

**UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE**  
**FACULTAD DE CIENCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**



**MATRICES NO NEGATIVAS**  
**ESTRUCTURADAS CON ESPECTRO Y**  
**DIVISORES ELEMENTALES PRESCRITOS**

Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Mención Matemática

**ELVIS RONALD VALERO KARI**

Profesor Guía: Dr. Ricardo L. Soto Montero

**Antofagasta, Chile**  
**2014**

**UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

Departamento de Matemáticas

**MATRICES NO NEGATIVAS  
ESTRUCTURADAS CON ESPECTRO Y  
DIVISORES ELEMENTALES  
PRESCRITOS**

**ELVIS RONALD VALERO KARI**

Orientador: Dr. Ricardo L. Soto Montero (UCN)

Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Mención Matemática

**Antofagasta, Chile**

**Noviembre 2014**

**MATRICES NO NEGATIVAS ESTRUCTURADAS  
CON ESPECTRO Y DIVISORES ELEMENTALES PRESCRITOS <sup>a</sup>**

Elvis Ronald Valero Kari

Programa de Doctorado en Ciencias Mención Matemática

Departamento de Matemáticas

Universidad Católica Del Norte

Noviembre-2014

---

<sup>a</sup>Tesis apoyada por Conicyt Res.2093, Fondecyt 1120180, MECESUP UCN  
0711

*Dedicado a mi madre Clemencia Kari.*

# Índice general

	Agradecimientos	III
	Resumen	IV
<b>1.</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1.	Problemas inversos . . . . .	2
1.2.	Soluciones parciales . . . . .	4
<b>2.</b>	<b>Matrices simétricas con autovalores y entradas diagonales prescritas</b>	<b>6</b>
2.1.	Resultados previos . . . . .	6
2.2.	Una nueva condición suficiente para el SNIEP . . . . .	8
2.3.	Matrices simétricas con autovalores y entradas diagonales prescritas .	13
<b>3.</b>	<b>Sobre una pregunta abierta de Guo</b>	<b>20</b>
3.1.	Una primera solución a la pregunta de Guo . . . . .	21
3.2.	Listas realizables que cumplen la perturbación de Guo . . . . .	25
<b>4.</b>	<b>Matrices generalizadas doblemente estocásticas no negativas con divisores elementales prescritos</b>	<b>29</b>
4.1.	Preliminares . . . . .	29
4.2.	Teorema de Brauer para matrices doblemente estocásticas generalizadas	32
4.3.	El Teorema de Rado para matrices doblemente estocásticas generalizadas	39
4.4.	Mas sobre matrices estocásticas y doblemente estocásticas . . . . .	42
4.5.	Ejemplos . . . . .	44
<b>5.</b>	<b>Familia de matrices con espectro y divisores elementales prescritos</b>	<b>47</b>
5.1.	Perturbaciones de rango $r$ . . . . .	47
5.2.	Problema inverso de los divisores elementales . . . . .	51
5.3.	Problema no negativo de asignamiento de polos . . . . .	53

# Agradecimientos

*La única decisión posible que podemos tomar, es que hacer con el tiempo que nos queda.*

*J.R.R. Tolkien*

*Parte de la inhumanidad de las computadoras es que, una vez que están programadas competentemente y trabajando correctamente, son completamente honestas.*

*I. Asimov*

- A mis padres Clemencia Kari y Leoncio Valero, puesto que fueron ellos los que intercedieron para que se me otorgase este regalo llamado vida, en el cual tránsito por este tiempo.
- A mi orientador Dr. Ricardo L. Soto, por todo el conocimiento compartido para elaborar esta tesis. Agradezco también su constante apoyo humano y paciencia en el desarrollo de mi doctorado.
- A mis hermanos, Eddy, Soledad, Lady, quienes siempre me brindaron su comprensión y apoyo constante para vivir una etapa más de mi vida.
- A mis amigos, esos personajes que convierten los días de invierno en bellos días de verano.

# Resumen

Las *matrices no negativas* aparecen en un número de importantes áreas de aplicación: sistemas de comunicación, sistemas biológicos, economía, ciencias de la computación y muchos otros sistemas de ingeniería. Los problemas inversos de autovalores son una importante subclase de los problemas inversos, que surgen en el contexto del modelamiento matemático y la identificación de parámetros. Una simple aplicación de tales problemas es la construcción de modelos de Leontief en Economía (ver [1]).

El *problema inverso de autovalores para matrices no negativas* (NIEP por su sigla en Inglés) es el problema de caracterizar aquellas listas  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  de números complejos, las cuales pueden ser el espectro de una matriz  $A$  no negativa de orden  $n$  ( $A = [a_{ij}]$  con  $a_{ij} \geq 0$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ). Si existe una matriz no negativa  $A$  con espectro  $\Lambda$  decimos que  $A$  realiza  $\Lambda$ . El problema NIEP solo está resuelto para  $n \leq 4$ : El caso  $n = 3$  fue resuelto por Loewy y London [22] en 1978, mientras que el caso  $n = 4$  fue resuelto por Meehan [23] en 1998, y posteriormente, de manera independiente en una formulación diferente, por Torre-Mayo y otros [51] en 2007. El caso  $n = 5$  para matrices de traza cero fue resuelto en 1999 por Laffey y Meehan [18]. Se estima que una solución completa al NIEP es improbable en un futuro cercano. Casos especiales del NIEP son de gran interés: por ejemplo, si la lista  $\Lambda$  es de números reales, tenemos el problema inverso de autovalor para matrices no negativas con espectro real (RNIEP), si la matriz realizadora debe ser simétrica tenemos el problema inverso de autovalor para matrices no negativas simétricas (SNIEP), y si  $A$  debe ser normal tenemos el NIEP para matrices normales (NNIEP). Otros problemas estrechamente relacionados con el NIEP son el problema inverso de valores singulares para matrices no negativas (NISVP) y el problema de los divisores elementales para matrices no negativas (NIEDP).

Un número de condiciones suficientes para que el NIEP tenga una solución han sido obtenidas por numerosos autores. En contraste, pocas condiciones necesarias son conocidas y ellas están muy distantes de las condiciones suficientes.

Entre las estrategias que han sido empleadas en el estudio del NIEP destacan aquellas llamadas de compensación, que consisten en particionar la lista  $\Lambda$  dada, en

sublistas, permitiendo que algunas de ellas sean no realizables, con la condición que otras sí lo sean, y en cierto modo compensen la no realizabilidad de las primeras. Esto ha sido hecho empleando resultados de perturbación extremadamente útiles, como lo son los teoremas de Brauer [4], de Rado [29] y de Soto, Rojo, Moro, Borobia [41]. Esto, junto con las propiedades de las matrices reales con filas suma constantes, son los ingredientes básicos de las técnicas desarrolladas, en particular por el tutor de esta tesis, para obtener un número de simples y eficientes condiciones suficientes para que el NIEP y sus problemas derivados RNIEP, SNIEP, NNIEP tengan una solución.

Es sabido que para  $n \leq 4$  el NIEP y el SNIEP son equivalentes. Sin embargo para  $n \geq 5$  ambos problemas son diferentes: la lista  $\Lambda = \{97, 71, -44, -54, -70\}$  es realizable por una matriz no negativa, pero ella no es simétricamente realizable [9].

La versión simétrica del teorema de Rado [41], ha sido muy útil para el SNIEP. Para aplicar este resultado, necesitamos condiciones necesarias y/o suficientes para la existencia de una matriz simétrica con autovalores y entradas diagonales prescritas. Schur y Horn [33, 15] mostró condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una matriz simétrica no necesariamente no negativa, con autovalores y entradas diagonales prescritas. En [10] Fiedler dio condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una matriz simétrica no negativa con espectro y entradas diagonales prescritas para  $n = 2, 3$ . Para  $n \geq 4$ , Fiedler da una condición suficiente. Z. Charles, M. Farber, C. Johnson y L. Kennedy en [6] presentan condiciones suficientes respecto al problema simétrico, observando relaciones entre las entradas diagonales, los autovalores y los signos de las entradas fuera de la diagonal de la matriz que realiza el espectro.

Guo [12] muestra que si una lista  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  es realizable, entonces  $\Lambda_\epsilon = \{\lambda_1 + \epsilon, \lambda_2 \pm \epsilon, \dots, \lambda_n\}$  es también realizable. Puesto que el NIEP y el SNIEP son equivalente para  $n \leq 4$ , entonces el problema de perturbación de Guo para listas simétricamente realizables esta completamente resuelto, cuando  $n \leq 4$ . Es decir si  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  es simétricamente realizable, entonces  $\Lambda_\epsilon = \{\lambda_1 + \epsilon, \lambda_2 \pm \epsilon, \dots, \lambda_n\}$  es también simétricamente realizable, para  $n = 2, 3, 4$ .

Minc [24, 26] estudia el NIEDP, módulo el NIEP. En particular Minc, muestra que si una lista  $\Lambda$  es realizable por una matriz positiva y diagonalizable, entonces existe una matriz no negativa con divisores elementales arbitrariamente prescritos.

En el presente trabajo estudiaremos los siguientes problemas:

- 1 El problema inverso de autovalores para matrices no negativas simétricas (SNIEP, por su sigla en inglés). Este problema es el de caracterizar aquellas listas  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  de números reales, las cuales pueden ser el espectro de una matriz simétrica  $A$  no negativa con espectro  $\Lambda$ .

- 
- 2 El problema de completación. Dada las listas de números reales  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ ,  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  encontrar condiciones necesarias y/o suficientes para la existencia y/o construcción de una matriz simétrica no negativa con espectro  $\Lambda$  y entradas diagonales  $d_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .
  - 3 El problema de perturbación de Guo para listas simétricamente realizables. Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista simétricamente realizable, ¿será la lista  $\Lambda_\epsilon = \{\lambda_1 + \epsilon, \lambda_2 \pm \epsilon, \dots, \lambda_n\}$  también simétricamente realizable?
  - 4 El problema inverso de divisores elementales para matrices no negativas (NIEDP). Este problema consiste en determinar condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales ciertos polinomios dados

$$(\lambda - \lambda_1)^{n_1}, (\lambda - \lambda_2)^{n_2}, \dots, (\lambda - \lambda_k)^{n_k}, n_1 + n_2 + \dots + n_k = n,$$

sean los divisores elementales de una matriz no negativa.

En el Capítulo 1 de esta tesis presentamos las definiciones básicas y necesarias para el estudio de los problemas planteados. Mostramos también resultados establecidos por varios autores, los cuales muestran avances a soluciones parciales del NIEP y SNIIEP.

En el Capítulo 2 damos una nueva condición suficiente para la existencia y construcción de una matriz simétrica no negativa. También establecemos una condición suficiente para la existencia y construcción de una matriz  $4 \times 4$  con espectro y entradas diagonales prescritas. Esta última condición es independiente de la condición suficiente dada por Fiedler [10].

El Capítulo 3 está dedicado a estudiar el problema de perturbación de Guo para listas simétricamente realizables.

