



UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Matemáticas

Sobre la matriz α -adyacencia de un grafo.

Tesis para optar al Grado de Magíster en Ciencias Mención
Matemática

GERMAIN ALIRO PASTÉN TABILO

Profesor Guía: Dr. Oscar Rojo Jeraldo

Antofagasta, Chile

Marzo 2017

Agradecimientos

Agradezco a CONICYT, Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica, por el apoyo financiero de mis estudios de postgrado mediante la Beca Magíster Nacional 2015-2016, CONICYT-PCHA / MagisterNacional / 2015-22151590, para optar al grado académico de Magíster en Ciencias Mención Matemática, programa de postgrado del Departamento de Matemáticas de la Universidad Católica del Norte, Antofagasta, Chile.

Índice

1. Preliminares	4
1.1. Conceptos y resultados previos	5
1.2. Motivación	9
1.3. Desigualdades de Weyl y una condición necesaria y suficiente para la igualdad	11
1.4. Dos identidades fundamentales	12
2. El α-espectro de algunos grafos	14
3. Propiedades básicas de las matrices $A_\alpha(G)$	17
3.1. Monotonicidad de $\lambda_k(A_\alpha(G))$ en α	17
3.2. Semidefinidad positiva de $A_\alpha(G)$	20
3.3. Algunas cotas basadas en grados de vértices	23
4. El α-espectro de un árbol Bethe generalizado	26
4.1. El α -espectro de un árbol Bethe generalizado	31
4.2. El α -espectro de un árbol Bethe	38
5. Cotas para el α-radio espectral de un grafo	40
5.1. Cotas para el α -radio espectral de P_n y B_k	45
5.2. Cota para el α -radio espectral de un árbol en términos del mayor grado	51
6. La multiplicidad de α como autovalor de $A_\alpha(G)$	56

1. Preliminares

Un grafo es un conjunto de vértices o nodos unidos por enlaces llamados aristas o arcos. La Teoría Espectral de Grafos analiza propiedades estructurales de grafos a través de sus representaciones matriciales y sus respectivos autovalores y autovectores. Es este el contexto en el cual está situada la presente Tesis. Prácticamente cualquier problema puede representarse mediante un grafo, y su estudio trasciende a las diversas áreas de las Ciencias Exactas y las Ciencias Sociales, esto ha permitido que la Teoría Espectral de Grafos haya tenido un desarrollo muy importante debido a sus aplicaciones en varias Ciencias tales como: Química Cuántica, Física, Mecánica Cuántica, Ciencias de la Computación, Optimización Combinatorial, Investigación de Operaciones y Matemática. Variadas e interesantes son las interrogantes, conjeturas y resultados que se han presentado en los últimos años entorno al estudio de diversas matrices asociadas a grafos ya que están relacionadas con la mayoría de los invariantes de un grafo y, por lo tanto, pueden dar información muy útil acerca del grafo mismo o acerca de una aplicación que es modelada por el grafo. En particular, las matrices relacionadas a esta Tesis son la matriz de grados, la matriz de adyacencia, la matriz Laplaciana y la matriz Laplaciana sin signo. Recientemente, el profesor V. Nikiforov ha propuesto el estudio de una nueva familia de matrices $\{A_\alpha(G)\}$ asociadas a un grafo G , las cuales son combinaciones convexas de la matriz de grados y la matriz de adyacencia del grafo G . Para cada $\alpha \in [0, 1]$, la matriz $A_\alpha(G)$ será llamada matriz α -adyacencia del grafo G y será el objeto de estudio de esta Tesis. La Teoría Espectral de Grafos se apoya fuertemente en la Teoría de Matrices. Resultados de esta Teoría serán recordados cuando sean necesarios.

A continuación entregamos cierta notación, conceptos y resultados que serán utilizados en el desarrollo de esta Tesis.

1.1. Conceptos y resultados previos

Un grafo $G = (V(G), E(G))$ está formado por un conjunto $V(G)$ no vacío y un conjunto $E(G)$. Los elementos de $V(G)$ y $E(G)$ son llamados vértices y lados, respectivamente. Un grafo puede ser finito o infinito según lo sea el conjunto de vértices $V(G)$. La cardinalidad de $V(G)$ es llamada el orden de G , y es denotada por $|V(G)|$. Dos vértices i, j de un grafo se dicen adyacentes si $\{i, j\} \in E(G) = \{\{i, j\} : i, j \in V(G)\}$; en tal caso, se dice que el lado $\{i, j\}$ es incidente a los vértices i y j . Un grafo es simple si todo par de vértices adyacentes están conectados por un único lado. No todos los grafos son simples, en algunos casos dos vértices adyacentes pueden estar conectados por más de un lado, en estos casos tenemos un multigrafo. También puede ocurrir que un vértice esté conectado consigo mismo (lazo), dando origen a un pseudografo. Además, los lados de un grafo pueden tener asignada una dirección, tales grafos son llamados grafos dirigidos (o digrafos). Un grafo se dice ponderado o con peso si a cada lado se le asocia un valor o peso, en caso contrario, el grafo se dice sin peso. Esta Tesis considera grafos finitos, simples, no dirigidos y sin pesos. El conjunto de vértices adyacentes a un vértice u será denotado por $\Gamma_G(u)$. El grado de un vértice $u \in V(G)$, denotado por $d_G(u)$ es el número de vértices adyacentes a él, es decir, $d_G(u) = |\Gamma_G(u)|$. Denotaremos por $\delta(G)$ y $\Delta(G)$, al mínimo y máximo grado de G , respectivamente. Si no hay lugar a confusión escribiremos V , E y $d(u)$ en lugar de $V(G)$, $E(G)$ y $d_G(u)$, respectivamente.

Recordemos también otros conceptos en relación a dos grafos. Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos grafos:

1. Los grafos G y G' se dicen isomorfos si existe una biyección $\varphi : V \rightarrow V'$ tal que

$$\{x, y\} \in E \Leftrightarrow \{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E'$$

para todo $x, y \in V$. En tal caso se escribe $G \simeq G'$.

2. Si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$ entonces se dice que G' es un subgrafo de G y se escribe $G' \subseteq G$.
3. Si $G' \subseteq G$ y si para cada $\{x, y\} \in E'$ con $x, y \in V'$ se tiene $\{x, y\} \in E$, entonces se dice que G' es un subgrafo inducido por V' .
4. Si $G' \subseteq G$ y $V' = V$ entonces G' es llamado un subgrafo generado de G .

Un camino de n vértices en un grafo es una secuencia finita de n vértices donde cada par de vértices consecutivos están conectados por un lado. La longitud de un camino es el número de lados que tiene. Denotamos por P_n al camino de n vértices y $n - 1$ lados. Entonces, la longitud de P_n es $n - 1$. Un ciclo en un grafo es un camino donde el primer y el último vértice de la secuencia coinciden. Un grafo se dice conectado si para todo par de vértices distintos existe un camino que los conecta. Un árbol es un grafo conectado acíclico. Ahora pasamos a recordar otros conceptos sobre un grafo $G=(V, E)$. Un grafo de n vértices tal que para todo par de vértices $\{u, v\} \in V \times V$, con $u \neq v$, se tiene que $\{u, v\} \in E$ recibe el nombre de grafo completo y es denotado por K_n . Un grafo donde $V = V_1 \cup V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \phi$ tal que para todo $\{u, v\} \in E$ se tiene $u \in V_1$ y $v \in V_2$ recibe el nombre de grafo bipartito. Un grafo bipartito de n vértices donde $V = V_1 \cup V_2$ con $|V_1| = r$, $|V_2| = s$ tal que $r + s = n$ y donde cada

vértice de V_1 es adyacente con cada vértice de V_2 recibe el nombre de grafo bipartito completo y es denotado por $K_{r,s}$. En particular, $K_{1,n-1}$ denota el grafo estrella de orden n .

Un grafo en el cual todos sus vértices tienen un grado igual a k recibe el nombre de grafo k -regular. Un vértice pendiente es un vértice de grado 1. Por su parte, todo vértice adyacente a un vértice pendiente es llamado vértice casi-pendiente. Un vértice interno es un vértice de grado al menos 2.

Otros conceptos y resultados sobre grafos serán dados durante el desarrollo de esta Tesis. En lo que sigue, los autovalores de una matriz real simétrica M de orden $n \times n$ serán indexados en orden no creciente

$$\lambda_1(M) \geq \lambda_2(M) \geq \dots \geq \lambda_n(M),$$

donde $\lambda_k(M)$ denotará el k -ésimo autovalor de la matriz M . Denotaremos por $\lambda_k^{[a]}$ al autovalor λ_k con multiplicidad a . Recordemos que una matriz real simétrica M es *semidefinida positiva* si y sólo si $\lambda_n(M) \geq 0$. De manera similar, M es *definida positiva* si y sólo si $\lambda_n(M) > 0$.

Entre las matrices que se pueden asociar a un grafo, definiremos aquellas vinculadas al objetivo de esta Tesis. Sea $G = (V, E)$ con $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Sea

$$D(G) = \begin{bmatrix} d(1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d(2) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d(n) \end{bmatrix}$$

donde, como ya fue definido, $d(i)$ denota el grado del vértice i . La matriz $D(G)$ es llamada la matriz de grados de G . La matriz de adyacencia $A(G) = (a_{i,j})$ de orden $n \times n$ está definida por

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j\} \in E(G) \\ 0 & \text{si } \{i, j\} \notin E(G) \end{cases}.$$

La matriz Laplaciana de G es definida como

$$L(G) = D(G) - A(G)$$

y la matriz Laplaciana sin signo de G como

$$Q(G) = D(G) + A(G).$$

El uso del Teorema de Gersgorin permite concluir que las matrices $L(G)$ y $Q(G)$ son semidefinidas positivas. Además, es fácil ver que las sumas filas de $L(G)$ son todas iguales a 0, de donde se sigue que

$$\lambda_n(L(G)) = 0, \tag{1}$$

cuyo autovector asociado es un vector constante, es decir, es el n -vector columna de unos, denotado por \mathbf{e}_n , o un múltiplo de él.

1.2. Motivación

En esta Tesis estudiamos híbridos de $D(G)$ y $A(G)$ similar a la matriz Laplaciana sin signo $Q(G) = D(G) + A(G)$ presentada por Cvetković en [1] y estudiada extensivamente desde entonces. La investigación sobre $Q(G)$ ha demostrado que es una matriz interesante, y a pesar de que, $Q(G)$ es simplemente la suma de $D(G)$ y $A(G)$, el estudio de $Q(G)$ ha puesto al descubierto similitudes y diferencias entre $Q(G)$ y $A(G)$. Para comprender hasta qué punto cada uno de los sumandos $D(G)$ y $A(G)$ determina las propiedades de $Q(G)$, en [2] Nikiforov propone el estudio de la familia de matrices $\{A_\alpha(G)\}$, definidas por

$$A_\alpha(G) = \alpha D(G) + (1 - \alpha)A(G); \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (2)$$

es decir, para cada $\alpha \in [0, 1]$, $A_\alpha(G)$ es una combinación convexa de $A(G)$ y $D(G)$. Para cada $\alpha \in [0, 1]$, la matriz $A_\alpha(G)$ la llamaremos matriz α -adyacencia del grafo G , y a su espectro y radio espectral los llamaremos α -espectro y α -radio espectral, respectivamente. Claramente,

$$A(G) = A_0(G), \quad Q(G) = 2A_{\frac{1}{2}}(G) \quad \text{y} \quad D(G) = A_1(G), \quad (3)$$

de esta manera, Nikiforov estima que las matrices $A_\alpha(G)$ pueden sustentar una teoría unificada de $A(G)$ y $Q(G)$. En este contexto, las matrices $A(G)$, $Q(G)$ y $D(G)$ pueden ser vistas desde una nueva perspectiva, y muchos problemas interesantes aparecen.

Las matrices I_n y J_n , denotarán la matriz identidad y la matriz cuyas entradas son todas iguales a 1, ambas de orden $n \times n$, respectivamente. En [3], se definen las matrices de adyacencia universales de un grafo G de n vértices como

$$U = U_G(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \alpha A(G) + \beta I_n + \gamma J_n + \delta D(G),$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ y $\alpha \neq 0$. Por otra parte, en [4] se definen las matrices de adyacencia generalizadas de un grafo G de n vértices como

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha A(G) + \beta I_n + \gamma J_n,$$

donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ y $\alpha \neq 0$, es decir, corresponden al caso en que $\delta = 0$ en la definición de las matrices de adyacencia universales. De esta manera, vale la pena señalar que la familia de matrices $\{A_\alpha(G)\}$ es simplemente un pequeño subconjunto de las matrices de adyacencia generalizadas y las matrices de adyacencia universales. Sin embargo, resultados que son propensos a fallar en estas clases más generales, pueden ser demostrados a partir de la definición de las matrices $A_\alpha(G)$, a pesar de que esta sea más restringida.

