, Nonnegative persymmetric matrices with prescribed elementary divisors, *Linear Algebra and Appl.* 483 (2015) 139-157).

La tesis concluye con algunos comentarios donde se proponen problemas abiertos, de nuestro interés, los cuales darían continuidad a esta tesis.

## CAPÍTULO

# 1

## INTRODUCCIÓN

Las matrices no negativas han sido por mucho tiempo una fuente de interesantes problemas y desafíos matemáticos. Ellas aparecen en un número de importantes áreas de aplicación como matemáticas, física, ciencias sociales, economía, ecología, sistemas de comunicación, ciencias de la computación, etc.

Los problemas inversos de autovalores constituyen una importante subclase de los problemas inversos, que surgen en el contexto del modelamiento matemático y la identificación de parámetros. Una simple aplicación de tales problemas es la construcción de modelos de Leontief en economía [1, 9, 18, 34].

El *problema inverso de autovalores para matrices no negativas* (en inglés *Non-negative Inverse Eigenvalue Problem, NIEP*) es el problema de determinar condiciones necesarias y suficientes para que una lista de números complejos  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  sea el espectro de una matriz no negativa  $A$  de orden  $n$ . Si existe una matriz no negativa  $A$  con espectro  $\Lambda$  se dice que  $\Lambda$  es realizable y  $A$  es la matriz que realiza a  $\Lambda$ . Este problema permanece abierto y se estima que los resultados parciales obtenidos hasta la fecha, están aún lejos de una solución general. Una solución completa es conocida solo para  $n = 3$  por Loewy y London [30]. Para  $n = 4$  el problema fue resuelto por Meehan [33], y de manera independiente también por Torre-Mayo y otros [63]. El caso  $n = 5$  fue resuelto por Laffey y Meehan [25] bajo la condición  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0$ .

Condiciones suficientes para la existencia de una matriz no negativa con espectro complejo prescrito han sido obtenidas en [3, 16, 17, 26, 27, 42, 45, 46, 54, 56].

Casos especiales del *NIEP* son también de gran interés: Si la lista  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  contiene solo números reales, el problema se conoce como el *problema inverso de autovalores reales para matrices no negativas* (en inglés *Real Nonnegative Inverse Eigenvalue Problem, RNIEP*). El *RNIEP* está resuelto solo para  $n \leq 4$ . Condiciones suficientes para la existencia de una matriz no negativa con espectro real prescrito han sido obtenidas, en orden cronológico, en [62, 37, 38, 8, 23, 47, 13, 60, 2, 48, 51, 57]. En [32] los autores construyen un mapa de las condiciones suficientes para el caso real y establecen relaciones de inclusión o relaciones de independencia entre las distintas condiciones allí estudiadas.

Si la matriz realizadora requiere ser simétrica, tenemos el *problema inverso de autovalores para matrices simétricas no negativas* (en inglés *Symmetric Nonnegative Inverse Eigenvalue Problem, SNIEP*). Ambos problemas, el *RNIEP* y *SNIEP*, son equivalentes para  $n \leq 4$  (ver [15]), pero son diferentes y aún permanecen abiertos para  $n \geq 5$  (ver [20]). Sin embargo, recientemente Spector en [61] resolvió el *SNIEP* para matrices de orden 5 con traza cero ( $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0$ ). Las primeras condiciones suficientes para una solución al *SNIEP* fueron obtenidas por Fiedler [13] y Soules [60]. Otros resultados para la realizabilidad por una matriz simétrica han sido dados en [20, 28, 31, 39, 41, 43, 44, 49, 50, 52, 55, 57].

Ciertos teoremas de perturbación, debidos a Brauer [4], Rado [38] y Soto, Rojo, Moro y Borobia [52] han probado ser extremadamente útiles para obtener un número de simples y eficientes condiciones suficientes para que el *NIEP* y sus problemas derivados tengan una solución.

El *NIEP* y sus problemas derivados son problemas abiertos difíciles, y se estima que una solución completa es improbable de hallar en un futuro cercano. En consecuencia, el objetivo de esta tesis es avanzar en el estudio del problema para ciertas matrices estructuradas, mejorando o extendiendo condiciones suficientes conocidas, como es el caso de las matrices normales no negativas, y generando nuevas condiciones suficientes para nuevos problemas estructurados como es el caso de matrices persimétricas y bisimétricas no negativas.

En particular estudiamos en esta tesis, el *problema inverso de autovalores para matrices normales no negativas* (en inglés *Normal Nonnegative Inverse Eigenvalue Problem, NNIEP*) y el *problema inverso de autovalores para matrices persimétricas (bisimétricas) no negativas* (en inglés *Persymmetric (Bisymmetric)*

*tric*) *Nonnegative Inverse Eigenvalue Problem*, *PNIEP* (*BNIEP*)), respectivamente. Hasta donde sabemos, los problemas *PNIEP* y *BNIEP* no han sido estudiados previamente, y las únicas condiciones suficientes que conocemos para una solución al *NNIEP* fueron obtenidas por Xu [64] y Radwan [39].

Condiciones suficientes para la existencia de una solución al problema inverso de los divisores elementales para matrices no negativas (*NIEDP*), han sido obtenidas en [6, 7, 35, 36, 53, 58], y recientemente en [11]. En esta tesis estudiamos este problema como aplicaciones de nuestros resultados para matrices estructuradas normales y persimétricas.

Las técnicas que hemos empleado para obtener nuestros resultados, requieren de la existencia de matrices no negativas (normales, persimétricas y bisimétricas en nuestro caso) de tamaño  $r < n$ , con autovalores y entradas diagonales prescritas. Por esta razón estudiamos también este problema, el cual es un problema abierto difícil, interesante en sí mismo y esencial para aplicar nuestros resultados.

## 1.1. Notación y definiciones básicas

A continuación damos algunas notaciones y definiciones que facilitarán la lectura del trabajo.

$M_{mn}$  ( $M_n$ ) denota el conjunto de matrices de orden  $m \times n$  (de orden  $n$ ) con entradas complejas.

Sea  $A \in M_{mn}$ . Entonces  $A^T$ ,  $A^F$  y  $A^*$  denotan la traspuesta, la flip-traspuesta y la traspuesta conjugada de  $A$ , respectivamente.

Sea  $A \in M_n$  con espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ . Denotaremos con  $\rho(A)$ ,  $\sigma(A)$ ,  $\text{rango}(A)$ ,  $\text{tr}(A)$  y  $J(A)$  el radio espectral, el espectro, el rango, la traza y la forma canónica de Jordan de la matriz  $A$ , respectivamente.

$\lceil x \rceil$  y  $\lfloor x \rfloor$  denotan el menor entero mayor o igual a  $x$  y el mayor entero menor o igual a  $x$ , respectivamente.

**Definición 1.1.** Una matriz  $A = (a_{ij}) \in M_{mn}$  se dice que es no negativa (*positiva*) si  $(a_{ij}) \geq 0$  ( $> 0$ )  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

**Definición 1.2.** Una matriz  $A = (a_{ij}) \in M_n$  se dice que tiene sumas fila constantes si todas sus filas suman la misma constante  $\alpha \in \mathbb{C}$ , es decir,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = \alpha \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Denotamos por  $\mathcal{CS}_\alpha$  el conjunto de todas las matrices con sumas fila constantes igual a  $\alpha$ . Es claro que cualquier matriz en  $\mathcal{CS}_\alpha$  tiene autovector  $\mathbf{e} = [1, 1, \dots, 1]^T$  correspondiente al autovalor  $\alpha$ , esto es,  $A\mathbf{e} = \alpha\mathbf{e}$ .

Una matriz no negativa  $A$  es llamada *estocástica* si  $A \in \mathcal{CS}_1$  y llamada *doblemente estocástica* si  $A, A^T \in \mathcal{CS}_1$ . Una matriz  $A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ , o  $A, A^T \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ , es llamada *estocástica generalizada* o *doblemente estocástica generalizada*, respectivamente.

Denotamos por  $\mathbf{e}_i = [0, \dots, 1, \dots, 0]^T$ , el vector con 1 en la  $i$ -ésima posición y ceros en el resto.

## 1.2. Resultados preliminares

**Teorema 1.1.** ([1]) Sea  $A \in M_n$  no negativa. Entonces

- (i)  $\rho(A)$ , el radio espectral de  $A$ , es un autovalor.
- (ii)  $A$  tiene un autovector no negativo correspondiente a  $\rho(A)$ .
- (iii)  $A^T$  tiene un autovector no negativo correspondiente a  $\rho(A)$ .

El siguiente teorema es el más conocido y quizás más importante en la teoría de Perron-Frobenius, es fundamental en el estudio de las matrices no negativas y por consiguiente lo es también para el problema inverso de autovalores para matrices no negativas. Este resultado fue probado primero para matrices positivas por O. Perron en 1907, y luego extendido a matrices no negativas irreducibles por G. Frobenius en 1912.

**Teorema 1.2.** (Perron-Frobenius [1]). Sea  $A \in M_n$  positiva (o no negativa irreducible). Entonces

- (i)  $\rho(A)$  es un autovalor simple de  $A$  (llamado autovalor de Perron).

(ii) Existe un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} > 0$ , tal que  $A\mathbf{x} = \rho(A)\mathbf{x}$  (llamado autovector de Perron).

(iii) Si  $\lambda_i \in \sigma(A)$  es tal que  $|\lambda_i| = \rho(A)$ , para algún  $i = 1, 2, \dots, n$ , entonces la multiplicidad algebraica de  $\lambda_i$  es 1.

(iv) Cualquier otro autovector no negativo de  $A$  es múltiplo del autovector de Perron.

**Definición 1.3.** Una lista  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  de números complejos se dice realizable si  $\Lambda$  es el espectro de una matriz no negativa  $A$ , con  $\lambda_1 = \rho(A)$  siendo el autovalor de Perron. En este caso diremos que la matriz  $A$  es la matriz realizadora.

De acuerdo con la definición anterior, si  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  es realizable por una matriz no negativa  $A$  entonces,

$$\lambda_1 = \rho(A) \geq |\lambda_i|, \quad i = 2, \dots, n.$$

La relevancia de las matrices con sumas fila constantes es debido al bien conocido hecho que si  $\lambda_1$  es el autovalor de Perron, el problema de encontrar una matriz no negativa con espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  es equivalente al problema de encontrar una matriz no negativa en  $\mathcal{CS}_{\lambda_1}$  con espectro  $\Lambda$ , como se expresa en el siguiente resultado, que a menudo es atribuido a Johnson:

**Teorema 1.3.** (Johnson [19]) Cualquier lista  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  realizable, es en particular realizable por una matriz no negativa con sumas fila constantes igual a su autovalor de Perron.

Respecto de las condiciones necesarias para la existencia de una solución al NIEP tenemos que si  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  es el espectro de una matriz no negativa  $A$ , entonces las siguientes tres condiciones son condiciones necesarias básicas

- (1)  $\bar{\Lambda} = \{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n\} = \Lambda,$
- (2)  $\max_j |\lambda_j| \in \Lambda,$
- (3)  $S_k(\Lambda) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots .$

La primera es la conocida propiedad de los autovalores de matrices reales, la segunda es una condición de la teoría de Perron Frobenius, y la tercera es conocida como el *k-ésimo momento*, y expresa el obvio requisito que la traza de cualquier potencia entera positiva de una matriz no negativa debe ser no negativa.

La siguiente condición necesaria fue obtenida por Loewy y London [30] y de manera independiente también por Johnson [19],

$$(4) \quad (S_k(\Lambda))^m \leq n^{m-1} S_{km}(\Lambda),$$

para cualquier enteros positivos  $k$  y  $m$ .

Laffey y Meehan [24], establecen una nueva condición necesaria la cual es un refinamiento de la condición (4) para listas de traza cero y  $n$  impar,

$$(5) \quad (S_2(\Lambda))^2 \leq (n-1)S_4(\Lambda).$$

Observe que la lista  $\Lambda = \{5, 4, -3, -3, -3\}$  satisface las condiciones (1) – (4). Sin embargo, no satisface la condición (5), por tanto  $\Lambda$  no es realizable.

Entre las estrategias que han sido empleadas en el estudio del *NIEP* destacan aquellas llamadas de compensación, que consisten en particionar la lista  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  dada, en sublistas, permitiendo que alguna de ellas sean no realizables, con la condición que otras sí lo sean, y en cierto modo compensen la no realizabilidad de las primeras. Esto ha sido hecho empleando resultados de perturbación extremadamente útiles, como lo son los teoremas de Brauer [4], Rado [38], y de Soto, Rojo, Moro y Borobia [52]. Esto, junto con las propiedades de las matrices con sumas fila constantes, son los ingredientes básicos de las técnicas desarrolladas, en particular por el tutor de esta tesis, para obtener un número de simples y eficientes condiciones suficientes para que el *NIEP* y sus problemas derivados tengan una solución.

Estas estrategias tienen también la ventaja de generar criterios de realizabilidad constructivos. Es decir, si las condiciones son satisfechas, entonces podemos siempre construir una matriz solución.

El siguiente resultado debido a Rado e introducido por Perfect en [38], prueba como modificar  $r$  autovalores de una matriz de orden  $n$ , vía una perturbación de rango  $r$ , sin cambiar ninguno de los  $n - r$  autovalores restantes.

El uso de este resultado en el *NIEP* se remonta a Perfect quien fue la primera en usarlo en [38], obteniendo condiciones las cuales son suficientes para la realizabilidad de espectros reales particionados, con la partición permitiendo que algunas de sus piezas sean no realizables. Este resultado fue de alguna manera ignorado durante muchos años hasta que Soto y Rojo lo redescubrieron en [51] y, desde entonces, ha dado lugar a un número de condiciones suficientes para la existencia y construcción de matrices no negativas con espectro real o espectro complejo prescrito (ver [38, 51, 52, 54, 56, 58] y sus referencias):

**Teorema 1.4.** (*Rado [38]*) Sean  $A \in M_n$  con autovalores  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ ,  $X = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \dots \mid \mathbf{x}_r]$  una matriz de orden  $n \times r$  tal que  $\text{rango}(X) = r$  y  $A\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ ,  $r \leq n$ . Sea  $C$  una matriz de orden  $r \times n$  arbitraria. Entonces, la matriz  $A + XC$  tiene autovalores  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ , donde  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$  son autovalores de la matriz  $\Omega + CX$  con  $\Omega = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ .

El caso  $r = 1$  en el Teorema 1.4, constituye un conocido Teorema de Brauer [4, Teorema 27], también empleado con éxito en relación con el *NIEP*.

En [52] los autores presentan la siguiente versión simétrica del Teorema de Rado (Teorema 1.4):

**Teorema 1.5.** (*Soto, Rojo, Moro, Borobia [52]*) Sea  $A$  una matriz simétrica con autovalores  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , y para algún  $r \leq n$ , sea  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r\}$  un conjunto ortonormal de autovectores de  $A$  tal que  $AX = X\Omega$ , donde  $X = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \dots \mid \mathbf{x}_r]$  es una matriz de orden  $n \times r$  y  $\Omega = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ . Sea  $C$  cualquier matriz simétrica de orden  $r$ . Entonces la matriz simétrica  $A + XCX^T$  tiene autovalores  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ , donde  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$  son autovalores de la matriz  $\Omega + C$ .

En esta tesis, obtenemos una versión normal y una versión persimétrica del Teorema de Rado (Teorema 2.4 y Teorema 3.2 más adelante), los cuales son resultados nuevos, interesantes en sí mismos como una herramienta útil para

obtener condiciones suficientes para que el *NNIEP* y *PNIEP* tengan una solución. Estudiamos también el problema de la existencia de matrices de orden  $r < n$ , con autovalores y entradas diagonales prescritas, y aplicamos nuestros resultados al problema inverso de los divisores elementales para matrices no negativas.

## CAPÍTULO

# 2

# MATRICES NORMALES NO-NEGATIVAS CON ESPECTRO PRESCRITO

Una matriz  $A \in M_n$  se dice ser *normal* si ella conmuta con su traspuesta conjugada, esto es, si  $A^*A = AA^*$ .

En este capítulo consideramos el *problema inverso de autovalores para matrices normales no negativas* (en inglés Normal Nonnegative Inverse Eigenvalue Problem, *NNIEP*), es decir, para matrices tales que  $A^T A = AA^T$ . Las matrices normales constituyen una amplia e importante clase de matrices, las cuales contienen a las matrices hermíticas, antihermíticas, simétricas, antisimétricas, unitarias, circulantes, etc; y como tal aparecen en muchas aplicaciones en ciencias e ingenierías.

Condiciones suficientes para que una lista de números complejos sea el espectro de una matriz normal no negativa han sido obtenidas por Xu [64] y Radwan [39]. Nuestro aporte al estudio del *NNIEP* consiste en la obtención de una versión normal del Teorema de Rado (Teorema 1.4), a partir de la cual podemos generar una nueva condición suficiente para la existencia y construcción de una matriz solución.

Esta nueva condición suficiente mejora significativamente las condiciones de Xu [64] y Radwan [39].

Los resultados de este capítulo constituyen esencialmente la publicación [22] (A. I. Julio, C. B. Manzaneda, R. L. Soto, Normal nonnegative realization of spectra, *Linear and Multilinear Algebra*. 63, N°6 (2015) 1204-1215).

El siguiente resultado [67, Teorema 9.1] será necesario para justificar algunos contenidos del capítulo:

**Teorema 2.1.** [67] Sea  $A = (a_{ij}) \in M_n$  con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Los siguientes enunciados son equivalentes:

- 1)  $A$  es normal.
- 2)  $A$  es unitariamente diagonalizable. Esto es, existe una matriz unitaria  $U$  tal que  $U^*AU = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ .
- 3)  $\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2$ .
- 4) Existe un conjunto de autovectores de  $A$  que forman una base ortonormal para  $\mathbb{C}^n$ .
- 5) Si  $U$  es una matriz unitaria tal que  $U^*AU = \begin{bmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix}$ , donde  $B$  y  $D$  son cuadradas, entonces  $B$  y  $D$  son normales y  $C = \mathbf{0}$ .

**Corolario 2.1.** Si  $A_1, A_2, \dots, A_n \in M_n$  son matrices normales, entonces

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n,$$

es también una matriz normal.

**Definición 2.1.** Una matriz  $C = (c_{ij}) \in M_n$  se dice circulante si  $C$  es de la forma

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{bmatrix},$$

esto es, cada fila es un desplazamiento cíclico a la derecha de la fila anterior. Entonces  $C$  es totalmente determinada por la primera fila.

Un vector  $[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]^T \in \mathbb{C}^n$  es llamado *vector par conjugado* si

$$\lambda_1 \in \mathbb{R} \text{ y } \bar{\lambda}_j = \lambda_{n-j+2}, \quad j = 2, 3, \dots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor. \quad (2.1)$$

Así (2.1) es una condición necesaria para que una lista de números complejos  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , sea el espectro de una matriz real circulante. Observemos que si  $[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]^T$  es un vector par conjugado y  $n = 2m + 2$  entonces  $\lambda_{m+2} \in \mathbb{R}$ .

**Lema 2.1.** [10] *Si  $C$  es una matriz circulante, entonces  $C$  es una matriz normal.*

Los siguientes dos resultados debidos a Xu [64], dan condiciones suficientes para la existencia de una matriz normal no negativa con espectro prescrito:

**Teorema 2.2.** [64] *Sea  $\Lambda = \{\lambda_0, \mu_1, \dots, \mu_m, \bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_m\}$  y  $\text{Im } \mu_i \neq 0$  para  $i = 1, 2, \dots, m$ . Si*

$$\lambda_0 \geq 2(|\mu_1| + \dots + |\mu_m|),$$

*entonces existe una matriz circulante no negativa de orden  $n$  con el espectro  $\Lambda$ , donde  $n = 2m + 1$ .*

**Teorema 2.3.** [64] *Sea  $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_t, \lambda_{t+1}, \dots, \lambda_s, \mu_1, \dots, \mu_m, \bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_m\}$ , donde,  $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_t \geq 0 > \lambda_{t+1} \geq \dots \geq \lambda_s$  son reales y  $\text{Im } \mu_i \neq 0$  para  $i = 1, 2, \dots, m$ . Si*

$$\lambda_0 \geq |\lambda_{t+1}| + \dots + |\lambda_s| + 2(|\mu_1| + \dots + |\mu_m|),$$

*entonces existe una matriz normal no negativa de orden  $n$  con el espectro  $\Lambda$ , donde  $n = 2m + s + 1$ .*

Los siguientes lemas constituyen una versión normal de correspondientes resultados de Fiedler [13] para matrices simétricas.

**Lema 2.2.** [64] *Sea  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  el espectro de una matriz normal no negativa y sea  $\epsilon > 0$ . Entonces  $\{\lambda_1 + \epsilon, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  es el espectro de una matriz normal positiva.*

**Lema 2.3.** [64] Sean  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  y  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$  listas de números complejos realizables por matrices normales no negativas, y  $\alpha_1 \geq \beta_1$ , entonces para cualquier  $\eta \geq 0$ , la lista

$$\{\alpha_1 + \eta, \beta_1 - \eta, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_2, \dots, \beta_m\},$$

es realizable por una matriz normal no negativa de orden  $n + m$ .