En el Capítulo 4 damos condiciones suficientes para la existencia y construcción de matrices no negativas (positivas) doblemente estocásticas con divisores elementales prescritos. En particular, se muestra como transformar una matriz estocástica generalizada no negativa (positiva) con divisores elementales prescritos en una matriz doblemente estocástica no negativa (positiva) sin cambiar los divisores elementales. Estos resultados pueden ser vistos como un complemento útil de un resultado de Minc [24, 26] sobre matrices positivas diagonalizables, que dan lugar a matrices positivas con divisores elementales arbitrariamente prescritos. También caracterizamos listas  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  de números complejos, los cuales son el espectro de una matriz doblemente estocástica generalizada, para cada una de las posibles formas canónicas de Jordan asociados a  $\Lambda$ .

Finalmente en el Capítulo 5, mediante el uso de los teoremas de Brauer y Rado, construimos una familia de matrices con espectro y divisores elementales prescritos. Además, establecemos una versión no negativa del teorema de asignamiento de polos de sistemas con multi entradas y multi salidas [5].

# Capítulo 1

## Introducción

Una matriz  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , se dice no negativa, si  $a_{ij} \geq 0$  para  $i, j = 1, \dots, n$ . Del mismo modo, si cada entrada de  $A$  es positiva la matriz se dice positiva.

El espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  de una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  no negativa será denotado por  $\sigma(A)$  o simplemente  $\Lambda$ . El autovalor maximal o autovalor de Perron será  $\lambda_1 = \rho(A)$ , donde  $\rho(A) = \max\{|\lambda_i|, \lambda_i \in \sigma(A)\}$ .

**Definición 1.0.1.** Una matriz cuadrada  $n \times n$  no negativa  $A$ , es llamada reducible si es permutacionalmente similar a una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

donde  $B$  y  $D$  son submatrices cuadradas. En otro caso  $A$  es irreducible

Presentamos a continuación el teorema de Perron-Frobenius.

**Teorema 1.0.1.** (Perron- Frobenius) Sea  $A$  una matriz cuadrada  $n \times n$  irreducible y no negativa. Entonces

- $\rho(A) > 0$  es un autovalor de  $A$
- Existe un único autovector  $\mathbf{y} > 0$  tal que  $A\mathbf{y} = \rho(A)\mathbf{y}$
- $\rho(A)$  es de multiplicidad algebraica 1

En el teorema de Perron-Frobenius si consideramos  $A$  no negativa, entonces  $\rho(A)$  no necesariamente tiene multiplicidad algebraica 1, y solo se puede garantizar que el autovector asociado a  $\rho(A)$  es no negativo.

**Teorema 1.0.2.** (Schur) Para toda matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  existe una matriz unitaria  $U$  tal que  $U^*AU = T$  es triangular superior, con los autovalores de  $A$  en la diagonal de  $T$  en cualquier orden deseado.

## 1.1. Problemas inversos

Nosotros consideraremos los siguientes problemas que involucran matrices no negativas.

**Problema 1.** *El problema inverso de autovalores para matrices no negativas (en inglés NIEP), consistente en determinar condiciones necesarias y suficientes para que una lista  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  de números complejos sea el espectro de una matriz no negativa.*

**Problema 2.** *El problema inverso de divisores elementales para matrices no negativas (en inglés NIEDP), consiste en determinar condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales ciertos polinomios dados*

$$(\lambda - \lambda_1)^{n_1}, (\lambda - \lambda_2)^{n_2}, \dots, (\lambda - \lambda_k)^{n_k}, n_1 + \dots + n_k = n,$$

sean los divisores elementales de una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  no negativa.

El problema inverso de autovalores para matrices no negativas (NIEP), es el problema de caracterizar aquellas listas  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  de números complejos, las cuales pueden ser el espectro de una matriz  $A$  no negativa de orden  $n$ . Si existe una matriz no negativa  $A$  con espectro  $\Lambda$  decimos que  $A$  realiza  $\Lambda$ . El problema NIEP está resuelto solo para  $n \leq 4$ . El caso  $n = 3$  fue resuelto por Loewy y London [22] en 1978, mientras que el caso  $n = 4$  fue resuelto por Meehan [23] en 1998, y posteriormente, de manera independiente en una formulación diferente, por Torre-Mayo y otros [51] en 2007. El caso  $n = 5$  para matrices de traza cero fue resuelto en 1999 por Laffey y Meehan [18].

Respecto al problema 1 tenemos las siguientes condiciones necesarias. Es decir si  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{C}$  es realizable por una matriz no negativa  $A$ , entonces

1.  $\Lambda = \bar{\Lambda} = \{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n\}$ .
2.  $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\} \in \Lambda$ .
3.  $S_k(\Lambda) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^k \geq 0$ , para  $k = 1, 2, \dots$ .
4. Si  $\Lambda = \sigma(A)$ , entonces para todo  $k, m$  enteros positivos

$$[S_k(\Lambda)]^m \leq n^{m-1} S_{km}(\Lambda).$$

5. Si  $\Lambda = \sigma(A)$  con  $n$  impar y  $\text{tra}(A) = 0$ , entonces

$$(n-1)S_4(\Lambda) \geq [S_2(\Lambda)]^2.$$

La condición 1. se debe a que el polinomio característico de una matriz  $A$  no negativa tiene todos sus coeficientes reales, de donde sus raíces o autovalores de  $A$  se presentan de a pares conjugados. La condición 2. es consecuencia del teorema de Perron-Frobenius. La condición 3. se debe al hecho que si  $A$  es no negativa, entonces  $\text{tra}(A^m)$  es no negativa,  $m = 1, 2, \dots$ . La condición 4. se debe a Loewy y London [22]. La condición 5. fue probada por Laffey y Meehan en [17].

Relevantes progresos se han hecho para determinar condiciones suficientes para la existencia de una solución en el caso de un espectro prescrito real, por Suleimanova [50], Perfect [27, 28], Salzmann [32], Kellogg [16], Borobia [2], Radwan [30], Soto [36, 38, 39, 41, 42, 43, 44].

**Definición 1.1.1.** *Una matriz no negativa  $n \times n$  es llamada fila estocástica, o simplemente estocástica, si todas sus filas suman 1. Si las filas suman  $\alpha$  y la matriz no necesariamente es no negativa, entonces es llamada estocástica generalizada.*

El conjunto de todas las matrices estocásticas generalizadas sumas fila  $\alpha$  es denotada por  $\mathcal{CS}_\alpha$ . En particular  $A$  es una matriz estocástica si  $A \in \mathcal{CS}_1$ . Se observa con facilidad que si  $A \in \mathcal{CS}_\alpha$ , entonces el vector  $e = [1 \mid 1 \mid \dots \mid 1]^T$  es tal que  $Ae = \alpha e$ . La importancia de las matrices estocásticas generalizadas radica en el hecho que si  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  es una lista realizable, entonces  $\Lambda$  es también realizable por  $A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ . Este resultado es atribuido usualmente a Johnson [13].

**Teorema 1.1.1.** *(Johnson [13]) Cualquier conjunto realizable, es en particular realizable por una matriz no negativa con sumas filas constantes igual a su raíz de Perron.*

El teorema de Brauer [4] ha sido de gran utilidad para establecer nuevas condiciones suficientes para el NIEP. El muestra como modificar mediante una perturbación de rango 1 un autovalor de una matriz  $A$  sin cambiar los restantes  $n - 1$  autovalores. En [28], Perfect presenta una extensión del resultado de Brauer, debida a R. Rado. Este resultado muestra cómo modificar  $r$  autovalores de una matriz de orden  $n$ ,  $r \leq n$ , vía una perturbación de rango  $r$ , sin cambiar los restantes  $n - r$  autovalores.

Mediante el uso de esta extensión, Perfect, en [28], da una condición suficiente para el RNIEP. En [39] los autores extienden el resultado de Perfect obteniendo una nueva condición suficiente para el NIEP en el caso real.

En [41], los autores presentan la siguiente versión simétrica del Teorema de Rado. Este resultado permite obtener una nueva condición suficiente, más general, para la existencia de una matriz simétrica no negativa con espectro prescrito.

**Teorema 1.1.2.** *[41]. Sea  $A$  una matriz simétrica  $n \times n$  con autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  y, para algún  $r \leq n$ , sea  $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_r\}$  un conjunto ortonormal de autovectores de  $A$  tales que  $A\mathbf{X}_i = \lambda_i\mathbf{X}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ . Sea  $X$  una matriz  $n \times r$  con  $i$ -ésima columna*

$\mathbf{X}_i$ , sea  $\Omega = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ , y  $C$  una matriz simétrica  $r \times r$ . Entonces la matriz  $A + XCX^T$  tiene autovalores  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r, \lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_n$ , donde  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$  son autovalores de la matriz  $\Omega + C$ .

## 1.2. Soluciones parciales

A continuación presentamos condiciones suficientes para el NIEP [50, 16, 2, 36]. Todos estos resultados son también condiciones suficientes para el SNIEP.

**Teorema 1.2.1.** (Suleimanova [50]) Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  un conjunto de números reales satisfaciendo  $\lambda_1 \geq |\lambda_i|$  y  $\lambda_1 > 0 > \lambda_2 \geq \lambda_3, \dots, \lambda_n$ .

Si

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \geq 0,$$

entonces  $\Lambda$  es realizable.

**Teorema 1.2.2.** (Kellogg [16]) Sea  $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N\}$  un conjunto de números reales con  $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$  y sea  $M$  el índice más grande  $j$  ( $0 \leq j \leq N$ ) para el cual  $\lambda_j \geq 0$ . Sea el conjunto de índices

$$K = \{i : \lambda_i \geq 0, \lambda_i + \lambda_{N-i+1} < 0, i \in \{1, \dots, [\frac{N}{2}]\}\}.$$

Si

$$1. \lambda_0 + \sum_{i \in K, i < k} (\lambda_i + \lambda_{N-i+1}) + \lambda_{N-k+1} \geq 0, \text{ para todo } k \in K$$

$$2. \lambda_0 + \sum_{i \in K} (\lambda_i + \lambda_{N-i+1}) + \sum_{j=M+1}^{N-M} \lambda_j \geq 0,$$

donde  $N \geq 2M + 1$ , entonces  $\Lambda$  es realizable por una matriz no negativa de orden  $(N + 1) \times (N + 1)$ .

**Teorema 1.2.3.** (Borobia [2]) Sea  $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N\}$  un conjunto de números reales con  $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$  y sea  $M$  el índice más grande  $j$  ( $0 \leq j \leq N$ ) para el cual  $\lambda_j \geq 0$ . Si existe una partición  $J_1 \cup \dots \cup J_s$  de  $J = \{\lambda_{M+1}, \lambda_{M+2}, \dots, \lambda_N\}$ , para algún  $1 \leq s \leq N - M$ , tal que

$$\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_M \geq \sum_{\lambda \in J_1} \lambda \geq \sum_{\lambda \in J_2} \lambda \geq \dots \geq \sum_{\lambda \in J_s} \lambda,$$

satisface la condición de Kellogg, entonces  $\Lambda$  es el espectro de una matriz no negativa de orden  $(N + 1) \times (N + 1)$ .

Los siguientes resultados son debidos al profesor R. Soto

**Teorema 1.2.4.** (Soto [36]) Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números reales, tales que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0 > \lambda_{p+1} \geq \dots \geq \lambda_n$ . Si

$$\lambda_1 \geq -\lambda_n - \sum_{S_k < 0} S_k,$$

donde  $S_k = \lambda_k + \lambda_{n-k+1}$ ,  $k = 2, 3, \dots, [n/2]$  y  $S_{\frac{n+1}{2}} = \min\{\lambda_{\frac{n+1}{2}}, 0\}$  para  $n$  impar, entonces  $\Lambda$  es realizable por una matriz  $A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ .

**Teorema 1.2.5.** (Soto [36]) Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  un conjunto de números reales tal que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0 > \lambda_{p+1} \geq \dots \geq \lambda_n.$$

Sea una partición  $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \dots \cup \Lambda_t$  con

$$\Lambda_k = \{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \dots, \lambda_{k_{p_k}}\}, k = 1, \dots, t, \lambda_{1_1} = \lambda_1$$

$$\lambda_{k_1} \geq 0, \lambda_{k_1} \geq \dots \geq \lambda_{k_{p_k}},$$

$$S_{k_j} = \lambda_{k_j} + \lambda_{k_{p_k-j+1}}, j = 2, 3, \dots, \left[\frac{k_{p_k}}{2}\right],$$

$$S_{\frac{\lambda_{k_{p_k}}+1}} = \min\{\lambda_{\frac{\lambda_{k_{p_k}}+1}}, 0\}, k = 1, 2, \dots, t, \text{ para } k_{p_k} \text{ impar},$$

$$T_k = \lambda_{k_1} + \lambda_{k_{p_k}} + \sum_{S_{k_j} < 0} S_{k_j}, k = 1, 2, \dots, t$$

y

$$\lambda_M = \max\{-\lambda_{1_{p_1}} - \sum_{S_{1_j} < 0} S_{1_j}; \max_{2 \leq k \leq t} \{\lambda_{k_1}\}\}.$$

Si

$$\lambda_1 \geq \lambda_M - \sum_{T_k < 0, k \geq 2} T_k,$$

entonces  $\Lambda$  es realizable por una matriz  $A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ .

Una importante condición suficiente para el *SNIEP* fué establecida por Soto, Rojo, Moro, Borobia [41]. Hasta donde sabemos, esta condición es la más general condición suficiente para una solución al *SNIEP*.

Soto [43] generaliza los Teoremas 1.2.4 y 1.2.5, introduciendo una familia de criterios de realizabilidad para el *NIEP* y *SNIEP*.

## Capítulo 2

# Matrices simétricas con autovalores y entradas diagonales prescritas

Este capítulo está organizado como sigue: Presentamos primero resultados previos. En la sección 2 damos una condición suficiente para la existencia de una matriz simétrica no negativa con espectro prescrito. Esta condición genera un procedimiento algorítmico para calcular una matriz solución. En la sección 3, introducimos una condición suficiente para la existencia de una matriz simétrica  $4 \times 4$  con espectro y entradas diagonales prescritas. Esta condición es independiente de la condición suficiente de Fiedler dada en [10]. El contenido de este capítulo constituye esencialmente la publicación [46].

### 2.1. Resultados previos

El problema inverso del autovalor para matrices no negativas (NIEP) es hallar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una matriz no negativa con espectro complejo prescrito  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ . Una solución completa a este problema es conocida solo para listas de  $n \leq 4$  elementos. Si existe una matriz no negativa  $A$  con espectro  $\Lambda$ , diremos que  $\Lambda$  es realizable y que  $A$  es la matriz realizadora. Si la matriz no negativa requerida es simétrica tenemos el problema inverso del autovalor para matrices no negativas simétricas (SNIEP). Los primeros resultados relacionados con el SNIEP fueron obtenidos por Fiedler [10] en 1974. Se han obtenido condiciones suficientes para que el problema tenga solución, en orden cronológico [10, 48, 37, 38, 20, 41]. En [49], Spector da una condición necesaria y suficiente para el SNIEP, en el caso  $n = 5$  con  $\sum_{i=1}^5 \lambda_i = 0$ .

**Teorema 2.1.1.** (Spector [49])

Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\}$  tal que  $\sum_{i=1}^5 \lambda_i = 0$ . Entonces  $\Lambda$  es el espectro de una matriz simétrica de traza cero si, y sólo si

1.  $S_1(\Lambda) = \sum_{i=1}^5 \lambda_i = 0$ ,

## 2. Matrices simétricas con autovalores y entradas diagonales prescritas 7

2.  $S_3(\Lambda) = \sum_{i=1}^5 \lambda_i^3 \geq 0$ ,
3.  $\lambda_2 + \lambda_5 \leq 0$ .

Basados en un resultado de Horn [15] damos, en la siguiente sección, una nueva condición suficiente constructiva para la existencia de una matriz simétrica no negativa con espectro prescrito.

Para una lista dada  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  denotaremos el conjunto

$$U_\Lambda = \{A = A^T \geq 0 : \sigma(A) = \Lambda\}.$$

Definimos también

$$\mathbb{S}_n = \{\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} : \exists A = A^T \geq 0, \sigma(A) = \Lambda\}$$

$$\hat{\mathbb{S}}_n = \{\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} : \exists A = A^T > 0, \sigma(A) = \Lambda\}$$

Los siguientes resultados se deben a Fiedler [10]

**Lema 2.1.1.** [10] Sea  $A$  una matriz simétrica  $m \times m$  con autovalores  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , y  $\mathbf{u}$  un autovector unitario correspondiente a  $\alpha_1$ ; Sea  $B$  una matriz simétrica  $n \times n$  con autovalores  $\beta_1, \dots, \beta_n$ , y sea  $\mathbf{v}$  un autovector unitario correspondiente a  $\beta_1$ .

Entonces para cualquier escalar  $\rho$ , la matriz

$$C = \begin{bmatrix} A & \rho \mathbf{u} \mathbf{v}^T \\ \rho \mathbf{v} \mathbf{u}^T & B \end{bmatrix},$$

tiene autovalores  $\alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_2, \dots, \beta_n, \gamma_1, \gamma_2$ , donde  $\gamma_1, \gamma_2$  son autovalores de la matriz

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \rho \\ \rho & \beta_1 \end{bmatrix}.$$

**Lema 2.1.2.** [10] Si  $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}\} \in \mathbb{S}_m$ ,  $\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\} \in \mathbb{S}_n$  y  $\alpha_0 \geq \beta_0$ , entonces para cualquier  $t \geq 0$ ,

$$\{\alpha_0 + t, \beta_0 - t, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\} \in \mathbb{S}_{m+n}.$$

**Lema 2.1.3.** [10] Si  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{S}_n$  y  $\epsilon > 0$ , entonces  $\{\lambda_1 + \epsilon, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \in \hat{\mathbb{S}}_n$ .

Observamos que los lemas 2.1.1, 2.1.2 son casos particulares del teorema de Rado.

## 2.2. Una nueva condición suficiente para el SNIEP

El origen de esta sección es el siguiente resultado debido a Horn [15]

**Teorema 2.2.1.** (Horn [15]) Sea  $n$  un entero positivo y sean  $\{\mu_i : i = 1, \dots, n\}$ ,  $\{\lambda_i : i = 1, \dots, n, n+1\}$  dos sucesiones de números reales tales que  $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n \geq \lambda_{n+1}$ . Si  $D = \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ , entonces existe un número real  $a$  y un vector  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}\}$  es el conjunto de autovalores de la matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} D & \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T & a \end{bmatrix}.$$

Presentamos a continuación una nueva condición suficiente para la existencia y construcción de una matriz simétrica no negativa con espectro prescrito.

**Teorema 2.2.2.** Sean las listas de números reales  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}\}$ ,  $\Gamma = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$  satisfaciendo  $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n \geq \lambda_{n+1}$ , con  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i - \sum_{i=1}^n \mu_i \geq 0$ . Sea  $\Gamma$  realizable por una matriz simétrica no negativa  $B = PDP^T$ , donde  $P$  es ortogonal y  $D = \text{diag}\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ , y sea  $P\mathbf{y} \geq 0$  con  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ ,  $y_i^2 = -\frac{\prod_j(\lambda_j - \mu_i)}{\prod_{j \neq i}(\mu_j - \mu_i)}$ . Entonces  $\Lambda$  es simétricamente realizable.

*Demostración.* Sea

$$a = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i - \sum_{i=1}^n \mu_i \geq 0,$$

e

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T,$$

con

$$\begin{aligned} y_i^2 &= -\frac{\prod_j(\lambda_j - \mu_i)}{\prod_{j \neq i}(\mu_j - \mu_i)} \\ &= -\frac{\prod_{j=1}^i(\lambda_j - \mu_i) \prod_{j=i+1}^{n+1}(\lambda_j - \mu_i)}{\prod_{j=1}^{i-1}(\mu_j - \mu_i) \prod_{j=i+1}^n(\mu_j - \mu_i)}, \end{aligned}$$

Puesto que los  $\mu_i$  intercalan a  $\lambda_i$ , tenemos que el primer producto en el numerador es no negativo y el primer producto en el denominador es positivo. El segundo producto en el numerador tiene un factor más que el segundo producto en el denominador, entonces el cociente entre ambos es siempre negativo. Así  $y_i^2 \geq 0$ .

Por el Teorema 2.2.1, la matriz simétrica

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} D & \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T & a \end{bmatrix},$$

## 2. Matrices simétricas con autovalores y entradas diagonales prescritas 9

tiene espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}\}$ .

Puesto que  $B = PDP^T \geq 0$  y  $Py \geq 0$ , tenemos que

$$A = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & P\mathbf{y} \\ (P\mathbf{y})^T & a \end{bmatrix}$$

es no negativa simétrica con el espectro deseado.  $\square$

Aunque el resultado anterior no es fácil de aplicar, nos permite decidir sobre la realizabilidad de ciertas listas, para las cuales otros criterios no dan información. Los siguientes ejemplos muestran la utilidad de la condición suficiente dada por el Teorema 2.2.2.

**Ejemplo 2.2.1.** Consideremos la lista  $\Lambda = \{9, 8, -3, -5, -7\}$ . La condición necesaria iii) de Spector en el Teorema 2.1.1, no es satisfecha para la lista trasladada  $\Lambda - \frac{2}{5}$ . Nosotros mostramos que  $\Lambda$  es el espectro de una matriz simétrica no negativa: Sea  $\Gamma = \{9, 3, -3, -7\}$ . Entonces  $D = \text{diag}\{9, 3, -3, -7\}$ ,  $a = 0$  e  $\mathbf{y} = [0, \sqrt{40}, 0, 0]^T$ . Entonces

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, P\mathbf{y} \geq 0$$

y

$$B = PDP^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

Así,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & \sqrt{20} \\ 3 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{20} \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ \sqrt{20} & \sqrt{20} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es simétrica con el espectro  $\Lambda$ .