1.3. Desigualdades de Weyl y una condición necesaria y suficiente para la igualdad

En la presente Tesis, muchos resultados con respecto a las matrices $A_\alpha(G)$ se probarán a partir de las desigualdades de Weyl para los autovalores de matrices Hermíticas.

Teorema 1 (Desigualdades de Weyl [5]) Sean A y B matrices Hermíticas de orden n , y sean $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$. Entonces

$$\lambda_i(A) + \lambda_j(B) \leq \lambda_{i+j-n}(A+B), \quad \text{si } i+j \geq n+1, \quad (4)$$

$$\lambda_i(A) + \lambda_j(B) \geq \lambda_{i+j-1}(A+B), \quad \text{si } i+j \leq n+1. \quad (5)$$

Una versión simplificada de (4) y (5) es dada por

$$\lambda_k(A) + \lambda_n(B) \leq \lambda_k(A+B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_1(B). \quad (6)$$

De la literatura, se observa que estas desigualdades fundamentales se han conocido durante casi un siglo; sin embargo, el caso de igualdad fue recién establecido por So en [6], inspirado en la publicación de Ikebe, Inagaki y Miyamoto [7]. So probó que una condición necesaria y suficiente para la igualdad en las desigualdades de Weyl es:

En cada desigualdad de Weyl, la igualdad se cumple si y sólo si los tres autovalores involucrados tienen un autovector en común.

1.4. Dos identidades fundamentales

A partir de la definición de las matrices $A_\alpha(G)$, se deducen dos identidades fundamentales:

Lema 1 Sean $\alpha, \beta \in [0, 1]$. Entonces,

$$A_\alpha(G) - A_\beta(G) = (\alpha - \beta)L(G), \quad (7)$$

y

$$A_\alpha(G) + A_{1-\alpha}(G) = Q(G). \quad (8)$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} A_\alpha(G) - A_\beta(G) &= \alpha D(G) + (1 - \alpha)A(G) - \beta D(G) - (1 - \beta)A(G) \\ &= (\alpha - \beta)D(G) - (\alpha - \beta)A(G) \\ &= (\alpha - \beta)L(G). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_\alpha(G) + A_{1-\alpha}(G) &= \alpha D(G) + (1 - \alpha)A(G) + (1 - \alpha)D(G) + \alpha A(G) \\ &= D(G) + A(G) \\ &= Q(G) \end{aligned}$$

■

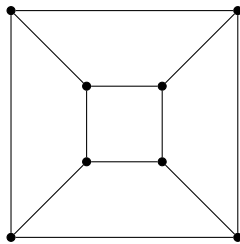
El propósito de esta Tesis es estudiar la matriz α -adyacencia de un grafo G . La Tesis está ordenada como sigue. En el Capítulo 2, se obtienen los α -espectros de algunos grafos que serán de utilidad para resultados posteriores. El Capítulo 3 está dedicado al estudio de propiedades básicas de las matrices $A_\alpha(G)$, tales como: monotonicidad, semidefinidad positiva y algunas cotas basadas en grados de vértices. En el Capítulo 4, se presentan resultados sobre el α -espectro de árboles; en particular, de árboles Bethe generalizados, ello conducirá al logro de una cota para el α -radio espectral de un árbol cualquiera en términos del mayor grado. Continuamos en el Capítulo 5 presentando cotas generales para el α -radio espectral de un grafo, las cuales nos permitirán acotar el α -radio espectral del camino P_n y de árboles Bethe generalizados. Finalmente, el Capítulo 6 exhibe resultados sobre la multiplicidad de α como autovalor de las matrices $A_\alpha(G)$.

2. El α -espectro de algunos grafos

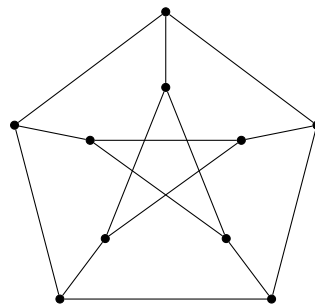
En esta sección entregaremos el α -espectro de algunos grafos, y para ello será fundamental recordar el espectro de algunos grafos. Un grafo hipercubo Q_n es un grafo n -regular con 2^n vértices, donde cada vértice es incidente a exactamente n lados, y en consecuencia, su número de lados es $2^{n-1}n$. El grafo de Petersen PG es un grafo 3-regular no dirigido de 10 vértices, y por lo tanto, de 15 lados. Es un grafo pequeño que sirve como un ejemplo y contraejemplo útil para muchos problemas en la Teoría de Grafos.

Lema 2 Sea C_n el ciclo de n vértices, K_n el grafo completo de n vértices, Q_n el grafo hipercubo de 2^n vértices y PG el grafo de Petersen. Entonces:

1. Para $n \geq 2$, los autovalores de $A(C_n)$ son $\{2\cos(\frac{2\pi j}{n})\}$, para $j = 1, \dots, n$.
2. Los autovalores de $A(K_n)$ son $\{n - 1, -1^{[n-1]}\}$.
3. Los autovalores de $A(Q_n)$ son $\{(n - 2j)\binom{n}{j}\}$, para $j = 0, 1, \dots, n$.
4. Los autovalores de $A(PG)$ son $\{-2^{[4]}, 1^{[5]}, 3\}$.



Q_3



Grafo de Petersen PG

El siguiente Lema es una consecuencia directa de la definición de la matriz α -adyacencia de un grafo G y nos muestra que si G es un grafo regular entonces los autovalores de $A_\alpha(G)$ son un desplazamiento de los autovalores de $(1 - \alpha)A(G)$.

Lema 3 *Si G es un grafo d -regular de orden n , entonces*

$$A_\alpha(G) = \alpha d I_n + (1 - \alpha)A(G),$$

y así existe una correspondencia lineal entre el espectro de $A_\alpha(G)$ y de $A(G)$

$$\lambda_k(A_\alpha(G)) = \alpha d + (1 - \alpha)\lambda_k(A(G)), \quad 1 \leq k \leq n. \quad (9)$$

En particular, $\lambda_1(A_\alpha(G)) = d$ para cualquier $\alpha \in [0, 1]$.

En consecuencia, los autovalores de las matrices $A_\alpha(C_n)$, $A_\alpha(K_n)$, $A_\alpha(Q_n)$ y $A_\alpha(PG)$ se obtienen desde la definición de las matrices A_α y de los Lemas anteriores.

Corolario 1 *Sea $\alpha \in [0, 1]$. Entonces:*

1. *Los autovalores de $A_\alpha(C_n)$ son*

$$2\alpha + 2(1 - \alpha)\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right), \quad \text{para } j = 1, \dots, n.$$

2. *Los autovalores de $A_\alpha(K_n)$ son*

$$\{(\alpha n - 1)^{[n-1]}, \quad n - 1\}.$$

3. *Los autovalores de $A_\alpha(Q_n)$ son*

$$\{(\alpha n + (1 - \alpha)(n - 2j))^{\binom{n}{j}}\}, \quad \text{para } j = 0, \dots, n.$$

4. *Los autovalores de $A_\alpha(PG)$ son*

$$\{(5\alpha - 2)^{[4]}, \quad (2\alpha + 1)^{[5]}, \quad 3\}.$$

Lema 4 Sea $a \geq b \geq 1$. Si $\alpha \in [0, 1]$, los autovalores de $A_\alpha(K_{a,b})$ son

$$\left\{ \frac{1}{2}(\alpha(a+b) \pm \sqrt{\alpha^2(a+b)^2 + 4ab(1-2\alpha)}), \alpha^{[b-1]}, \alpha^{[a-1]} \right\}.$$

En particular, los autovalores de $A_\alpha(K_{1,n-1})$ son

$$\left\{ \frac{1}{2}(\alpha n \pm \sqrt{\alpha^2 n^2 + 4(n-1)(1-2\alpha)}), \alpha^{[n-2]} \right\}.$$

3. Propiedades básicas de las matrices $A_\alpha(G)$

El hilo conductor del Capítulo 3 es el trabajo de Nikiforov [2] en el cual es introducida la familia de matrices $\{A_\alpha\}$ junto con sus propiedades básicas y problemas abiertos sobre estas matrices. En efecto, en esta sección se presentarán propiedades básicas de las matrices $A_\alpha(G)$ incluyendo demostraciones de algunas propiedades no probadas en el trabajo de Nikiforov. De la definición de $A_\alpha(G)$, tenemos dos consecuencias inmediatas:

- Sea G un grafo de orden n . Para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,

$$\lambda \mathbf{x} = A_\alpha(G)\mathbf{x}, \text{ luego}$$

$$\lambda x_k = \alpha d_G(k)x_k + (1 - \alpha) \sum_{\{i,k\} \in E(G)} x_i, \quad 1 \leq k \leq n \quad (10)$$

- $A_\alpha(G)$ es una matriz no negativa. Además, si G es conectado entonces $A_\alpha(G)$ es una matriz irreducible. En consecuencia, la Teoría de Perron-Frobenius puede ser empleada.

3.1. Monotonicidad de $\lambda_k(A_\alpha(G))$ en α

En esta subsección mostraremos que $\lambda_k(A_\alpha(G))$ es no decreciente en α para cualquier k . El siguiente teorema nos muestra la monotonicidad de cualquier autovalor de $A_\alpha(G)$ en la variable α . En su demostración, juega un rol fundamental la identidad (7).

Teorema 2 *Sea $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$. Si G es un grafo de orden n , entonces*

$$\lambda_k(A_\beta) \leq \lambda_k(A_\alpha) \quad (11)$$

para cualquier $1 \leq k \leq n$. Si G es conectado, entonces la desigualdad es estricta, excepto si $k = 1$ y G es regular.

Demostración. Supongamos que $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$. De la identidad fundamental (7), tenemos $A_\beta(G) + (\alpha - \beta)L(G) = A_\alpha(G)$. Entonces, por la desigualdad de Weyl (6),

$$\lambda_k(A_\beta(G)) + (\alpha - \beta)\lambda_n(L(G)) \leq \lambda_k(A_\alpha(G)), \quad (12)$$

y dado que $\lambda_n(L(G)) = 0$, se sigue que para cualquier $1 \leq k \leq n$,

$$\lambda_k(A_\beta(G)) \leq \lambda_k(A_\alpha(G)).$$

Si G es conectado y la igualdad se cumple en (12), desde el resultado dado por So, se sigue que $\lambda_k(A_\alpha(G))$, $\lambda_k(A_\beta(G))$ y $\lambda_n(L(G)) = 0$ tienen un autovector en común, el cual corresponde al n -vector constante de unos \mathbf{e}_n o a un múltiplo de él. Ahora, dado que G es conectado esto implica que las matrices $A_\alpha(G)$ y $A_\beta(G)$ son matrices no negativas irreducibles, y desde el Teorema de Perron-Frobenius se sigue que el autovalor involucrado en la igualdad es el radio espectral, es decir, $k = 1$. Finalmente, desde la consecuencia inmediata (10) se obtiene que G es regular. ■

Teorema 3 *Sea G un grafo de n vértices. Entonces,*

- *La función $\lambda_k(A_\alpha(G))$ es Lipschitz continua en α para cualquier $1 \leq k \leq n$.*
- *$\lambda_1(A_\alpha(G))$ es convexo en α , y $\lambda_n(A_\alpha(G))$ es cóncavo en α .*

Demostración. Desde la Teoría Espectral de Grafos sabemos que

$$\lambda_1(L(G)) \leq n,$$

luego, la igualdad fundamental (7) y la respectiva desigualdad de Weyl (6) implican que

$$\lambda_k(A_\alpha(G)) - \lambda_k(A_\beta(G)) \leq (\alpha - \beta)\lambda_k(L(G)) \leq (\alpha - \beta)\lambda_1(L(G)) \leq (\alpha - \beta)n,$$

por lo tanto, la función $\lambda_k(A_\alpha(G))$ es Lipschitz continua en α para cualquier $1 \leq k \leq n$.

Ahora, sean $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$. Considerando

$$\alpha = (1 - t)\alpha_1 + t\alpha_2, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

tenemos $A_\alpha(G) = (1 - t)A_{\alpha_1}(G) + tA_{\alpha_2}(G)$. En efecto,

$$\begin{aligned} A_\alpha(G) &= A_{(1-t)\alpha_1+t\alpha_2}(G) \\ &= ((1-t)\alpha_1 + t\alpha_2)D(G) + (1 - ((1-t)\alpha_1 + t\alpha_2))A(G) \\ &= ((1-t)\alpha_1 + t\alpha_2)D(G) + (1 - ((1-t)\alpha_1 + t\alpha_2))A(G) + tA(G) - tA(G) \\ &= (1-t)(\alpha_1 D(G) + (1 - \alpha_1)A(G)) + t(\alpha_2 D(G) + (1 - \alpha_2)A(G)) \\ &= (1-t)A_{\alpha_1}(G) + tA_{\alpha_2}(G). \end{aligned}$$

Considerando la función $\lambda_k(A_\alpha(G))$ y la desigualdad de Weyl (6) tenemos

$$(1-t)\lambda_k(A_{\alpha_1}(G)) + t\lambda_k(A_{\alpha_2}(G)) \leq \lambda_k(A_\alpha(G)) \leq (1-t)\lambda_k(A_{\alpha_1}(G)) + t\lambda_1(A_{\alpha_2}(G)).$$

Si $k = 1$, tenemos que

$$\lambda_1(A_\alpha(G)) \leq (1-t)\lambda_1(A_{\alpha_1}(G)) + t\lambda_1(A_{\alpha_2}(G)),$$

luego se sigue la convexidad de $\lambda_1(A_\alpha(G))$ en α . De manera similar, si $k = n$, tenemos que

$$(1-t)\lambda_n(A_{\alpha_1}(G)) + t\lambda_n(A_{\alpha_2}(G)) \leq \lambda_n(A_\alpha(G)),$$

y así, se sigue la concavidad de $\lambda_n(A_\alpha(G))$ en α .