Xu en [64] introduce el concepto de *lista compañera*  $\Lambda'$  de una lista de números complejos

$$\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s, \mu_1, \dots, \mu_m, \bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_m\},$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  son reales,  $\lambda_1 > 0$ ,  $\mu_j$  son complejos con  $Im\mu_j \neq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , como

$$\Lambda' = \{r_1, r_2, \dots, r_s, r_{s+1}, \dots, r_{s+m}\},$$

donde

$$r_i = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, s; \quad r_{s+j} = -2|\mu_j|, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Xu muestra que si  $\Lambda'$  satisface las condiciones de Kellogg [23], entonces  $\Lambda$  es el espectro de una matriz normal no negativa. Radwan [39] generaliza el resultado de Xu probando que si la lista compañera  $\Lambda'$  satisface las condiciones de Borobia [2], entonces  $\Lambda$  es el espectro de una matriz normal no negativa.

Es bien sabido que el criterio de realizabilidad de Kellogg implica el criterio de realizabilidad de Borobia y también conocemos, del mapa en [32], cuáles criterios están contenidos en el criterio de Borobia. Por tanto, si la lista compañera  $\Lambda'$  de una lista compleja  $\Lambda$  satisface cualquiera de los criterios contenidos en el criterio de Borobia, entonces  $\Lambda$  es realizable por una matriz normal no negativa.

Infortunadamente, la realizabilidad de la lista compañera no es un buen método para decidir la realizabilidad por una matriz normal de una lista de números complejos dada, porque la lista compañera  $\Lambda'$  suele no ser realizable. En efecto, consideremos por ejemplo, una matriz normal no negativa  $A$  con  $tr(A) = 0$  la cual realiza a una lista compleja  $\Lambda$ . Sea  $A'$  una matriz teniendo el espectro  $\Lambda'$  (la lista compañera). Entonces, puesto que  $-Re\mu_j < |\mu_j|$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ ,  $tr(A') < 0$  y la lista compañera no es realizable. Además, no sabemos como computar una matriz realizadora de la lista compañera.

En esta tesis, en lugar de usar la lista compañera para decidir realizabilidad por una matriz normal, proponemos nuevas condiciones suficientes aplicadas directamente a la lista compleja dada. Estas condiciones mejoran significativamente las condiciones de Xu [64] y ellas generan un procedimiento algorítmico para construir una matriz solución.

## 2.1. Perturbación normal de rango $r$

A continuación presentamos el resultado principal de este capítulo llamado una *versión normal del Teorema de Rado* (Teorema 1.4).

**Teorema 2.4.** [22] *Sea  $A \in M_n$  una matriz normal de orden  $n$  con espectro  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , y para algún  $r \leq n$ , sea  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r\}$  un conjunto ortonormal de autovectores de  $A$  correspondientes a  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ , respectivamente. Sea  $X$  una matriz de orden  $n \times r$  con  $i$ -ésima columna  $\mathbf{x}_i$ . Sea  $\Omega = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ , y  $C = (c_{ij})_{i,j=1}^r$  con  $c_{ii} = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  una matriz de orden  $r$  tal que  $\Omega + C = B$  es una matriz normal. Entonces  $A + XCX^*$  es normal con autovalores  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ , donde  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$  son autovalores de la matriz  $\Omega + C = B$ .*

*Demostración.* Puesto que  $A$  es una matriz normal, entonces existe una matriz unitaria  $U = [X \mid Y]$ , donde  $X = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \dots \mid \mathbf{x}_r]$ ,  $Y = [\mathbf{x}_{r+1} \mid \dots \mid \mathbf{x}_n]$  y  $A\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  tal que  $U^*AU = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ . Sea  $D = \text{diag}\{\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n\}$ . Entonces tenemos

$$\begin{aligned} U^*(A + XCX^*)U &= U^*AU + U^*XCX^*U \\ &= \begin{bmatrix} \Omega & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X^* \\ Y^* \end{bmatrix} XCX^* [X \mid Y] \\ &= \begin{bmatrix} \Omega & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} [C \mid \mathbf{0}] \\ &= \begin{bmatrix} \Omega & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Puesto que  $B$  y  $D$  son matrices normales, entonces del Teorema 2.1,  $A + XCX^*$  es normal y tiene autovalores  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ , donde  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$  son autovalores de la matriz  $B$ . ■

**Ejemplo 2.1.**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

es una matriz normal con autovalores  $1, -1, i, -i$ . Vamos a cambiar los autovalores  $1, -1$  a  $2, -2$ , preservando normalidad. Entonces

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

y

$$A + X C X^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 1 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

es una matriz normal con autovalores  $2, -2, i, -i$ .

También podemos cambiar los autovalores complejos  $i, -i$  a, digamos,  $i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}$ . En este caso,

$$B = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

y

$$A + XCX^* = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}i & 1 + \frac{1}{2}i & 0 \\ 1 - \frac{1}{2}i & 0 & 0 & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2}i & 0 & 0 & 1 - \frac{1}{2}i \\ 0 & 1 + \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i & 0 \end{bmatrix},$$

es una matriz normal con autovalores  $1, -1, -i\sqrt{2}, i\sqrt{2}$ .

## 2.2. Una nueva condición suficiente para el *NNIEP*

Puesto que una matriz simétrica es normal, las condiciones suficientes para el caso simétrico no negativo (ver [13, 28, 52, 56, 57]) pueden también ser usadas para el caso normal no negativo. Sin embargo, es fácil ver que si  $A$  es una matriz real normal (no negativa en nuestro caso) con todos sus autovalores reales, entonces  $A$  es necesariamente simétrica. Por esta razón, nuestro interés en esta tesis es el estudio del *NNIEP* para listas de números complejos.

El siguiente resultado da una nueva condición suficiente para encontrar una solución al *NNIEP*. Este resultado genera un procedimiento algorítmico para computar una matriz normal no negativa con espectro prescrito, y mejora significativamente las condiciones de Xu. Esta condición suficiente es obtenida de la versión normal del Teorema de Rado (Teorema 2.4).

**Teorema 2.5.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos con  $\Lambda = \bar{\Lambda}$ ,  $\lambda_1 \geq \max_i |\lambda_i|$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ . Supongamos que existe una partición de  $\Lambda$  como sigue*

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_{p_0}, & \text{con} \\ \Lambda_0 &= \{\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0p_0}\}, & \lambda_{01} = \lambda_1, \\ \Lambda_k &= \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, & k = 1, 2, \dots, p_0, \end{aligned}$$

donde algunas de las listas  $\Lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, p_0$  pueden ser vacías, tal que las siguientes condiciones se satisfacen:

(i) Para cada  $k = 1, 2, \dots, p_0$ , existe una matriz normal no negativa con espectro

$$\Gamma_k = \{\omega_k, \lambda_{k1}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, \quad 0 \leq \omega_k \leq \lambda_1.$$

(ii) Existe una matriz  $B$  normal no negativa de orden  $p_0$  con el espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales  $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \dots \geq \omega_{p_0}$ .

Entonces  $\Lambda$  es realizable por una matriz normal no negativa.

*Demostración.* De i) sea  $A_k$  una matriz normal no negativa de orden  $p_k + 1$  con espectro

$$\Gamma_k = \{\omega_k, \lambda_{k1}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, \quad k = 1, 2, \dots, p_0, \quad 0 \leq \omega_k \leq \lambda_1.$$

Entonces  $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_{p_0}$ , es una matriz normal no negativa realizando  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_{p_0}$ . Sea

$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{x}_{p_0} \end{bmatrix},$$

donde  $\mathbf{x}_k = [x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kp_k}]^T \geq 0$ , con  $A_k \mathbf{x}_k = \omega_k \mathbf{x}_k$ ,  $\|\mathbf{x}_k\| = 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, p_0$ .

De ii) sea  $B$  una matriz normal no negativa de orden  $p_0$  con el espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{p_0}$ . Sea  $\Omega = \text{diag}\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{p_0}\}$ , y  $C = B - \Omega$ . Entonces, puesto que  $A, X$  y  $C$  son no negativas,  $M = A + X C X^T$  es no negativa. Además, del Teorema 2.4, la matriz  $M$  es normal con el espectro  $\Lambda$  deseado. ■

### Observación 2.1.

Una repetida aplicación de un resultado debido a Šmigoc [45, Lema 5] conduce a una respuesta equivalente a la del Teorema 2.5. Sin embargo, creemos que el Teorema 2.5 es más fácil de manejar, ya que es aplicado directamente a la lista  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  y una vez que hemos encontrado las matrices normales no negativas  $A_k$  con espectro  $\Gamma_k, k = 1, 2, \dots, p_0$ , podemos computar la matriz solución  $A + X C X^T$  en un solo paso. También señalamos que el resultado en [45, Lema 5] se sigue del Teorema de Rado (Teorema 1.4):

Supongamos que tenemos una matriz  $A$  de orden  $n$  con espectro  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  y entradas diagonales  $c, a_2, \dots, a_n$ . Sea  $B$  una matriz de orden  $m$  con espectro

$\{c, \mu_2, \dots, \mu_m\}$  y  $Bs = cs$ . Sea

$$X = \begin{bmatrix} s & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \Omega = \text{diag}\{c, a_2, \dots, a_n\}.$$

Entonces, del Teorema de Rado

$$M = \begin{bmatrix} B & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} + XC,$$

tiene espectro  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu_2, \dots, \mu_m\}$ , donde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  son autovalores de  $\Omega + CX = A$ .

### 2.3. Matrices normales no negativas con autovalores y entradas diagonales prescritas

Con el fin de aplicar el Teorema 2.5, necesitamos una matriz normal no negativa  $B$  de orden  $r$  ( $r < n$ ) con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ , y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$  prescritas.

Si la matriz  $B$  normal no negativa de orden  $r$  es requerida con espectro real y entradas diagonales prescritas, entonces  $B$  es necesariamente simétrica; en este caso, Fiedler [13] da condiciones necesarias y suficientes para matrices de orden  $r = 3$ , y condiciones suficientes si  $r \geq 4$ .

En [42], los autores probaron una condición necesaria y suficiente para que una lista de números complejos  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  sea el espectro de alguna matriz  $A$  circulante (normal) no negativa. Sin embargo, chequear estas condiciones requiere mucho trabajo, lo cual para un  $n$  suficientemente grande lo convierte en una tarea prohibitiva. Además, en este caso, las entradas diagonales deben ser constantes igual a  $\frac{1}{n}\text{tr}(A)$ .

En [30] Loewy y London resolvieron el *NIEP* para  $n = 3$  con una matriz circulante como matriz solución. Si  $\Lambda = \{\lambda_1, \alpha + i\beta, \alpha - i\beta\}$ , la condición

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 \leq 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2),$$

del Teorema de Loewy y London [30, Teorema 2.2] se convierte en

$$\lambda_1 \geq \alpha + \sqrt{3} \beta.$$

De acuerdo a esto, tenemos el siguiente simple resultado en el cual podemos computar, de manera sencilla, una matriz normal (circulante) no negativa de orden 3.

**Proposición 2.1.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \alpha + i\beta, \alpha - i\beta\}$ ,  $\lambda_1 \geq |\alpha + i\beta|$ ,  $\beta > 0$ , una lista de números complejos. La matriz normal (circulante)*

$$C = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \lambda_1 + 2\alpha & \lambda_1 - \alpha - \sqrt{3} \beta & \lambda_1 - \alpha + \sqrt{3} \beta \\ \lambda_1 - \alpha + \sqrt{3} \beta & \lambda_1 + 2\alpha & \lambda_1 - \alpha - \sqrt{3} \beta \\ \lambda_1 - \alpha - \sqrt{3} \beta & \lambda_1 - \alpha + \sqrt{3} \beta & \lambda_1 + 2\alpha \end{bmatrix},$$

es no negativa con espectro  $\{\lambda_1, \alpha + i\beta, \alpha - i\beta\}$  si y sólo si

$$\lambda_1 \geq \max\{-2\alpha, \alpha + \sqrt{3} \beta\}.$$

Para  $n = 4$ , tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 2.2.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \alpha + i\beta, \lambda_3, \alpha - i\beta\}$ ,  $\lambda_1 \geq |\alpha + i\beta|$ ,  $\beta > 0$  una lista de números complejos. Si  $\lambda_1 \geq \max\{2|\alpha| - \lambda_3, 2\beta + \lambda_3\}$ , entonces*

$$C = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \lambda_1 + 2\alpha + \lambda_3 & \lambda_1 - 2\beta - \lambda_3 & \lambda_1 - 2\alpha + \lambda_3 & \lambda_1 + 2\beta - \lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\beta - \lambda_3 & \lambda_1 + 2\alpha + \lambda_3 & \lambda_1 - 2\beta - \lambda_3 & \lambda_1 - 2\alpha + \lambda_3 \\ \lambda_1 - 2\alpha + \lambda_3 & \lambda_1 + 2\beta - \lambda_3 & \lambda_1 + 2\alpha + \lambda_3 & \lambda_1 - 2\beta - \lambda_3 \\ \lambda_1 - 2\beta - \lambda_3 & \lambda_1 - 2\alpha + \lambda_3 & \lambda_1 + 2\beta - \lambda_3 & \lambda_1 + 2\alpha + \lambda_3 \end{bmatrix},$$

es normal (circulante) no negativa con espectro  $\{\lambda_1, \alpha + i\beta, \lambda_3, \alpha - i\beta\}$ .

Observe que las listas

$$\Lambda_1 = \{2.5, -1 + 2i, -1 - 2i\} \text{ y } \Lambda_2 = \{3, -1 + 2i, -1, -1 - 2i\},$$

no satisfacen las condiciones de Xu (Teorema 2.3) (pues,  $2.5 \not\geq 2\sqrt{5}$  y  $3 \not\geq 1 + 2\sqrt{5}$ ). Sin embargo, estas listas satisfacen las correspondientes condiciones de las Proposiciones 2.1 y 2.2. Así, tenemos las matrices normales no negativas:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{7-3\sqrt{4}}{6} & \frac{7+3\sqrt{4}}{6} \\ \frac{7+3\sqrt{4}}{6} & \frac{1}{6} & \frac{7-3\sqrt{4}}{6} \\ \frac{7-3\sqrt{4}}{6} & \frac{7+3\sqrt{4}}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

con espectros  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$ , respectivamente.

En el ejemplo que presentamos a continuación, usaremos el Teorema 2.5 para construir una matriz normal no negativa con espectro prescrito.

**Ejemplo 2.2.** *Queremos construir una matriz normal no negativa con espectro*

$$\Lambda = \{7, -3, -3, 1 + 3i, 1 - 3i, 1 + i, 1 - i\}.$$

*Observe que el Teorema 2.3 de Xu no funciona para esta lista ( $7 \not\leq 3 + 3 + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{2} = 15,153$ ) y la correspondiente lista compañera no es realizable.*

*Entonces aplicamos el Teorema 2.5. Tomamos la partición*

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3,$$

*con*

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \{7, 1 + 3i, 1 - 3i\}, & \Lambda_1 &= \{1 + i, 1 - i\}, & \Lambda_2 &= \Lambda_3 = \{-3\}, \\ \Gamma_1 &= \{3, 1 + i, 1 - i\}, & \Gamma_2 &= \Gamma_3 = \{3, -3\}. \end{aligned}$$

*Computamos las matrices normales no negativas:*

$$A_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & 2 - \sqrt{3} & 2 + \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3} & 5 & 2 - \sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{3} & 2 + \sqrt{3} & 5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = A_3$$

*con espectros  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ , respectivamente. La matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 - \sqrt{3} & 2 + \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3} & 3 & 2 - \sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{3} & 2 + \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix},$$

*es normal no negativa con autovalores  $7, 1 + 3i, 1 - 3i$  y entradas diagonales  $3, 3, 3$ . Entonces*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 - \sqrt{3} & 2 + \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3} & 0 & 2 - \sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{3} & 2 + \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix},$$

$$y \quad A + X C X^T =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2-\sqrt{3}}{3} & \frac{2+\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}(2-\sqrt{3})}{6} & \frac{\sqrt{6}(2-\sqrt{3})}{6} & \frac{\sqrt{6}(2+\sqrt{3})}{6} & \frac{\sqrt{6}(2+\sqrt{3})}{6} \\ \frac{2+\sqrt{3}}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2-\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}(2-\sqrt{3})}{6} & \frac{\sqrt{6}(2-\sqrt{3})}{6} & \frac{\sqrt{6}(2+\sqrt{3})}{6} & \frac{\sqrt{6}(2+\sqrt{3})}{6} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{3} & \frac{2+\sqrt{3}}{3} & \frac{5}{3} & \frac{\sqrt{6}(2-\sqrt{3})}{6} & \frac{\sqrt{6}(2-\sqrt{3})}{6} & \frac{\sqrt{6}(2+\sqrt{3})}{6} & \frac{\sqrt{6}(2+\sqrt{3})}{6} \\ \frac{\sqrt{6}(2+\sqrt{3})}{6} & \frac{\sqrt{6}(2+\sqrt{3})}{6} & \frac{\sqrt{6}(2+\sqrt{3})}{6} & 0 & 3 & \frac{2-\sqrt{3}}{2} & \frac{2-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}(2+\sqrt{3})}{6} & \frac{\sqrt{6}(2+\sqrt{3})}{6} & \frac{\sqrt{6}(2+\sqrt{3})}{6} & 3 & 0 & \frac{2-\sqrt{3}}{2} & \frac{2-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}(2-\sqrt{3})}{6} & \frac{\sqrt{6}(2-\sqrt{3})}{6} & \frac{\sqrt{6}(2-\sqrt{3})}{6} & \frac{2+\sqrt{3}}{2} & \frac{2+\sqrt{3}}{2} & 0 & 3 \\ \frac{\sqrt{6}(2-\sqrt{3})}{6} & \frac{\sqrt{6}(2-\sqrt{3})}{6} & \frac{\sqrt{6}(2-\sqrt{3})}{6} & \frac{2+\sqrt{3}}{2} & \frac{2+\sqrt{3}}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

es una matriz normal no negativa con el espectro  $\Lambda$ .

El problema de construir una matriz normal no negativa no simétrica no circulante con autovalores y entradas diagonales prescritas es un problema difícil, incluso para dimensiones pequeñas. Siguiendo el patrón de signos para matrices normales no negativas dado en [68], podemos dar condiciones y exhibir una matriz realizadora, para los casos  $n = 3$  y  $n = 4$ . Para ilustrar el procedimiento, sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \alpha + i\beta, \alpha - i\beta\}$ . Tenemos las siguientes proposiciones:

**Proposición 2.3.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \alpha + i\beta, \alpha - i\beta\}$  una lista de números complejos y sea  $\omega_1 \geq \omega_2 \geq 0$  tal que  $\lambda_1 + 2\alpha = 2\omega_1 + \omega_2$ . Si*

$$\begin{cases} \lambda_1 - \omega_1 > \omega_1 - \omega_2, \\ \alpha < \omega_2, \\ \beta^2 = (\alpha - \lambda_1)(\alpha - \omega_2), \end{cases} \quad (2.2)$$

entonces  $\Lambda$  es el espectro de una matriz normal no negativa con entradas diagonales  $\omega_1, \omega_1, \omega_2$ .

*Demostración.* Supongamos que las condiciones (2.2) se satisfacen entonces

$$\begin{bmatrix} \omega_1 & \lambda_1 - \omega_1 & 0 \\ \frac{\omega_1 - \omega_2}{\sqrt{(\lambda_1 - \omega_1)^2 - (\omega_1 - \omega_2)^2}} & \omega_1 & \sqrt{(\lambda_1 - \omega_1)^2 - (\omega_1 - \omega_2)^2} \\ \sqrt{(\lambda_1 - \omega_1)^2 - (\omega_1 - \omega_2)^2} & 0 & \omega_2 \end{bmatrix},$$

es una matriz normal no negativa con espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \alpha + i\beta, \alpha - i\beta\}$  y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_1, \omega_2$ .

En particular, si  $\omega_2 = 0$  las condiciones (2.2) se convierten en

$$\begin{cases} \lambda_1 > \omega_1, \\ \alpha < 0, \\ \beta^2 = \alpha^2 - \alpha\lambda_1, \end{cases} \quad (2.3)$$

entonces

$$\begin{bmatrix} \omega_1 & \lambda_1 - \omega_1 & 0 \\ \frac{\omega_1}{\sqrt{-2\lambda_1\alpha}} & \omega_1 & \sqrt{-2\lambda_1\alpha} \\ \sqrt{-2\lambda_1\alpha} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

es una matriz normal no negativa con espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \alpha + i\beta, \alpha - i\beta\}$  y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_1, 0$ . ■

**Proposición 2.4.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \alpha + i\beta, \alpha - i\beta\}$  una lista de números complejos, con  $\alpha < 0$  y sea  $\omega_1 \geq 0$  tal que  $\lambda_1 + 2\alpha = \omega_1$ . Si*

$$\begin{cases} \lambda_1 > \omega_1, \\ \beta^2 = \alpha^2 \left( \frac{\lambda_1 - \alpha}{\lambda_1 + \alpha} \right), \end{cases} \quad (2.4)$$

entonces  $\Lambda$  es el espectro de una matriz normal no negativa con entradas diagonales  $\omega_1, 0, 0$ .