**Ejemplo 2.2.2.** Consideremos la lista  $\Lambda = \{6, 1, 1, -4, -4\}$ . De acuerdo con la condición de Spector [49]  $\Lambda$  es simétricamente realizable. De acuerdo al lema 1 en [39],  $\Lambda$  es también el espectro de una matriz no negativa  $5 \times 5$  simétrica circulante, pero hasta donde sabemos ningún otro criterio en la literatura sobre el problema nos permite decidir sobre la realizabilidad simétrica de esta lista. Para construir una matriz

## 2. Matrices simétricas con autovalores y entradas diagonales prescritas 10

que realiza esta lista, tomamos la lista auxiliar  $\Gamma = \{4, 1, -1, -4\}$ , que intercala la lista  $\Lambda$ . Entonces  $a = 0$ . La matriz que realiza  $\Gamma$  esta dada por

$$B = P \text{diag}\{4, 1, -1, -4\} P^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{14} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{2}{3}\sqrt{14} & \frac{4}{3} & 0 \end{bmatrix},$$

donde

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{15}\sqrt{15} & -\frac{1}{30}\sqrt{210} & -\frac{1}{30}\sqrt{210} & \frac{2}{15}\sqrt{15} \\ \frac{8}{45}\sqrt{15} & -\frac{1}{90}\sqrt{210} & \frac{1}{90}\sqrt{210} & -\frac{8}{45}\sqrt{15} \\ \frac{1}{90}\sqrt{210} & \frac{8}{45}\sqrt{15} & -\frac{8}{45}\sqrt{15} & -\frac{1}{90}\sqrt{210} \\ \frac{1}{30}\sqrt{7}\sqrt{30} & \frac{2}{15}\sqrt{15} & \frac{2}{15}\sqrt{15} & \frac{1}{30}\sqrt{210} \end{bmatrix}.$$

Calculamos  $\mathbf{y} = [\sqrt{\frac{48}{5}}, 0, -\sqrt{\frac{42}{5}}, 0]^T$ . Entonces la matriz

$$A = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{diag}(4, 1, -1, 4) & \mathbf{y} \\ & \mathbf{y}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{14} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3}\sqrt{14} \\ 0 & \frac{2}{3}\sqrt{14} & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 3 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3}\sqrt{14} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

es no negativa y tiene el espectro deseado.

El procedimiento descrito en los ejemplos anteriores, requiere la construcción de una matriz  $P$  ortogonal  $4 \times 4$  tal que  $PDP^T$  es no negativa con  $D = \text{diag}\{\mu_1, \dots, \mu_4\}$ , y  $P\mathbf{y} \geq 0$ . Entonces nosotros tenemos:

**Corolario 2.2.1.** Sean  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\}$ ,  $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$  tal que  $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \lambda_3 \geq \mu_3 \geq \lambda_4 \geq \mu_4 \geq \lambda_5$ ,  $\sum_{i=1}^5 \lambda_i - \sum_{i=1}^4 \mu_i \geq 0$  e  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$  definido como en el teorema anterior. Si se cumple cualesquiera de las siguientes afirmaciones

1.  $P_1\mathbf{y} \geq 0 \wedge \mu_3 \geq 0 > \mu_4$ ,
2.  $P_2\mathbf{y} \geq 0 \wedge \mu_2 \geq 0 > \mu_3 \wedge \mu_2 \geq |\mu_3|$ ,
3.  $P_3\mathbf{y} \geq 0 \wedge \mu_2 \geq 0 > \mu_3 \wedge \mu_2 < |\mu_3|$ ,
4.  $P_4\mathbf{y} \geq 0 \wedge \mu_1 \geq 0 > \mu_2$ ,

donde

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

## 2. Matrices simétricas con autovalores y entradas diagonales prescritas 11

$$P_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\mu_1+\mu_3}}{\sqrt{2}\sqrt{\mu_1-\mu_2}} & -\frac{\sqrt{-(\mu_2+\mu_3)}}{\sqrt{2}\sqrt{\mu_1-\mu_2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{\mu_1+\mu_3}}{\sqrt{2}\sqrt{\mu_1-\mu_2}} & -\frac{\sqrt{-(\mu_2+\mu_3)}}{\sqrt{2}\sqrt{\mu_1-\mu_2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{-(\mu_2+\mu_3)}}{\sqrt{2}\sqrt{\mu_1-\mu_2}} & \frac{\sqrt{\mu_1+\mu_3}}{\sqrt{2}\sqrt{\mu_1-\mu_2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\sqrt{-(\mu_2+\mu_3)}}{\sqrt{2}\sqrt{\mu_1-\mu_2}} & \frac{\sqrt{\mu_1+\mu_3}}{\sqrt{2}\sqrt{\mu_1-\mu_2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_1+\mu_2}}{\sqrt{2}\sqrt{\mu_1+\mu_2-\mu_3}\sqrt{\mu_1-\mu_2}} & -\frac{\sqrt{-\mu_2}\sqrt{\mu_1+\mu_2}}{\sqrt{2}\sqrt{\mu_1+\mu_2-\mu_3}\sqrt{\mu_1-\mu_2}} & -\frac{\sqrt{-\mu_3}}{\sqrt{2}\sqrt{\mu_1+\mu_2-\mu_3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_1+\mu_2}}{\sqrt{2}\sqrt{\mu_1+\mu_2-\mu_3}\sqrt{\mu_1-\mu_2}} & -\frac{\sqrt{-\mu_2}\sqrt{\mu_1+\mu_2}}{\sqrt{2}\sqrt{\mu_1+\mu_2-\mu_3}\sqrt{\mu_1-\mu_2}} & -\frac{\sqrt{-\mu_3}}{\sqrt{2}\sqrt{\mu_1+\mu_2-\mu_3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{\mu_1}\sqrt{-\mu_3}}{\sqrt{\mu_1+\mu_2-\mu_3}\sqrt{\mu_1-\mu_2}} & -\frac{\sqrt{-\mu_2}\sqrt{-\mu_3}}{\sqrt{\mu_1+\mu_2-\mu_3}\sqrt{\mu_1-\mu_2}} & \frac{\sqrt{\mu_1+\mu_2}}{\sqrt{\mu_1+\mu_2-\mu_3}} & 0 \\ \frac{\sqrt{-\mu_2}}{\sqrt{\mu_1-\mu_2}} & \frac{\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1-\mu_2}} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

entonces  $\Lambda$  es simétricamente realizable.

*Demostración.* Recordemos que  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$  esta definido por  $y_i^2 = -\frac{\prod_j^5 (\lambda_j - \mu_i)}{\prod_{j \neq i}^4 (\mu_j - \mu_i)}$ .

Caso 1, si  $P_1 \mathbf{y} \geq 0 \wedge \mu_4 \leq 0$ , definimos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 & y_1 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 & y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_4 & \frac{1}{2}\mu_1 - \frac{1}{2}\mu_4 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2}y_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}y_4 \\ \frac{1}{2}\mu_1 - \frac{1}{2}\mu_4 & \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_4 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2}y_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}y_4 \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_3 & y_3 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}y_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}y_4 & \frac{1}{2}\sqrt{2}y_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}y_4 & y_2 & y_3 & a \end{bmatrix}.$$

$A$  es no negativa, pues por hipótesis  $\mu_1 \geq |\mu_i|$ ,  $i = 2, 3, 4$ , así  $\frac{1}{2}\mu_1 \pm \frac{1}{2}\mu_4 \geq 0$ . Como  $\mu_3 \geq 0$ , entonces  $\mu_2 \geq 0$ . Finalmente puesto que

$$(P_1 \mathbf{y})^T = (\frac{1}{2}\sqrt{2}y_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}y_4, \frac{1}{2}\sqrt{2}y_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}y_4, y_3, y_4) \geq 0,$$

por el teorema anterior la matriz simétrica  $A$  es no negativa y tiene el espectro deseado.

Observemos que las condiciones en 2), 3), 4) son necesarias para la buena definición de  $P_i$ , y puesto que  $P_i \mathbf{y} \geq 0$  se tiene que:

## 2. Matrices simétricas con autovalores y entradas diagonales prescritas 12

$$B_2 = P_2 D_\mu P_2^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu_2 + \mu_3 & \mu_2 - \mu_3 & 0 & 0 \\ \mu_2 - \mu_3 & \mu_2 + \mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 + \mu_4 & \mu_1 - \mu_4 \\ 0 & 0 & \mu_1 - \mu_4 & \mu_1 + \mu_4 \end{bmatrix}.$$

$B_2 \geq 0$ , puesto que  $\mu_2 \geq |\mu_3|$ ,  $\mu_1 \geq |\mu_4|$ .

$$B_3 = P_3 D_\mu P_3^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 & \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 & b & b \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 & \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 & b & b \\ b & b & 0 & -2\mu_3 \\ b & b & -2\mu_3 & 0 \end{bmatrix},$$

donde  $b = \sqrt{-(\mu_2 + \mu_3)(\mu_1 + \mu_3)}$ . Se tiene que  $b$  está bien definido ya que  $\mu_2 < |\mu_3|$ . Se sigue de ahí que  $-(\mu_2 + \mu_3)(\mu_1 + \mu_3) \geq 0$ .  $B_3 \geq 0$ , puesto que  $\mu_2 + \mu_3 \geq 0$  y  $\mu_1 \geq |\mu_4|$ , luego tenemos que  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 \geq 0$ ,  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 \geq 0$ .

$$B_4 = \begin{bmatrix} M & \delta \mathbf{v} \\ \delta \mathbf{v}^T & 0 \end{bmatrix},$$

donde  $\delta = \sqrt{-\lambda_1 \lambda_2}$ ,  $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2(\mu_1 + \mu_2 - \mu_3)}} [\sqrt{\mu_1 + \mu_2}, \sqrt{\mu_1 + \mu_2}, \sqrt{-2\mu_3}]$  y  $M$  es

$$M = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 & \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 & \sqrt{-2(\mu_1 + \mu_2)\mu_3} \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 & \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 & \sqrt{-2(\mu_1 + \mu_2)\mu_3} \\ \sqrt{-2(\mu_1 + \mu_2)\mu_3} & \sqrt{-2(\mu_1 + \mu_2)\mu_3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente por el teorema 2.2.2 las matrices

$$A_i = \begin{bmatrix} P_i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_\mu & \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

son no negativas, simétricas y con espectro  $\Lambda$ . □

**Ejemplo 2.2.3.** Consideremos la lista  $\Lambda = \{6, 2, 1, -3, -4\}$ . Definimos  $\mu = \{5, 1, 0, -4\}$ . Esta lista intercala a  $\Lambda$ .

La matriz que realiza  $\mu$ , está dada por

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 0 & 0 \\ \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces la matriz que realiza  $\Lambda$  es

$$A = \begin{bmatrix} B & Q\mathbf{y} \\ (Q\mathbf{y})^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{60} \\ \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{60} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{60} & \frac{1}{5}\sqrt{60} & 0 & \frac{6}{5}\sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}$$

### 2.3. Matrices simétricas con autovalores y entradas diagonales prescritas

En esta sección consideraremos el siguiente problema:

**Problema 3.** Dada las listas  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  y  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  encontrar condiciones necesarias y/o suficientes para la existencia de una matriz simétrica  $A$  no negativa, con espectro  $\Lambda$  y entradas diagonales  $d_1, d_2, \dots, d_n$ .

**Definición 2.3.1.** Sean  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]$  y  $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  dos vectores con entradas reales tales que  $u_i \geq u_{i+1}, v_i \geq v_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n - 1$ . Diremos que  $\mathbf{u}$  mayoriza a  $\mathbf{v}$  si

- Para  $t \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$  se cumple  $\sum_{i=1}^t u_i \geq \sum_{i=1}^t v_i$ .
- $\sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n v_i$ .

Una condición necesaria y suficiente para la existencia de una matriz simétrica, no necesariamente no negativa, es debido a Schur y Horn [33, 15].