■

3.2. Semidefinidad positiva de $A_\alpha(G)$

Una importante propiedad de la matriz Laplaciana sin signo $Q(G)$ es ser una matriz semidefinida positiva. Esta propiedad no es cierta para $A_\alpha(G)$ si α es suficientemente pequeño. El siguiente teorema nos entrega condiciones para que $A_\alpha(G)$ sea una matriz semidefinida positiva y/o definida positiva.

Teorema 4 *Si $\alpha > 1/2$, entonces $A_\alpha(G)$ es semidefinida positiva. Si además G no tiene vértices aislados, entonces $A_\alpha(G)$ es definida positiva.*

Demostración. Notemos que

$$\lambda_n(A_\alpha(G)) = \min\{\lambda_n(A_\alpha(H)) : H \text{ es una componente de } G\}. \quad (13)$$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, tenemos $A_{\frac{1}{2}}(G) = \frac{1}{2}Q(G)$. Así,

$$\lambda_n(A_{\frac{1}{2}}(G)) = \lambda_n\left(\frac{1}{2}Q(G)\right) \geq 0.$$

Sea $\alpha > \frac{1}{2}$. Sea H una componente de G .

Caso: H no es un vértice aislado. En este caso,

$$\lambda_n(A_\alpha(H)) > \lambda_n(A_{\frac{1}{2}}(H)) \geq 0.$$

Caso: H es un vértice aislado. En este caso,

$$\lambda_n(A_\alpha(H)) = 0.$$

Finalmente, los resultados se obtienen aplicando estos casos en (13). ■

Antes de continuar, recordemos los siguientes conceptos desde la Teoría de Grafos:

- La coloración de un grafo es un tipo especial de etiquetado de sus vértices utilizando colores.
- Una r -coloración de un grafo es la utilización de r colores para colorear un grafo.
- Una r -coloración es propia si vértices adyacentes tienen diferentes colores.
- Un grafo es r -coloreable si tiene una r -coloración propia.
- El número cromático de un grafo G , denotado por $\chi(G)$, es el menor número r tal que G sea r -coloreable.

Teorema 5 (Cota de Hoffman, [8]) *Sea G un grafo de n vértices con número cromático $\chi(G)$, y sea $A(G)$ su matriz de adyacencia. Tenemos que*

$$\chi(G) \geq 1 - \frac{\lambda_1(A(G))}{\lambda_n(A(G))}$$

donde $\lambda_1(A(G))$ y $\lambda_n(A(G))$ denotan el mayor y el menor autovalor de la matriz de adyacencia de G , respectivamente.

Teorema 6 Sea G un grafo d -regular con número cromático $\chi(G)$. Si $\alpha < \frac{1}{\chi(G)}$, entonces $A_\alpha(G)$ no es semidefinida positiva.

Demostración. Sea G un grafo d -regular y sea $A(G)$ su matriz de adyacencia. La cota de Hoffman implica que

$$\lambda_n(A(G)) \leq -\frac{\lambda_1(A(G))}{\chi(G) - 1} = -\frac{d}{\chi(G) - 1}.$$

Si $\alpha < \frac{1}{\chi(G)}$, de (9) tenemos

$$\begin{aligned} \lambda_n(A_\alpha(G)) &\leq \alpha d - (1 - \alpha) \frac{d}{\chi(G) - 1} \\ &= \left(\alpha - \frac{1}{\chi(G)} \right) \frac{\chi(G)d}{\chi(G) - 1} < 0, \end{aligned}$$

luego, el resultado sigue. ■

Recientemente en [9] los autores denotaron por $\alpha_0(G)$ al menor valor de α para el cual $A_\alpha(G)$ es semidefinida positiva y demostraron:

1. Si G es d -regular, entonces

$$\alpha_0 = \frac{-\lambda_n(A(G))}{d - \lambda_n(A(G))}$$

donde $\lambda_n(A(G))$ denota el menor autovalor de $A(G)$;

2. G contiene una componente bipartita si y sólo si $\alpha_0(G) = \frac{1}{2}$;
3. Si G es r -coloreable, entonces $\alpha_0(G) \geq \frac{1}{r}$.

3.3. Algunas cotas basadas en grados de vértices

En general, las cotas basadas en grados de vértices son las cotas más usadas en Teoría Espectral de Grafos. En esta sección daremos algunas cotas para $A_\alpha(G)$, la primera de ellas se sigue desde el Teorema 2.

Corolario 2 *Sea G un grafo de n vértices con grados $\Delta(G) = d(1) \geq \dots \geq d(n)$ y $\alpha \in [0, 1]$. Si $1 \leq k \leq n$, entonces*

$$\lambda_k(A_\alpha(G)) \leq d(k).$$

En particular, $\lambda_1(A_\alpha(G)) \leq \Delta(G)$.

Demostración. Desde el Teorema 2, sabemos que para $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ se tiene

$$\lambda_k(A_\alpha(G)) \leq \lambda_k(A_\beta(G)).$$

Si $\beta = 1$, tenemos

$$\lambda_k(A_\alpha(G)) \leq \lambda_k(D(G)) = d(k).$$

Luego el resultado sigue. En particular, si $k = 1$ es inmediato que $\lambda_1(A_\alpha(G)) \leq \Delta(G)$.

■

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de las desigualdades de Weyl (6).

Corolario 3 *Si $\alpha \in [0, 1]$, entonces*

$$\alpha\delta + (1 - \alpha)\lambda_k(A(G)) \leq \lambda_k(A_\alpha(G)) \leq \alpha\Delta + (1 - \alpha)\lambda_k(A(G)).$$

Para $\lambda_1(A_\alpha(G))$ tenemos una cota inferior, la cual generaliza un resultado de Lovász ([10], Problema 11.14):

Teorema 7 Si G es un grafo con $\Delta(G) = \Delta$ y $\alpha \in [0, 1]$, entonces

$$\lambda_1(A_\alpha(G)) \geq \frac{1}{2}(\alpha(\Delta + 1) + \sqrt{\alpha^2(\Delta + 1)^2 + 4\Delta(1 - 2\alpha)}).$$

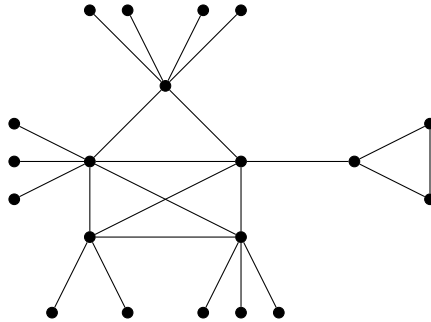
Si G es conectado, la igualdad se cumple si y sólo si $G = K_{1,\Delta}$.

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Teorema 7.

Corolario 4 Sea G un grafo con $\Delta(G) = \Delta$. Si $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ entonces,

$$\lambda_1(A_\alpha(G)) \geq \alpha(\Delta + 1).$$

Ejemplo 1 Consideremos el siguiente grafo G cuyo mayor grado es $\Delta = 7$:



Luego, denotando por *cota teo* a la cota obtenida en el Teorema 7 y por *cota inf* a la cota obtenida en el Corolario 4 se tiene:

α	<i>cota teo</i>	<i>cota inf</i>	$\lambda_1(A_\alpha(G))$
0	2.6458	0	3.9518
0.01	2.6595	0.08	3.9644
0.1	2.8	0.8	4.0843
0.3	3.2591	2.4	4.3997
0.5	4	4	4.8067
0.8	5.6576	-	5.7993
0.9	6.3129	-	6.3426
0.99	6.9301	-	6.9304
1	7	-	7

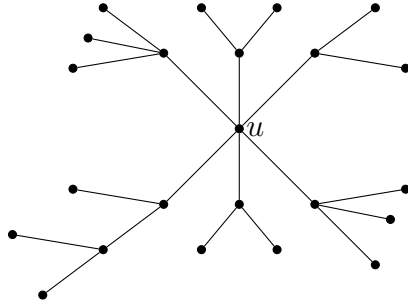
Observamos que la cota del Teorema 7 se alcanza sólo para $\alpha = 1$. ♠

4. El α -espectro de un árbol Bethe generalizado

Los resultados de los Capítulos 4 y 5 han sido deducidos en el trabajo [11], en el cual el Tesista ha participado como co-autor. Ellos han sido introducidos para una mayor completitud de esta Tesis y de futuros trabajos que puedan originarse. El objetivo de este Capítulo es determinar el α -espectro de un tipo especial de grafos, donde los grafos en estudio son árboles; más precisamente árboles Bethe y árboles Bethe generalizados. Para comenzar, recordemos que $d(u)$ denota el grado del vértice u , Δ denota el máximo grado del grafo G y que la longitud de un camino es la cantidad de lados que tiene. Para los propósitos de este Capítulo, es importante introducir los siguientes conceptos:

- La *distancia* $d(v, u)$ desde un vértice u a un vértice v es la longitud del camino más corto que conecta al vértice v con el vértice u .
- La *excentricidad de un vértice* u , denotada por e_u , es la distancia más grande entre u y cualquier otro vértice del grafo.
- Dado un grafo con raíz, se define el *nivel de un vértice* v como la distancia desde el vértice v hasta el vértice raíz incrementado en uno.

Ejemplo 2 Consideremos el siguiente grafo con raíz u



Observamos que en este grafo $e_u = 3$; $\Delta = 6$ y $k = 4$. ♠

En [12], se define el concepto de árbol Bethe $B_{d,k}$ como un árbol con raíz de k niveles tal que:

- el vértice raíz tiene grado igual a d ;
- los vértices en el nivel j ($2 \leq j \leq k - 1$) tienen grado $d + 1$; y
- los vértices en el nivel k tienen grado igual a 1 (vértices pendientes).

Cabe destacar que para todo d el árbol Bethe $B_{d,1}$ es un vértice aislado, mientras que para $k > 1$ el árbol Bethe $B_{2,k}$ corresponde al árbol binario, el cual es un grafo de gran relevancia en aplicaciones computacionales. La figura 1 representa el árbol binario $B_{2,4}$.

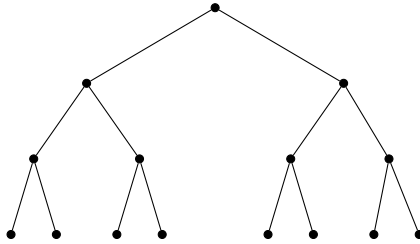
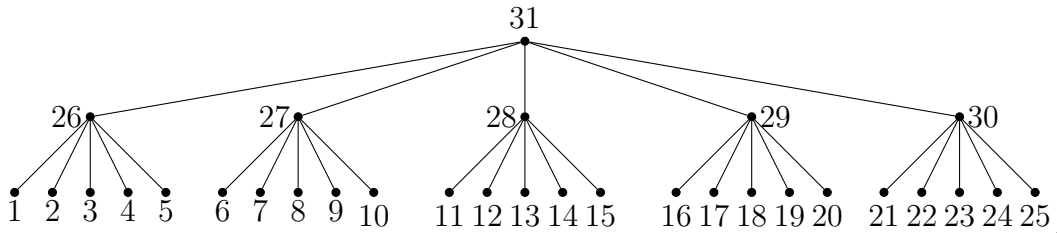


Figura 1: Árbol binario $B_{2,4}$

Como lo ilustra el siguiente ejemplo, etiquetaremos los vértices de $B_{d,k}$ con los números $1, \dots, n$ de izquierda a derecha, comenzando por el último nivel k y terminando en el vértice raíz.