*Demostración.* Supongamos que las condiciones (2.4) se satisfacen entonces

$$\begin{bmatrix} \omega_1 & \lambda_1 \sqrt{\frac{\lambda_1 - \omega_1}{\lambda_1 + \omega_1}} & \omega_1 \sqrt{\frac{\lambda_1 - \omega_1}{\lambda_1 + \omega_1}} \\ \omega_1 \sqrt{\frac{\lambda_1 - \omega_1}{\lambda_1 + \omega_1}} & 0 & \lambda_1 - \omega_1 \\ \lambda_1 \sqrt{\frac{\lambda_1 - \omega_1}{\lambda_1 + \omega_1}} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

es una matriz normal no negativa con espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \alpha + i\beta, \alpha - i\beta\}$  y entradas diagonales  $\omega_1, 0, 0$ . ■

A pesar que las condiciones (2.2), (2.3) y (2.4) se ven un poco restrictivas, podemos encontrar muchas listas prescritas de autovalores y entradas diagonales, las cuales son realizables por una matriz normal no negativa.

**Ejemplo 2.3.** *Las listas*

$$\Lambda_1 = \{10, 2 + 4i, 2 - 4i\} \text{ con } \omega_i = 5, 5, 4,$$

$$\Lambda_2 = \{12, -4 + 8i, -4 - 8i\} \text{ con } \omega_i = 2, 2, 0, \text{ y}$$

$$\Lambda_3 = \{12, -3 + \sqrt{15}i, -3 - \sqrt{15}i\} \text{ con } \omega_i = 6, 0, 0,$$

satisfacen las condiciones (2.2), (2.3) y (2.4), respectivamente. Entonces

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & \sqrt{24} \\ \sqrt{24} & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 0 \\ 2 & 2 & 4\sqrt{6} \\ 4\sqrt{6} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 6 & 4\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 0 & 6 \\ 4\sqrt{3} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

son matrices normales no negativas con los espectros  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ , y con las entradas diagonales prescritas, respectivamente.

Sea ahora  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \alpha + i\beta, \alpha - i\beta\}$ , con  $\lambda_2 < 0$  y  $\lambda_1 + \lambda_2 + 2\alpha \geq 0$ . Supongamos que existe una partición

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3, \text{ con}$$

$$\Lambda_0 = \{\lambda_1, \alpha + i\beta, \alpha - i\beta\}, \quad \Lambda_1 = \{\lambda_2\}, \quad \Lambda_2 = \Lambda_3 = \emptyset,$$

y  $\Lambda_0$  realizable por una matriz normal no negativa con entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ .

Definimos las listas realizables

$$\Gamma_1 = \{\omega_1, \lambda_2\}, \quad \Gamma_2 = \{\omega_2\}, \quad \Gamma_3 = \{\omega_3\},$$

con matrices realizadoras

$$A_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega_1 + \lambda_2 & \omega_1 - \lambda_2 \\ \omega_1 - \lambda_2 & \omega_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = [\omega_2], \quad A_3 = [\omega_3],$$

respectivamente. Entonces del Teorema 2.5

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \omega_2 & \\ & & \omega_3 \end{bmatrix} + X C X^T,$$

es una matriz normal no negativa con espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \alpha + i\beta, \alpha - i\beta\}$  y entradas diagonales  $\omega_2, \omega_3, \frac{1}{2}(\omega_1 + \lambda_2), \frac{1}{2}(\omega_1 + \lambda_2)$ . Como un ejemplo, sea

$$\begin{aligned} \Lambda &= \{7, -3, 1 + 3i, 1 - 3i\} \text{ con} \\ \Lambda_0 &= \{7, 1 + 3i, 1 - 3i\}, \quad \Lambda_1 = \{-3\}, \quad \Lambda_2 = \Lambda_3 = \emptyset, \text{ y} \\ \Gamma_1 &= \{3, -3\}, \quad \Gamma_2 = \{3\}, \quad \Gamma_3 = \{3\}, \end{aligned}$$

con matrices normales realizadoras

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = [3], \quad A_3 = [3],$$

respectivamente. Entonces

$$B = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & A_1 \end{bmatrix} + X C X^T \quad (2.5)$$

es una matriz normal no negativa con espectro  $\Lambda = \{7, -3, 1 + 3i, 1 - 3i\}$  y entradas diagonales  $3, 3, 0, 0$ .

Consideremos nuevamente la lista dada en el Ejemplo 2.2, ahora con una nueva partición.

$$\Lambda = \{7, -3, -3, 1 + 3i, 1 - 3i, 1 + i, 1 - i\},$$

tomemos la partición

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3 \cup \Lambda_4, \text{ donde}$$

$$\Lambda_0 = \{7, -3, 1 + 3i, 1 - 3i\}, \quad \Lambda_1 = \{1 + i, 1 - i\}, \quad \Lambda_2 = \{-3\}, \quad \Lambda_3 = \Lambda_4 = \emptyset,$$

con

$$\Gamma_1 = \{3, 1 + i, 1 - i\}, \quad \Gamma_2 = \{3, -3\}, \quad \Gamma_3 = \Gamma_4 = \{0\}.$$

Entonces

$$A_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & 2 - \sqrt{3} & 2 + \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3} & 5 & 2 - \sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{3} & 2 + \sqrt{3} & 5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = A_4 = [0],$$

son matrices normales no negativas con espectros  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ , respectivamente. Sea

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 - \sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{2}(2 + \sqrt{3}) & \frac{1}{2}\sqrt{2}(2 + \sqrt{3}) \\ 2 + \sqrt{3} & 3 & \frac{1}{2}\sqrt{2}(2 - \sqrt{3}) & \frac{1}{2}\sqrt{2}(2 - \sqrt{3}) \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}(2 - \sqrt{3}) & \frac{1}{2}\sqrt{2}(2 + \sqrt{3}) & 0 & 3 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}(2 - \sqrt{3}) & \frac{1}{2}\sqrt{2}(2 + \sqrt{3}) & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

la matriz obtenida del procedimiento anterior (2.5), la cual es normal no negativa con autovalores  $7, -3, 1 + 3i, 1 - 3i$  y entradas diagonales  $3, 3, 0, 0$ . Sea  $\Omega = \text{diag}\{3, 3, 0, 0\}$  y

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = B - \Omega.$$

Entonces  $A + XCX^T$  es una matriz normal no negativa con el espectro  $\Lambda$ .

## 2.4. Perturbación de Guo para matrices normales

Guo [16] probó que si una lista de números complejos  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  con

$\lambda_2 \in \mathbb{R}$  es realizable, entonces para todo  $t \geq 0$  la lista

$$\Lambda_t = \{\lambda_1 + t, \lambda_2 \pm t, \lambda_3, \dots, \lambda_n\},$$

es también realizable. Aquí probamos que, bajo ciertas condiciones, el resultado de Guo es válido para listas de números complejos, las cuales son realizables por una matriz normal no negativa.

**Proposición 2.5.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos, la cual es realizable por una matriz normal no negativa. Sea  $\lambda_2 \in \mathbb{R}$  y supongamos que existe una partición  $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$  con*

$$\Lambda_1 = \{\lambda_1, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1p_1}\}, \quad \Lambda_2 = \{\lambda_2, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2p_2}\}$$

*tal que  $\Gamma_1 = \{\omega_1, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1p_1}\}$  y  $\Gamma_2 = \{\omega_2, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2p_2}\}$  son realizables por matrices normales no negativas. Entonces, si*

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \omega_1 + \omega_2 \quad \text{y} \quad \lambda_2 \leq \omega_2 \leq \omega_1 \leq \lambda_1,$$

*la lista*

$$\Lambda_t = \{\lambda_1 + t, \lambda_2 \pm t, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$$

*es también realizable por una matriz normal no negativa para todo  $t > 0$ .*

*Demostración.* Puesto que las listas

$$\Gamma_1 = \{\omega_1, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1p_1}\} \quad \text{y} \quad \Gamma_2 = \{\omega_2, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2p_2}\}$$

son realizables por matrices normales no negativas, del Lema 2.2 las listas

$$\Gamma_{1,t} = \{\omega_1 + t, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1p_1}\} \quad \text{y} \quad \Gamma_{2,t} = \{\omega_2 + t, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2p_2}\}$$

son también realizables por matrices normales no negativas (positivas). Entonces del Lema 2.3, con  $\epsilon = \lambda_1 - \omega_1$ , tenemos que

$$\Lambda_t^+ = \{\omega_1 + t + \epsilon, \omega_2 + t - \epsilon, \lambda_3, \dots, \lambda_n\} = \{\lambda_1 + t, \lambda_2 + t, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$$

es el espectro de una matriz normal no negativa. Además, puesto que  $\omega_1 \geq \omega_2$ , con  $\eta = \lambda_1 - \omega_1 + t$ , tenemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,\eta} &= \{\omega_1 + \eta, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1p_1}\} = \{\lambda_1 + t, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1p_1}\} \\ \Gamma_{2,\eta} &= \{\omega_2 - \eta, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2p_2}\} = \{\lambda_2 - t, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2p_2}\} \end{aligned}$$

y

$$\Lambda_t^- = \{\lambda_1 + t, \lambda_2 - t, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$$

es también realizable por una matriz normal no negativa. Por tanto,

$$\Lambda_t = \{\lambda_1 + t, \lambda_2 \pm t, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$$

es realizable por una matriz normal no negativa para todo  $t > 0$ . ■

Como un ejemplo, consideremos la lista  $\Lambda = \{12, -2, 2 + 4i, 2 - 4i\}$ , la cual es realizable por la matriz normal no negativa

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 2\sqrt{6} & 3 \\ 2\sqrt{6} & 0 & 4 & \sqrt{6} \\ 3 & 3 & \sqrt{6} & 0 \end{bmatrix}.$$

Tomamos la partición

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \{12, 2 + 4i, 2 - 4i\}, & \Lambda_2 &= \{-2\} \text{ con} \\ \Gamma_1 &= \{10, 2 + 4i, 2 - 4i\}, & \Gamma_2 &= \{0\}, \end{aligned}$$

donde  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son realizables por matrices normales no negativas. Por tanto, la lista

$$\Lambda_t = \{12 + t, -2 \pm t, 2 + 4i, 2 - 4i\}$$

es realizable por una matriz normal no negativa para todo  $t > 0$ , dando lugar a una familia de matrices normales no negativas.

## 2.5. Una aplicación al *NIEDP*

Sea  $A \in M_n$  y sea

$$J(A) = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

la *forma canónica de Jordan* de  $A$  (FCJ de  $A$ ). Las submatrices de orden  $n_i$

$$J_{n_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

son llamadas los *bloques de Jordan* de  $J(A)$ . Entonces, los *divisores elementales* de  $A$  son los polinomios  $(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$ , esto es, los polinomios característicos de  $J_{n_i}(\lambda_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .

El *problema inverso de los divisores elementales para matrices no negativas (NIEDP)* es el problema de determinar condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales los polinomios

$$(\lambda - \lambda_1)^{n_1}, (\lambda - \lambda_2)^{n_2}, \dots, (\lambda - \lambda_k)^{n_k}, \quad n_1 + n_2 + \dots + n_k = n.$$

son los divisores elementales de una matriz no negativa  $A$  de orden  $n$  (ver [6, 7, 11, 35, 36, 53, 58]).

Como una aplicación del Teorema 2.5 damos la siguiente condición suficiente, que garantiza la existencia de una matriz positiva de orden  $n$  con espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  y los divisores elementales para cada una de las posibles FCJ asociadas con  $\Lambda$ . Estas condiciones extienden un resultado anterior obtenido en [53, Teorema 3.6].

**Teorema 2.6.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos con  $\Lambda = \bar{\Lambda}$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i - t \geq 0$ ,  $\lambda_1 - t \geq \max |\lambda_i|$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , para  $t > 0$ . Si  $\Lambda_t = \{\lambda_1 - t, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  satisface las condiciones del Teorema 2.5, entonces existe una matriz  $A$  positiva de orden  $n$  con espectro  $\Lambda$  y divisores elementales para cada una de las posibles FCJ asociadas con  $\Lambda$ .*

*Demostración.* Si  $\Lambda_t$  satisface las condiciones del Teorema 2.5, entonces existe una matriz  $B_t$  normal no negativa de orden  $n$  con espectro  $\Lambda_t$ , la cual puede ser computada a partir del procedimiento algorítmico dado en el Teorema 2.5. Del Lema 2.2, existe una matriz  $B$  normal positiva de orden  $n$  con espectro  $\Lambda$ , la cual puede ser obtenida de  $B_t$  siguiendo la prueba constructiva del Lema 2.2. Puesto que  $B$  es normal, ella es diagonalizable y entonces, del resultado en [35, Teorema 1], existe una matriz positiva  $A$  de orden  $n$  con espectro  $\Lambda$  y divisores elementales para cada una de las posibles FCJ asociadas con  $\Lambda$ . ■

## CAPÍTULO

### 3

# MATRICES PERSIMÉTRICAS NO-NEGATIVAS CON ESPECTRO PRESCRITO

$A^F$  denota la *flip-traspuesta* de  $A$ , la cual voltea la matriz  $A$  a través de su antidiagonal. Si  $A = (a_{ij})_{mn} \in M_{mn}$ , entonces  $A^F := (a_{n-j+1, m-i+1})_{nm}$ .

Una matriz  $A \in M_n$  se dice ser *persimétrica* si  $A^F = A$ , esto es, si es simétrica a través de la diagonal que va desde la esquina inferior izquierda a la esquina superior derecha.

En este capítulo consideramos el *problema inverso de autovalores para matrices persimétricas no negativas* (en inglés *Persymmetric Nonnegative Inverse Eigenvalue Problem, PNIEP*). Las matrices persimétricas constituyen una importante clase de matrices, las cuales contienen a las matrices Toeplitz, circulantes, bisimétricas, etc; y como tal son comunes en ciencias físicas e ingenierías. Surgen, por ejemplo, en el control de las vibraciones mecánicas y eléctricas, donde los autovalores de la matriz de Gram, la cual es simétrica y persimétrica, juegan un papel importante [40].

Algunas interesantes observaciones relacionadas con matrices persimétricas no negativas de orden menor son dadas en [66].

Nuestro aporte al estudio del *PNIEP* consiste en la obtención de una versión persimétrica del Teorema de Rado (Teorema 1.4), a partir de la cual podemos generar una condición suficiente para el *PNIEP*. Nuestros resultados tienen la ventaja de ser constructivos, es decir, generan procedimientos algorítmicos para computar una matriz solución.

Los resultados de este capítulo constituyen parte de la publicación [21] (A. I. Julio, R. L. Soto, Persymmetric and bisymmetric nonnegative inverse eigenvalue problem, *Linear Algebra and Appl.* 469 (2015) 130-152).

Sea  $J$  una matriz de orden  $n$  con unos a lo largo de su antidiagonal y ceros en el resto, esto es,  $J = [\mathbf{e}_n \mid \cdots \mid \mathbf{e}_2 \mid \mathbf{e}_1]$ . Entonces

$$J^T = J^F = J, \quad J^2 = I, \quad A^F = JA^TJ.$$

Además, la multiplicación a izquierda por  $J$  invierte el orden de las filas de la matriz; mientras que la multiplicación a derecha por  $J$  invierte el orden de las columnas.

Las siguientes propiedades son sencillas:

$$(A^F)^F = A, \quad (A^T)^F = (A^F)^T, \quad (A + B)^F = A^F + B^F, \quad (AB)^F = B^F A^F.$$

Tenemos el siguiente:

**Lema 3.1.** *Si  $A$  y  $B$  son matrices persimétricas, entonces i)  $aA + bB$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ , ii)  $A^{-1}$  si existe, y iii)  $A^T$ , son persimétricas.*

*Demostración.* i)  $(aA + bB)^F = aA^F + bB^F = aA + bB$ .

ii)  $I = A^{-1}A$  implica  $A^F(A^{-1})^F = A(A^{-1})^F = I$ . Por tanto,  $(A^{-1})^F = A^{-1}$ .

iii)  $(A^T)^F = (A^F)^T = A^T$ . ■







### 3.2. Perturbación persimétrica de rango $r$

En esta sección probamos el resultado principal de este capítulo llamado una *versión persimétrica del Teorema de Rado* (Teorema 1.4), el cual nos permitirá dar una condición suficiente para la existencia y construcción de una matriz persimétrica no negativa con espectro prescrito.

**Teorema 3.2.** [21] *Sea  $A \in M_n$  una matriz persimétrica de orden  $n$  con espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , y para algún  $r \leq n$ , sea  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r\}$  un conjunto de autovectores de  $A$  correspondientes a  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ , respectivamente. Sea  $X$  la matriz de orden  $n \times r$  con  $i$ -ésima columna  $\mathbf{x}_i$  y  $\text{rango}(X) = r$ . Sea  $\Omega = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ , y sea  $C$  una matriz persimétrica de orden  $r$ . Entonces la matriz  $A + XCX^F$  es persimétrica con autovalores  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ , donde  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$  son autovalores de  $B = \Omega + CX^F X$ .*

*Demostración.* Sea  $S = [X \mid Y]$  una matriz no singular con  $S^{-1} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$ .

Entonces

$$UX = I_r, \quad VY = I_{n-r}, \quad VX = \mathbf{0}, \quad UY = \mathbf{0}.$$

Además, puesto que  $AX = X\Omega$ , tenemos

$$\begin{aligned} S^{-1}AS &= \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} [AX \mid AY] \\ &= \begin{bmatrix} \Omega & UAY \\ \mathbf{0} & VAY \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

y

$$S^{-1}XCX^F S = \begin{bmatrix} CX^F X & CX^F Y \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Por tanto

$$S^{-1}(A + XCX^F)S = \begin{bmatrix} \Omega + CX^F X & UAY + CX^F Y \\ \mathbf{0} & VAY \end{bmatrix},$$

y

$$\begin{aligned} \sigma(A + XCX^F) &= \sigma(\Omega + CX^F X) \cup \sigma(VAY) \\ &= \sigma(\Omega + CX^F X) \cup \sigma(A) - \sigma(\Omega). \end{aligned}$$

Finalmente, puesto que  $(A + XCX^F)^F = A + XCX^F$ , la matriz  $A + XCX^F$  es persimétrica. ■

### 3.3. Una nueva condición suficiente para el *PNIEP*

**Proposición 3.1.** [65]

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^F = \begin{bmatrix} D^F & B^F \\ C^F & A^F \end{bmatrix}.$$

De la proposición anterior se deduce fácilmente que una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A^F \end{bmatrix},$$

es persimétrica. Más generalmente, matrices de la forma

$$\text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_p, A_p^F, \dots, A_2^F, A_1^F\},$$

y

$$\text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_{p-1}, A_p, A_{p-1}^F, \dots, A_2^F, A_1^F\}, \text{ con } A_p \text{ persimétrica,}$$

son matrices persimétricas.

A partir de ahora, con el fin de presentar correctamente el resultado principal de esta sección (Teorema 3.3 y Teorema 3.4 más adelante), consideramos listas de números complejos  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , con la partición

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_{\frac{p_0}{2}} \cup \Lambda_{\frac{p_0}{2}} \cup \dots \cup \Lambda_1, \text{ para } p_0 \text{ par,} \\ \Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor} \cup \Lambda_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil} \cup \Lambda_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor} \cup \dots \cup \Lambda_1, \text{ para } p_0 \text{ impar,} \\ \text{con } \Lambda_0 = \{\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0p_0}\}, \lambda_{01} = \lambda_1, \\ \Lambda_k = \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, k = 1, 2, \dots, \frac{p_0}{2} (\lceil \frac{p_0}{2} \rceil), \end{array} \right. \quad (3.4)$$

donde algunas de las listas  $\Lambda_k$  pueden ser vacías. Para cada lista  $\Lambda_k$ ,  $k \neq \lceil \frac{p_0}{2} \rceil$ , asociamos la lista

$$\Gamma_k = \{\omega_k, \lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, \quad 0 \leq \omega_k \leq \lambda_1, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{p_0}{2} \left( \left\lfloor \frac{p_0}{2} \right\rfloor \right),$$

la cual es realizable por una matriz no negativa  $A_k$  de orden  $p_k + 1$ . En particular,  $A_k$  se puede escoger como  $A_k \in \mathcal{CS}_{\omega_k}$ . Para  $\Lambda_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}$ , asociamos una lista











**Teorema 3.3.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos con  $\Lambda = \bar{\Lambda}$ ,  $\lambda_1 \geq |\lambda_i|$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , y  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ . Supongamos que existe una partición de  $\Lambda$  (como la definida en (3.4))*

$$\begin{aligned}\Lambda &= \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_{\frac{p_0}{2}} \cup \Lambda_{\frac{p_0}{2}} \cup \dots \cup \Lambda_1, \text{ con} \\ \Lambda_0 &= \{\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0p_0}\}, \quad \lambda_{01} = \lambda_1, \\ \Lambda_k &= \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{p_0}{2},\end{aligned}$$

donde algunas de las listas  $\Lambda_k$  pueden ser vacías tal que las siguientes condiciones se satisfacen:

i) Para cada  $k = 1, 2, \dots, \frac{p_0}{2}$ , existe una matriz no negativa con espectro

$$\Gamma_k = \{\omega_k, \lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\} \quad 0 \leq \omega_k \leq \lambda_1.$$

ii) Existe una matriz persimétrica no negativa de orden  $p_0$ , con el espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \dots, \omega_2, \omega_1$ .