**Teorema 2.3.1.** [15] Existe una matriz real simétrica con autovalores  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  y entradas diagonales  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$  si y solo si el vector  $[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$  mayoriza el vector  $[d_1, \dots, d_n]$ , esto es, si y solo si

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \geq \sum_{i=1}^k d_i, k = 1, 2, \dots, n - 1,$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n d_i.$$

Puesto que nos dan las entradas diagonales  $d_1, d_2, \dots, d_n$  y necesitamos construir una matriz simétrica con espectro  $\Lambda$ , este problema también es un problema de completación. Este problema es difícil y abierto. Para el caso  $n = 2$  y  $n = 3$ , existen condiciones necesarias y suficientes dadas por Fiedler [10]. Para  $n \geq 4$  Fiedler da una condición suficiente [10].

**Lema 2.3.1.** (Fiedler [10]) Sea  $\lambda_1, \lambda_2, d_1, d_2$  satisfaciendo

$$\lambda_1 \geq \max(d_1, d_2) \text{ y } \lambda_1 + \lambda_2 = d_1 + d_2.$$

## 2. Matrices simétricas con autovalores y entradas diagonales prescritas 14

Entonces existe una matriz simétrica no negativa  $A$  con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  y entradas diagonales  $d_1, d_2$ .

En particular la matriz simétrica

$$B = \begin{bmatrix} d_1 & \sqrt{(\lambda_1 - d_1)(\lambda_1 - d_2)} \\ \sqrt{(\lambda_1 - d_1)(\lambda_1 - d_2)} & d_2 \end{bmatrix},$$

tiene autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  y entradas diagonales  $d_1, d_2$ .

La solución para el caso  $n = 3$  está dada por el siguiente resultado

**Teorema 2.3.2.** (Fiedler [10]) Las condiciones

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\geq d_1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 &\geq d_1 + d_2, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= d_1 + d_2 + d_3, \\ \lambda_2 &\leq d_1, \end{aligned}$$

son necesarias y suficientes para la existencia de una matriz simétrica  $3 \times 3$  no negativa  $B$  con autovalores  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$  y entradas diagonales  $d_1 \geq d_2 \geq d_3$ .

Una construcción de una tal matriz puede hallarse en [41]:

$$B = \begin{bmatrix} d_1 & \sqrt{\frac{\mu - d_3}{2\mu - d_2 - d_3}} s & \sqrt{\frac{\mu - d_2}{2\mu - d_2 - d_3}} s \\ \sqrt{\frac{\mu - d_3}{2\mu - d_2 - d_3}} s & d_2 & \sqrt{(\mu - d_2)(\mu - d_3)} \\ \sqrt{\frac{\mu - d_2}{2\mu - d_2 - d_3}} s & \sqrt{(\mu - d_2)(\mu - d_3)} & d_3 \end{bmatrix},$$

donde  $\mu = \lambda_1 + \lambda_2 - d_1$  y  $s = \sqrt{(\lambda_1 - \mu)(\mu - d_3)}$ .

El resultado que presentamos a continuación es debida a Fiedler [10] y da una condición suficiente para  $n \geq 4$  [10].

**Teorema 2.3.3.** [10] Sean  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ , y  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$  satisfaciendo las condiciones

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \geq \sum_{i=1}^k d_i, k = 1, 2, \dots, n - 1,$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n d_i,$$

$$\lambda_j \leq d_{j-1}, j = 2, \dots, n - 1,$$

Entonces existe una matriz  $A$  simétrica no negativa con espectro  $\Lambda$  y entradas diagonales  $d_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

El siguiente ejemplo muestra que la condición del Teorema 2.3.3 no es necesaria.

## 2. Matrices simétricas con autovalores y entradas diagonales prescritas 15

**Ejemplo 2.3.1.** Consideremos  $\Lambda = \{8, 6, 3, 3\}$  y  $D = \{5, 5, 5, 5\}$ . Estas listas no cumplen la condición de Fiedler  $5 \not\geq 6$ , sin embargo la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 5 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 5 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

tiene los autovalores y entradas diagonales deseadas.

A continuación presentamos una simple condición necesaria para la existencia de una matriz simétrica real con autovalores y entradas diagonales prescritas.

**Proposition 2.3.1.** Si existe una matriz simétrica con autovalores  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  y entradas diagonales  $d_1, d_2, \dots, d_n$ , entonces  $d_n \geq \lambda_n$ .

*Demostración.* Supongamos que  $d_n < \lambda_n$ . Entonces

$$d_n + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} < \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} + \lambda_n.$$

Así

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} < d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1},$$

lo cual es contradictorio puesto que  $\Lambda$  mayoriza a  $D$ .  $\square$

A continuación damos una condición suficiente para el caso  $n = 4$ . Nosotros consideramos el caso  $\lambda_2 \geq d_1$ , lo que hace nuestra condición independiente de la condición del Teorema de Fiedler (Teorema 2.3.3). Con el propósito de simplificar el enunciado del siguiente resultado sea

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4 \text{ y } d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq d_4,$$

listas de números reales, con

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i = \sum_{i=1}^4 d_i, \text{ y } \lambda_2 \geq d_1 \geq \lambda_3.$$

Definimos

$$b = (\lambda_1 - d_1)(\lambda_2 - d_1)(d_1 - \lambda_3)(d_1 - \lambda_4),$$

$$c = (d_1 - d_3)^2(d_1 - d_2)^2 + 4b,$$

$$\mu_1 = ((d_2 + d_3)/2) + (1/2)\sqrt{(2\sqrt{c} + (d_1 - d_2)^2 + (d_1 - d_3)^2)},$$

$$\mu_2 = d_1$$

$$\mu_3 = ((d_2 + d_3)/2) - (1/2)\sqrt{(2\sqrt{c} + (d_1 - d_2)^2 + (d_1 - d_3)^2)},$$

## 2. Matrices simétricas con autovalores y entradas diagonales prescritas 16

$$\begin{aligned}
 a &= \sqrt{((\mu_1 - d_2)(\mu_1 - d_3))}, \\
 y_1^2 &= -(((\mu_1 - \lambda_1)(\mu_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \lambda_3)(\mu_1 - \lambda_4))/((\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_3))), \\
 y_2^2 &= -(((\lambda_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_2)(\lambda_3 - \mu_2)(\lambda_4 - \mu_2))/((\mu_1 - \mu_2)(\mu_3 - \mu_2))), \\
 y_3^2 &= -(((\mu_3 - \lambda_1)(\mu_3 - \lambda_2)(\mu_3 - \lambda_3)(\mu_3 - \lambda_4))/((\mu_3 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2))), \\
 m &= 4a^2 + (d_2 - d_3)^2.
 \end{aligned}$$

**Teorema 2.3.4.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ ,  $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$  listas reales tales que  $\sum_{i=1}^4 \lambda_i = \sum_{i=1}^4 d_i$ ,  $\lambda_2 \geq d_1 \geq \lambda_3$ . Si las desigualdades*

$$i) \quad (\lambda_1 - d_2)(\lambda_1 - d_3)^2 - (\lambda_1 - d_3)(d_1 - d_2)(d_1 - d_3) \geq (\lambda_2 - d_1)(d_1 - \lambda_3)(d_1 - \lambda_4),$$

ii)

$$(\lambda_1 - d_1)(\lambda_2 - d_1)(d_1 - \lambda_3)(d_1 - \lambda_4) \geq (\lambda_2 - d_2)(\lambda_2 - d_3)((\lambda_2 - d_2)(\lambda_2 - d_3) - (d_1 - d_2)(d_1 - d_3)),$$

iii)

$$(\lambda_1 - d_1)(\lambda_2 - d_1)(d_1 - \lambda_3)(d_1 - \lambda_4) \geq (d_3 - \lambda_3)(d_2 - \lambda_3)((d_3 - \lambda_3)(d_2 - \lambda_3) - (d_1 - d_2)(d_1 - d_3)),$$

iv)

$$(d_3 - \lambda_4)(d_2 - \lambda_4)((d_3 - \lambda_4)(d_2 - \lambda_4) - (d_1 - d_2)(d_1 - d_3)) \geq (\lambda_1 - d_1)(\lambda_2 - d_1)(d_1 - \lambda_3)(d_1 - \lambda_4),$$

v)

$$\| \mathbf{v}_3 \| (d_2 - d_3 + \sqrt{m})C_1 \geq \| \mathbf{v}_1 \| (d_3 - d_2 + \sqrt{m})C_3,$$

donde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{d_2 - d_3 + \sqrt{m}}{2a} \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{d_2 - d_3 - \sqrt{m}}{2a} \\ 1 \end{bmatrix},$$

son satisfechas, entonces existe una matriz simétrica no negativa con entradas diagonales  $d_1, d_2, d_3, d_4$ , y espectro  $\Lambda$ .

## 2. Matrices simétricas con autovalores y entradas diagonales prescritas 17

*Demostración.* Sea

$$B = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & a \\ 0 & a & d_3 \end{bmatrix},$$

una matriz con autovalores  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ . Entonces  $d_1 = \mu_2$  y  $a = \sqrt{(\mu_1 - d_2)(\mu_1 - d_3)}$ . Ahora mostraremos que los  $\mu_i$ 's intercalan los  $\lambda_i$ 's. Por la desigualdad *i*) tenemos

$$4(\lambda_1 - d_3)^2(\lambda_1 - d_2)^2 - 4(\lambda_1 - d_3)(\lambda_1 - d_2)(d_1 - d_3)(d_1 - d_2) + (d_1 - d_3)^2(d_1 - d_2)^2 \geq (d_1 - d_3)^2(d_1 - d_2)^2 + 4(\lambda_1 - d_1)(\lambda_2 - d_1)(d_1 - \lambda_3)(d_1 - \lambda_4),$$

que es,

$$\begin{aligned} 2(\lambda_1 - d_3)(\lambda_1 - d_2) - (d_1 - d_3)(d_1 - d_2) &\geq \sqrt{c}, \\ 2(\lambda_1(\lambda_1 - d_3) - d_2(\lambda_1 - d_3)) + d_2(d_1 - d_3) - d_1(d_1 - d_3) \\ 2(\lambda_1^2 - \lambda_1 d_2 - \lambda_1 d_3 + d_2 d_3) - d_2 d_3 + d_1 d_2 + d_1 d_3 - d_1^2 &\geq \sqrt{c} \\ 4\lambda_1^2 - 4\lambda_1(d_2 + d_3) + 2d_2 d_3 + 2d_1 d_2 + 2d_1 d_3 - 2d_1^2 &\geq 2\sqrt{c} \\ (2\lambda_1 - (d_2 + d_3))^2 \geq 2\sqrt{c} + d_1^2 - 2d_1 d_2 + d_2^2 + d_1^2 - 2d_1 d_3 + d_3^2 \\ 2\lambda_1 - (d_2 + d_3) &\geq \sqrt{2\sqrt{c} + (d_1 - d_2)^2 + (d_1 - d_3)^2} \\ \lambda_1 &\geq \frac{d_2 + d_3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{c} + (d_1 - d_2)^2 + (d_1 - d_3)^2} \\ \lambda &\geq \mu_1. \end{aligned}$$