Ejemplo 3 Consideremos el siguiente árbol:



Observamos que este árbol tiene 3 niveles y se tiene que:

- la raíz tiene grado 5;
- los vértices en el nivel 2 tienen grado 6; y
- los vértices en el nivel 3 tienen grado igual a 1 (vértices pendientes),

por lo tanto, es un árbol Bethe $B_{5,3}$.♠

En [13] el profesor O. Rojo generalizó el concepto de árbol Bethe como sigue: Un árbol con raíz es llamado *árbol Bethe generalizado* si los vértices en el mismo nivel tienen el mismo grado. De aquí en adelante, denotamos por B_k a un árbol Bethe generalizado de k niveles. Dado un B_k y un entero $1 \leq j \leq k$, denotamos por

- n_{k-j+1} al número de vértices en el nivel j ,
- d_{k-j+1} al grado de los vértices en el nivel j ,

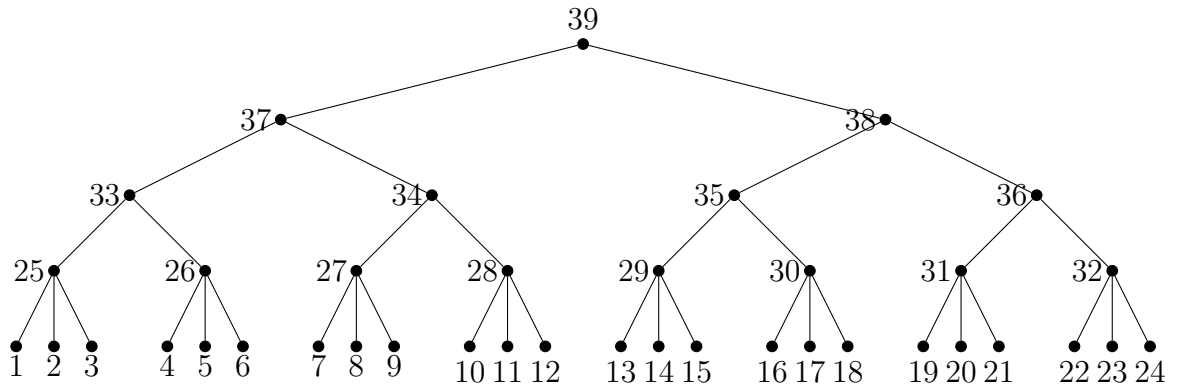
donde $n_1 \geq \dots \geq n_k$, y en particular, $d_1 = 1$ y $n_k = 1$. Por otra parte, sea $m_j = \frac{n_j}{n_{j+1}}$ enteros positivos, para cualquier $1 \leq j \leq k-1$. Luego, para cualquier $1 \leq j \leq k-2$,

$$n_j = (d_{j+1} - 1)n_{j+1}, \quad (14)$$

en particular,

$$n_{k-1} = d_k = m_{k-1}. \quad (15)$$

Ejemplo 4 Consideremos el siguiente árbol:



Observamos que es un árbol de 5 niveles cuyos vértices en el mismo nivel j para $j = 1, \dots, 5$ tienen el mismo grado d_j , por lo tanto, es un árbol Bethe generalizado B_5 . En particular, sus grados d_j y cantidad de vértices n_j en el nivel j , para $j = 1, \dots, 5$ son:

Nivel j	1	2	3	4	5
d_j	1	4	3	3	2
n_j	24	8	4	2	1



4.1. El α -espectro de un árbol Bethe generalizado

En esta subsección se determinará el α -espectro de un árbol Bethe generalizado, y en particular, se aplicará este resultado para obtener el α -espectro de un árbol Bethe. En lo que sigue, $\beta = 1 - \alpha$ para $\alpha \in [0, 1]$. Por otra parte, con el fin de representar $A_\alpha(B_k)$ de una manera práctica, recordemos que el producto Kronecker $A \otimes B$ de dos matrices $A = (a_{i,j})$ y $B = (b_{i,j})$ de tamaño $m \times m$ y $n \times n$, es una $mn \times mn$ matriz definida como $A \otimes B = (a_{i,j}B)$. Además, dos propiedades básicas de $A \otimes B$ son las identidades

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T \quad \text{y} \quad (A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD)$$

las cuales se cumplen para cualesquier matrices de tamaño apropiados. A partir del etiquetado de B_k descrito anteriormente, la matriz $A_\alpha(B_k)$ puede ser representada como una matriz tridiagonal simétrica por bloques

$$A_\alpha(B_k) = \begin{bmatrix} \alpha I_{n_1} & \beta I_{n_2} \otimes \mathbf{e}_{m_1} & 0 & & 0 \\ \beta I_{n_2} \otimes \mathbf{e}_{m_1}^T & \alpha d_2 I_{n_2} & \beta I_{n_3} \otimes \mathbf{e}_{m_2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \beta I_{n_{k-1}} \otimes \mathbf{e}_{m_{k-2}}^T & \alpha d_{k-1} I_{n_{k-1}} & \beta \mathbf{e}_{m_{k-1}} \\ 0 & & & 0 & \beta \mathbf{e}_{m_{k-1}}^T & \alpha d_k \end{bmatrix},$$

donde, como fue descrito anteriormente, I_n y \mathbf{e}_n denotan la matriz identidad de orden $n \times n$ y el n -vector columna de unos, respectivamente.

Dado un árbol Bethe generalizado B_k , se definen los polinomios $P_0(\lambda), \dots, P_k(\lambda)$ como sigue:

Definición 1 Sea

$$P_0(\lambda) = 1, P_1(\lambda) = \lambda - \alpha,$$

y

$$P_j(\lambda) = (\lambda - \alpha d_j)P_{j-1}(\lambda) - \beta^2 m_{j-1} P_{j-2}(\lambda)$$

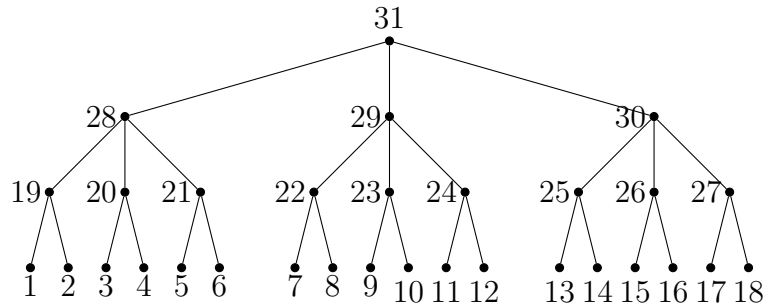
para $j = 2, \dots, k$

La representación de $A_\alpha(B_k)$ mediante el producto Kronecker es útil para demostrar el siguiente resultado que expresa el polinomio característico de $A_\alpha(B_k)$ mediante los polinomios $P_0(\lambda), \dots, P_k(\lambda)$.

Teorema 8 El polinomio característico $\phi(\lambda)$ de $A_\alpha(B_k)$ satisface

$$\phi(\lambda) = P_k(\lambda) \prod_{j=1}^{k-1} P_j(\lambda)^{n_j - n_{j+1}}.$$

Ejemplo 5 Consideremos el árbol Bethe generalizado B_4 ,



donde

Nivel j	1	2	3	4
d_j	1	3	4	3
n_j	18	9	3	1

Mediante el producto kronecker, obtenemos la siguiente expresión para la matriz α -adyacencia de B_4 :

$$A_\alpha(B_4) = \begin{bmatrix} \alpha I_{18} & \beta I_9 \otimes \mathbf{e}_2 & 0 & 0 \\ \beta I_9 \otimes \mathbf{e}_2^T & 3\alpha I_9 & \beta I_3 \otimes \mathbf{e}_3 & 0 \\ 0 & \beta I_3 \otimes \mathbf{e}_3^T & 4\alpha I_3 & \beta \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & \beta \mathbf{e}_3^T & 3\alpha \end{bmatrix}.$$

Ahora, reducimos $\phi(\lambda) = |\lambda I_{31} - A_\alpha(B_4)|$ hasta obtener el determinante de una matriz sobre triangular superior dada por

$$\phi(\lambda) = \begin{vmatrix} P_1(\lambda)I_{18} & -\beta I_9 \otimes \mathbf{e}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{P_2(\lambda)}{P_1(\lambda)}I_9 & -\beta I_3 \otimes \mathbf{e}_3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{P_3(\lambda)}{P_2(\lambda)}I_3 & -\beta \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{P_4(\lambda)}{P_3(\lambda)} \end{vmatrix},$$

donde,

- $P_0(\lambda) = 1$
- $P_1(\lambda) = \lambda - \alpha$
- $P_2(\lambda) = (\lambda - 3\alpha)(\lambda - \alpha) - 2\beta^2$
- $P_3(\lambda) = (\lambda - 4\alpha)[(\lambda - 3\alpha)(\lambda - \alpha) - 2\beta^2] - 3\beta^2(\lambda - \alpha)$
- $P_4(\lambda) = (\lambda - 3\alpha)[(\lambda - 4\alpha)[(\lambda - 3\alpha)(\lambda - \alpha) - 2\beta^2] - 3\beta^2(\lambda - \alpha)] - 3\beta^2[(\lambda - 3\alpha)(\lambda - \alpha) - 2\beta^2]$.

Por lo tanto, el polinomio característico de $A_\alpha(B_4)$ puede ser expresado como

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda) &= P_1(\lambda)^{18} \left(\frac{P_2(\lambda)}{P_1(\lambda)}\right)^9 \left(\frac{P_3(\lambda)}{P_2(\lambda)}\right)^3 \frac{P_4(\lambda)}{P_3(\lambda)} \\
&= P_1(\lambda)^9 P_2(\lambda)^6 P_3(\lambda)^2 P_4(\lambda). \spadesuit
\end{aligned}$$

Definición 2 Para $j = 1, 2, \dots, k-1$, sea T_j la $j \times j$ submatriz principal líder de la $k \times k$ matriz tridiagonal simétrica

$$T_k = \begin{bmatrix} \alpha & \beta\sqrt{d_2-1} & 0 & & 0 \\ \beta\sqrt{d_2-1} & \alpha d_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \beta\sqrt{d_{k-1}-1} & \\ & & \beta\sqrt{d_{k-1}-1} & \alpha d_{k-1} & \beta\sqrt{d_k} \\ 0 & & 0 & \beta\sqrt{d_k} & \alpha d_k \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Dado que $d_s > 1$ para todo $s = 2, 3, \dots, j$, cada matriz T_j tiene entradas codiagonales no nulas y es sabido que sus autovalores son simples. Usando la conocida fórmula recursiva de tres términos para los polinomios característicos de las submatrices principales líderes de una matriz tridiagonal simétrica y las fórmulas (14) y (15), es inmediata la siguiente afirmación:

Lema 5 Sea B_k un árbol Bethe generalizado y $\alpha \in [0, 1)$. Si las matrices T_1, \dots, T_k son definidas como en la Definición 2, entonces

$$|\lambda I - T_j| = P_j(\lambda)$$

para cualquier $1 \leq j \leq k$.

El Teorema 8, el Lema 5, y la propiedad de intercalamiento para autovalores de matrices Hermíticas nos conducen a las siguientes afirmaciones, extendiendo los resultados en [14] :

Teorema 9 *Sea B_k un árbol Bethe generalizado, y $\alpha \in [0, 1)$. Si las matrices T_1, \dots, T_k son definidas como en la Definición 2, entonces:*

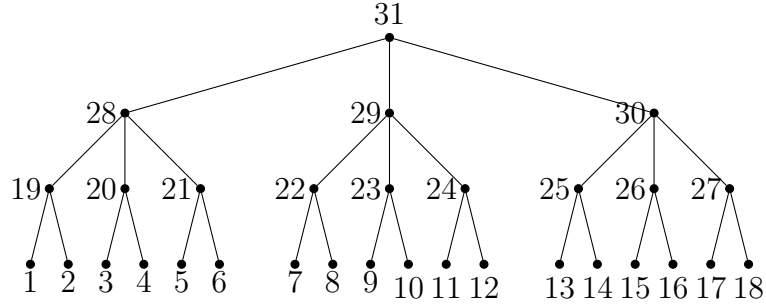
1. *El α -espectro de B_k es la unión de multiconjuntos*

$$\sigma(T_1) \cup \dots \cup \sigma(T_k); \tag{17}$$

donde $\sigma(T_i)$ denota el espectro de la matriz T_i para $1 \leq i \leq k$.