Entonces  $\Lambda$  es realizable por una matriz persimétrica no negativa.

*Demostración.* De i) sea  $A_k$  una matriz no negativa con el espectro  $\Gamma_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, \frac{p_0}{2}$ . Podemos asumir que  $A_k \in \mathcal{CS}_{\omega_k}$ . Entonces  $A_k \mathbf{e} = \omega_k \mathbf{e}$ , con  $\mathbf{e} = [1, 1, \dots, 1]^T$ . La matriz

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_{\frac{p_0}{2}} \oplus A_{\frac{p_0}{2}}^F \oplus \dots \oplus A_2^F \oplus A_1^F,$$

es persimétrica no negativa con espectro

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_{\frac{p_0}{2}} \cup \Gamma_{\frac{p_0}{2}} \cup \dots \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_1.$$

Sea  $X$  la matriz en (3.6). Entonces de (3.8), (3.9), y (3.10),  $X^F X$  es una matriz diagonal persimétrica no negativa con diagonal principal positiva. Entonces, del Lema 3.2, podemos cambiar  $X$  por  $\tilde{X}$ , de modo que  $\tilde{X}^F \tilde{X} = sI_{p_0}$ ,  $s > 0$ . Observe que  $\tilde{X}$  es todavía una matriz de autovectores de  $A$ .

Ahora, de ii) sea  $B = \Omega + C\tilde{X}^F \tilde{X} = \Omega + sCI_{p_0}$  una matriz persimétrica no negativa de orden  $p_0$  con el espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \dots, \omega_2, \omega_1.$$

Entonces  $C = \frac{1}{s}(B - \Omega)$  es persimétrica no negativa, donde

$$\Omega = \text{diag}\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \dots, \omega_2, \omega_1\}.$$

Por tanto, del Teorema 3.2,  $M = A + \tilde{X}C\tilde{X}^F$  es una matriz persimétrica con el espectro  $\Lambda$ , y puesto que  $A, \tilde{X}, C$  son matrices no negativas, entonces  $M$  es también no negativa. ■

Ahora consideramos el caso  $p_0$  impar:

**Teorema 3.4.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos con  $\Lambda = \bar{\Lambda}$ ,  $\lambda_1 \geq |\lambda_i|$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , y  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ . Supongamos que existe una partición de  $\Lambda$  (como la definida en (3.4))*

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor} \cup \Lambda_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil} \cup \Lambda_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor} \cup \dots \cup \Lambda_1, \quad \text{con} \\ \Lambda_0 &= \{\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{p_0}\}, \quad \lambda_{01} = \lambda_1, \\ \Lambda_k &= \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, \quad k = 1, \dots, \left\lfloor \frac{p_0}{2} \right\rfloor, \end{aligned}$$

donde algunas de las listas  $\Lambda_k$  pueden ser vacías tal que las siguientes condiciones se satisfacen:

i) Para cada  $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor$ , existe una matriz no negativa con espectro

$$\Gamma_k = \{\omega_k, \lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, \quad 0 \leq \omega_k \leq \lambda_1,$$

y para  $k = \lceil \frac{p_0}{2} \rceil$ , existe una matriz persimétrica no negativa con el espectro  $\Gamma_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}$  y autovector de Perron  $\mathbf{y}_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil} \geq 0$ , satisfaciendo  $\mathbf{y}_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}^F \mathbf{y}_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil} > 0$ .

ii) Existe una matriz persimétrica no negativa de orden  $p_0$ , con el espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \omega_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \dots, \omega_2, \omega_1$ .

Entonces  $\Lambda$  es realizable por una matriz persimétrica no negativa.

*Demostración.* De i) sean  $A_k$  una matriz no negativa con el espectro  $\Gamma_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor$ , podemos asumir que  $A_k \in \mathcal{CS}_{\omega_k}$ . Entonces  $A_k \mathbf{e} = \omega_k \mathbf{e}$ , donde  $\mathbf{e} = [1, 1, \dots, 1]^T$  y  $A_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}$  una matriz persimétrica no negativa con el espectro  $\Gamma_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}$ . La matriz

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor} \oplus A_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil} \oplus A_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}^F \oplus \dots \oplus A_2^F \oplus A_1^F,$$

es persimétrica no negativa con espectro

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor} \cup \Gamma_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil} \cup \Gamma_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor} \cup \dots \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_1.$$

Sea  $X$  la matriz en (3.7). Entonces, de (3.8), (3.11), y (3.12),  $X^F X$  es una matriz diagonal persimétrica no negativa. Entonces del Lema 3.3, podemos cambiar  $X$  por  $\tilde{X}$ , de modo que  $\tilde{X}^F \tilde{X} = sI_{p_0}$ ,  $s > 0$ . Observe que  $\tilde{X}$  es todavía una matriz de autovectores de  $A$ .

Ahora, de *ii*) sea  $B = \Omega + C\tilde{X}^F\tilde{X} = \Omega + sCI_{p_0}$  una matriz persimétrica no negativa de orden  $p_0$  con el espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \omega_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \dots, \omega_2, \omega_1.$$

Entonces  $C = \frac{1}{s}(B - \Omega)$  es persimétrica no negativa, donde

$$\Omega = \text{diag}\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \omega_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \dots, \omega_2, \omega_1\}.$$

Por tanto, del Teorema 3.2,  $M = A + \tilde{X}C\tilde{X}^F$  es una matriz persimétrica con el espectro  $\Lambda$ , y puesto que  $A, \tilde{X}, C$  son matrices no negativas, entonces  $M$  es también no negativa. ■

### 3.4. Matrices persimétricas no negativas con autovalores y entradas diagonales prescritas

Como se ha dicho antes, para aplicar los Teorema 3.3 y Teorema 3.4, necesitamos conocer condiciones bajo las cuales exista una matriz persimétrica no negativa de orden  $p_0$  con espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales

$$\begin{aligned} &\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \dots, \omega_2, \omega_1, \quad \text{para } p_0 \text{ par, o} \\ &\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \omega_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \dots, \omega_2, \omega_1, \quad \text{para } p_0 \text{ impar.} \end{aligned}$$

Este es un problema abierto difícil, para el cual, hasta ahora, solo tenemos respuestas parciales.

Para  $p_0 = 2$ , sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$  con  $\lambda_1 \geq \lambda_2$  y sea  $\omega_1 \geq 0$ . Entonces es necesario y suficiente que  $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\omega_1$ . En efecto, la matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} & 1 \\ \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)^2 & \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \end{bmatrix},$$

es persimétrica no negativa con espectro  $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ . También tenemos la matriz

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix},$$

la cual es simétrica y persimétrica.

Para  $p_0 = 3$ , tenemos

**Lema 3.4.** *Los números  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y  $\omega_1, \omega_2, \omega_1 \geq 0$  tales que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2\omega_1 + \omega_2$  son, respectivamente, los autovalores y las entradas diagonales de una matriz persimétrica no negativa, si se satisfacen las condiciones:*

$$i) \omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2 \geq \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3,$$

$$ii) \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + 2\omega_1\omega_2^2 \geq \omega_2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3).$$

*Demostración.* Supongamos que las condiciones *i)* y *ii)* se satisfacen. Entonces

$$B = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 1 \\ b & \omega_2 & 0 \\ d & b & \omega_1 \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

con

$$\begin{cases} d = \omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2 - (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3), \\ b = \sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + 2\omega_1\omega_2^2 - \omega_2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)}, \end{cases} \quad (3.14)$$

es persimétrica no negativa con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Basta igualar los coeficientes del polinomio característico de  $B$  con las funciones simétricas elementales asociadas a  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . ■

En el Capítulo 5, vía un resultado de Farahat y Ledermann [12], mostraremos una nueva condición suficiente para construir matrices persimétricas no negativas con autovalores y entradas diagonales prescritas, la cual es independiente de la condición suficiente dada en el Lema 3.4 para el caso  $n = 3$ .

### 3.5. Realizabilidad persimétrica de listas especiales

En lo que sigue, diremos que una lista  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  de números reales, es del *tipo Suleimanova* (ver [62]) si,

$$\lambda_1 > 0, \lambda_i < 0, i = 2, 3, \dots, n.$$

Una lista  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  de números complejos, es del *tipo Suleimanova complejo* (ver [3]) si,

$$\lambda_1 > 0, \operatorname{Re}\lambda_i < 0, \text{ con } |\operatorname{Re}\lambda_i| \geq |\operatorname{Im}\lambda_i|, i = 2, 3, \dots, n.$$

Una lista  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  de números complejos, es del *tipo Šmigoc* (ver [45]) si,

$$\lambda_1 > 0, \operatorname{Re}\lambda_i < 0, \text{ con } \sqrt{3} |\operatorname{Re}\lambda_i| \geq |\operatorname{Im}\lambda_i|, i = 2, 3, \dots, n.$$

En esta sección probamos que listas realizables del tipo Šmigoc (y por consiguiente, las listas del tipo Suleimanova y Suleimanova complejo) son, en particular, realizables por matrices persimétricas no negativas irreducibles.

**Teorema 3.5.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos del tipo Šmigoc, esto es,  $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ ,  $\sqrt{3} |\operatorname{Re}\lambda_i| \geq |\operatorname{Im}\lambda_i|$  con  $\Lambda = \bar{\Lambda}$ ,  $\lambda_1 \geq |\lambda_i|$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ . Entonces  $\Lambda$  es realizable por una matriz persimétrica no negativa irreducible.*

*Demostración.* Para  $n = 2$ , tenemos que  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$  debe ser una lista real con  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ . Entonces

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix},$$

es persimétrica no negativa irreducible con el espectro  $\Lambda$ .

Para  $n = 3$ , y  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  con  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2, \lambda_3 < 0$ , las condiciones *i*) y *ii*) en el Lema 3.4 son satisfechas y

$$A = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 1 \\ b & \omega_2 & 0 \\ d & b & \omega_1 \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

con  $b$  y  $d$  como en (3.14), es persimétrica no negativa irreducible con el espectro  $\Lambda$ .

Si  $\Lambda = \{\lambda_1, \alpha + i\beta, \alpha - i\beta\}$  con  $\alpha < 0$ ,  $|\alpha| \geq |\beta|$ ,  $\lambda_1 + 2\alpha \geq 0$ , entonces puesto que

$$\begin{aligned} \lambda_1 > -\alpha, & \text{ entonces } \lambda_1\alpha < -\alpha^2 \text{ y } \lambda_1\alpha + \alpha^2 < 0, \\ \lambda_1 > \beta, & \text{ entonces } \lambda_1\alpha < \alpha\beta, \\ -\alpha \geq \beta, & \text{ entonces } \alpha\beta \leq -\beta^2 \text{ y } \lambda_1\alpha + \beta^2 < 0, \end{aligned}$$

tenemos  $2\lambda_1\alpha + \alpha^2 + \beta^2 < 0$ . Entonces las condiciones *i*) y *ii*) en el Lema 3.14 son satisfechas, y la matriz en (3.15) con

$$\begin{cases} b = \sqrt{\lambda_1(\alpha^2 + \beta^2) + 2\omega_1\omega_2^2 - \omega_2(2\lambda_1\alpha + \alpha^2 + \beta^2)}, \\ d = \omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2 - (2\lambda_1\alpha + \alpha^2 + \beta^2), \end{cases} \quad (3.16)$$

es persimétrica no negativa irreducible con espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \alpha + i\beta, \alpha - i\beta\}$ .

Si  $\Lambda = \{\lambda_1, \alpha + i\beta, \alpha - i\beta\}$  con  $\alpha < 0$ ,  $\sqrt{3} |\alpha| \geq |\beta|$ ,  $\lambda_1 + 2\alpha \geq 0$ , entonces puesto que

$$\begin{aligned} 2\alpha\lambda_1 \leq -4\alpha^2 \quad \text{entonces} \quad 2\alpha\lambda_1 + 4\alpha^2 \leq 0, \\ -\sqrt{3}\alpha \geq \beta \quad \text{entonces} \quad -3\alpha^2 + \beta^2 \leq 0, \end{aligned}$$

tenemos  $2\lambda_1\alpha + \alpha^2 + \beta^2 \leq 0$ . Así las condiciones *i)* y *ii)* en el Lema 3.4 son satisfechas, y la matriz en (3.15) con  $b$  y  $d$  como en (3.16), es persimétrica no negativa irreducible con el espectro  $\Lambda$ .

Ahora, supongamos que listas del tipo Šmigoc, con  $k - 2$  números,  $4 \leq k \leq n$ , son realizables por matrices persimétricas no negativas irreducibles. Entonces sea

$$\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\} \quad \text{con} \quad \operatorname{Re}\lambda_i < 0, \quad \sqrt{3} |\operatorname{Re}\lambda_i| \geq |\operatorname{Im}\lambda_i|, \quad i = 2, \dots, k.$$

Tomemos la partición

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \{\lambda_1, \lambda_i, \lambda_j\}, \quad \Lambda_2 = \Lambda - \Lambda_0, \quad \Lambda_1 = \Lambda_3 = \emptyset, \quad \text{con} \\ \Gamma_2 &= \{\lambda_1 + \lambda_i + \lambda_j\} \cup \Lambda_2, \quad \Gamma_1 = \Gamma_3 = \{0\}, \end{aligned}$$

donde  $\lambda_i, \lambda_j$  son reales o complejos conjugados. De la hipótesis de inducción,  $\Gamma_2$  es realizable por una matriz persimétrica no negativa irreducible  $A_2$ . Entonces

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & A_2 & \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

es una matriz persimétrica no negativa. Ahora, del Lema 3.4, podemos computar una matriz persimétrica no negativa  $B$ , con el espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales  $0, \lambda_1 + \lambda_i + \lambda_j, 0$ ,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b & \lambda_1 + \lambda_i + \lambda_j & 0 \\ d & b & 0 \end{bmatrix},$$

donde

$$b = \sqrt{-(\lambda_1 + \lambda_i)(\lambda_1 + \lambda_j)(\lambda_i + \lambda_j)}, \quad d = -(\lambda_1\lambda_i + \lambda_1\lambda_j + \lambda_i\lambda_j).$$

Por otro lado, puesto que  $A_2$  es no negativa irreducible, existe un autovector  $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_{k-2}]^T > 0$  tal que

$$A_2\mathbf{v} = (\lambda_1 + \lambda_i + \lambda_j)\mathbf{v}, \quad \mathbf{v}^F \mathbf{v} > 0.$$

Por tanto, del Teorema 3.4,

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha v_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha v_{k-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{1}{\mathbf{v}^F \mathbf{v}}}, \quad \tilde{X}^F \tilde{X} = I_3, \quad C = B - \Omega,$$

y  $A + \tilde{X}C\tilde{X}^F$  es una matriz persimétrica no negativa con espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ . Además,  $A + \tilde{X}C\tilde{X}^F$  es irreducible ya que su grafo es fuertemente conectado. ■

### 3.6. Ejemplos

**Ejemplo 3.2.** Queremos construir una matriz persimétrica no negativa con espectro

$$\Lambda = \{13, -3, -4, -2 + 3i, -2 - 3i, -2 + 3i, -2 - 3i, 1 + i, 1 - i\}.$$

Entonces consideramos la partición

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \{13, 1 + i, 1 - i\}, \quad \Lambda_1 = \{-2 + 3i, -2 - 3i\} = \Lambda_3, \quad \Lambda_2 = \{-3, -4\}, \\ \Gamma_1 &= \{4, -2 + 3i, -2 - 3i\} = \Gamma_3, \quad \Gamma_2 = \{7, -3, -4\}. \end{aligned}$$

Computamos las matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{13}{4} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = A_1^F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ \frac{13}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2\sqrt{21} & 0 & 0 \\ 37 & 2\sqrt{21} & 0 \end{bmatrix},$$

con espectros  $\Gamma_1 = \Gamma_3$ , y  $\Gamma_2$ , respectivamente.

Observe que las matrices  $A_1$  y  $A_3$  tienen autovectores de Perron  $[1, 1, 1]^T$  y  $[1, \frac{13}{16}, 1]^T$  respectivamente, y la matriz  $A_2$  es persimétrica con autovector de Perron  $[\frac{1}{7}, \frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}, 1]^T$ .

Del Lema 3.4, podemos construir una matriz persimétrica no negativa

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ \sqrt{222} & 7 & 0 \\ 44 & \sqrt{222} & 4 \end{bmatrix},$$

con espectro  $\Lambda_0 = \{13, 1 + i, 1 - i\}$  y entradas diagonales 4, 7, 4. Entonces

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{13}{16} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X^F = \begin{bmatrix} 1 & \frac{13}{16} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$X^F X = \begin{bmatrix} \frac{45}{16} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{110}{343} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{45}{16} \end{bmatrix},$$

y del Lema 3.3, con  $\alpha_2 = \sqrt{\frac{343}{110} \frac{45}{16}} = \frac{21}{88} \sqrt{154}$ , computamos

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}\alpha_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7}\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{13}{16} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{tal que} \quad \tilde{X}^F \tilde{X} = \frac{45}{16} I_3,$$

y  $C = \frac{16}{45}(B - \Omega)$ , donde  $\Omega = \text{diag}\{4, 7, 4\}$ . Finalmente

$$\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_1^F \end{bmatrix} + \tilde{X} C \tilde{X}^F,$$

es la matriz persimétrica no negativa requerida.

**Ejemplo 3.3.** Queremos construir una matriz persimétrica no negativa con espectro

$$\Lambda = \{12, -2, -1 \pm 2i, -1 \pm 2i, -1 \pm 2i, -1 \pm 2i\}.$$

Entonces consideramos la partición

$$\Lambda_0 = \{12, -2\}, \quad \Lambda_1 = \{-1 + 2i, -1 - 2i, -1 + 2i, -1 - 2i\} = \Lambda_2,$$

$$\Gamma_1 = \{5, -1 + 2i, -1 - 2i, -1 + 2i, -1 - 2i\} = \Gamma_2.$$

Computamos las matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{6}{5} & \frac{3}{5} & \frac{6}{5} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = A_1^F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

con espectros  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  respectivamente.

Observe que las matrices  $A_1$  y  $A_2$  tienen autovectores de Perron  $[1, 1, 1, 1, 1]^T$  y  $[1, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 1]^T$ , respectivamente.

Sea  $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$  una matriz persimétrica no negativa con espectro  $\Lambda_0 = \{12, -2\}$  y entradas diagonales  $\{5, 5\}$ . Entonces

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X^F = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X^F X = 4I_2,$$

$C = \frac{1}{4}(B - \Omega)$ , donde  $\Omega = \text{diag}\{5, 5\}$ . Finalmente

$$\begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_1^F \end{bmatrix} + X C X^F,$$

es la matriz persimétrica no negativa requerida.

## CAPÍTULO

### 4

# MATRICES BISIMÉTRICAS NO-NEGATIVAS CON ESPECTRO PRESCRITO

Una matriz  $A \in M_n$  se dice ser *bisimétrica* si ella es simétrica y persimétrica, esto es, si  $A^T = A$  y  $A^F = A$ .

En este capítulo consideramos el *problema inverso de autovalores para matrices bisimétricas no negativas* (en inglés *Bisymmetric Nonnegative Inverse Eigenvalue Problem, BNIEP*). Las matrices con más de una simetría son comunes en ciencias e ingenierías. Las propiedades espectrales de estas matrices han sido estudiadas por muchos autores [14, 29, 40].

Nuestro aporte al estudio del *BNIEP* consiste en la obtención de una condición suficiente para la existencia y construcción de matrices bisimétricas no negativas con espectro prescrito. A diferencia del caso persimétrico, el Teorema 1.5 (versión simétrica del Teorema de Rado) será suficiente para generar estas condiciones.

Los resultados en este capítulo forman parte de la publicación [21] (A. I. Julio, R. L. Soto, Persymmetric and bisymmetric nonnegative inverse eigenvalue problem, *Linear Algebra and Appl.* 469 (2015) 130-152).