De la misma manera, a partir de la desigualdad *ii*) tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{c} &\geq 2(\lambda_2 - d_2)(\lambda_2 - d_3) - (d_1 - d_2)(d_1 - d_3) \\ \sqrt{c} &\geq 2(\lambda_2^2 - \lambda_2 d_2 - \lambda_2 d_3 + d_2 d_3) + d_1 d_2 + d_1 d_3 - d_1^2 - d_2 d_3, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 2\sqrt{c} + d_1^2 - 2d_1 d_2 - 2d_1 d_3 &\geq 4\lambda_2^2 - 4\lambda_2(d_2 + d_3) + 2d_2 d_3 \\ \sqrt{2\sqrt{c} + (d_1 - d_2)^2 + (d_1 - d_3)^2} &\geq 2\lambda_2 - (d_2 + d_3) \\ \frac{d_2 + d_3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{c} + (d_1 - d_2)^2 + (d_1 - d_3)^2} &\geq \lambda_2 \\ \mu_1 &\geq \lambda_2. \end{aligned}$$

De manera similar por las desigualdades *iii*) y *iv*) se tiene que  $\lambda_3 \geq \mu_3 \geq \lambda_4$ , y puesto que  $d_1 = \mu_2$ , entonces

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \lambda_3 \geq \mu_3 \geq \lambda_4.$$

Ahora, sea

$$P = \left[ \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} \mid \mathbf{v}_2 \mid \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} \right]$$

donde

## 2. Matrices simétricas con autovalores y entradas diagonales prescritas 18

$$\begin{aligned}\| \mathbf{v}_1 \| &= \sqrt{\frac{1}{4a^2}(d_2 - d_3 + \sqrt{m})^2 + 1}, \\ \| \mathbf{v}_2 \| &= 1, \\ \| \mathbf{v}_3 \| &= \sqrt{\frac{1}{4a^2}(d_2 - d_3 - \sqrt{m})^2 + 1}.\end{aligned}$$

$P$  es ortogonal y  $B = PDP^T$ , donde  $D = \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ . Así nosotros tenemos

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\} & \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} B & P\mathbf{y} \\ (P\mathbf{y})^T & d_4 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Finalmente, de la desigualdad  $v)$  podemos ver a partir de cálculos sencillos que  $P\mathbf{y} \geq 0$ , donde las entradas del vector  $\mathbf{y}$  son calculados como en el teorema 2.2.2. Así  $A$  es una matriz simétrica  $4 \times 4$  no negativa con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  y entradas diagonales  $d_1, d_2, d_3, d_4$ . □

**Ejemplo 2.3.2.** Consideremos la lista  $\Lambda = \{5, 4, 0, -3\}$  y  $D = \{3, 3, 0, 0\}$ . Esta lista satisface todas las desigualdades del teorema 2.3.4. Entonces calculamos la matriz simétrica no negativa

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 3 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 2 \\ \sqrt{6} & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notar que  $\lambda_2 > d_1$ . Entonces la condición suficiente de Fiedler no se cumple en este ejemplo.

**Ejemplo 2.3.3.** Consideremos las listas  $\Lambda = \{7, 5, 0, -4\}$  y  $D = \{4, 4, 0, 0\}$ . Calculamos los números que intercalan a  $\Lambda$   $\mu_1 = 6, \mu_2 = 4, \mu_3 = -2$  y  $a = 2\sqrt{3}$ . Entonces tenemos

$$\begin{aligned}PDP^T &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} = B\end{aligned}$$

y

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 4 & 2\sqrt{3} & \frac{\sqrt{45}}{4} - \frac{\sqrt{21}}{4} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 & \frac{\sqrt{63}}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4} \\ 2\sqrt{2} & \frac{\sqrt{45}}{4} - \frac{\sqrt{21}}{4} & \frac{\sqrt{63}}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

## 2. Matrices simétricas con autovalores y entradas diagonales prescritas 19

*con el espectro y las entradas diagonales deseadas.*

# Capítulo 3

## Sobre una pregunta abierta de Guo

Un relevante resultado en el *problema inverso de autovalores para matrices no negativas* ha sido obtenido por Guo [12].

**Teorema 3.0.5.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos tal que  $\lambda_2 \in \mathbb{R}$  y  $\epsilon > 0$ . Si  $\Lambda$  es realizable por una matriz no negativa, entonces  $\Lambda_\epsilon = \{\lambda_1 + \epsilon, \lambda_2 \pm \epsilon, \dots, \lambda_n\}$  es también realizable por una matriz no negativa.*

Este resultado permite decidir fácilmente, aunque no siempre, la realizabilidad de listas de números reales o complejos. Por ejemplo, observemos que para la lista  $\Lambda = \{8, 6, 3, 3, -5, -5, -5, -5\}$ , es posible considerar las listas  $\Lambda_1 = \{7, 3, -5, -5\}$  y  $\Lambda_2 = \{7, 3, -5, -5\}$  que son claramente realizables. Entonces la unión de las listas  $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 = \{7, 7, 3, 3, -5, -5, -5, -5\}$  es también realizable por una matriz no negativa. Así, para  $\epsilon = 1$  tenemos del resultado de Guo que  $\Lambda$  es realizable por una matriz no negativa.

Guo en [12] estableció la siguiente pregunta:

**Problema 4.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  simétricamente realizable y  $\epsilon > 0$  ¿Es la lista  $\Lambda_\epsilon = \{\lambda_1 + \epsilon, \lambda_2 \pm \epsilon, \dots, \lambda_n\}$  también simétricamente realizable?*

Puesto que el *NIEP* y el *SNIEP* son equivalentes para  $n \leq 4$ , entonces para listas de orden menor o igual a 4 la pregunta de Guo esta completamente resuelta.

En este capítulo damos soluciones parciales a la pregunta de Guo. El siguiente resultado muestra que si  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\}$ , con  $\sum_i^5 \lambda_i = 0$ , es simétricamente realizable por una matriz no negativa, entonces  $\Lambda_\epsilon^- = \{\lambda_1 + \epsilon, \lambda_2 - \epsilon, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\}$  es también simétricamente realizable por una matriz no negativa. El contenido de este capítulo constituye esencialmente la publicación [46].

**Proposition 3.0.2.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\}$  simétricamente realizable por una matriz no negativa de traza cero y  $\epsilon > 0$ . Entonces  $\Lambda_\epsilon^- = \{\lambda_1 + \epsilon, \lambda_2 - \epsilon, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\}$  es también simétricamente realizable por una matriz no negativa.*

*Demostración.* Del Teorema 2.1.1 de Spector, tenemos:

$$S_1(\Lambda_\epsilon^-) = \lambda_1 + \epsilon + \lambda_2 - \epsilon + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0,$$

y puesto que  $\lambda_1 \geq |\lambda_2|$ ,

$$\begin{aligned} S_3(\Lambda_\epsilon^-) &= (\lambda_1 + \epsilon)^3 + (\lambda_2 - \epsilon)^3 + \lambda_3^3 + \lambda_4^3 + \lambda_5^3 \\ &= 3\epsilon^2\lambda_1 + 3\epsilon^2\lambda_2 + 3\epsilon\lambda_1^2 - 3\epsilon\lambda_2^2 + \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 + \lambda_4^3 + \lambda_5^3 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Finalmente, es claro que  $\lambda_2 - \epsilon + \lambda_5 \leq 0$ . Entonces  $\Lambda_\epsilon^-$  es simétricamente realizable.  $\square$

### 3.1. Una primera solución a la pregunta de Guo

Iniciamos la sección con el siguiente resultado

**Teorema 3.1.1.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  simétricamente realizable. Entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que*

$$\Lambda_{\epsilon\delta} = \{\lambda_1 + \epsilon, \lambda_2 \pm \epsilon\delta, \dots, \lambda_n\},$$

*es simétricamente realizable.*

*Demostración.* Sea  $A = PDP^T \geq 0$  la matriz no negativa simétrica con espectro  $\Lambda$ , donde  $P = [\mathbf{p}_1 \mid \mathbf{p}_2 \mid \dots \mid \mathbf{p}_n]$  es una matriz ortogonal y  $D = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ .

Entonces

$$A = \lambda_1\mathbf{p}_1\mathbf{p}_1^T + \lambda_2\mathbf{p}_2\mathbf{p}_2^T + \dots + \lambda_n\mathbf{p}_n\mathbf{p}_n^T. \quad (3.1)$$

Primero consideraremos el caso reducible, es decir  $A = \bigoplus_{i=1}^r A_i$  es suma directa de matrices simétricas irreducibles.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\lambda_1 \in \sigma(A_1)$ ,  $\lambda_2 \in \sigma(A_2)$ . En efecto, si  $\lambda_1 \in \sigma(A_i)$ ,  $\lambda_2 \in \sigma(A_j)$  con  $i \neq j$ , entonces via matrices de permutación obtenemos que  $\lambda_1 \in \sigma(A_1)$ ,  $\lambda_2 \in \sigma(A_2)$ .

Sea  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  autovectores unitarios de  $A_1, A_2$  asociados a  $\lambda_1, \lambda_2$  respectivamente.

Entonces

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}.$$

Así las matrices  $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_1^T, \mathbf{p}_2\mathbf{p}_2^T$  son no negativas y la matriz

$$\begin{aligned} A_\epsilon^+ &= \lambda_1\mathbf{p}_1\mathbf{p}_1^T + \lambda_2\mathbf{p}_2\mathbf{p}_2^T + \dots + \lambda_n\mathbf{p}_n\mathbf{p}_n^T + \epsilon(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_1^T + \mathbf{p}_2\mathbf{p}_2^T) \\ &= (\lambda_1 + \epsilon)\mathbf{p}_1\mathbf{p}_1^T + (\lambda_2 + \epsilon)\mathbf{p}_2\mathbf{p}_2^T + \dots + \lambda_n\mathbf{p}_n\mathbf{p}_n^T, \end{aligned}$$

es no negativa con espectro  $\Lambda_\epsilon^+ = \{\lambda_1 + \epsilon, \lambda_2 + \epsilon, \dots, \lambda_n\}$ .

Para la lista  $\Lambda_\epsilon^-$ , puesto que  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ , tenemos por el Lema 2.1.2 de Fiedler, para  $\epsilon > 0$  la lista

$$\Lambda_\epsilon^- = \{\lambda_1 + \epsilon, \lambda_2 - \epsilon, \dots, \lambda_n\}$$

es simétricamente realizable. Observamos que para el caso reducible,  $\delta = 1$ .

Ahora consideremos el caso irreducible. Sea  $A = PDP^T$  la matriz simétrica que realiza  $\Lambda$ . Por el teorema de Perron Frobenius, el autovector unitario  $\mathbf{p}_1$  asociado a  $\lambda_1$  es positivo. Así para el autovector  $\mathbf{p}_2$  asociado a  $\lambda_2$  existe un  $\delta > 0$  tal que

$$\mathbf{p}_1\mathbf{p}_1^T + \delta\mathbf{p}_2\mathbf{p}_2^T \geq 0.$$

$\delta$  puede ser tomado como  $\delta = \min_{i,j} \{\delta_{i,j} : (\mathbf{p}_1\mathbf{p}_1^T)_{i,j} \pm \delta_{i,j}(\mathbf{p}_2\mathbf{p}_2^T)_{i,j} \geq 0\}$ .