2. *La multiplicidad de cada autovalor de T_j como un autovalor de $A_\alpha(B_k)$ es $n_j - n_{j+1}$ si $1 \leq j \leq k - 1$, y es 1 si $j = k$. En particular, α es autovalor de $A_\alpha(B_k)$ con multiplicidad al menos $n_1 - n_2$. Si algunos autovalores obtenidos en diferentes matrices son iguales, sus multiplicidades son también agregadas;*
3. *El mayor (menor) autovalor de T_k es el mayor (menor) autovalor de $A_\alpha(B_k)$, respectivamente.*

Ejemplo 6 Consideremos el árbol Bethe generalizado B_4 ,



En el ejemplo anterior, obtuvimos una expresión para el polinomio característico de $A_\alpha(B_4)$ dada por

$$\phi(\lambda) = P_1(\lambda)^9 P_2(\lambda)^6 P_3(\lambda)^2 P_4(\lambda),$$

donde $P_1(\lambda)$, $P_2(\lambda)$, $P_3(\lambda)$ y $P_4(\lambda)$ son definidos como antes. Ahora queremos hallar el α -espectro de B_4 , para ello debemos definir las matrices T_1 , T_2 , T_3 y T_4 . Dado que

Nivel j	1	2	3	4
d_j	1	3	4	3
n_j	18	9	3	1

desde la Definición 2, para $\alpha = 0.2$ se sigue:

- $T_1 = [0.2]$, $\sigma(T_1) = \{0.2\}$
cuyo autovalor tiene multiplicidad $n_1 - n_2 = 18 - 9 = 9$.
- $T_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8\sqrt{2} \\ 0.8\sqrt{2} & 0.6 \end{bmatrix}$, $\sigma(T_2) = \{-0.7489, 1.5489\}$
cuyos autovalores tienen multiplicidad $n_2 - n_3 = 9 - 3 = 6$.

$$\blacksquare T_3 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8\sqrt{2} & 0 \\ 0.8\sqrt{2} & 0.6 & 0.8\sqrt{3} \\ 0 & 0.8\sqrt{3} & 0.8 \end{bmatrix}, \sigma(T_3) = \{-1.2352, 0.4442, 2.3910\}$$

cuyos autovalores tienen multiplicidad $n_3 - n_4 = 3 - 1 = 2$.

$$\blacksquare T_4 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0.8\sqrt{2} & 0.6 & 0.8\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0.8\sqrt{3} & 0.8 & 0.8\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0.8\sqrt{3} & 0.2 \end{bmatrix}, \sigma(T_4) = \{-1.5135, -0.2837, 1.1985, 2.7986\}$$

cuyos autovalores son simples.

Desde el Lema 5, observamos que

$$|\lambda I - T_j| = P_j(\lambda); \text{ para } 1 \leq j \leq 4.$$

Así, por el Teorema 9, para $\alpha = 0.2$ se tiene que

$$\{-1.5135, -1.2352^{[2]}, -0.7489^{[6]}, -0.2837, 0.2^{[9]}, 0.4442^{[2]}, 1.1985, 1.5489^{[6]}, 2.3910^{[2]}, 2.7986\},$$

es el α -espectro de $A_{0.2}(B_4)$. ♠

4.2. El α -espectro de un árbol Bethe

Como consecuencia inmediata del Teorema 9, obtenemos el siguiente resultado que nos permite hallar el α -espectro de un árbol Bethe.

Corolario 5 *Sea $\alpha \in [0, 1)$, y $\beta = 1 - \alpha$. Para cualquier $1 \leq j \leq k$, sea T_j la submatriz principal líder de orden $j \times j$ de la $k \times k$ matriz tridiagonal simétrica*

$$T_k = \begin{bmatrix} \alpha & \beta\sqrt{d} & 0 & & 0 \\ \beta\sqrt{d} & \alpha(d+1) & \beta\sqrt{d} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha(d+1) & \beta\sqrt{d} \\ 0 & & 0 & \beta\sqrt{d} & \alpha d \end{bmatrix}.$$

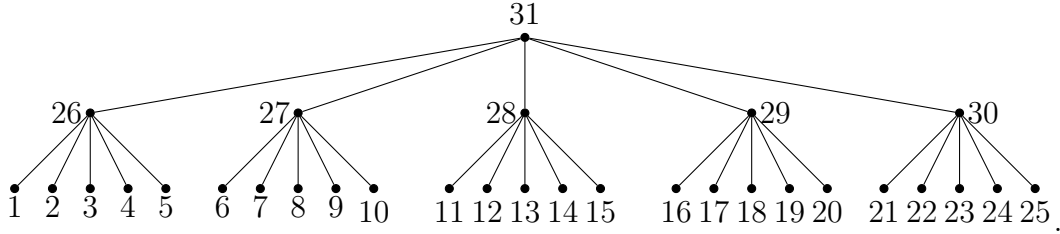
1. El α -espectro de $B_{d,k}$ es la unión de multiconjuntos

$$\sigma(T_1) \cup \cdots \cup \sigma(T_k); \quad (18)$$

donde $\sigma(T_i)$ denota el espectro de la matriz T_i para $1 \leq i \leq k$.

2. La multiplicidad de cada autovalor de T_j como un autovalor de $A_\alpha(B_{d,k})$ es $d^{k-j-1}(d-1)$ si $1 \leq j \leq k-1$, y es 1 si $j = k$. En particular, α es autovalor de $A_\alpha(B_{d,k})$ con multiplicidad al menos $d^{k-2}(d-1)$. Si algunos autovalores obtenidos en diferentes matrices son iguales, sus multiplicidades son agregadas también;
3. El mayor (menor) autovalor de T_k es el mayor (menor) autovalor de $A_\alpha(B_{d,k})$, respectivamente.

Ejemplo 7 Consideremos el árbol Bethe $B_{5,3}$, luego, para $\alpha=0.3$ se tiene:



- $T_1 = [0.3]$, $\sigma(T_1) = \{0.3\}$
 cuyo autovalor tiene multiplicidad $5^{3-1-1}(5-1) = 20$.
- $T_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7\sqrt{5} \\ 0.7\sqrt{5} & 1.8 \end{bmatrix}$, $\sigma(T_2) = \{-0.6857, 2.7857\}$
 cuyos autovalores tienen multiplicidad $5^{3-2-1}(5-1) = 4$.
- $T_3 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7\sqrt{5} & 0 \\ 0.7\sqrt{5} & 1.8 & 0.7\sqrt{5} \\ 0 & 0.7\sqrt{5} & 1.5 \end{bmatrix}$, $\sigma(T_3) = \{-1.0230, 0.9610, 3.6620\}$
 cuyos autovalores son simples.

Así, por el Corolario 5, se tiene que el α -espectro de $B_{5,3}$ para $\alpha=0.3$ es

$$\sigma(A_{0.3}(B_{5,3})) = \{-1.0230, -0.6857^{[4]}, 0.3^{[20]}, 0.9610, 2.7857^{[4]}, 3.6620\}.$$



5. Cotas para el α -radio espectral de un grafo

El propósito de este Capítulo es entregar cotas generales para el α -radio espectral de un grafo G , las cuales nos permitirán acotar el α -radio espectral del camino P_n y de árboles Bethe generalizados.

Comenzaremos utilizando las desigualdades de Weyl (6) para entregar cotas superiores para el α -radio espectral de un grafo G .

Teorema 10 *Sea G un grafo cuyo mayor grado es Δ . Entonces,*

$$\rho(A_\alpha(G)) \leq \begin{cases} \alpha\rho(Q(G)) + (1 - 2\alpha)\rho(A(G)), & \text{si } 0 \leq \alpha \leq 1/2; \\ (1 - \alpha)\rho(Q(G)) + (2\alpha - 1)\Delta, & \text{si } 1/2 \leq \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (19)$$

Si G es conectado e irregular, la igualdad se cumple en (19) si y sólo si $\alpha = 0$, $\alpha = 1/2$ o $\alpha = 1$.

Demostración.

Caso 1: $0 \leq \alpha \leq 1/2$. Notamos que

$$A_\alpha(G) = \alpha D(G) + (1 - \alpha)A(G) = \alpha Q(G) + (1 - 2\alpha)A(G);$$

luego la desigualdad se sigue desde las desigualdades de Weyl (6). Sea G un grafo conectado e irregular, y asumamos para una contradicción $0 < \alpha < 1/2$ y que la igualdad se cumple en

$$\rho(A_\alpha(G)) \leq \alpha\rho(Q(G)) + (1 - 2\alpha)\rho(A(G)).$$

La condición para la igualdad implica que $\rho(Q(G))$ y $\rho(A(G))$ tienen un autovector en común \mathbf{x} ; dado que G es conectado, \mathbf{x} tiene entradas no nulas. Claramente \mathbf{x} es un autovector de $D(G)$, es decir, existe algún λ tal que $D(G)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Por lo tanto,

los grados de G son iguales, contradiciendo la premisa que G es irregular. Luego, si G es conectado e irregular, y la igualdad se cumple, entonces $\alpha = 0$ o $\alpha = 1/2$. La recíproca de este Teorema es inmediata.

Caso 2: $0 \leq \alpha \leq 1/2$. Notamos que

$$A_\alpha(G) = \alpha D(G) + (1 - \alpha)(Q(G) - D(G)) = (1 - \alpha)Q(G) + (2\alpha - 1)D(G);$$

luego, la desigualdad se sigue desde las desigualdades de Weyl (6). La condición para la igualdad puede ser probada como en el caso anterior, por esta razón su demostración será omitida. ■

Ahora, recordemos la identidad fundamental (8) dada por

$$A_\alpha(G) + A_{1-\alpha}(G) = Q(G).$$

Mediante esta identidad y las desigualdades de Weyl (6) obtenemos el siguiente resultado:

Lema 6 *Si G es un grafo y $\alpha \in [0, 1]$, entonces*

$$\rho(A_\alpha(G)) + \rho(A_{1-\alpha}(G)) \geq \rho(Q(G)). \quad (20)$$

Si G es regular, entonces la igualdad se cumple en (20) para cualquier $\alpha \in [0, 1]$. Si G es conectado y la igualdad se cumple en (20) para algún $\alpha \neq 1/2$, entonces G es regular.

Demostración. Aplicando las desigualdades de Weyl (6) a la identidad (8), la desigualdad (20) es inmediata. Si G es un grafo d -regular, entonces

$$\rho(A_\alpha(G)) = \alpha d + (1 - \alpha)d = d,$$

así la igualdad en (20) se cumple para cualquier $\alpha \in [0, 1]$. Ahora, sea G conectado y sea

$$\rho(A_\alpha(G)) + \rho(A_{1-\alpha}(G)) = \rho(Q(G))$$

para algún $\alpha \neq 1/2$. La condición de So para la igualdad en las desigualdades de Weyl implica que $\rho(Q(G))$, $\rho(A_\alpha(G))$, y $\rho(A_{1-\alpha}(G))$ tienen un autovector en común $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Luego, las igualdades

$$\alpha(D(G))\mathbf{x} + (1-\alpha)A(G)\mathbf{x} = \rho(A_\alpha(G))\mathbf{x}$$

y

$$D(G)\mathbf{x} + A(G)\mathbf{x} = \rho(Q(G))\mathbf{x}.$$

nos conducen a

$$(2\alpha - 1)D(G)\mathbf{x} = (\rho(A_\alpha(G)) + (\alpha - 1)\rho(Q(G)))\mathbf{x}.$$

Luego, para cualquier vértice $v \in V(G)$, vemos que

$$(2\alpha - 1)d(v)x_v = (\rho(A_\alpha(G)) + (\alpha - 1)\rho(Q(G)))x_v.$$

Dado que G es conectado, \mathbf{x} tiene entradas no nulas; en adición, $(2\alpha - 1) \neq 0$. Por lo tanto, G es regular, completando la demostración del Lema. ■

Observemos que podemos aplicar la identidad fundamental (8) para transformar cotas inferiores para $\rho(A_\alpha(G))$ en superiores, y viceversa. El siguiente Teorema utiliza esta idea en conjunto con el Teorema 10 para producir cotas inferiores para $\rho(A_\alpha(G))$.

Teorema 11 *Sea G un grafo cuyo mayor grado es Δ . Entonces,*

$$\rho(A_\alpha(G)) \geq \begin{cases} (1-\alpha)\rho(Q(G)) + (2\alpha-1)\Delta, & \text{si } 0 \leq \alpha \leq 1/2; \\ \alpha\rho(Q(G)) + (1-2\alpha)\rho(A(G)), & \text{si } 1/2 \leq \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (21)$$

Si G es conectado e irregular, la igualdad se cumple en (21) si y sólo si $\alpha = 1/2$.

Demostración. Para comenzar, notemos que la identidad (8), junto con las desigualdades de Weyl (6), entrega

$$\rho(A_\alpha(G)) + \rho(A_{1-\alpha}(G)) \geq \rho(Q(G)). \quad (22)$$

Caso 1: $0 \leq \alpha \leq 1/2$. Si consideramos $0 \leq \alpha \leq 1/2$, entonces $1/2 \leq 1 - \alpha \leq 1$, así la cota (19) implica que

$$\rho(A_{1-\alpha}(G)) \leq \alpha\rho(Q(G)) + (1 - 2\alpha)\Delta. \quad (23)$$

Luego, en vista de (22), obtenemos

$$\begin{aligned} \rho(A_\alpha(G)) &\geq \rho(Q(G)) - \rho(A_{1-\alpha}(G)) \\ &\geq \rho(Q(G)) - (1 - (1 - \alpha))\rho(Q(G)) - (2(1 - \alpha) - 1)\Delta \\ &= (1 - \alpha)\rho(Q(G)) + (2\alpha - 1)\Delta, \end{aligned}$$

probando el primer caso de (21). Sea G conectado e irregular. Si la igualdad se cumple en (21), entonces

$$\rho(A_\alpha(G)) + \rho(A_{1-\alpha}(G)) = \rho(Q(G)),$$

y el Lema 6 implica que $\alpha = 1/2$. Claramente, si $\alpha = 1/2$, entonces la igualdad se cumple en (21).