**Lema 4.1.** Si  $A$  y  $B$  son matrices bisimétricas, entonces i)  $aA + bB$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ , ii)  $A^{-1}$ , si existe, iii)  $A^T$ , iv)  $A^F$  y v)  $JA$  son bisimétricas. Además,  $JA = AJ$ .

**Proposición 4.1.** Sea  $A$  una matriz simétrica con  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . Entonces

- i)  $A^F$  es simétrica,
- ii)  $A^F(\mathbf{x}^T)^F = \lambda(\mathbf{x}^T)^F$ ,
- iii)  $J\mathbf{x}$  es un autovector de  $JAJ$ .

*Demostración.* i)  $(A^F)^T = (A^T)^F = A^F$ .

ii) Si  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ , entonces  $\mathbf{x}^T A = \lambda\mathbf{x}^T$  y  $A^F(\mathbf{x}^T)^F = \lambda(\mathbf{x}^T)^F$ .

iii)  $(JAJ)J\mathbf{x} = JA\mathbf{x} = \lambda J\mathbf{x}$ . ■

**Definición 4.1.** Un vector  $n$ -dimensional  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  se dice simétrico si  $J\mathbf{x} = \mathbf{x}$ , esto es, si  $x_i = x_{n-i+1}$ , y  $\mathbf{x}$  se dice anti-simétrico si  $J\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ , esto es, si  $x_i = -x_{n-i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Se ha demostrado en [5] que  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  autovectores de una matriz bisimétrica de orden  $n$  son simétricos, mientras que  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  de ellos son anti-simétricos. Este resultado junto al Teorema 1.5 (versión simétrica del Teorema de Rado), son los ingredientes principales para dar una condición suficiente para que el *BNIEP* tenga una solución.

**Proposición 4.2.** Si  $\mathbf{x}$  es un vector simétrico, entonces  $\mathbf{x}^T = \mathbf{x}^F$ .

*Demostración.* Si  $J\mathbf{x} = \mathbf{x}$ , entonces  $\mathbf{x}^T = \mathbf{x}^T J = \mathbf{x}^F$ . ■

De ahora en adelante, con el propósito de presentar el resultado principal de esta sección (Teorema 4.2 y Teorema 4.3 más adelante), consideramos listas de números reales  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  con la siguiente partición

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_{\frac{p_0}{2}} \cup \Lambda_{\frac{p_0}{2}} \cup \dots \cup \Lambda_1, \quad p_0 \text{ par}, \\
 \Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor} \cup \Lambda_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil} \cup \Lambda_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor} \cup \dots \cup \Lambda_1, \quad p_0 \text{ impar}, \\
 \text{con } \Lambda_0 = \{\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0p_0}\}, \quad \lambda_{01} = \lambda_1, \\
 \Lambda_k = \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{p_0}{2} (\lceil \frac{p_0}{2} \rceil),
 \end{array} \right. \quad (4.3)$$

donde algunas de las listas  $\Lambda_k$  pueden ser vacías. Para cada lista  $\Lambda_k$ ,  $k \neq \lceil \frac{p_0}{2} \rceil$ , asociamos una lista

$$\Gamma_k = \{\omega_k, \lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, \quad 0 \leq \omega_k \leq \lambda_1, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{p_0}{2} \left( \left\lfloor \frac{p_0}{2} \right\rfloor \right),$$

la cual es realizable por una matriz simétrica no negativa  $A_k$  de orden  $p_k + 1$ .

Para  $\Lambda_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}$  asociamos una lista  $\Gamma_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}$ , la cual es realizable por una matriz bisimétrica no negativa  $A_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}$  de orden  $p_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil} + 1$ . Entonces las matrices diagonales en bloques

$$\left\{ \begin{array}{l}
 A = \text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_{\frac{p_0}{2}}, A_{\frac{p_0}{2}}^F, \dots, A_2^F, A_1^F\}, \quad \text{para } p_0 \text{ par, y} \\
 A = \text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, A_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}, A_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}^F, \dots, A_2^F, A_1^F\}, \quad \text{para } p_0 \text{ impar,}
 \end{array} \right. \quad (4.4)$$

son bisimétricas no negativas con espectros

$$\begin{aligned}
 \sigma(A) &= \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_{\frac{p_0}{2}} \cup \Gamma_{\frac{p_0}{2}} \cup \dots \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_1, \quad \text{y} \\
 \sigma(A) &= \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor} \cup \Gamma_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil} \cup \Gamma_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor} \cup \dots \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_1,
 \end{aligned}$$

respectivamente.

Sea  $X$  una matriz de orden  $n \times p_0$ , cuyos vectores columnas son autovectores no negativos de la matriz  $A$  en (4.4) esto es, para  $p_0$  par



donde

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = [x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{k(p_k+1)}]^T \geq 0, \quad \|\mathbf{x}_k\| = 1, \quad k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor, \\ \mathbf{x}_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil} = J\mathbf{x}_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil} \geq 0, \quad \|\mathbf{x}_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}\| = 1, \quad k = \lceil \frac{p_0}{2} \rceil, \\ (\mathbf{x}_k^T)^F = [x_{k(p_k+1)}, \dots, x_{k2}, x_{k1}]^T \geq 0, \quad \|(\mathbf{x}_k^T)^F\| = 1, \quad k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor, \end{cases} \quad (4.9)$$

son tales que

$$\begin{cases} A_k \mathbf{x}_k = \omega_k \mathbf{x}_k, \quad k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor, \\ A_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil} \mathbf{x}_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil} = \omega_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil} \mathbf{x}_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}, \quad k = \lceil \frac{p_0}{2} \rceil, \\ A_k^F (\mathbf{x}_k^T)^F = \omega_k (\mathbf{x}_k^T)^F, \quad k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor. \end{cases} \quad (4.10)$$

El siguiente resultado es claro

**Lema 4.2.** *Sea  $X$  como en (4.5) y (4.8). Entonces  $X^T = X^F$ .*

Ahora, presentamos el resultado principal de esta sección. Primero consideramos el caso  $p_0$  par:

**Teorema 4.2.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números reales con  $\lambda_1 \geq |\lambda_i|$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , y  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ . Supongamos que existe una partición de  $\Lambda$  (como la definida en (4.3))*

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_{\frac{p_0}{2}} \cup \Lambda_{\frac{p_0}{2}} \cup \dots \cup \Lambda_1, \quad \text{con} \\ \Lambda_0 &= \{\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0p_0}\}, \quad \lambda_{01} = \lambda_1, \\ \Lambda_k &= \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{p_0}{2}, \end{aligned}$$

donde algunas de las listas  $\Lambda_k$  pueden ser vacías tal que las siguientes condiciones se satisfacen:

i) Para cada  $k = 1, 2, \dots, \frac{p_0}{2}$ , existe una matriz simétrica no negativa con espectro

$$\Gamma_k = \{\omega_k, \lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, \quad 0 \leq \omega_k \leq \lambda_1.$$

ii) Existe una matriz bisimétrica no negativa de orden  $p_0$ , con el espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \dots, \omega_2, \omega_1$ .

Entonces  $\Lambda$  es realizable por una matriz bisimétrica no negativa.

*Demostración.* De i) sea  $A_k$  una matriz simétrica no negativa con el espectro  $\Gamma_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, \frac{p_0}{2}$ . Entonces

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_{\frac{p_0}{2}} \oplus A_{\frac{p_0}{2}}^F \oplus \dots \oplus A_2^F \oplus A_1^F,$$

es una matriz bisimétrica no negativa con espectro

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_{\frac{p_0}{2}} \cup \Gamma_{\frac{p_0}{2}} \cup \dots \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_1.$$

Sea  $X$  la matriz en (4.5), donde (4.6) y (4.7) se tienen.

De ii) sea  $B = \Omega + C$  una matriz bisimétrica no negativa con el espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \dots, \omega_2, \omega_1,$$

donde  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \dots, \omega_2, \omega_1\}$ . Entonces  $C = B - \Omega$  es bisimétrica no negativa, y del Teorema 1.5, la matriz  $A + XCX^T$  es simétrica no negativa con el espectro  $\Lambda$ . Además, del Lema 4.2,  $X^T = X^F$ , y

$$(A + XCX^T)^F = A^F + (X^T)^F C^F X^F = A + XCX^T.$$

Por tanto,  $A + XCX^T$  es una matriz bisimétrica no negativa con el espectro  $\Lambda$ . ■

Para  $p_0$  impar tenemos:

**Teorema 4.3.** Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números reales con  $\lambda_1 \geq |\lambda_i|$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , y  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ . Supongamos que existe una partición de  $\Lambda$  (como la definida en (4.3))

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor} \cup \Lambda_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil} \cup \Lambda_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor} \cup \dots \cup \Lambda_1, \quad \text{con}$$

$$\Lambda_0 = \{\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{p_0}\}, \quad \lambda_{01} = \lambda_1,$$

$$\Lambda_k = \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, \quad k = 1, \dots, \left\lfloor \frac{p_0}{2} \right\rfloor,$$

donde algunas de las listas  $\Lambda_k$  pueden ser vacías, tal que las siguientes condiciones se satisfacen:

*i)* Para cada  $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor$ , existe una matriz simétrica no negativa con espectro  $\Gamma_k = \{\omega_k, \lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{k_{p_k}}\}$ ,  $0 \leq \omega_k \leq \lambda_1$ , y para  $k = \lceil \frac{p_0}{2} \rceil$ , existe una matriz bisimétrica no negativa con el espectro  $\Gamma_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}$ .

*ii)* Existe una matriz bisimétrica no negativa de orden  $p_0$ , con el espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \omega_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \dots, \omega_2, \omega_1$ .

Entonces  $\Lambda$  es realizable por una matriz bisimétrica no negativa.

*Demostración.* De *i)* sean  $A_k$  una matriz simétrica no negativa con el espectro  $\Gamma_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor$ , y  $A_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}$  una matriz bisimétrica no negativa con el espectro  $\Gamma_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}$ . Entonces

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor} \oplus A_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil} \oplus A_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}^F \oplus \dots \oplus A_2^F \oplus A_1^F,$$

es una matriz bisimétrica no negativa con espectro

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor} \cup \Gamma_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil} \cup \Gamma_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor} \cup \dots \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_1.$$

Sea  $X$  la matriz dada en (4.8), donde (4.9) y (4.10) se tienen.

De *ii)* sea  $B = \Omega + C$  una matriz bisimétrica no negativa con el espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \omega_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \dots, \omega_2, \omega_1,$$

donde  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \omega_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \dots, \omega_2, \omega_1\}$ . Entonces  $C = B - \Omega$  es bisimétrica no negativa, y del Teorema 1.4, la matriz  $A + XCX^T$  es simétrica no negativa con el espectro  $\Lambda$ . Además, del Lema 4.2,  $X^T = X^F$ , y

$$(A + XCX^T)^F = A^F + (X^T)^F C^F X^F = A + XCX^T.$$

Por tanto,  $A + XCX^T$  es una matriz bisimétrica no negativa con el espectro  $\Lambda$ . ■

### 4.3. Matrices bisimétricas no negativas con autovalores y entradas diagonales prescritas

Para usar apropiadamente los Teorema 4.2 y Teorema 4.3 necesitamos conocer condiciones bajo las cuales exista una matriz bisimétrica no negativa con

autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p_0}$  y entradas diagonales

$$\begin{aligned} &\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \dots, \omega_2, \omega_1, \text{ para } p_0 \text{ par, o} \\ &\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \omega_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \dots, \omega_2, \omega_1, \text{ para } p_0 \text{ impar.} \end{aligned}$$

Este es también un problema difícil, para el cual solo damos algunas respuestas parciales.

Para  $p_0 = 2$ , es necesario y suficiente que  $\lambda_1 \geq \omega_1 = \omega_2$  y  $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\omega_1$ . Entonces

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix},$$

es bisimétrica no negativa con las propiedades requeridas.

Para  $p_0 = 3$ , usaremos el siguiente resultado debido a Fiedler [13]:

**Lema 4.3.** [13] *Los números reales  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$  y  $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \omega_3 \geq 0$ , son los autovalores y entradas diagonales, respectivamente, de una matriz simétrica no negativa si y solo si*

$$\begin{cases} \lambda_1 \geq \omega_1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 \geq \omega_1 + \omega_2, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \\ \lambda_2 \leq \omega_1. \end{cases} \quad (4.11)$$

En [52, Nota 3.3], para las condiciones (4.11), los autores construyeron la siguiente matriz simétrica no negativa:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 & \sqrt{\frac{\alpha - \omega_3}{2\alpha - \omega_2 - \omega_3}} s & \sqrt{\frac{\alpha - \omega_2}{2\alpha - \omega_2 - \omega_3}} s \\ \sqrt{\frac{\alpha - \omega_3}{2\alpha - \omega_2 - \omega_3}} s & \omega_2 & \sqrt{(\alpha - \omega_2)(\alpha - \omega_3)} \\ \sqrt{\frac{\alpha - \omega_2}{2\alpha - \omega_2 - \omega_3}} s & \sqrt{(\alpha - \omega_2)(\alpha - \omega_3)} & \omega_3 \end{bmatrix},$$

con

$$\alpha = \lambda_1 + \lambda_2 - \omega_1 \text{ y } s = \sqrt{(\lambda_1 - \alpha)(\lambda_1 - \omega_1)},$$

la cual, para  $\omega_2 = \omega_3$ , se convierte en

$$B = \begin{bmatrix} \omega_1 & \frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{s}{\sqrt{2}} \\ \frac{s}{\sqrt{2}} & \omega_2 & \alpha - \omega_2 \\ \frac{s}{\sqrt{2}} & \alpha - \omega_2 & \omega_2 \end{bmatrix},$$

$$\text{con } \alpha = \lambda_1 + \lambda_2 - \omega_1 \text{ y } s = \sqrt{(\lambda_1 - \alpha)(\lambda_1 - \omega_1)}.$$

Entonces, por permutaciones sobre  $B$ , obtenemos

$$B_1 = \begin{bmatrix} \omega_2 & \frac{s}{\sqrt{2}} & \alpha - \omega_2 \\ \frac{s}{\sqrt{2}} & \omega_1 & \frac{s}{\sqrt{2}} \\ \alpha - \omega_2 & \frac{s}{\sqrt{2}} & \omega_2 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

la cual es bisimétrica no negativa con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , y entradas diagonales  $\omega_2, \omega_1, \omega_2$ .

Usando un razonamiento similar al de los autores en [52, Nota 3.3], para las condiciones (4.11), construimos la matriz simétrica no negativa

$$B' = \begin{bmatrix} \omega_1 & \beta - \omega_1 & \frac{t}{\sqrt{2}} \\ \beta - \omega_1 & \omega_1 & \frac{t}{\sqrt{2}} \\ \frac{t}{\sqrt{2}} & \frac{t}{\sqrt{2}} & \omega_2 \end{bmatrix},$$

con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , donde

$$\beta = \lambda_1 + \lambda_3 - \omega_2, \quad t = \sqrt{(\lambda_1 - \beta)(\lambda_1 - \omega_2)}.$$

Entonces, por permutaciones sobre  $B'$ , obtenemos

$$B_2 = \begin{bmatrix} \omega_1 & \frac{t}{\sqrt{2}} & \beta - \omega_1 \\ \frac{t}{\sqrt{2}} & \omega_2 & \frac{t}{\sqrt{2}} \\ \beta - \omega_1 & \frac{t}{\sqrt{2}} & \omega_1 \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

la cual es bisimétrica no negativa con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \omega_1$ .

#### 4.4. Realizabilidad bisimétrica de listas especiales

En esta sección probamos que listas realizables del tipo Suleimanova [62] son, en particular, realizables por matrices bisimétricas no negativas.

**Teorema 4.4.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números reales del tipo Suleimanova, esto es,  $\lambda_1 > 0 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ , con  $\lambda_1 \geq |\lambda_i|$ ,  $i = 2, \dots, n$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ . Entonces  $\Lambda$  es realizable por una matriz bisimétrica no negativa.*

*Demostración.* Sea  $n = 2$ , y  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ , con  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ , entonces

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix},$$

es bisimétrica no negativa con espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ .

Sea  $n = 3$ , y  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ . Si  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2, \lambda_3 < 0$ , del Lema 4.3, y las matrices en (4.12) y (4.13), tenemos que

$$A = \begin{bmatrix} \omega_2 & \frac{s}{\sqrt{2}} & \alpha - \omega_2 \\ \frac{s}{\sqrt{2}} & \omega_1 & \frac{s}{\sqrt{2}} \\ \alpha - \omega_2 & \frac{s}{\sqrt{2}} & \omega_2 \end{bmatrix},$$

con  $\alpha = \lambda_1 + \lambda_2 - \omega_1$ ,  $s = \sqrt{(\lambda_1 - \alpha)(\lambda_1 - \omega_1)}$ .

y

$$A' = \begin{bmatrix} \omega_1 & \frac{t}{\sqrt{2}} & \beta - \omega_1 \\ \frac{t}{\sqrt{2}} & \omega_2 & \frac{t}{\sqrt{2}} \\ \beta - \omega_1 & \frac{t}{\sqrt{2}} & \omega_1 \end{bmatrix},$$

con  $\beta = \lambda_1 + \lambda_3 - \omega_2$ ,  $t = \sqrt{(\lambda_1 - \beta)(\lambda_1 - \omega_2)}$

son bisimétricas no negativas con espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ .

Asumamos ahora, que listas de  $k - 2$  números reales (del tipo Suleimanova),  $4 \leq k \leq n$ , son realizables por matrices bisimétricas no negativas. Entonces, sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ , con  $\lambda_1 > 0 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$ . Tomemos la partición

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}, \quad \Lambda_2 = \{\lambda_4, \dots, \lambda_k\}, \quad \Lambda_1 = \Lambda_3 = \emptyset, \\ \Gamma_2 &= \{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_k\}, \quad \Gamma_1 = \Gamma_3 = \{0\}. \end{aligned}$$

De la hipótesis de inducción, sea  $A_2$  una matriz bisimétrica no negativa realizando  $\Gamma_2$ . Entonces

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & A_2 & \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

es bisimétrica no negativa con espectro  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ .

Además, existe una matriz bisimétrica no negativa con el espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales  $0, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, 0$ . Esta matriz es

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{s}{\sqrt{2}} & -\lambda_3 \\ \frac{s}{\sqrt{2}} & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & \frac{s}{\sqrt{2}} \\ -\lambda_3 & \frac{s}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix},$$

con  $s = \sqrt{-(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)}$ . Por tanto, del Teorema 4.3,  $\Lambda$  es realizable por una matriz bisimétrica no negativa. ■

## 4.5. Ejemplos

**Ejemplo 4.2.** Queremos construir una matriz bisimétrica no negativa con espectro  $\Lambda = \{12, -2, -2, -2, -3, -3\}$ . Entonces consideramos la partición

$$\Lambda_0 = \{12, -2\}, \quad \Lambda_1 = \{-2, -3\} = \Lambda_2, \\ \Gamma_1 = \Gamma_2 = \{5, -2, -3\}.$$

Computamos

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 0 & 3 \\ \sqrt{5} & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = A_1^F = \begin{bmatrix} 0 & 3 & \sqrt{5} \\ 3 & 0 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} & 0 \end{bmatrix},$$

con espectros  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , respectivamente, y la matriz bisimétrica

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix},$$

con espectro  $\Lambda_0 = \{12, -2\}$  y entradas diagonales 5, 5. Entonces tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{5} & \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{5} & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{5} & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & \sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}$$

y

$$A + XCX^T = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{5} & 2 \\ \sqrt{5} & 0 & 3 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 3 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 3 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 3 & 0 & \sqrt{5} \\ 2 & \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{5} & 0 \end{bmatrix},$$

es una matriz bisimétrica no negativa con el espectro  $\Lambda$ .

## CAPÍTULO

### 5

# MATRICES PERSIMÉTRICAS NO NEGATIVAS CON DIVISORES ELEMENTALES PRESCRITOS

Sea  $A \in M_n$  y sea

$$J(A) = S^{-1}AS = \text{diag}\{J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \dots, J_{n_k}(\lambda_k)\}$$

la forma canónica de Jordan de  $A$  (FCJ de  $A$ ). Las submatrices

$$J_{n_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

son llamadas los *bloques de Jordan* de  $J(A)$ . Los *divisores elementales* de  $A$  son los polinomios  $(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$ , esto es, los polinomios característicos de  $J_{n_i}(\lambda_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .

En este capítulo consideramos el *problema inverso de los divisores elementales para matrices no negativas* (en inglés *Nonnegative Inverse Elementary Divisors Problem*, *NIEDP*). Esto es, el problema de determinar condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales los polinomios  $(\lambda - \lambda_1)^{n_1}, \dots, (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$ ,

$n_1 + \dots + n_k = n$ , son los divisores elementales de una matriz no negativa  $A$  de orden  $n$  [6, 7, 11, 35, 36, 53, 58].