Así, la matriz simétrica no negativa

$$\begin{aligned} A_\epsilon &= (\lambda_1 + \epsilon)\mathbf{p}_1\mathbf{p}_1^T + (\lambda_2 \pm \delta\epsilon)\mathbf{p}_2\mathbf{p}_2^T + \dots + \lambda_n\mathbf{p}_n\mathbf{p}_n^T \\ &= \lambda_1\mathbf{p}_1\mathbf{p}_1^T + \lambda_2\mathbf{p}_2\mathbf{p}_2^T + \dots + \lambda_n\mathbf{p}_n\mathbf{p}_n^T + \epsilon(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_1^T \pm \delta\mathbf{p}_2\mathbf{p}_2^T) \\ &= A + \epsilon(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_1^T \pm \delta\mathbf{p}_2\mathbf{p}_2^T), \end{aligned}$$

tiene espectro  $\{\lambda_1 + \epsilon, \lambda_2 \pm \epsilon\delta, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$ .

□

**Ejemplo 3.1.1.** Consideremos la lista  $\Lambda = \{5, 4, 0, -3\}$ , realizable por la matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 3 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 2 \\ \sqrt{6} & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} P &= [\mathbf{p}_1 \mid \mathbf{p}_2 \mid \mathbf{p}_3 \mid \mathbf{p}_4] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{10}\sqrt{30} & \frac{1}{14}\sqrt{84} & -\frac{1}{30}\sqrt{180} & -\frac{1}{42}\sqrt{126} \\ \frac{1}{10}\sqrt{30} & -\frac{1}{14}\sqrt{84} & -\frac{1}{30}\sqrt{180} & \frac{1}{42}\sqrt{126} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{1}{14}\sqrt{14} & \frac{1}{10}\sqrt{30} & -\frac{1}{7}\sqrt{21} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{14}\sqrt{14} & \frac{1}{10}\sqrt{30} & \frac{1}{7}\sqrt{21} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

es tal que  $A = P \text{diag}\{5, 4, 0, -3\} P^T$ .

Observamos que  $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_1^T \pm \delta\mathbf{p}_2\mathbf{p}_2^T \geq 0$ , cuando  $0 < \delta \leq \frac{7}{10}$ . Así con  $\delta = \frac{1}{7}$ , las matrices

$$A + \epsilon \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_1^T + \delta \epsilon \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_2^T = \begin{bmatrix} \frac{177}{490}\epsilon + 3 & \frac{117}{490}\epsilon & \frac{22}{245}\sqrt{6}\epsilon & \frac{27}{245}\sqrt{6}\epsilon + \sqrt{6} \\ \frac{117}{490}\epsilon & \frac{177}{490}\epsilon + 3 & \frac{27}{245}\sqrt{6}\epsilon + \sqrt{6} & \frac{22}{245}\sqrt{6}\epsilon \\ \frac{22}{245}\sqrt{6}\epsilon & \frac{27}{245}\sqrt{6}\epsilon + \sqrt{6} & \frac{103}{490}\epsilon & \frac{93}{490}\epsilon + 2 \\ \frac{27}{245}\sqrt{6}\epsilon + \sqrt{6} & \frac{22}{245}\sqrt{6}\epsilon & \frac{93}{490}\epsilon + 2 & \frac{103}{490}\epsilon \end{bmatrix},$$

y

$$A + \epsilon \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_1^T - \delta \epsilon \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_2^T = \begin{bmatrix} \frac{117}{490}\epsilon + 3 & \frac{177}{490}\epsilon & \frac{27}{245}\sqrt{6}\epsilon & \frac{22}{245}\sqrt{6}\epsilon + \sqrt{6} \\ \frac{177}{490}\epsilon & \frac{117}{490}\epsilon + 3 & \frac{22}{245}\sqrt{6}\epsilon + \sqrt{6} & \frac{27}{245}\sqrt{6}\epsilon \\ \frac{27}{245}\sqrt{6}\epsilon & \frac{22}{245}\sqrt{6}\epsilon + \sqrt{6} & \frac{93}{490}\epsilon & \frac{103}{490}\epsilon + 2 \\ \frac{22}{245}\sqrt{6}\epsilon + \sqrt{6} & \frac{27}{245}\sqrt{6}\epsilon & \frac{103}{490}\epsilon + 2 & \frac{93}{490}\epsilon \end{bmatrix},$$

tienen espectros  $\{5 + \epsilon, 4 + \frac{1}{7}\epsilon, 0, -3\}$  y  $\{5 + \epsilon, 4 - \frac{1}{7}\epsilon, 0, -3\}$ , respectivamente.

El siguiente ejemplo muestra el caso cuando  $\delta = 1$ .

**Ejemplo 3.1.2.** Sea  $\Lambda = \{5, 4, 0, -3\}$ . La matriz que realiza  $\Lambda$  con autovectores unitarios  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  asociados a  $5, 4$  es

$$A = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} & \frac{9}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{9}{4} & \frac{9}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{15}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{15}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Puesto que  $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_1^T \pm \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_2^T \geq 0$ , se sigue que  $\delta = 1$ . Así las matrices que realizan  $\Lambda_\epsilon = \{5 + \epsilon, 4 \pm \epsilon, 0, -3\}$  son

$$A_\epsilon^+ = \begin{bmatrix} \epsilon \frac{1}{2} + \frac{9}{4} & \frac{9}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \epsilon \frac{1}{2} + \frac{9}{4} & \epsilon \frac{1}{2} + \frac{9}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \epsilon \frac{1}{2} + \frac{3}{4} & \epsilon \frac{1}{2} + \frac{15}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \epsilon \frac{1}{2} + \frac{15}{4} & \epsilon \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \end{bmatrix},$$

$$A_\epsilon^- = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} & \frac{9}{4} & \epsilon \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & \epsilon \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ \frac{9}{4} & \frac{9}{4} & \epsilon \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & \epsilon \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ \epsilon \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & \epsilon \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{15}{4} \\ \epsilon \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & \epsilon \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & \frac{15}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Como resultados inmediatos del teorema anterior se tienen los siguientes corolarios:

**Corolario 3.1.1.** Si  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  es simétricamente realizable por una matriz  $A = A_1 \oplus A_2$  tal que  $\lambda_1 \in A_1, \lambda_2 \in A_2$ . Entonces para todo  $\epsilon > 0$  la lista  $\Lambda_\epsilon = \{\lambda_1 + \epsilon, \lambda_2 \pm \epsilon, \dots, \lambda_n\}$  es simétricamente realizable.

**Corolario 3.1.2.** Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista simétricamente realizable. Si los autovectores unitarios  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  asociados a  $\lambda_1, \lambda_2$  son tales que  $\mathbf{x}\mathbf{x}^T \pm \mathbf{y}\mathbf{y}^T \geq 0$ . Entonces  $\Lambda_\epsilon = \{\lambda_1 + \epsilon, \lambda_2 \pm \epsilon, \dots, \lambda_n\}$  es simétricamente realizable.

**Demostración.** Sea

$$A = \lambda_1 \mathbf{x}\mathbf{x}^T + \lambda_2 \mathbf{y}\mathbf{y}^T + \lambda_3 \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_3^T + \dots + \lambda_n \mathbf{p}_n \mathbf{p}_n^T,$$

la matriz simétrica que realiza  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ . Puesto que  $\mathbf{x}\mathbf{x}^T \pm \mathbf{y}\mathbf{y}^T \geq 0$ , entonces por el Teorema 3.1.1 las listas  $\{\lambda_1 + \epsilon, \lambda_2 \pm \epsilon, \dots, \lambda_n\}$  son simétricamente realizables.

**Ejemplo 3.1.3.** Consideremos  $\Lambda = \{24, 16, -10, -10, -10, -10\}$ . Una matriz que realiza  $\Lambda$  es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 10 & 4/3 & 4/3 & 4/3 \\ 10 & 0 & 10 & 4/3 & 4/3 & 4/3 \\ 10 & 10 & 0 & 4/3 & 4/3 & 4/3 \\ 4/3 & 4/3 & 4/3 & 0 & 10 & 10 \\ 4/3 & 4/3 & 4/3 & 10 & 0 & 10 \\ 4/3 & 4/3 & 4/3 & 10 & 10 & 0 \end{bmatrix}.$$

En este caso para

$$\mathbf{x} = [1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}]^T,$$

e

$$\mathbf{y} = [-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}]^T,$$

se tiene que  $\mathbf{x}\mathbf{x}^T \pm \mathbf{y}\mathbf{y}^T \geq 0$ .

Definimos  $U = [\mathbf{x} \mid \mathbf{y}]$ . Entonces

$$\begin{aligned} A_\epsilon^+ &= A + U \begin{bmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix} U^T \\ &= \begin{bmatrix} 1/3\epsilon & 1/3\epsilon + 10 & 1/3\epsilon + 10 & 4/3 & 4/3 & 4/3 \\ 1/3\epsilon + 10 & 1/3\epsilon & 1/3\epsilon + 10 & 4/3 & 4/3 & 4/3 \\ 1/3\epsilon + 10 & 1/3\epsilon + 10 & 1/3\epsilon & 4/3 & 4/3 & 4/3 \\ 4/3 & 4/3 & 4/3 & 1/3\epsilon & 1/3\epsilon + 10 & 1/3\epsilon + 10 \\ 4/3 & 4/3 & 4/3 & 1/3\epsilon + 10 & 1/3\epsilon & 1/3\epsilon + 10 \\ 4/3 & 4/3 & 4/3 & 1/3\epsilon + 10 & 1/3\epsilon + 10 & 1/3\epsilon \end{bmatrix} \end{aligned}$$

cuyo espectro es  $\Lambda_\epsilon^+ = \{24 + \epsilon, 16 + \epsilon, -10, -10, -10, -10\}$ , y

$$\begin{aligned} A_\epsilon^- &= A + U \begin{bmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon \end{bmatrix} U^T \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 10 & 10 & 1/3\epsilon + 4/3 & 1/3\epsilon + 4/3 & 1/3\epsilon + 4/3 \\ 10 & 0 & 10 & 1/3\epsilon + 4/3 & 1/3\epsilon + 4/3 & 1/3\epsilon + 4/3 \\ 10 & 10 & 0 & 1/3\epsilon + 4/3 & 1/3\epsilon + 4/3 & 1/3\epsilon + 4/3 \\ 1/3\epsilon + 4/3 & 1/3\epsilon + 4/3 & 1/3\epsilon + 4/3 & 0 & 10 & 10 \\ 1/3\epsilon + 4/3 & 1/3\epsilon + 4/3 & 1/3\epsilon + 4/3 & 10 & 0 & 10 \\ 1/3\epsilon + 4/3 & 1/3\epsilon + 4/3 & 1/3\epsilon + 4/3 & 10 & 10 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

cuyo espectro es  $\Lambda_\epsilon^- = \{24 + \epsilon, 16 - \epsilon, -10, -10, -10, -10\}$ .

### 3.2. Listas realizables que cumplen la perturbación de Guo

En [36], el autor muestra que  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , con  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ , es realizable por una matriz no negativa si

$$\lambda_1 + \lambda_n + \sum_{S_k < 0} S_k \geq 0, \quad (3.2)$$

donde  $S_k = \lambda_k + \lambda_{n-k+1}$ ,  $k = 2, \dots, n$ . Esta condición suficiente es llamada el criterio S1. En [38] se muestra que si  $\Lambda$  satisface la condición 3.2, entonces  $\Lambda$  es también realizable por una matriz simétrica no negativa. Mostraremos que la pregunta de Guo, introducida al comienzo de este capítulo tiene una respuesta positiva para este criterio de realizabilidad.