Caso 2: $1/2 \leq \alpha \leq 1$. La demostración de este caso se sigue de manera similar. Si $1/2 \leq \alpha \leq 1$, entonces $0 \leq 1 - \alpha \leq 1/2$, así la cota (19) produce

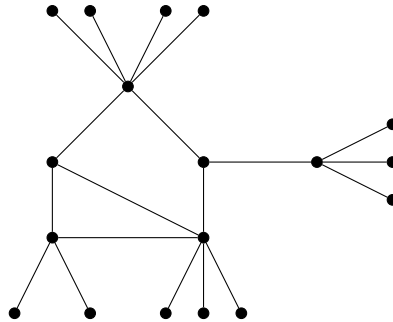
$$\begin{aligned} \rho(A_{1-\alpha}(G)) &\leq (1 - \alpha)\rho(Q(G)) + (1 - 2(1 - \alpha))\rho(A) \\ &= (1 - \alpha)\rho(Q(G)) + (2\alpha - 1)\rho(A). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \rho(A_\alpha(G)) &\geq \rho(Q(G)) - ((1 - \alpha)\rho(Q(G)) + (2\alpha - 1)\rho(A)) \\ &= \alpha\rho(Q(G)) + (1 - 2\alpha)\rho(A), \end{aligned}$$

probando el segundo caso de (21). La condición para la igualdad puede ser probada como en el caso anterior. ■

Ejemplo 8 Consideremos el siguiente grafo G cuyo mayor grado es $\Delta = 6$:



Luego, desde el Teorema 11 y denotando por *cota inf* i y *cota sup* i , para $i = 1, 2$, en los casos correspondientes a diferentes valores de $\alpha \in [0, 1]$ se tiene:

α	<i>cota inf</i> 1	<i>cota inf</i> 2	$\rho(A_\alpha(G))$	<i>cota sup</i> 1	<i>cota sup</i> 2
0	1.7296	-	3.1385	3.1385	-
0.01	1.7723	-	3.1475	3.1530	-
0.1	2.1566	-	3.2343	3.2838	-
0.3	3.0107	-	3.4846	3.5743	-
0.5	3.8648	3.8648	3.8648	3.8648	3.8648
0.8	-	4.3006	4.9151	-	5.1459
0.9	-	4.4458	5.4258	-	5.5730
0.99	-	4.5766	5.9402	-	5.9573
1	-	4.5911	6	-	6

Observamos que la cota superior se alcanza sólo para $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$ o $\alpha = 1$, mientras que la cota inferior se alcanza sólo para $\alpha = \frac{1}{2}$. ♠

5.1. Cotas para el α -radio espectral de P_n y B_k

A continuación, aplicamos los Teoremas 10 y 11 para estimar $\rho(A_\alpha(P_n))$. Para este propósito, recordemos que

$$\rho(A(P_n)) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \quad \text{y} \quad \rho(Q(P_n)) = 2 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

luego, combinando estos hechos con el Teorema 10 se obtiene una cota superior ajustada para $\rho(A_\alpha(P_n))$:

Corolario 6 *El radio espectral de $A_\alpha(P_n)$ satisface*

$$\rho(A_\alpha(P_n)) \leq \begin{cases} 2\alpha + 2(1-\alpha) \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right), & \text{si } 0 \leq \alpha < 1/2; \\ 2\alpha + 2(1-\alpha) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right), & \text{si } 1/2 \leq \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (24)$$

La igualdad se cumple si y sólo $\alpha = 0$, $\alpha = 1/2$, o $\alpha = 1$.

Demostración.

Caso 1: $0 \leq \alpha < 1/2$. Si $0 \leq \alpha < 1/2$, entonces (19) implica que

$$\begin{aligned} \rho(A_\alpha(P_n)) &\leq \alpha \rho(Q(P_n)) + (1-2\alpha) \rho(A(P_n)) \\ &= \alpha \left(2 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) + 2(1-2\alpha) \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \\ &= 2\alpha + 2(1-\alpha) \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) + 2\alpha \left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right) \\ &\leq 2\alpha + 2(1-\alpha) \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right). \end{aligned}$$

En este caso, es claro que si $\alpha = 0$, entonces la igualdad se cumple en (24). Recíprocamente, si

$$\rho(A_\alpha(P_n)) = 2\alpha + 2(1-\alpha) \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right),$$

entonces el caso 1 del Teorema 10, implica que $\alpha = 0$.

Caso 2: $1/2 \leq \alpha \leq 1$. Si $1/2 \leq \alpha \leq 1$, entonces (19) implica que

$$\begin{aligned}\rho(A_\alpha(G)) &\leq (1 - \alpha)\rho(Q(P_n)) + (2\alpha - 1)\Delta(P_n) \\ &= (1 - \alpha)\left(2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) + 2(2\alpha - 1) \\ &= 2\alpha + 2(1 - \alpha)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right).\end{aligned}$$

En este caso, es claro que si $\alpha = 1/2$ o $\alpha = 1$, entonces la igualdad se cumple en (24). Recíprocamente, si

$$\rho(A_\alpha(P_n)) = 2\alpha + 2(1 - \alpha)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

entonces el caso 2 del Teorema 10 implica que $\alpha = 1/2$ o $\alpha = 1$. ■

De manera similar, el Teorema 11 implica un cota inferior ajustada para $\rho(A_\alpha(P_n))$:

Corolario 7 *El radio espectral de $A_\alpha(P_n)$ satisface*

$$\rho(A_\alpha(P_n)) \geq \begin{cases} 2\alpha + 2(1 - \alpha)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right), & \text{si } 0 \leq \alpha \leq 1/2; \\ 2\alpha + 2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - 2(2\alpha - 1)\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right), & \text{si } 1/2 < \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (25)$$

La igualdad se cumple si y sólo si $\alpha = 1/2$.

Demostración. Si $0 \leq \alpha \leq 1/2$, entonces la desigualdad (21) implica que

$$\begin{aligned}\rho(A_\alpha(G)) &\geq (1 - \alpha)\rho(Q(P_n)) + (2\alpha - 1)\Delta(P_n) \\ &= (1 - \alpha)\left(2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) + 2(2\alpha - 1) \\ &= 2\alpha + 2(1 - \alpha)2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right).\end{aligned}$$

Si la igualdad se cumple en (25), entonces la condición para la igualdad en (21) implica que $\alpha = 1/2$. Si $1/2 < \alpha \leq 1$, entonces la desigualdad (21) implica que

$$\begin{aligned} \rho(A_\alpha(G)) &\geq \alpha \rho(Q(P_n)) + (1 - 2\alpha) \rho(A(P_n)) \\ &= \alpha \left(2 + 2 \cos \left(\frac{\pi}{n} \right) \right) + 2(1 - 2\alpha) \cos \left(\frac{\pi}{n+1} \right) \\ &\geq 2\alpha + 2\alpha \cos \left(\frac{\pi}{n} \right) - 2(2\alpha - 1) \cos \left(\frac{\pi}{n+1} \right). \end{aligned}$$

Es claro que en este caso la desigualdad (25) es siempre estricta. ■

Ejemplo 9 Consideremos el camino P_7 . Luego, desde los Corolarios 6 y 7, y denotando por *cota inf* i y *cota sup* i , para $i = 1, 2$, en los casos correspondientes a diferentes valores de $\alpha \in [0, 1]$ se tiene:

α	<i>cota inf</i> 1	<i>cota inf</i> 2	$\rho(A_\alpha(P_7))$	<i>cota sup</i> 1	<i>cota sup</i> 2
0	1.8019	-	1.8478	1.8478	-
0.01	1.8039	-	1.8486	1.8493	-
0.1	1.8217	-	1.8561	1.8630	-
0.3	1.8614	-	1.8759	1.8934	-
0.5	1.9010	-	1.9010	-	1.9010
0.8	-	1.9329	1.9527	-	1.9604
0.9	-	1.9435	1.9748	-	1.9802
0.99	-	1.9531	1.9973	-	1.9980
1	-	1.9542	2	-	2

Observamos que la cota superior se alcanza sólo para $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$ ó $\alpha = 1$, mientras que la cota inferior se alcanza sólo para $\alpha = \frac{1}{2}$. ♠

Finalmente, el siguiente resultado entrega cotas para el radio espectral de un árbol Bethe $B_{d,k}$.

Teorema 12 *Si $0 \leq \alpha \leq 1$, entonces*

$$\rho(A_\alpha(B_{d,k})) \leq \alpha(d+1) + 2(1-\alpha)\sqrt{d} \cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right) \quad (26)$$

y

$$\rho(A_\alpha(B_{d,k})) > \alpha(d+1) + 2(1-\alpha)\sqrt{d} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) - \frac{20\alpha\sqrt{d}}{k^3}. \quad (27)$$

Demostración. Sea $\beta = 1 - \alpha$. El apartado 3 del Corolario 5 implica que el α -radio espectral de $B_{d,k}$ es el mayor autovalor de la matriz de orden $k \times k$ dada por

$$T_k = \begin{bmatrix} \alpha & \beta\sqrt{d} & 0 & & 0 \\ \beta\sqrt{d} & (d+1)\alpha & \beta\sqrt{d} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & (d+1)\alpha & \beta\sqrt{d} \\ 0 & & 0 & \beta\sqrt{d} & d\alpha \end{bmatrix}.$$

Claramente, tenemos

$$T_k = \beta\sqrt{d}A(P_k) + \begin{bmatrix} \alpha & 0 & & & 0 \\ 0 & (d+1)\alpha & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & (d+1)\alpha & 0 \\ 0 & & & 0 & d\alpha \end{bmatrix},$$

luego, las desigualdades de Weyl (6) implican que

$$\begin{aligned} \rho(T_k) &= \rho(A_\alpha(B_{d,k})) \leq \beta\sqrt{d}\rho(A(P_k)) + (d+1)\alpha \\ &\leq (d+1)\alpha + 2(1-\alpha)\sqrt{d} \cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right). \end{aligned}$$

Para probar (27), recordemos que en [15], Teorema 9, se prueba que

$$\rho(Q(B_{d,k})) = (d+1) + 2\sqrt{d} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right).$$

Ahora, aplicando la identidad fundamental (8) y (26), obtenemos

$$\begin{aligned} \rho(A_\alpha(B_{d,k})) &\geq \rho(Q(B_{d,k})) - \rho(A_{1-\alpha}(B_{d,k})) \\ &\geq (d+1) + 2\sqrt{d} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) - 2\alpha\sqrt{d} \cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right) - (1-\alpha)(d+1) \\ &= \alpha(d+1) + 2(1-\alpha)\sqrt{d} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) - 2\alpha\sqrt{d} \left(\cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) \right). \end{aligned}$$

Por otra parte, el Teorema del Valor Medio implica que

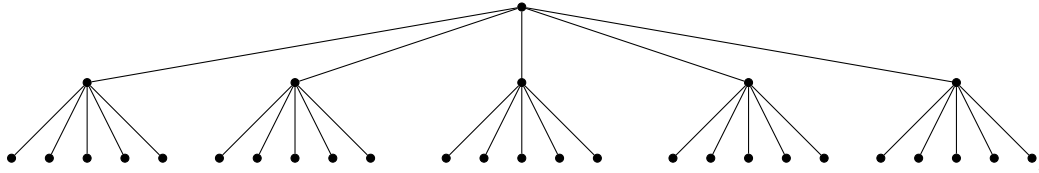
$$\cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) = \frac{\pi}{k(k+1)} \sin(\theta)$$

para algún $\theta \in [\pi/(k+1), \pi/k]$. Dado que $\sin(\theta) \leq \theta \leq \pi/k$, obtenemos

$$\cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) = \frac{\pi}{k(k+1)} \sin(\theta) < \frac{\pi^2}{k^2(k+1)} < \frac{10}{k^3},$$

completando la demostración de (27). ■

Ejemplo 10 Consideremos el árbol Bethe $B_{5,3}$ dado por



Luego, desde el Teorema 12 se tiene:

α	cota inferior	$\rho(A_\alpha(B_{5,3}))$	cota superior
0	1.7321	3.1623	3.1623
0.01	1.7582	3.1758	3.1907
0.1	1.9932	3.3063	3.4460
0.3	2.5155	3.6620	4.0136
0.5	3.0379	4.1180	4.5811
0.8	3.8213	5.0396	5.4325
0.9	4.0825	5.4629	5.7162
0.99	4.3175	5.9406	5.9716
1	4.3437	6	6

Observamos que la cota superior se alcanza sólo para $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$. ♠

5.2. Cota para el α -radio espectral de un árbol en términos del mayor grado

El propósito de esta sección es entregar una cota superior ajustada del α -radio espectral de un árbol T_Δ , donde Δ es el mayor grado del árbol T . En lo que sigue, denotaremos por $\rho(M)$ al radio espectral de la matriz M .