En [35, 36], Minc considera el *NIEDP* módulo el *problema inverso de autovalores para matrices no negativas (NIEP)*. Nuestra aproximación al *NIEDP* es de la misma forma. En particular, Minc prueba que si  $A$  es una matriz positiva diagonalizable, entonces existe una matriz positiva  $B$  con el mismo espectro que  $A$ , y con divisores elementales arbitrariamente prescritos.

En [53, 58], los autores resolvieron completamente el *NIEDP* para listas  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  satisfaciendo:

- i)  $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ , *listas no negativas*,
- ii)  $\lambda_1 > 0 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ , *listas Suleimanova*,
- iii)  $Re\lambda_i < 0$ ,  $|Re\lambda_i| \geq |Im\lambda_i|$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , *listas Suleimanova complejo*.

Condiciones suficientes son también dadas en [53, 58] para el caso general.

Nuestro aporte al estudio del *NIEDP* consiste en considerar el caso en el cual la matriz solución  $A$  es persimétrica, y resolvemos el *NIEDP* para matrices de orden  $n$  asumiendo que:

(i) Existe una partición de una lista  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  en sublistas  $\Lambda_k$ , junto con un autovalor de Perron elegido convenientemente, las cuales son realizables por matrices no negativas  $A_k$  con ciertos divisores elementales prescritos.

(ii) Existe una matriz persimétrica no negativa con entradas diagonales siendo los autovalores de Perron de las matrices  $A_k$ , con ciertos divisores elementales prescritos.

Nuestros resultados generan un procedimiento algorítmico para computar una matriz solución estructurada.

En este capítulo demostramos también que una lista realizable  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  de números complejos, con  $\lambda_1 > 0$ ,  $Re\lambda_i \leq 0$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , es siempre realizable por una matriz persimétrica no negativa; y que una matriz compañera es similar a una matriz persimétrica.

Los resultados de este capítulo constituyen esencialmente la publicación [59] (R. L. Soto, A. I. Julio, M. Salas, Nonnegative persymmetric matrices with prescribed elementary divisors, *Linear Algebra and Appl.* 483 (2015) 139-157).

## 5.1. Problema inverso de los divisores elementales para matrices persimétricas no negativas

Antes de enunciar los teoremas principales de esta sección (Teorema 5.1 y Teorema 5.2 más adelante) hacemos la siguiente nota.

**Nota 5.1.** Sean  $A, X, C$ , y  $\Omega$  como en el Teorema 3.2 y sea  $S$  no singular y particionada como  $S = [X \mid Y]$  con  $S^{-1} = \begin{bmatrix} U \\ \bar{V} \end{bmatrix}$ . Entonces

$$UX = I_r, \quad VY = I_{n-r}, \quad VX = UY = \mathbf{0}, \quad \text{y} \quad AX = X\Omega.$$

Por tanto tenemos

$$S^{-1}(A + XCX^F)S = \begin{bmatrix} \Omega + CX^FX & UAY + CX^FY \\ \mathbf{0} & VAY \end{bmatrix},$$

donde  $B = \Omega + CX^FX$  es una matriz de orden  $r$  con autovalores  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$  (los nuevos autovalores) y entradas diagonales  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  (los antiguos autovalores). Entonces de un resultado en [34, Capítulo VI, Lema 1.2], si  $B = \Omega + CX^FX$  y  $VAY$  no tienen autovalores en común,  $A + XCX^F$  es similar a  $B \oplus VAY$ .

Ahora enunciamos el resultado principal de esta sección. Primero consideramos el caso  $p_0$  par:

**Teorema 5.1.** Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos con  $\Lambda = \bar{\Lambda}$ ,  $\lambda_1 \geq |\lambda_i|$ ,  $i = 2, \dots, n$ , y  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ . Supongamos que existe una partición de  $\Lambda$  (como la definida en (3.4))

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_{\frac{p_0}{2}} \cup \Lambda_{\frac{p_0}{2}} \cup \dots \cup \Lambda_1, \quad \text{con}$$

$$\Lambda_0 = \{\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0p_0}\}, \quad \lambda_{01} = \lambda_1,$$

$$\Lambda_k = \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{p_0}{2},$$

donde algunas de las listas  $\Lambda_k$  pueden ser vacías tal que las siguientes condiciones se satisfacen:

i) Para cada  $k = 1, 2, \dots, \frac{p_0}{2}$ , existe una matriz no negativa con espectro

$$\Gamma_k = \{\omega_k, \lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, \quad 0 \leq \omega_k \leq \lambda_1,$$

y con ciertos divisores elementales prescritos.

ii) Existe una matriz persimétrica no negativa de orden  $p_0$ , con el espectro  $\Lambda_0$ , entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \dots, \omega_2, \omega_1$ , y ciertos divisores elementales prescritos.

Entonces  $\Lambda$  es realizable por una matriz persimétrica no negativa con ciertos divisores elementales prescritos.

*Demostración.* De i) sea  $A_k$  una matriz no negativa con espectro  $\Gamma_k$ , y ciertos divisores elementales prescritos,  $k = 1, 2, \dots, \frac{p_0}{2}$ . Podemos asumir que  $A_k \in \mathcal{CS}_{\omega_k}$ . Entonces  $A_k \mathbf{e} = \omega_k \mathbf{e}$ , con  $\mathbf{e} = [1, 1, \dots, 1]^T$ . La matriz

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_{\frac{p_0}{2}} \oplus A_{\frac{p_0}{2}}^F \oplus \dots \oplus A_2^F \oplus A_1^F,$$

es persimétrica no negativa con espectro

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_{\frac{p_0}{2}} \cup \Gamma_{\frac{p_0}{2}}^F \cup \dots \cup \Gamma_1,$$

y los divisores elementales prescritos asociados a las listas  $\Lambda_k$ .

Sea  $X$  (o  $\tilde{X}$ ) la matriz como en (3.6) tal que  $X^F X = sI_{p_0}$ ,  $s > 0$  (o  $\tilde{X}^F \tilde{X} = sI_{p_0}$ ,  $s > 0$ ).

Ahora, de ii) sea  $B = \Omega + CX^F X = \Omega + sCI_{p_0}$  una matriz persimétrica no negativa de orden  $p_0$  con el espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \dots, \omega_2, \omega_1.$$

Entonces  $C = \frac{1}{s}(B - \Omega)$  es persimétrica no negativa, donde

$$\Omega = \text{diag}\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \dots, \omega_2, \omega_1\}.$$

Por tanto, de la Nota 5.1 y el Teorema 3.2,  $M = A + XCX^F$  es una matriz persimétrica con el espectro  $\Lambda$ , y con los divisores elementales prescritos. Además, puesto que  $A, X$  y  $C$  son matrices no negativas, entonces  $M$  es también no negativa. ■

Ahora consideramos el caso  $p_0$  impar:

**Teorema 5.2.** Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos con  $\Lambda = \bar{\Lambda}$ ,  $\lambda_1 \geq |\lambda_i|$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , y  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ . Supongamos que existe una partición de  $\Lambda$  (como la definida en (3.4))

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor} \cup \Lambda_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil} \cup \Lambda_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor} \cup \dots \cup \Lambda_1, \quad \text{con} \\ \Lambda_0 &= \{\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{p_0}\}, \quad \lambda_{01} = \lambda_1, \\ \Lambda_k &= \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, \quad k = 1, \dots, \left\lfloor \frac{p_0}{2} \right\rfloor, \end{aligned}$$

donde algunas de las listas  $\Lambda_k$  pueden ser vacías tal que las siguientes condiciones se satisfacen:

i) Para cada  $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor$ , existe una matriz no negativa con espectro

$$\Gamma_k = \{\omega_k, \lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, \quad 0 \leq \omega_k \leq \lambda_1,$$

y con ciertos divisores elementales prescritos.

ii) Para  $k = \lceil \frac{p_0}{2} \rceil$ , existe una matriz persimétrica no negativa con el espectro  $\Gamma_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}$ , con ciertos divisores elementales prescritos, y autovector de Perron  $\mathbf{y}_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}$ , satisfaciendo  $\mathbf{y}_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}^F \mathbf{y}_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil} > 0$ .

iii) Existe una matriz persimétrica no negativa de orden  $p_0$ , con el espectro  $\Lambda_0$ , entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \omega_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \dots, \omega_2, \omega_1$ , y ciertos divisores elementales prescritos.

Entonces  $\Lambda$  es realizable por una matriz persimétrica no negativa de orden  $n$  con ciertos divisores elementales prescritos.

*Demostración.* De i) sea  $A_k$  una matriz no negativa con espectro  $\Gamma_k$ , y ciertos divisores elementales prescritos,  $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor$ . Podemos asumir que  $A_k \in \mathcal{CS}_{\omega_k}$ . Entonces  $A_k \mathbf{e} = \omega_k \mathbf{e}$ , con  $\mathbf{e} = [1, 1, \dots, 1]^T$ .

De ii) sea  $A_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}$  una matriz persimétrica no negativa con el espectro  $\Gamma_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}$ , y ciertos divisores elementales prescritos. La matriz

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor} \oplus A_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil} \oplus A_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}^F \oplus \dots \oplus A_2^F \oplus A_1^F,$$

es persimétrica no negativa con espectro

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor} \cup \Gamma_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil} \cup \Gamma_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}^F \cup \dots \cup \Gamma_2^F \cup \Gamma_1^F,$$

y los divisores elementales prescritos asociados a las listas  $\Lambda_k$ .

Sea  $X$  (o  $\tilde{X}$ ) la matriz como en (3.7) tal que  $X^F X = sI_{p_0}$ ,  $s > 0$  (o  $\tilde{X}^F \tilde{X} = sI_{p_0}$ ,  $s > 0$ ).

Ahora, de iii) sea  $B = \Omega + CX^F X = \Omega + sCI_{p_0}$  una matriz persimétrica no negativa de orden  $p_0$  con el espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales

$$\omega_1, \dots, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \omega_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \dots, \omega_1.$$

Entonces  $C = \frac{1}{s}(B - \Omega)$  es persimétrica no negativa, donde

$$\Omega = \text{diag}\{\omega_1, \dots, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \omega_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \dots, \omega_1\}.$$

Por tanto, de la Nota 5.1 y el Teorema 3.2,  $M = A + XCX^F$  es una matriz persimétrica con el espectro  $\Lambda$ , y con los divisores elementales prescritos. Además, puesto que  $A$ ,  $X$  y  $C$  son matrices no negativas, entonces  $M$  es también no negativa. ■

Para aplicar el Teorema 5.1 y el Teorema 5.2, necesitamos conocer condiciones bajo las cuales existe una matriz persimétrica no negativa de orden  $p_0$  con espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales

$$\begin{aligned} &\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \dots, \omega_2, \omega_1, \quad \text{para } p_0 \text{ par, o} \\ &\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \omega_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \dots, \omega_2, \omega_1 \quad \text{para } p_0 \text{ impar.} \end{aligned}$$

Este tema será considerado en la Sección 5.3.

## 5.2. Matrices compañeras son similares a matrices persimétricas

En esta sección probamos que una matriz compañera  $\mathcal{C}$  de orden  $n$  es similar a alguna matriz persimétrica  $\mathcal{P}$ . Este resultado, interesante en sí mismo, es útil para aumentar el número de posibles soluciones para el *NIEDP* asociadas con una lista de números complejos dada.

**Teorema 5.3.** *Sea*

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ -c_{n-1} & \cdots & -c_2 & -c_1 & -c_0 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

la matriz compañera del polinomio  $p(x) = x^n + \sum_{k=1}^n c_{k-1}x^{n-k}$ . Entonces  $\mathcal{C}$  es similar a una matriz persimétrica.

*Demostración.* Supondremos, por el momento, que  $-c_0 = \text{tr}(\mathcal{C}) = 0$ . Definimos la matriz de orden  $n$ ,  $n \geq 3$ ,

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ s_1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ s_2 & s_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & s_2 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ s_{n-2} & \ddots & s_2 & s_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Observe que  $S$  es no singular, triangular inferior y persimétrica. Entonces  $S^{-1}$  es también triangular inferior y persimétrica. Para computar  $S^{-1}$  solo necesitamos computar su primera columna. Podemos hacer esto resolviendo el sistema lineal  $S\widehat{\mathbf{s}}_1 = \mathbf{e}_1$ , donde  $\widehat{\mathbf{s}}_1 = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$  es la primera columna de  $S^{-1}$ . En este caso tenemos

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_k = -\sum_{i=1}^{k-2} a_i s_{k-(i+1)}, \quad k = 3, 4, \dots, n.$$

Entonces

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -s_1 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -s_2 & -s_1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -s_3 + s_1^2 & -s_2 & -s_1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & -s_3 + s_1^2 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ -\sum_{i=1}^{n-2} a_i s_{n-(i+1)} & \ddots & -s_3 + s_1^2 & -s_2 & -s_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

A partir de ahora usaremos una notación diferente para la inversa  $S^{-1}$ . Si para los conjuntos de índices  $\alpha, \beta \subset \{1, 2, \dots, n\}$ , denotamos la submatriz que se encuentra en las filas de  $S$  indizadas por  $\alpha$  y en las columnas de  $S$  indizadas por  $\beta$  como  $S[\alpha, \beta]$ , entonces la matriz  $S^{-1}$  en (5.3) se puede escribir como





**Corolario 5.1.** *Si en el Teorema 5.3, la matriz compañera*

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 1 \\ -c_{n-1} & \cdots & -c_2 & -c_1 & -c_0 \end{bmatrix}$$

*es no negativa, entonces la correspondiente matriz persimétrica  $\mathcal{P} = (p_{ij})$  en (5.5) es también no negativa.*

*Demostración.* Observe que las entradas  $p_{n(n-k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-2$ , en la última fila de  $\mathcal{P}$  (o las entradas en la primera columna) son obtenidas en términos de sumas ponderadas de las entradas  $-c_k$  de la matriz compañera  $\mathcal{C}$ . Entonces ellas son todas no negativas. La entrada en la posición  $(n, 1)$  es también obtenida en términos de sumas ponderadas de  $-c'_k$ s. Por tanto,  $\mathcal{P}$  en (5.5) es persimétrica no negativa. ■

En [27], Laffey y Šmigoc obtuvieron uno de los más importantes resultados para el NIEP: Ellos resolvieron el problema para listas de números complejos  $\{\lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  en el semiplano izquierdo. Esto es, ellos dan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una matriz no negativa con espectro complejo prescrito  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  satisfaciendo  $Re\lambda_i \leq 0$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , como se expresa en el siguiente

**Teorema 5.4.** [27] *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos tal que  $Re\lambda_i \leq 0$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ . Entonces  $\Lambda$  es el espectro de una matriz no negativa si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

- i)  $\Lambda = \bar{\Lambda}$ ,
- ii)  $S_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ ,
- iii)  $S_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \geq 0$ ,
- iv)  $S_1^2 \leq nS_2$ .

A continuación probamos que una lista realizable de números complejos, con  $Re\lambda_i \leq 0$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , es en particular, realizable por una matriz persimétrica no negativa.

**Teorema 5.5.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , con  $Re\lambda_i \leq 0$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , una lista realizable de números complejos. Entonces  $\Lambda$  es realizable por una matriz persimétrica no negativa.*

*Demostración.* Si  $\Lambda$  es realizable, entonces del Teorema 5.4,  $\Lambda$  es el espectro de una matriz de la forma  $\mathcal{C} + \alpha I$ , donde  $\mathcal{C}$  es un matriz compañera no negativa con  $tr(\mathcal{C}) = 0$  y  $\alpha$  es una escalar no negativo. Entonces del Teorema 5.3 y Corolario 5.1,  $\mathcal{C}$  es similar a una matriz persimétrica no negativa  $\mathcal{P}$  con autovalores  $\lambda_1 - \alpha, \lambda_2 - \alpha, \dots, \lambda_n - \alpha$ . Por tanto  $\mathcal{P} + \alpha I$  es una matriz persimétrica no negativa con el espectro  $\Lambda$ . ■

### 5.3. Matrices persimétricas no negativas con autovalores y entradas diagonales prescritas

Para aplicar los Teorema 5.1 y Teorema 5.2, necesitamos conocer condiciones bajo las cuales existe una matriz persimétrica no negativa de orden  $p_0$  con espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales

$$\begin{aligned} &\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \omega_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}, \dots, \omega_2, \omega_1, \quad \text{para } p_0 \text{ par, o} \\ &\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \omega_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \dots, \omega_2, \omega_1 \quad \text{para } p_0 \text{ impar.} \end{aligned}$$

El problema de encontrar una matriz no negativa con espectro y entradas diagonales prescritas es un problema abierto difícil, el cual, además de ser importante en sí mismo, es necesario para aplicar las diferentes versiones del Teorema de Rado tanto en el *NIEP* como en el *NIEDP*.

En esta sección, a diferencia de lo que se hizo en la Sección 3.4, usaremos un resultado, debido a Farahat y Ledermann [12], para encontrar condiciones para la existencia y construcción de matrices persimétricas no negativas con autovalores y entradas diagonales prescritas.

**Teorema 5.6.** [12] *Sean  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos, y  $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  una lista de números reales no negativos tal que*

$$\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

*Sea*

$$p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n), \quad (5.6)$$

y

$$\mu_0 = 1, \mu_1 = (x - d_1), \dots, \mu_n = (x - d_1)(x - d_2) \cdots (x - d_n),$$

con

$$p(x) = \mu_n + k_1\mu_{n-1} + \cdots + k_{n-1}\mu_1 + k_n\mu_0. \quad (5.7)$$

Si  $k_1, k_2, \dots, k_n$  son todos no positivos, entonces existe una matriz de orden  $n$  no negativa, con el espectro  $\Lambda$  y entradas diagonales  $d_1, d_2, \dots, d_n$ .

*Demostración.* Los polinomios  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$  constituyen una base del espacio de los polinomios de grado menor o igual que  $n$ . Igualando los coeficientes de  $x^{n-1}$  de los polinomios dados en (5.6) y (5.7) obtenemos que  $k_1 = 0$ . Sea

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & 1 \\ -k_n & \cdots & -k_3 & -k_2 & d_n \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Expandiendo el determinante de  $xI - A$  con respecto a la última fila se sigue que  $A$  tiene polinomio característico  $p(x)$  y por tanto  $A$  tiene el espectro  $\Lambda$ . Además, si  $k_2, k_3, \dots, k_n$  son todos no positivos,  $A$  es no negativa. ■

A continuación, computamos una matriz persimétrica no negativa  $\mathcal{P}$  con espectro y entradas diagonales prescritas para los casos  $n = 2, 3, 4, 5$ .

Para  $n = 2$ ,  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$  es una lista de números reales. Es necesario y suficiente que  $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$ , y

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix},$$

es la matriz persimétrica no negativa con espectro  $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ .

Para  $n = 3$ , tenemos

$$\begin{aligned} S^{-1}AS &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 1 & 0 \\ 0 & d_2 & 1 \\ -k_3 & -k_2 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_1 & 1 & 0 \\ s_1 & d_2 & 1 \\ -k_3 & -s_1 - k_2 & d_1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

la cual para  $s_1 = -\frac{1}{2}k_2$ , se convierte en

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} d_1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}k_2 & d_2 & 1 \\ -k_3 & -\frac{1}{2}k_2 & d_1 \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Entonces  $\mathcal{P}$  es persimétrica no negativa solo si las entradas  $k_i$ ,  $i = 2, 3$ , son no positivas. Computamos las entradas  $k_i$ ,  $i = 2, 3$ , ecuacionando los coeficientes de

$$p(x) = (x - d_1)^2(x - d_2) + k_1(x - d_1)(x - d_2) + k_2(x - d_1) + k_3,$$

y

$$p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3).$$

Entonces obtenemos

$$\begin{cases} k_1 &= 0, \\ k_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 - 2d_1d_2 - d_1^2, \\ k_3 &= -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + d_1(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) - d_1^2d_2 - d_1^3. \end{cases} \quad (5.10)$$

Observe que si  $\lambda_2, \lambda_3 \leq 0$ , entonces  $k_2, k_3 \leq 0$ .