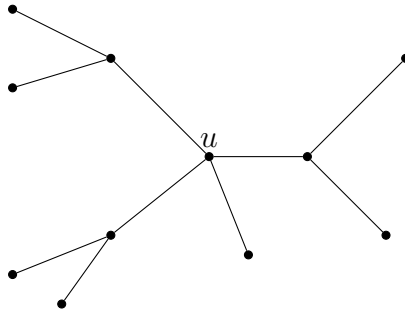
De la literatura, es sabido que para la matriz de adyacencia, Godsil [16] entregó la cota ajustada

$$\rho(A(T_\Delta)) < 2\sqrt{\Delta - 1}. \quad (28)$$

Para comprender un hecho que juega un rol fundamental en la demostración de la cota obtenida por Godsil, sea T_Δ un árbol con raíz cuyo mayor grado es Δ tal que:

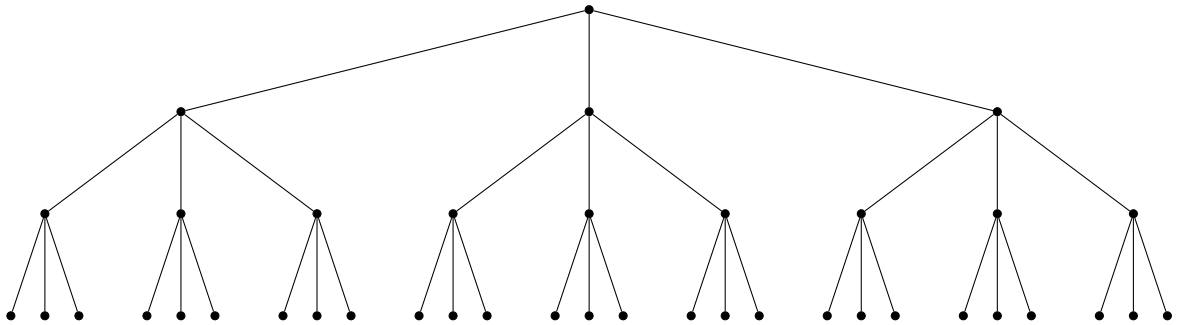
- u es vértice raíz de T_Δ con grado Δ ;
- $k = e_u + 1$, donde e_u es la excentricidad de u .

Consideremos el siguiente árbol T_Δ :

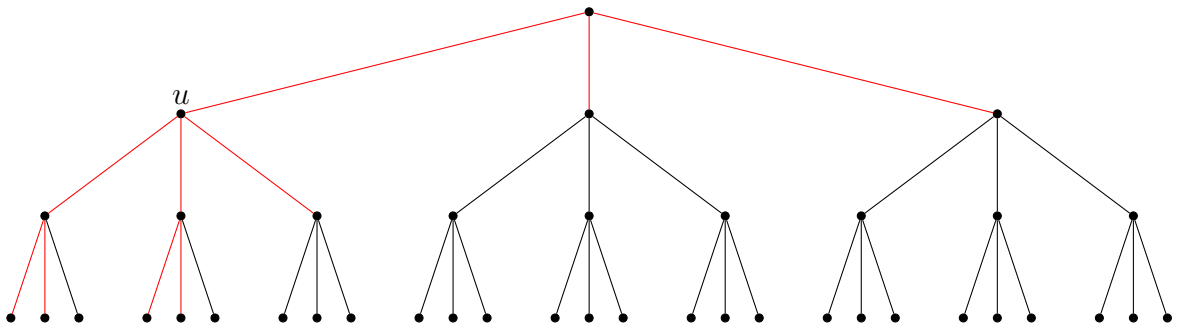


Observamos que la raíz u tiene grado $\Delta = 4$, $e_u = 2$ y $k = 3$.

Luego, para $k = e_u + 1 = 3$ consideremos $B_{\Delta-1,k} = B_{3,3}$ el árbol Bethe con raíz de $k = 3$ niveles dado por:



Ahora, observemos que el árbol T_Δ es un subgrafo inducido de $B_{3,3}$:



De esta manera, se sigue que un árbol T_Δ cuyo mayor grado es Δ puede ser incrustado en un árbol Bethe $B_{\Delta-1,k}$ para k suficientemente grande.

Para estimar el radio espectral de tales árboles Bethe, Godsil aplicó un resultado desde [12]. Tiempo después, Lovász resolvió el mismo problema y encontró de manera precisa el radio espectral de árboles Bethe (ver [17], Problemas 5 y 14).

Por otra parte, Stevanović [18] también propuso un cálculo auto-contenido, y adicionalmente, probó la cota ajustada

$$\rho(Q(T_\Delta)) < \Delta + 2\sqrt{\Delta - 1},$$

la cual fue indicada para el radio espectral $\rho(L(T_\Delta))$ de la matriz Laplaciana de T_Δ , pero dado que los árboles son grafos bipartitos, se sigue que $\rho(Q(T_\Delta)) = \rho(L(T_\Delta))$.

En el siguiente Teorema, se extienden los resultados de Godsil, Lovász, y Stevanović a toda la familia $\{A_\alpha(T_\Delta)\}$:

Teorema 13 *Si T_Δ es un árbol cuyo mayor grado es Δ y $\alpha \in [0, 1)$, entonces*

$$\rho(A_\alpha(T_\Delta)) < \alpha\Delta + 2(1 - \alpha)\sqrt{\Delta - 1}.$$

Demostración. Sea $\beta = 1 - \alpha$. Como ya ha sido mencionado, cada árbol T_Δ cuyo mayor grado es Δ puede ser incrustado en un árbol Bethe $B_{\Delta-1,k}$ para k suficientemente grande. Por lo tanto,

$$\rho(A_\alpha(T_\Delta)) \leq \rho(A_\alpha(B_{\Delta-1,k})).$$

Por otra parte, el Corolario 5 implica que

$$\rho(A_\alpha(B_{\Delta-1,k})) = \rho(T_k),$$

donde

$$T_k = \begin{bmatrix} \alpha & \beta\sqrt{\Delta-1} & 0 & & 0 \\ \beta\sqrt{\Delta-1} & \alpha\Delta & \beta\sqrt{\Delta-1} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \beta\sqrt{\Delta-1} & \alpha\Delta & \beta\sqrt{\Delta-1} \\ 0 & & 0 & \beta\sqrt{\Delta-1} & \alpha(\Delta-1) \end{bmatrix}.$$

Dado que T_k es una matriz no-negativa irreducible, sin sumas fila constantes, su mayor autovalor es menor que su mayor suma fila. Por lo tanto,

$$\rho(A_\alpha(B_{\Delta-1,k})) < \alpha\Delta + 2(1-\alpha)\sqrt{\Delta-1},$$

completando la demostración del Teorema 13. ■

Afirmación: La cota es ajustada a medida que $\alpha \in [0, 1)$ crece.

En efecto, sea C_α la cota superior obtenida en el Teorema anterior y sea $\rho(A_\alpha(T_\Delta))$ el α -radio espectral de T_Δ .

Desde las desigualdades de Weyl (6) se tiene que

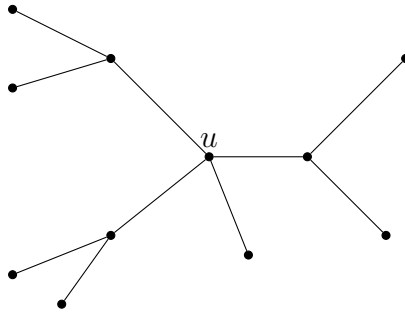
$$\rho(A_\alpha(T_\Delta)) \leq \alpha\Delta + (1-\alpha)\rho(A(T_\Delta)),$$

realizando la diferencia entre C_α y $\rho(A_\alpha(T_\Delta))$ obtenemos

$$\begin{aligned} C_\alpha - \rho(A_\alpha(T_\Delta)) &\leq \alpha\Delta + 2(1-\alpha)\sqrt{\Delta-1} - (\alpha\Delta + (1-\alpha)\rho(A(T_\Delta))) \\ &= 2(1-\alpha)\sqrt{\Delta-1} - (1-\alpha)\rho(A(T_\Delta)), \end{aligned}$$

tomando el límite cuando α tiende a 1, la diferencia entre C_α y $\rho(A_\alpha(T_\Delta))$ tiende a cero. Así la diferencia entre C_α y $\rho(A_\alpha(T_\Delta))$ va decreciendo a medida que α crece y en consecuencia la cota es ajustada.

Ejemplo 11 Consideremos el siguiente árbol T_Δ :



Luego, desde el Teorema 13 se tiene:

α	$\rho(A_\alpha(T_\Delta))$	Cota
0	2.3761	3.4641
0.1	2.4342	3.5177
0.3	2.5849	3.6249
0.5	2.8008	3.7321
0.8	3.3468	3.8928
0.9	3.6360	3.9464
0.99	3.9603	3.9946



6. La multiplicidad de α como autovalor de $A_\alpha(G)$

En este Capítulo estudiaremos la multiplicidad de α como autovalor de $A_\alpha(G)$ cuando el grafo G en estudio es uno de los grafos estudiados en el Capítulo 2 de la presente Tesis. Notemos que el estudio de la multiplicidad de $\alpha = 0$ como autovalor de la matriz α -adyacencia de un grafo G corresponde al estudio de la nulidad de la matriz adyacencia del grafo G , la cual ha sido estudiada de manera extensiva en ([19], [20]). Mientras que el estudio de la multiplicidad de $\alpha = 1$ corresponde al estudio de 1 como autovalor de la matriz de grados cuyo análisis es inmediato.

En lo que sigue, consideraremos $\alpha_j = \alpha \in (0, 1)$.

Corolario 8 *Sea C_n el ciclo de n vértices, y sea*

$$\alpha_j = \frac{-2 \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)}{1 - 2 \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)}. \quad (29)$$

Entonces, α_j es un autovalor de $A_\alpha(C_n)$ si y sólo si $j \in \{\lceil \frac{n}{4} \rceil, \dots, \lceil \frac{3n}{8} \rceil\}$.

Adicionalmente,

1. *Si n es par,*

$$m_{A_\alpha(C_n)}(\alpha_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } j = \frac{n}{2}; \\ 2, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (30)$$

2. *Si n es impar, la multiplicidad de α_j es igual a 2.*

Demostración. Comenzamos mencionando el siguiente hecho:

$$0 < \frac{x}{1+x} < 1 \text{ si y sólo si } x > 0,$$

cuya demostración es inmediata.

Ahora, desde el apartado 1 del Corolario 1, los autovalores de $A_\alpha(C_n)$ son

$$2\alpha + 2(1 - \alpha)\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right), \text{ para } j = 1, \dots, n; \quad (31)$$

luego, considerando (31) igual a α obtenemos (29) dada por

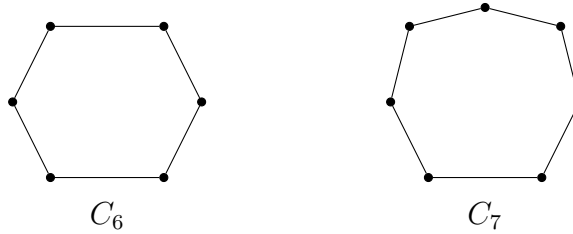
$$\alpha_j = \alpha = \frac{-2\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)}{1 - 2\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)}, \text{ para } j = 1, \dots, n.$$

Sea α_j como en (29) y sea $j \in \{\lceil \frac{n}{4} \rceil, \dots, \lceil \frac{3n}{8} \rceil\}$, entonces $-2\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) > 0$. Desde el hecho anterior, $0 < \alpha_j = \frac{-2\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)}{1 - 2\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)} < 1$.

Recíprocamente, supongamos que $0 < \alpha_j < 1$. Usando nuevamente el hecho anterior, obtenemos $-2\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) > 0$. Por lo tanto, $j \in \{\lceil \frac{n}{4} \rceil, \dots, \lceil \frac{3n}{8} \rceil\}$.

El resultado adicional es inmediato desde el hecho de que la función coseno es par. ■

Ejemplo 12 Sean C_6 y C_7 los grafos dados por



Considerando C_6 , desde el Corolario 8 tenemos que

$$\alpha_j = \frac{-2\cos\left(\frac{\pi j}{3}\right)}{1 - 2\cos\left(\frac{\pi j}{3}\right)},$$

es autovalor de $A_{\alpha_j}(C_6)$ si y sólo si $j \in \{2, 3\}$; esto es,

■ $\alpha_2 = \frac{-2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = 0.5;$

- $\alpha_3 = \frac{-2\cos(\pi)}{1-2\cos(\pi)} = 0.6667.$

Además, dado que n es par se tiene que $\frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3$, luego α_3 es un autovalor simple de la matriz $A_{\alpha_3}(C_6)$, mientras que α_2 es un autovalor de multiplicidad 2 de la matriz $A_{\alpha_2}(C_6)$.

Observamos que los cálculos de los α_j -espectros de C_6 , para $j \in \{2, 3\}$ son:

$$\sigma(A_{0.5}(C_6)) = \{0, 0.5^{[2]}, 1.5^{[2]}, 2\},$$

$$\sigma(A_{0.6667}(C_6)) = \{0, 6667, 1^{[2]}, 1.6667^{[2]}, 2\}.$$

Ahora, considerando C_7 , desde el Corolario 8 tenemos que

$$\alpha_j = \frac{-2\cos(\frac{2\pi j}{7})}{1 - 2\cos(\frac{2\pi j}{7})},$$

es autovalor de $A_{\alpha_j}(C_7)$ si y sólo si $j \in \{2, 3\}$; esto es,

- $\alpha_2 = \frac{-2\cos(\frac{4\pi}{7})}{1-2\cos(\frac{4\pi}{7})} = 0.3080;$

- $\alpha_3 = \frac{-2\cos(\frac{6\pi}{7})}{1-2\cos(\frac{6\pi}{7})} = 0.6431.$

Además, dado que n es impar se tiene que α_2 y α_3 son autovalores de multiplicidad 2 de la matriz $A_{\alpha_2}(C_7)$ y $A_{\alpha_3}(C_7)$, respectivamente.

Observamos que los cálculos de los α_j -espectros de C_7 , para $j \in \{2, 3\}$ son:

$$\sigma(A_{0.3080}(C_7)) = \{-0.6310^{[2]}, 0.3080^{[2]}, 1.4789^{[2]}, 2\},$$

$$\sigma(A_{0.6431}(C_7)) = \{0.6431^{[2]}, 1.1274^{[2]}, 1.7313^{[2]}, 2\}.$$



Corolario 9 Sea K_n el grafo completo de n vértices, y sea

$$\alpha = \frac{1}{n-1}. \quad (32)$$

Entonces, α es un autovalor de $A_\alpha(K_n)$ con multiplicidad $n-1$ si y sólo si $n > 2$.

Demostración. Comenzamos mencionando el siguiente hecho

$$0 < \frac{1}{x-1} < 1 \text{ si y sólo si } x > 2,$$

cuya demostración es inmediata.

Ahora, desde el apartado 2 del Corolario 1, los autovalores de $A_\alpha(K_n)$ son

$$\{(\alpha n - 1)^{[n-1]}, n-1\}, \quad (33)$$

luego, considerando el autovalor $\alpha n - 1$ igual a α obtenemos (32) dada por:

$$\alpha = \frac{1}{n-1},$$

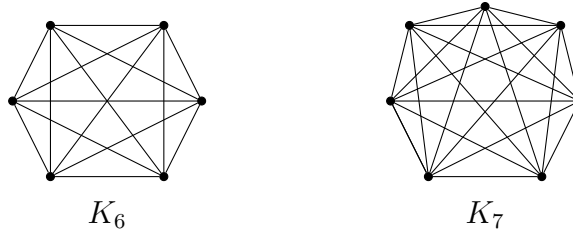
cuya multiplicidad se sigue de (33).

Sea α como en (32) y sea $n > 2$, desde el hecho anterior se sigue que $0 < \alpha = \frac{1}{n-1} < 1$.

Recíprocamente, supongamos que $0 < \alpha = \frac{1}{n-1} < 1$ con multiplicidad $n-1$. Usando nuevamente el hecho anterior el resultado es inmediato.

■

Ejemplo 13 Sean K_6 y K_7 los grafos dados por



Desde el Corolario 9 se sigue que

- $\alpha = \frac{1}{5} = 0.2$, es autovalor de $A_{0,2}(K_6)$ con multiplicidad 5;
- $\alpha = \frac{1}{6} = 0.1667$, es autovalor de $A_{0,1667}(K_7)$ con multiplicidad 6.

Observamos que el cómputo del α -espectro de K_6 y K_7 para $\alpha = 0.2$ y $\alpha = 0.1667$ respectivamente son:

$$\begin{aligned}\sigma(A_{0.2}(K_6)) &= \{0.2^{[5]}, 5\}, \\ \sigma(A_{0.1667}(K_7)) &= \{0.1667^{[6]}, 6\}.\end{aligned}$$



Corolario 10 Sea Q_n el grafo hipercubo de 2^n vértices, y sea

$$\alpha_j = \frac{2j - n}{2j - 1}. \quad (34)$$

Entonces, α_j es un autovalor de $A_\alpha(Q_n)$ con multiplicidad $\binom{n}{j}$ si y sólo si $j \in \{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \dots, n\}$.

Demostración. Comenzamos mencionando el siguiente hecho

$$\text{Si } a > 1, \quad 0 < \frac{x}{x+a} < 1 \text{ si y sólo si } x > -a,$$

cuya demostración es inmediata.

Ahora, desde el apartado 3 del Corolario 1, los autovalores de $A_\alpha(Q_n)$ son

$$\{(\alpha n + (1 + \alpha)(n - 2j))\binom{n}{j}\}, \text{ para } j = 0, \dots, n; \quad (35)$$

luego, considerando el autovalor $\alpha n + (1 + \alpha)(n - 2j)$ igual a α obtenemos (34) dada por:

$$\alpha_j = \alpha = \frac{2j - n}{2j - 1},$$

cuya multiplicidad se sigue de (35).

Expresemos α_j como:

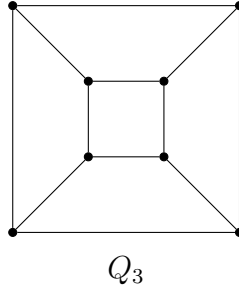
$$\alpha_j = \frac{2j - n}{2j - 1} = \frac{2j - n}{(2j - n) + (n + 1)}. \quad (36)$$

Sea α_j como en (36) y sea $x = 2j - n$ y $a = n - 1$. Luego, $x > -a$ implica que $j > \frac{1}{2}$, y desde el hecho anterior se sigue que $0 < \alpha_j = \frac{2j - n}{(2j - n) + (n + 1)} < 1$.

Recíprocamente, supongamos que $0 < \alpha_j = \frac{2j - n}{(2j - n) + (n + 1)} < 1$ con multiplicidad $\binom{n}{j}$. Usando nuevamente el hecho anterior el resultado es inmediato.

■

Ejemplo 14 Sea Q_3 el hipercubo dado por



Desde el Corolario 10 se sigue que

$$\alpha_j = \frac{2j - 3}{2j - 1},$$

es autovalor de $A_{\alpha_j}(Q_3)$ con multiplicidad $\binom{3}{j}$ si y sólo si $j \in \{2, 3\}$; esto es,

- $\alpha_2 = \frac{4-3}{4-1} = \frac{1}{3} = 0.3333$, con multiplicidad $\binom{3}{2} = 3$;
- $\alpha_3 = \frac{6-3}{6-1} = \frac{3}{5} = 0.6$, con multiplicidad $\binom{3}{3} = 1$.

Observamos que el cómputo del α -espectro de Q_3 para $\alpha = 0.3333$ y $\alpha = 0.6$ respectivamente son:

$$\sigma(A_{0.3333}(Q_3)) = \{-1, 0.3333^{[3]}, 1.6667, 3\};$$

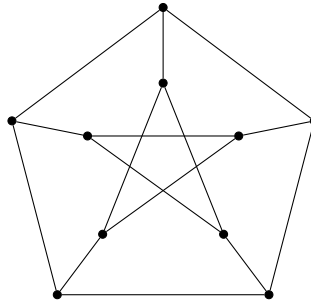
$$\sigma(A_{0.6}(Q_3)) = \{0.6, 1.4, 2.2, 3\}.$$



De manera similar, los siguientes resultados son inmediatos desde el apartado 4 del Corolario 1 y del Lema 4, respectivamente.

Corolario 11 *Sea PG el grafo de Petersen. Entonces, α es autovalor de $A_\alpha(PG)$ con multiplicidad 4 si y sólo si $\alpha = \frac{1}{2}$.*

Ejemplo 15 *Consideremos PG el grafo de Petersen dado por*



Desde el Corolario 11, se sigue que α es autovalor de $A_\alpha(PG)$ con multiplicidad 4 si y sólo si $\alpha = \frac{1}{2}$. En efecto, un cómputo nos indica que

$$\sigma(A_{0.5}(PG)) = \{0.5^{[4]}, 2^{[5]}, 3\}.$$



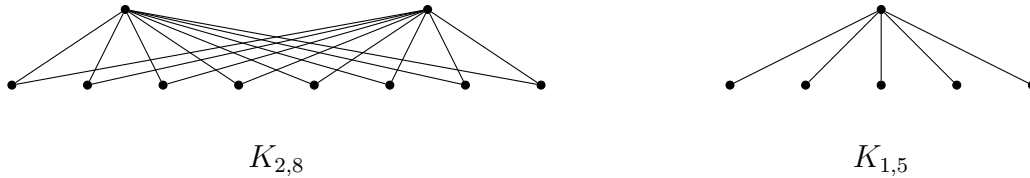
Corolario 12 Sea $K_{a,b}$ el grafo bipartito completo.

- Si $a > 1$ y $b > 1$, entonces α es autovalor simple de $A_\alpha(K_{a,b})$ si y sólo si

$$\alpha = \frac{-ab + \sqrt{ab(ab + 1 - n)}}{1 - n}.$$

- En otro caso, α es autovalor de $A_\alpha(K_{a,b})$ con multiplicidad $n - 2$.

Ejemplo 16 Sean $K_{2,8}$ y $K_{1,5}$ los grafos dados por



Desde el Corolario 12 se sigue que:

- α es autovalor simple de $A_\alpha(K_{2,8})$ si y sólo si $\alpha = 0.6019$;
- α es autovalor de $A_\alpha(K_{1,5})$ con multiplicidad 4, para todo $0 < \alpha < 1$.

En efecto, un cómputo nos dice que

$$\sigma(A_{0.6019}(K_{2,8})) = \{0.6019, 1.2038^{[7]}, 4.8151, 5.4170\};$$

y considerando algún $0 < \alpha < 1$, por ejemplo $\alpha = 0.37$, un cómputo nos indica que

$$\sigma(A_{0.37}(K_{1,5})) = \{-0.4813, 0.37^{[4]}, 2.7013\}.$$



Referencias

- [1] D. Cvetković, Signless Laplacians and line graphs, *Bull. Acad. Serbe Sci. Arts, Cl. Sci. Math. Natur., Sci. Math.* **131** (2005), pp 85-92.
- [2] V. Nikiforov, Merging the A - and Q -spectral theories, *to appear in Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, (2017).
- [3] W. Haemers and G.R. Omid, Universal adjacency matrices with two eigenvalues, *Linear Algebra and its Appl.* **435** (2011), pp 2520-2529.
- [4] E.R. van Dam and W. Haemers, Which graphs are determined by their spectrum?, *Linear Algebra and its Appl.* **373** (2003), pp 241-272.
- [5] R. Horn and C. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, (1985), pp xiii+561.
- [6] W. So, Commutativity and spectra of Hermitian matrices, *Linear Algebra and its Appl.* **212–213** (1994), pp 121-129.
- [7] Y. Ikebe, T. Inagaki, and S. Miyamoto, The monotonicity theorem, Cauchy's interlace theorem, and the Courant-Fischer theorem, *Amer. Math. Monthly*, **94** (1987), pp 352-354.
- [8] A.J. Hoffman, On eigenvalues and colorings of graphs, *Graph Theory and its Appl.*, Academic Press, New York (1970), pp 79-91.
- [9] V. Nikiforov and O. Rojo, A note on the positive semidefiniteness of $A_\alpha(G)$, *Linear Algebra and its Appl.*, **519** (2017), pp 156-163.

- [10] L. Lovász, Combinatorial Problems and Exercises, North-Holland Publishing CO., Amsterdam New York (1979), pp 551.
- [11] V. Nikiforov, G. Pastén, O. Rojo and R. Soto, On the A_α -spectra of trees, *Linear Algebra and its Appl.*, **520** (2017), pp 286-305.
- [12] O.J. Heilmann and E.H. Lieb, Theory of monomer-dimer systems, *Commun. Math. Phys.* **25** (1972), pp 190-232.
- [13] O. Rojo, The spectra of a graph obtained from copies of a generalized Bethe tree, *Linear Algebra and its Appl.* **420** (2007), pp 490-507.
- [14] O. Rojo and R. Soto, The spectra of the adjacency matrix and Laplacian matrix for some balanced trees, *Linear Algebra and its Appl.* **403** (2005), pp 97-117.
- [15] O. Rojo and M. Robbiano, An explicit formula for eigenvalues of Bethe trees and upper bounds on the largest eigenvalues of any tree, *Linear Algebra and its Appl.* **427** (2007), pp 138-150.
- [16] C.D. Godsil, Spectra of trees, *Annals of Discrete Mathematics* **20** (1984), pp 151-159.
- [17] L. Lovász, Combinatorial problems and exercises 2nd ed., Elsevier, Amsterdam, (1993), pp 636.
- [18] D. Stevanović, Bounding the largest eigenvalue of trees in terms of the largest vertex degree, *Linear Algebra and its Appl.* **360** (2003), pp 35-42.
- [19] I. Sciriha, On the coefficient of λ in the characteristic polynomial of singular graphs, *Utilitas Mathematica* **52** (1997), pp 97-111.

- [20] I. Sciriha, On the construction of graphs of nullity one, *Discrete Mathematics* **181**(1-3) (1998), pp 193-211.