Para  $n = 4$ ,

$$\begin{aligned} S^{-1}AS &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_1 & 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & -s_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & 1 \\ -k_4 & -k_3 & -k_2 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 & 0 \\ s_2 & s_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_1 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & d_2 & 1 & 0 \\ s_2 - d_1s_1 + d_2s_1 & 0 & d_2 & 1 \\ -k_4 - k_2s_1 - s_1^2 & -k_3 - s_2 + d_1s_1 - d_2s_1 & -k_2 - s_1 & d_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tomando  $s_1 = -\frac{1}{2}k_2$ ,  $s_2 = -\frac{1}{2}[k_3 + (d_1 - d_2)k_2]$ , obtenemos una matriz persimétrica

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} d_1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}k_2 & d_2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}k_3 & 0 & d_2 & 1 \\ \frac{1}{4}k_2^2 - k_4 & -\frac{1}{2}k_3 & -\frac{1}{2}k_2 & d_1 \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

la cual es no negativa solo si las entradas  $k_i$ ,  $i = 2, 3, 4$ , son no positivas. De

nuevo las entradas  $k_i$ ,  $i = 2, 3, 4$  son obtenidas ecuacionando los coeficientes de

$$p(x) = (x-d_1)^2(x-d_2)^2 + k_1(x-d_1)(x-d_2)^2 + k_2(x-d_1)(x-d_2) + k_3(x-d_1) + k_4,$$

y

$$p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)(x - \lambda_4).$$

Entonces obtenemos

$$\begin{cases} k_1 = 0, \\ k_2 = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 4} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} - (d_1^2 + 4d_1d_2 + d_2^2), \\ k_3 = (d_1 + d_2) \left[ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 4} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \right] - (d_1 + d_2)^3 - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 4} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \lambda_{i_3}, \\ k_4 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 - d_1^2 d_2^2 - k_2 d_1 d_2 + k_3 d_1. \end{cases} \quad (5.12)$$

Finalmente, para  $n = 5$ ,

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -s_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_2 & -s_1 & 0 & 1 & 0 \\ s_1^2 - s_3 & -s_2 & -s_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 & 1 \\ -k_5 & -k_4 & -k_3 & -k_2 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 0 & 1 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tomando  $s_1 = -\frac{1}{2}k_2$ ,  $s_2 = -\frac{1}{2}k_3 - \frac{1}{2}(d_1 - d_3)k_2$ , y  $s_3 = [-\frac{1}{2}k_3 - \frac{1}{2}(d_1 - d_3)k_2](d_1 - d_2) + \frac{3}{8}k_2^2 - \frac{1}{2}k_4$ , obtenemos una matriz persimétrica:

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} d_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}k_2 & d_2 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}k_3 & 0 & d_3 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8}k_2^2 - \frac{1}{2}k_4 & 0 & 0 & d_2 & 1 \\ \frac{1}{2}k_2k_3 - k_5 + \frac{1}{4}(d_1 - d_3)k_2^2 & \frac{1}{8}k_2^2 - \frac{1}{2}k_4 & -\frac{1}{2}k_3 & -\frac{1}{2}k_2 & d_1 \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

la cual es no negativa solo si las entradas  $k_i$ ,  $i = 2, 3, 4, 5$ , son no positivas, con  $d_1 \geq d_3$ . Computamos las entradas  $k_i$ ,  $i = 2, 3, 4, 5$ , ecuacionando los coeficientes de

$$p(x) = (x-d_1)^2(x-d_2)^2(x-d_3) + k_1(x-d_1)(x-d_2)^2(x-d_3) + k_2(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3) + k_3(x-d_1)(x-d_2) + k_4(x-d_1) + k_5,$$

y

$$p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)(x - \lambda_4)(x - \lambda_5).$$

Entonces obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = 0, \\ k_2 = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 5} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} - (d_1^2 + d_2^2 + 4d_1 d_2 + 2d_1 d_3 + 2d_2 d_3), \\ k_3 = (d_1 + d_2 + d_3)k_2 + d_2^2(2d_1 + d_3) + d_1^2(2d_2 + d_3) + 4d_1 d_2 d_3 - \\ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 5} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \lambda_{i_3}, \\ k_4 = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq 5} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \lambda_{i_3} \lambda_{i_4} - [d_1^2 d_2^2 - (d_1 + d_2)k_3 + 2d_1 d_2^2 d_3 + 2d_1^2 d_2 d_3 + \\ (d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3)k_2], \\ k_5 = d_1 k_4 + d_1^2 d_2^2 d_3 - d_1 d_2 k_3 + d_1 d_2 d_3 k_2 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5. \end{array} \right. \quad (5.14)$$

En el caso general, para matrices persimétricas de orden  $n$ , podemos computar las entradas  $k_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , del sistema lineal obtenido de (5.6) y (5.7). La solución de este sistema es dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = 0, \\ k_j = b_j - \sum_{i=1}^{j-1} l_{ji} k_i, \quad j = 2, \dots, n, \end{array} \right.$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{l} b_j = (-1)^j (t_j(\lambda_1, \dots, \lambda_n) - t_j(d_1, \dots, d_n)), \\ l_{ji} = (-1)^{j-i} t_{j-i}(d_1, \dots, d_{n-i}), \end{array} \right.$$

con

$$t_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \prod_{j=1}^k x_{i_j},$$

siendo la  $k$ -ésima función simétrica elemental de los  $n$  números  $x_1, \dots, x_n$ ,  $k \leq n$ .

#### 5.4. Listas del tipo Šmigoc son realizables por matrices persimétricas no negativas con autovalores y entradas diagonales prescritas

En esta sección probamos que para listas del tipo Šmigoc, las matrices persimétricas dadas en (5.9), (5.11) y (5.13) son siempre no negativas. Esto es, las entradas  $k_i$ ,  $i = 2, 3, 4, 5$  son siempre no positivas.

Para  $n = 3$ ,

**Lema 5.1.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \alpha + i\beta, \alpha - i\beta\}$  una lista de números complejos, con  $\alpha \leq 0$ ,  $\sqrt{3} |\alpha| \geq |\beta|$  y sean  $d_1, d_2, d_1$ , números reales no negativos tales que  $\lambda_1 + 2\alpha = 2d_1 + d_2$ , entonces las entradas  $k_i$ ,  $i = 2, 3$ , dadas en (5.10) son no positivas.*

*Demostración.*

$k_2 = 2\alpha\lambda_1 + \alpha^2 + \beta^2 - (2d_1d_2 + d_1^2)$ . Es suficiente probar que  $2\alpha\lambda_1 + \alpha^2 + \beta^2 \leq 0$ . En efecto, puesto que

$$\begin{aligned} \sqrt{3} |\alpha| \geq |\beta| &\rightarrow 3\alpha^2 \geq \beta^2 \rightarrow -3\alpha^2 + \beta^2 \leq 0, \\ \lambda_1 + 2\alpha \geq 0 &\rightarrow 2\alpha\lambda_1 + 4\alpha^2 \leq 0, \end{aligned}$$

tenemos  $2\lambda_1\alpha + \alpha^2 + \beta^2 \leq 0$ .

$$k_3 = -\lambda_1(\alpha^2 + \beta^2) + d_1(2\lambda_1\alpha + \alpha^2 + \beta^2) - (d_1^2d_2 + d_1^3) \leq 0. \quad \blacksquare$$

Para  $n = 4$ ,

**Lema 5.2.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$  una lista de números reales, con  $\text{Re}\lambda_i \leq 0$ ,  $i = 2, 3, 4$  y sean  $d_1, d_2, d_2, d_1$ , números reales no negativos tales que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 2d_1 + 2d_2$ , entonces las entradas  $k_i$ ,  $i = 2, 3, 4$ , dadas en (5.12) son no positivas.*

*Demostración.*

$$k_2 = (\lambda_1 + \lambda_3)\lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_4)\lambda_3 + (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_4 - (d_1^2 + 4d_1d_2 + d_2^2) \leq 0,$$

$$k_3 = (d_1 + d_2)[(\lambda_1 + \lambda_3)\lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_4)\lambda_3 + (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_4] - (d_1 + d_3)^3 - [\lambda_1\lambda_2(\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3\lambda_4(\lambda_1 + \lambda_2)] \leq 0,$$

$$k_4 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 - d_1^2d_2^2 - d_1(k_2d_2 - k_3). \text{ Puesto que}$$

$$k_2 d_2 - k_3 = d_1^3 + d_1 d_2 (2d_1 - d_2) - d_1 [(\lambda_1 + \lambda_3)\lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_4)\lambda_3 + (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_4] + [\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3 \lambda_4 (\lambda_1 + \lambda_2)] \geq 0, \text{ tenemos } k_4 \leq 0. \blacksquare$$

**Lema 5.3.** Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \alpha + i\beta, \alpha - i\beta\}$  una lista de números complejos, con  $\lambda_2 \leq 0$ ,  $\alpha \leq 0$ ,  $\sqrt{3} |\alpha| \geq |\beta|$  y sean  $d_1, d_2, d_2, d_1$ , números reales no negativos tales que  $\lambda_1 + \lambda_2 + 2\alpha = 2d_1 + 2d_2$ , entonces las entradas  $k_i$ ,  $i = 2, 3, 4$ , dadas en (5.12) son no positivas.

*Demostración.*

$$k_2 = \lambda_2(\lambda_1 + 2\alpha) + 2\lambda_1\alpha + \alpha^2 + \beta^2 - (d_1^2 + 4d_1d_2 + d_2^2), \text{ del Lema 5.1, tenemos que } 2\lambda_1\alpha + \alpha^2 + \beta^2 \leq 0. \text{ Por tanto } k_2 \leq 0,$$

$$k_3 = (d_1 + d_2)[\lambda_2(\lambda_1 + 2\alpha) + 2\lambda_1\alpha + \alpha^2 + \beta^2] - (d_1 + d_2)^3 - [2\lambda_1\lambda_2\alpha + (\alpha^2 + \beta^2)(\lambda_1 + \lambda_2)] \leq 0,$$

$$k_4 = \lambda_1\lambda_2(\alpha^2 + \beta^2) - d_1^2 d_2^2 - d_1(k_2 d_2 - k_3). \text{ Puesto que}$$

$$k_2 d_2 - k_3 = d_1^3 + d_1 d_2 (2d_1 - d_2) - d_1(\lambda_2(\lambda_1 + 2\alpha) + 2\lambda_1\alpha + \alpha^2 + \beta^2) + (2\lambda_1\lambda_2\alpha + (\alpha^2 + \beta^2)(\lambda_1 + \lambda_2)) \geq 0, \text{ tenemos } k_4 \leq 0. \blacksquare$$

Para  $n = 5$ ,

**Lema 5.4.** Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\}$  una lista de números reales, con  $\text{Re}\lambda_i \leq 0$ ,  $i = 2, 3, 4, 5$ , y sean  $d_1, d_2, d_3, d_2, d_1$ , números reales no negativos, con  $d_1 \geq d_3$  tales que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 2d_1 + 2d_2 + d_3$ , entonces las entradas  $k_i$ ,  $i = 2, 3, 4, 5$ , dadas en (5.14) son no positivas.

*Demostración.*

$$k_2 = (\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4)\lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_5)\lambda_3 + (\lambda_1 + \lambda_5)\lambda_4 + (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_5 - (d_1^2 + d_2^2 + 4d_1d_2 + 2d_1d_3 + 2d_2d_3) \leq 0.$$

$$k_3 = (d_1 + d_2 + d_3)[(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4)\lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_5)\lambda_3 + (\lambda_1 + \lambda_5)\lambda_4 + (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_5] - [(d_1 + d_2)^3 + 2d_1^2 d_3 + 4d_1 d_2 d_3 + 2d_1 d_3^2 + 2d_2^2 d_3 + 2d_2 d_3^2] - [\lambda_2 \lambda_3 (\lambda_1 + \lambda_4) + \lambda_2 \lambda_4 (\lambda_1 + \lambda_5) + \lambda_2 \lambda_5 (\lambda_1 + \lambda_3) + \lambda_3 \lambda_4 (\lambda_1 + \lambda_5) + \lambda_1 \lambda_5 (\lambda_3 + \lambda_4)] \leq 0.$$

$$k_4 = [\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 (\lambda_1 + \lambda_5) + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_5 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 \lambda_5 + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5] - (d_1^2 d_2^2 + 2d_1 d_2^2 d_3 + 2d_1^2 d_2 d_3) - d_1[k_2(d_2 + d_3) - k_3] - d_2(d_3 k_2 - k_3). \text{ Es suficiente probar que:}$$

i)  $k_2(d_2 + d_3) - k_3 \geq 0$ , y

ii)  $d_3 k_2 - k_3 \geq 0$ .

En efecto, puesto que

$$k_2(d_2 + d_3) - k_3 = 2d_1d_2(d_1 - d_3) + (d_1^2 - d_2^2)(d_1 + d_3) - d_1[(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4)\lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_5)\lambda_3 + (\lambda_1 + \lambda_5)\lambda_4 + (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_5] + [\lambda_2\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_4) + \lambda_2\lambda_4(\lambda_1 + \lambda_5) + \lambda_2\lambda_5(\lambda_1 + \lambda_3) + \lambda_3\lambda_4(\lambda_1 + \lambda_5) + \lambda_1\lambda_5(\lambda_3 + \lambda_4)] \geq 0, \text{ y}$$

$$d_3k_2 - k_3 = d_1^2d_3 + d_2^2d_3 - (d_1 + d_2)[(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4)\lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_5)\lambda_3 + (\lambda_1 + \lambda_5)\lambda_4 + (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_5] + (d_1 + d_2)^3 + [\lambda_2\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_4) + \lambda_2\lambda_4(\lambda_1 + \lambda_5) + \lambda_2\lambda_5(\lambda_1 + \lambda_3) + \lambda_3\lambda_4(\lambda_1 + \lambda_5) + \lambda_1\lambda_5(\lambda_3 + \lambda_4)] \geq 0, \text{ tenemos } k_4 \leq 0.$$

$k_5 = -d_1(-k_4 - d_1d_2^2d_3 + d_2k_3 - d_2d_3k_2) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5$ . Es suficiente probar que:  $(-k_4 - d_1d_2^2d_3 + d_2k_3 - d_2d_3k_2) \geq 0$ . En efecto, puesto que

$$-k_4 - d_1d_2^2d_3 + d_2k_3 - d_2d_3k_2 = -[\lambda_2\lambda_3\lambda_4(\lambda_1 + \lambda_5) + \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_5 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4\lambda_5 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4\lambda_5] + 2d_1^3d_2 + d_1^3d_3 + d_1[\lambda_2\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_4) + \lambda_2\lambda_4(\lambda_1 + \lambda_5) + \lambda_2\lambda_5(\lambda_1 + \lambda_3) + \lambda_3\lambda_4(\lambda_1 + \lambda_5) + \lambda_1\lambda_5(\lambda_3 + \lambda_4)] - d_1^2[(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4)\lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_5)\lambda_3 + (\lambda_1 + \lambda_5)\lambda_4 + (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_5] \geq 0, \text{ tenemos } k_5 \leq 0. \quad \blacksquare$$

**Lema 5.5.** Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \alpha_1 + i\beta_1, \alpha_1 - i\beta_1, \alpha_2 + i\beta_2, \alpha_2 - i\beta_2\}$  una lista de números complejos, con  $\alpha_i \leq 0$ ,  $\sqrt{3} |\alpha_i| \geq |\beta_i|$ ,  $i = 1, 2$  y sean  $d_1, d_2, d_3, d_2, d_1$ , números reales no negativos, con  $d_1 \geq d_3$  tales que  $\lambda_1 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2d_1 + 2d_2 + d_3$ , entonces las entradas  $k_i$ ,  $i = 2, 3, 4, 5$ , dadas en (5.14) son no positivas.

*Demostración.*

$k_2 = (2\lambda_1\alpha_1 + 2\lambda_1\alpha_2 + \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2) - (d_1^2 + d_2^2 + 4d_1d_2 + 2d_1d_3 + 2d_2d_3)$ . Es suficiente probar que  $(2\lambda_1\alpha_1 + 2\lambda_1\alpha_2 + \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2) \leq 0$ . En efecto,

$\lambda_1 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 \geq 0$ , entonces

$$2\lambda_1\alpha_1 + 4\alpha_1^2 + 4\alpha_1\alpha_2 \leq 0, \quad (5.15)$$

y

$$2\lambda_1\alpha_2 + 4\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2 \leq 0. \quad (5.16)$$

Además,

$$-\sqrt{3} \alpha_1 \geq \beta_1 \rightarrow 3\alpha_1^2 \geq \beta_1^2 \rightarrow 3\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \geq \beta_1^2,$$

y

$$-\sqrt{3} \alpha_2 \geq \beta_2 \rightarrow 3\alpha_2^2 \geq \beta_2^2 \rightarrow 3\alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \geq \beta_2^2,$$

esto es

$$\beta_1^2 - 3\alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2 \leq 0, \quad (5.17)$$

$$\beta_2^2 - 3\alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2 \leq 0. \quad (5.18)$$

Finalmente, sumando las desigualdades (5.15), (5.16), (5.17), (5.18), obtenemos  $(2\lambda_1\alpha_1 + 2\lambda_1\alpha_2 + \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2) \leq 0$ . Por tanto  $k_2 \leq 0$ .

$$k_3 = (d_1 + d_2 + d_3)(2\lambda_1\alpha_1 + 2\lambda_1\alpha_2 + \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2) - [(d_1 + d_2)^3 + 2d_1^2d_3 + 4d_1d_2d_3 + 2d_1d_3^2 + 2d_2^2d_3 + 2d_2d_3^2] - [(\lambda_1 + 2\alpha_2)(\alpha_1^2 + \beta_1^2) + (\lambda_1 + 2\alpha_1)(\alpha_2^2 + \beta_2^2) + 4\lambda_1\alpha_1\alpha_2] \leq 0.$$

$$k_4 = [\beta_2^2(2\alpha_1\lambda_1 + \beta_1^2) + \beta_1^2(2\lambda_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + \alpha_1^2(2\lambda_1\alpha_2 + \beta_2^2) + \alpha_2^2(2\alpha_1\lambda_1 + \alpha_1^2)] - (d_1^2d_2^2 + 2d_1d_2^2d_3 + 2d_1^2d_2d_3) - d_1[k_2(d_2 + d_3) - k_3] - d_2(d_3k_2 - k_3). \text{ Puesto que}$$

$$2\lambda_1\alpha_1 + \alpha_1^2 + \beta_1^2 \leq 0, \quad 2\lambda_1\alpha_2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 \leq 0,$$

y

$$k_2(d_2 + d_3) - k_3 = 2d_1d_2(d_1 - d_3) + (d_1^2 - d_2^2)(d_1 + d_3) - d_1[2\lambda_1\alpha_1 + 2\lambda_1\alpha_2 + \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2] + [(\lambda_1 + 2\alpha_2)(\alpha_1^2 + \beta_1^2) + (\lambda_1 + 2\alpha_1)(\alpha_2^2 + \beta_2^2) + 4\lambda_1\alpha_1\alpha_2] \geq 0,$$

$$d_3k_2 - k_3 = d_1^2d_3 + d_2^2d_3 - (d_1 + d_2)[2\lambda_1\alpha_1 + 2\lambda_1\alpha_2 + \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2] + (d_1 + d_2)^3 + [(\lambda_1 + 2\alpha_2)(\alpha_1^2 + \beta_1^2) + (\lambda_1 + 2\alpha_1)(\alpha_2^2 + \beta_2^2) + 4\lambda_1\alpha_1\alpha_2] \geq 0,$$

tenemos  $k_4 \leq 0$ .

Finalmente,

$$k_5 = -d_1(-k_4 - d_1d_2^2d_3 + d_2k_3 - d_2d_3k_2) - \lambda_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2). \text{ Es suficiente probar que } -k_4 - d_1d_2^2d_3 + d_2k_3 - d_2d_3k_2 \geq 0. \text{ En efecto,}$$

$$-k_4 - d_1d_2^2d_3 + d_2k_3 - d_2d_3k_2 = -[\beta_2^2(2\alpha_1\lambda_1 + \beta_1^2) + \beta_1^2(2\lambda_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + \alpha_1^2(2\lambda_1\alpha_2 + \beta_2^2) + \alpha_2^2(2\alpha_1\lambda_1 + \alpha_1^2)] + 2d_1^3d_2 + d_1^3d_3 + d_1[(\lambda_1 + 2\alpha_2)(\alpha_1^2 + \beta_1^2) + (\lambda_1 + 2\alpha_1)(\alpha_2^2 + \beta_2^2) + 4\lambda_1\alpha_1\alpha_2] - d_1^2[2\lambda_1\alpha_1 + 2\lambda_1\alpha_2 + \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2] \geq 0. \text{ Por tanto } k_5 \leq 0. \quad \blacksquare$$

## 5.5. Ejemplos

**Ejemplo 5.1.** Sea  $\Lambda = \{9, -3, -3, -3\}$ . Construimos una matriz persimétrica no negativa con el espectro  $\Lambda$ , para cada una de las tres posibles FCJs asociadas con  $\Lambda$ .

i) Primero computemos una matriz persimétrica no negativa  $\mathcal{P}$  con el espectro  $\Lambda$  y con los divisores elementales

$$(\lambda - 9), (\lambda + 3)^3.$$

Entonces

$$p(x) = (\lambda - 9)(\lambda + 3)^3 = \lambda^4 - 54\lambda^2 - 216\lambda - 243,$$

y las correspondientes matrices  $\mathcal{C}$  (la matriz compañera de  $p(x)$ ) y  $\mathcal{P}$  (obtenida del Teorema 5.3) son respectivamente,

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 243 & 216 & 54 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 27 & 0 & 1 & 0 \\ 108 & 0 & 0 & 1 \\ 972 & 108 & 27 & 0 \end{bmatrix}.$$

ii) Ahora computamos una matriz persimétrica no negativa  $\mathcal{P}$  con el espectro  $\Lambda$  y divisores elementales lineales. Tomemos la partición

$$\Lambda_0 = \{9, -3\}, \quad \Lambda_1 = \Lambda_2 = \{-3\} \quad \text{con} \quad \Gamma_1 = \Gamma_2 = \{3, -3\}.$$

Aplicamos el Teorema 5.1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 36 & 3 \end{bmatrix},$$

para obtener la matriz persimétrica no negativa

$$A + X C X^F = \begin{bmatrix} 0 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 18 & 18 & 0 & 3 \\ 18 & 18 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

con las propiedades requeridas.

iii) Finalmente computamos una matriz persimétrica no negativa  $\mathcal{P}$  con el espectro  $\Lambda$  y con los divisores elementales

$$(\lambda - 9), (\lambda + 3)^2, (\lambda + 3).$$

En este caso tomamos la partición

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \{9, -3, -3\}, \quad \Lambda_1 = \Lambda_3 = \emptyset, \quad \Lambda_2 = \{-3\}, \\ \Gamma_1 &= \Gamma_3 = \{0\}, \quad \Gamma_2 = \{3, -3\}, \\ A_1 &= A_3 = [0], \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Computamos una matriz  $B$ , con el espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales (en este orden), del Teorema 5.6, con  $n = 3$ :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{45}{2} & 3 & 1 \\ 81 & \frac{45}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad J(B) = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$A + X C X^F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{45}{2} & 0 & 1 \\ 81 & \frac{45}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{45}{4}\sqrt{2} & 0 & 3 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{45}{4}\sqrt{2} & 3 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 81 & \frac{45}{4}\sqrt{2} & \frac{45}{4}\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$J(A + X C X^F) = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

**Ejemplo 5.2.** Sea  $\Lambda = \{12, -1, -1, -2, -1 \pm i, -1 \pm i, -2 \pm 3i\}$ . Construimos una matriz persimétrica no negativa con el espectro  $\Lambda$ , para cada una de las cuatro posibles FCJs asociadas con  $\Lambda$ .

i) Para obtener los divisores elementales lineales tomamos la partición

$$\Lambda_0 = \{12, -2, -2 + 3i, -2 - 3i\}, \\ \Gamma_1 = \{2, -1 + i, -1 - i\} = \Gamma_4, \quad \Gamma_2 = \Gamma_3 = \{1, -1\}.$$

Entonces las matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = A_1^F = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tienen los espectros  $\Gamma_1, \Gamma_4, \Gamma_2, \Gamma_3$ , respectivamente. Por tanto

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & A_2 & \\ & & & A_1^F \end{bmatrix},$$

es persimétrica no negativa.

Ahora necesitamos computar una matriz persimétrica no negativa  $B$  de orden 4 con el espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales 2, 1, 1, 2 y una matriz  $C$  de  $B = \Omega + CX^FX$ . Hacemos esto del Teorema 5.6:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 32 & 1 & 1 & 0 \\ 203 & 0 & 1 & 1 \\ 2024 & 203 & 32 & 2 \end{bmatrix} \quad y \quad C = \frac{9}{5\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 32 & 0 & 1 & 0 \\ 203 & 0 & 0 & 1 \\ 2024 & 203 & 32 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por tanto,  $A + \tilde{X}C\tilde{X}^F$  es la matriz requerida.

ii) Para computar una matriz persimétrica no negativa  $\mathcal{P}$  con divisores elementales  $(\lambda+1)^2$ , y divisores elementales lineales para el resto de los elementos de  $\Lambda$ , tomamos la partición

$$\Lambda_0 = \{12, -2 + 3i, -2 - 3i\}, \\ \Gamma_1 = \Gamma_3 = \{2, -1 + i, -1 - i\}, \quad \Gamma_2 = \{4, -1, -1, -2\}.$$

Las correspondientes matrices realizadoras son

$$A_1 = A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{11}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{153}{4} & 9 & \frac{11}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

con  $A_2$  teniendo FCJ  $J_1(4) \oplus J_2(-1) \oplus J_1(-2)$ . Computamos las matrices persimétricas no negativas

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \frac{55}{2} & 4 & 1 \\ 250 & \frac{55}{2} & 2 \end{bmatrix} \quad y \quad C = \frac{7}{5} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{55}{2} & 0 & 1 \\ 250 & \frac{55}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

donde  $B$  tiene el espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales 2, 4, 2. Entonces

$$\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_1 \end{bmatrix} + \tilde{X}C\tilde{X}^F,$$

es la matriz solución requerida.

iii) Para computar una matriz persimétrica no negativa  $\mathcal{P}$  con divisores elementales  $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4$ , y divisores elementales lineales para el resto

de los elementos de  $\Lambda$ , tomamos la partición

$$\Lambda_0 = \{12, -2 + 3i, -2 - 3i\},$$

$$\Gamma_1 = \Gamma_3 = \{1, -1\}, \quad \Gamma_2 = \{6, -2, -1 + i, -1 - i, -1 + i, -1 - i\}.$$

Las correspondientes matrices realizadoras son

$$A_1 = A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 112 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 416 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3584 & 416 & 112 & 36 & 10 & 0 \end{bmatrix},$$

con  $A_2$  teniendo FCJ

$$J_1(6) \oplus J_1(-2) \oplus J_2(-1 + i) \oplus J_2(-1 - i).$$

Computamos las matrices persimétricas no negativas

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 24 & 6 & 1 \\ 198 & 24 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 24 & 0 & 1 \\ 198 & 24 & 0 \end{bmatrix},$$

con  $B$  teniendo el espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales 1, 6, 1. Por tanto,

$$\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_1 \end{bmatrix} + \tilde{X}C\tilde{X}^F,$$

es la matriz solución requerida.

iv) Finalmente, computamos una matriz persimétrica no negativa  $\mathcal{P}$  con divisores elementales  $(\lambda + 1)^2, \lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4$ , y divisores elementales lineales para los restantes elementos de la lista. Hacemos esto computando la matriz compañera  $\mathcal{C}$  con el espectro  $\Lambda$ , y del Teorema 5.3 y corolario 5.1, la correspondiente matriz persimétrica no negativa  $\mathcal{P}$ .

# CONCLUSIONES

En esta tesis hemos obtenido resultados que constituyen un avance en el conocimiento del *problema inverso de autovalores para matrices no negativas (NIEP)*. En particular, hemos considerado el problema para matrices no negativas estructuradas, como normales, persimétricas y bisimétricas.

Nuestros resultados han generado versiones normal y persimétrica de un resultado de perturbación de rango  $r$  debido a Rado, las cuales nos han permitido obtener, en el caso de las matrices normales, nuevas condiciones suficientes para la existencia de una matriz normal no negativa con espectro prescrito. Estas condiciones mejoran significativamente las condiciones previas conocidas, debidas a Radwan y Xu. En el caso de las matrices persimétricas, hemos obtenido también eficientes condiciones suficientes para la existencia de una solución al problema. En ambos casos, matrices normales y persimétricas, hemos generado condiciones suficientes para la existencia de una solución al *problema inverso de los divisores elementales*.

Todos nuestros resultados tienen demostraciones constructivas, las cuales generan procedimientos algorítmicos para computar una matriz solución. Ellos forman parte de tres artículos publicados en las revistas *Linear Algebra and its Applications* y *Linear and Multilinear Algebra*.

Las técnicas que hemos empleado para lograr nuestros resultados, requieren de la existencia de matrices no negativas estructuradas (normales, persimétricas y bisimétricas en nuestro caso) de tamaño  $r < n$ , con autovalores y entradas

diagonales prescritas. Este es un problema abierto difícil, incluso para dimensiones pequeñas, interesante en sí mismo, que nosotros estudiamos como una herramienta esencial para aplicar nuestros resultados, aunque con respuestas parciales para matrices de tamaño menor.

En este sentido, nos proponemos estudiar en un futuro inmediato, condiciones para la existencia de una matriz normal no negativa de orden  $n$  con autovalores y entradas diagonales prescritas, y para la existencia de una matriz persimétrica (bisimétrica) no negativa de orden  $n$  con autovalores y entradas diagonales prescritas.

Nos interesa también estudiar el *NIEP* para otro tipo de matrices estructuradas, tales como Toeplitz, Hessenberg, tridiagonales, centrosimétricas, etc.

En el caso de matrices persimétricas no negativas con autovalores y entradas diagonales prescritas, pensamos que un camino de posible solución, para el caso general de listas  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , con  $Re\lambda_i \leq 0$ ,  $\sqrt{3}|Re\lambda_i| \geq |Im\lambda_i|$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , es escribir la matriz  $A$  de orden  $n$  de Farahat y Ledermann [12] (Capítulo 5, Sección 5.3) como  $A = A_1 + D$ , donde  $D = diag\{d_1, d_2, \dots, d_2, d_1\}$  e intentar probar que la matriz  $A_1$  tiene espectro  $\Lambda_1 = \{\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n\}$  con  $Re\lambda'_i \leq 0$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ . Así, puesto que sabemos de un resultado en [27, Lema 5], que si  $k_2 \leq 0$ , entonces  $k_i \leq 0$ ,  $i = 3, \dots, n$ , y la matriz  $A$  será no negativa con espectro y entradas diagonales prescritas. Luego, la matriz  $S^{-1}AS$ , con  $S$  definida como en (5.2), y los  $s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 2$  elegidos convenientemente, es persimétrica no negativa con espectro y entradas diagonales prescritas.

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] A. Berman, R. J. Plemmons, Nonnegative matrices in the mathematical sciences, in: classics in applied mathematics 9, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1994.
- [2] A. Borobia, On the nonnegative eigenvalue problem, *Linear Algebra and its Applications*. 223-224 (1995) 131-140.
- [3] A. Borobia, J. Moro, R. Soto, Negativity compensation in the nonnegative inverse eigenvalue problem, *Linear Algebra and its Applications*. 393 (2004) 73-89.
- [4] A. Brauer, Limits for the characteristic roots of a matrix. IV: Applications to stochastic matrices, *Duke Math. J* 19 (1952) 75-91.
- [5] A. Cantoni, P. Butler, Eigenvalues and eigenvectors of symmetric centrosymmetric matrices, *Linear Algebra and its Applications*. 13 (1976) 275-288.
- [6] J. Ccapa, R. L. Soto, On spectra perturbation and elementary divisors of positive matrices, *Electronic Journal of Linear Algebra*. 18 (2009) 462-481.
- [7] J. Ccapa, R. L. Soto, On elementary divisors perturbations of nonnegative matrices, *Linear Algebra and its Applications*. 432 (2010) 546-555.
- [8] P. G. Ciarlet, Some results in the theory of nonnegative matrices, *Linear Algebra and its Applications*. 1 (1968) 139-152.
- [9] M. T. Chu, G. H. Golub, Inverse eigenvalue problems: theory, algorithms and applications. Oxford University Press, New York, 2005.

- [10] P. J. Davis, Circulant matrices, John Wiley & Son, New York, 1979.
- [11] R. C. Díaz, R. L. Soto, Nonnegative inverse elementary divisors problem in the left half plane, *Linear and Multilinear Algebra*, DOI: 10.1080/03081087.2015.1034640.
- [12] H. K. Farahat, W. Ledermann, Matrices with prescribed characteristic polynomials. Proc. Edinburg Mat. Soc. 11 (1958) 143-146.
- [13] M. Fiedler, Eigenvalues of nonnegative symmetric matrices, *Linear Algebra and its Applications*. 9 (1974) 119-142.
- [14] M. J. Goldstein, Reduction of the eigenproblem for hermite persymmetric matrices, Math. Comp. 125 (28) (1974) 237-238.
- [15] W. Guo, An inverse eigenvalue problem for nonnegative matrices, *Linear Algebra and its Applications*. 249 (1996) 67-78.
- [16] W. Guo, Eigenvalues of nonnegative matrices, *Linear Algebra and its Applications*. 266 (1997) 261-270.
- [17] S. Guo, W. Guo, Perturbing non-real eigenvalues of nonnegative real matrices, *Linear Algebra and its Applications*. 426 (2007) 199-203.
- [18] R. A. Horn, C. R. Johnson, Topics in matrix analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [19] C. R. Johnson, Row stochastic matrices similar to doubly stochastic matrices, *Linear and Multilinear Algebra*. 10 (1981). 113-130.
- [20] C. R. Johnson, T. J. Laffey, R. Loewy. The real and the symmetric nonnegative inverse eigenvalue problems are different, Proc. AMS 124 (1996) 3647-3651.
- [21] A. I. Julio, R. L. Soto, Persymmetric and bisymmetric nonnegative inverse eigenvalue problem, *Linear Algebra and its Applications*. 469 (2015) 130-152.
- [22] A. I. Julio, C. B. Manzaneda, R. L. Soto, Normal nonnegative realization of spectra, *Linear and Multilinear Algebra*. 63, N°6 (2015) 1204-1215.
- [23] R. Kellogg, Matrices similar to a positive or essentially positive matrix, *Linear Algebra and its Applications*. 4 (1971) 191-204.
- [24] T. J. Laffey, E. Meehan, A refinement of an inequality of Johnson, Loewy and London on nonnegative matrices and some applications, *Electronic Journal of Linear Algebra*. 3 (1998) 119-128.
- [25] T. J. Laffey, E. Meehan, A characterization of trace zero nonnegative  $5 \times 5$  matrices, *Linear Algebra and its Applications*. 302-303 (1999) 295-302.

- [26] T. J. Laffey, Perturbing non-real eigenvalues of nonnegative real matrices, *Electronic Journal of Linear Algebra*. 12 (2005) 73-76.
- [27] T. J. Laffey, H. Šmigoc, Nonnegative realization of spectra having negative real parts, *Linear Algebra and its Applications*. 416 (2006) 148-159.
- [28] T. J. Laffey, H. Šmigoc, Construction of nonnegative symmetric matrices with given spectrum, *Linear Algebra and its Applications*. 421 (2007) 97-109.
- [29] A. Lee, Secondary symmetric, skewsymmetric and orthogonal matrices, *Period. Math. Hungar.* 7 (1) (1976) 63-70.
- [30] R. Loewy, D. London, A note on an inverse problem for nonnegative matrices, *Linear and Multilinear Algebra* 6 (1978) 83-90.
- [31] R. Loewy, J. J. McDonald. The symmetric nonnegative inverse eigenvalue problem  $5 \times 5$  matrices, *Linear Algebra and its Applications*. 393 (2004) 275-298.
- [32] C. Marijuán, M. Pisonero, R. Soto, A map of sufficient conditions for the real nonnegative inverse eigenvalue problem, *Linear Algebra and its Applications*. 426 (2007) 690-705.
- [33] M.E. Meehan, Some results on matrix spectra, Ph.D.thesis, National University of Ireland, Dublin, 1998.
- [34] H. Minc, *Nonnegative Matrices*, John Wiley & Sons, Inc, New York, 1988.
- [35] H. Minc, Inverse elementary divisor problem for nonnegative matrices. *Proc. Am. Math. Soc.* 83 (1981) 665-669.
- [36] H. Minc, Inverse elementary divisor problem for doubly stochastic matrices, *Linear Multilinear Algebra*. 11 (1982) 121-131.
- [37] H. Perfect, Methods of constructing certain stochastic matrices, *Duke Math. J.* 20 (1953) 395-404.
- [38] H. Perfect, Methods of constructing certain stochastic matrices II, *Duke Math. J.* 22 (1955) 305-311.
- [39] N. Radwan, An inverse eigenvalue problem for symmetric and normal matrices, *Linear Algebra and its Applications*. 248 (1996) 101-109.
- [40] R. M. Reid, Some eigenvalue properties of persymmetric matrices, *SIAM Rev.* 39 (1997) 313-316.
- [41] O. Rojo, R. L. Soto, H. Rojo, Fast construction of a symmetric nonnegative matrix with a prescribed spectrum, *Comput. Math. with Appl.* 42 (2001) 1379-1391.

- [42] O. Rojo, R. L. Soto, Existence and construction of nonnegative matrices with complex spectrum, *Linear Algebra and its Applications*. 368 (2003) 53-69.
- [43] O. Rojo, H. Rojo, Constructing symmetric nonnegative matrices via the Fast Fourier Transform, *Comput. Math. with Appl.* 45 (2003) 1655-1672.
- [44] O. Rojo, R. L. Soto, Guo perturbations for symmetric nonnegative circulant matrices, *Linear Algebra and its Applications*. 431 (2009) 594-607.
- [45] H. Šmigoc, The inverse eigenvalue problem for nonnegative matrices, *Linear Algebra Appl.* 393 (2004) 365-374.
- [46] H. Šmigoc, Construction of nonnegative matrices and the inverse eigenvalue problem, *Linear and Multilinear Algebra*. 53 (2005) 88-96.
- [47] F. Salzmänn, A note on eigenvalues of nonnegative matrices, *Linear Algebra and its Applications*. 5 (1972) 329-338.
- [48] R. L. Soto, Existence and construction of nonnegative matrices with prescribed spectrum, *Linear Algebra and its Applications*. 369 (2003) 169-184.
- [49] R. L. Soto, Realizability by symmetric nonnegative matrices, *Proyecciones* 24 (1) (2005) 65-78.
- [50] R. L. Soto, Realizability criterion for the symmetric nonnegative inverse eigenvalue problem, *Linear Algebra and its Applications*. 416 (2-3) (2006) 783-794.
- [51] R. L. Soto, O. Rojo, Applications of a Brauer theorem in the nonnegative inverse eigenvalue problem, *Linear Algebra and its Applications*. 416 (2-3) (2006) 844-856.
- [52] R. L. Soto, O. Rojo, J. Moro, A. Borobia, Symmetric nonnegative realization of spectra, *Electronic Journal of Linear Algebra*. 16 (2007) 1-18.
- [53] R. L. Soto, J. Cappa, Nonnegative matrices with prescribed elementary divisors, *Electronic Journal of Linear Algebra*. 17 (2008) 287-303.
- [54] R. L. Soto, M. Salas, C. Manzaneda, Nonnegative realization of complex spectra, *Electronic Journal of Linear Algebra*. 20 (2010) 595-609.
- [55] R. L. Soto, A. I. Julio, A note on the symmetric nonnegative inverse eigenvalue problem, *International Mathematical Forum*. 6 (2011) N° 50, 2447-2460.
- [56] R. L. Soto, O. Rojo, C. Manzaneda, On nonnegative realization of partitioned spectra, *Electronic Journal of Linear Algebra*. 22 (2011) 557-572.

- [57] R. L. Soto, A family of realizability criteria for the real and symmetric nonnegative inverse eigenvalue problem, *Numerical Linear Algebra Applications*. 20 (2013) 336-348.
- [58] R. L. Soto, R. C. Díaz, H. Nina, M. Salas, Nonnegative matrices with prescribed spectrum and elementary divisors, *Linear Algebra and its Applications*. 439 (2013) 3591-3604.
- [59] R. L. Soto, A. I. Julio, M. Salas, Nonnegative persymmetric matrices with prescribed elementary divisors, *Linear Algebra and its Applications*. 483 (2015) 139-157.
- [60] G. Soules, Constructing symmetric nonnegative matrices, *Linear and Multilinear Algebra*. 13 (1983) 241-251.
- [61] O. Spector, A characterization of trace zero symmetric nonnegative  $5 \times 5$  matrices, *Linear Algebra and its Applications*. 434 (2011) 1000-1017.
- [62] H. R. Suleimanova, Stochastic matrices with real characteristic values, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 66 (1949) 343-345.
- [63] J. Torre-Mayo, M.R. Abril-Raymundo, E. Alarcia-Estévez, C. Marijuán, y M. Pisonero. The nonnegative inverse eigenvalue problem from the coefficients of the characteristic polynomial. EBL diagraphs, *Linear Algebra and its Applications*. 426 (2007) 729-773.
- [64] S. Xu, On inverse spectrum problems for normal nonnegative matrices, *Linear and Multilinear Algebra*. 34 (1993) 353-364.
- [65] Q. Yin, Construction of real antisymmetric and bi-antisymmetric matrices with prescribed spectrum data, *Linear Algebra and its Applications*. 389 (2004) 95-106.
- [66] J. R. Weaver, Real eigenvalues of nonnegative matrices which commute with a symmetric involution, *Linear Algebra and its Applications*. 110 (1988) 243-253.
- [67] F. Zhang, *Matrix Theory: Basic Results and Techniques*, Universitext, DOI 10.1007/987-1-4614-1099-7 Springer Science + Business Media, LLC 2011.
- [68] L. Zhongshan, H. Frank, F. Zhang, Sign Patterns of Nonnegative Normal Matrices, *Linear Algebra and its Applications*. 254 (1997) 335-354.