Primero enunciaremos los resultados conocidos como criterios de realizabilidad Soto 1 (S1) y Soto (S2) (ver [38]):

**Lema 3.2.1.** [38](S1) Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  un conjunto de números reales tales que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0 > \lambda_{p+1} \geq \dots \geq \lambda_n$ . Si  $\Lambda$  satisface  $\lambda_1 \geq -\lambda_n - \sum_{S_k < 0} S_k$ , donde  $S_k = \lambda_k + \lambda_{n-k+1}$ ,  $k = 2, 3, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  y  $S_{\frac{n+1}{2}} = \min\{\lambda_{\frac{n+1}{2}}, 0\}$  para  $n$  impar, entonces  $\Lambda$  es realizable por una matriz no negativa simétrica.

**Teorema 3.2.1.** [38](S2) Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  un conjunto de números reales tales que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0 > \lambda_{p+1} \geq \dots \geq \lambda_n$ . Si existe una partición  $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \dots \cup \Lambda_s$

$$\Lambda_k = \{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \dots, \lambda_{k_{p_k}}\}, k = 1, \dots, s,$$

$$\lambda_{1_1} = \lambda_1, \lambda_{k_1} \geq 0, \lambda_{k_1} \geq \dots \geq \lambda_{k_{p_k}},$$

$$S_{k_j} = \lambda_{k_j} + \lambda_{k_{p_k-j+1}}, j = 2, 3, \dots, \lceil n/2 \rceil$$

$$S_{\frac{\lambda_{k_{p_k+1}}}{2}} = \min\{\lambda_{\frac{\lambda_{k_{p_k+1}}}{2}}, 0\}, k = 1, 2, \dots, s,$$

y sea

$$T(\Lambda_k) = T_k = \lambda_{k_1} + \lambda_{k_{p_k}} + \sum_{S_{k_j} < 0} S_{k_j}, k = 1, 2, \dots, s$$

$$L = \max\{-\lambda_{1_{p_1}} - \sum_{S_{1_j} < 0} S_{1_j}; \max_{2 \leq k \leq s} \{\lambda_{k_1}\}\}.$$

Si  $\lambda_1 \geq L - \sum_{T_k < 0, k \geq 2} T_k$ , entonces  $\Lambda$  es realizable por una matriz simétrica no negativa.

El siguiente resultado muestra que si  $\Lambda$  es S1 realizable, entonces  $\Lambda_\epsilon$  es simétricamente realizable.

**Teorema 3.2.2.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista S1 realizable. Entonces*

$$\Lambda_\epsilon = \{\lambda_1 + \epsilon, \lambda_2 \pm \epsilon, \dots, \lambda_n\}$$

*es simétricamente realizable.*

*Demostración.* Si  $\Lambda$  es S1 realizable, entonces

$$\lambda_1 \geq -\lambda_n - \sum_{S_k < 0} S_k.$$

Así, para  $\epsilon > 0$

$$\lambda_1 + \epsilon + \lambda_n + \sum_{S_k < 0} S_k \geq 0.$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que

$$\lambda_1 + \epsilon + \lambda_n + \sum_{S_k < 0} S_k = 0.$$

Consideremos la partición de  $\Lambda_\epsilon$

$$\Lambda_1 = \{\lambda_1 + \epsilon, \lambda_n\}, \Lambda_2 = \{\lambda_2 \pm \epsilon, \lambda_{n-1}\},$$

$$\Lambda_k = \{\lambda_k, \lambda_{n-k+1}\}, k = 3, \dots, \left[\frac{n}{2}\right],$$

con  $\Lambda_{\frac{n+1}{2}} = \{\lambda_{\frac{n+1}{2}}\}$  para  $n$  impar. A partir de ahora vamos a considerar  $n$  par. La prueba para  $n$  impar es similar. Observamos que algunas listas  $\Lambda_k$  pueden ser realizables, mientras que algunos otros no son realizables. Sin pérdida de generalidad nosotros asumimos que  $\Lambda_2, \Lambda_3, \dots, \Lambda_t$ ,  $t \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ , son no realizables ( $S_k < 0$ ,  $k = 2, \dots, t$ ), y que  $\Lambda_{t+1}, \dots, \Lambda_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ , son realizables ( $S_k \geq 0$ ,  $k = t+1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]$ , por matrices simétricas no negativas  $B_k$ ,  $k = t+1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]$ , respectivamente. Entonces  $B = \bigoplus B_k$  es simétrica no negativa con espectro  $\Lambda_{t+1} \cup \dots \cup \Lambda_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ . Consideremos ahora las listas no realizables  $\Lambda_k$ ,  $k = 2, 3, \dots, t$  junto con la lista realizable  $\Lambda_1$ . Sin pérdida de generalidad reenumeramos los  $2t$  elementos en  $\cup \Lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, t$ , como

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_t \geq \lambda_{t+1} \geq \dots \geq \lambda_{2t}.$$

En efecto para la lista  $\Lambda_{t+1}$  definimos  $\Lambda_2 = \{\lambda_2, \lambda_{2t-1}\}$  (para  $\Lambda_{t+2}$  definimos  $\Lambda_3 = \{\lambda_3, \lambda_{2t-2}\}$ , etc.). Observamos que existe un abuso de notación, pues los elementos  $\lambda_2, \lambda_{2t-1}$  son diferentes a los elementos de la partición inicial de la lista  $\Lambda$ .

Para cada una de las listas  $\Lambda_k, k = 1, 2, \dots, t$ , nosotros asociamos la lista realizable

$$\Gamma_k = \{-\lambda_{2t-k+1}, \lambda_{2t-k+1}\}.$$

Empezamos considerando las listas

$$\Gamma_1 = \{-\lambda_{2t}, \lambda_{2t}\} \text{ y } \Gamma_2 = \{-\lambda_{2t-1}, \lambda_{2t-1}\}.$$

Sea  $\delta_2 = -\lambda_{2t-1} - \lambda_2 + \epsilon = -S_2$ . Entonces  $-S_2 > 0$ , por el Lema de Fiedler tenemos que la lista

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \{-\lambda_{2t} + \delta_2, -\lambda_{2t-1} - \delta_2, \lambda_{2t-1}, \lambda_{2t}\} \\ &= \{-\lambda_{2t} - \lambda_{2t-1} - \lambda_2 + \epsilon, \lambda_2 - \epsilon, \lambda_{2t-1}, \lambda_{2t}\} \end{aligned}$$

es simétricamente realizable por una matriz  $4 \times 4$ . Ahora fusionamos  $\Omega_2$  con  $\Gamma_3 = \{-\lambda_{2t-2}, \lambda_{2t-2}\}$ , y para  $\delta_3 = -(\lambda_3 + \lambda_{2t-2}) = -S_3 > 0$  obtenemos que la lista

$$\begin{aligned} \Omega_3 &= \{-\lambda_{2t} - \lambda_{2t-1} - \lambda_2 + \epsilon + \delta_3, -\lambda_{2t-2} - \delta_3, \lambda_2 - \epsilon, \lambda_{2t-1}, \lambda_{2t}\} \\ &= \{-\lambda_{2t} - \lambda_{2t-1} - \lambda_{2t-2} - \lambda_2 - \lambda_3 + \epsilon, \lambda_3, \lambda_2 - \epsilon, \lambda_{2t-1}, \lambda_{2t}\}. \end{aligned}$$

El cual es simétricamente realizable por una matriz  $6 \times 6$ . Continuamos este procedimiento hasta fusionar la última lista

$$\Omega_{t-1} = \{-\lambda_{2t} - \sum_{k=2}^{t-1} S_k + \epsilon, \lambda_{t-1}, *, \dots, *\}, \text{ con } \Gamma_t = \{-\lambda_{t+1}, \lambda_{t+1}\},$$

para  $\delta_t = -S_t = -(\lambda_t + \lambda_{t+1})$ , la lista

$$\begin{aligned} \Lambda_\epsilon^- &= \{-\lambda_{2t} - \sum_{k=2}^t S_k + \epsilon, \lambda_t, *, \dots, *\} \\ &= \{-\lambda_n - \sum_{S_k < 0} S_k + \epsilon, \lambda_t, *, \dots, *\} \\ &= \{\lambda_1 + \epsilon, \lambda_2 - \epsilon, \lambda_3, \dots, \lambda_n\} \end{aligned}$$

es simétricamente realizable.

Para la lista  $\Lambda_\epsilon^+ = \{\lambda_1 + \epsilon, \lambda_2 + \epsilon, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$  observamos que si  $\lambda_2 + \lambda_{n-1} \geq 0$ , entonces  $S_2 = \lambda_2 + \epsilon + \lambda_{n-1}$  y

$$\lambda_1 + \epsilon + \lambda_n + \sum_{S_k < 0} S_k \geq 0, \tag{3.3}$$

si  $\lambda_2 + \epsilon + \lambda_{n-1} \geq 0$ , entonces  $S_2 = \lambda_2 + \epsilon + \lambda_{n-1} \geq 0$  y 3.3 es también satisfecho o  $S_2 = \lambda_2 + \epsilon + \lambda_{n-1} < 0$  con

$$S_2 = \lambda_2 + \epsilon + \lambda_{n-1} > \lambda_2 + \lambda_{n-1}$$

y (3.3) es todavía satisfecho. Por lo tanto  $\Lambda_\epsilon^+$  es  $S_1$ -realizable y por lema 4 de [38],  $\Lambda_\epsilon^+$  es simétricamente realizable. □

**Corolario 3.2.1.** (Suleimanova) Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  tal que

$$\lambda_1 > 0 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots \geq \lambda_n \text{ y } \sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0.$$

Entonces  $\Lambda_\epsilon = \{\lambda_1 + \epsilon, \lambda_2 \pm \epsilon, \dots, \lambda_n\}$  es también simétricamente realizable.

**Ejemplo 3.2.1.** Consideremos la lista  $\Lambda = \{15, -1, -2, -3, -4, -5\}$ . Sea  $\Lambda = \{15, -5\} \cup \{-1, -4\} \cup \{-2, -3\}$  una partición de  $\Lambda$  y una partición auxiliar  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 = \{5, -5\} \cup \{4, -4\} \cup \{3, -3\}$ .

Consideremos las listas  $\Gamma'_1 = \{10 + \epsilon, -5\}$ ,  $\Gamma'_2 = \{-1 - \epsilon, -4\}$ . La matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & \frac{\sqrt{(2\epsilon+11)^2-1}}{4} & \frac{\sqrt{(2\epsilon+11)^2-1}}{4} \\ 5 & 0 & \frac{\sqrt{(2\epsilon+11)^2-1}}{4} & \frac{\sqrt{(2\epsilon+11)^2-1}}{4} \\ \frac{\sqrt{(2\epsilon+11)^2-1}}{4} & \frac{\sqrt{(2\epsilon+11)^2-1}}{4} & 0 & 4 \\ \frac{\sqrt{(2\epsilon+11)^2-1}}{4} & \frac{\sqrt{(2\epsilon+11)^2-1}}{4} & 4 & 0 \end{bmatrix},$$

tiene espectro  $\Gamma'_1 \cup \Gamma'_2 = \{11 + \epsilon, -1 - \epsilon, -4, -5\}$ .

$$\text{Para } \rho = \sqrt{60 + 5\epsilon}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}(\epsilon+5)\sqrt{\epsilon+60}}{(2\epsilon+10)\sqrt{2\epsilon+11}} & \frac{\sqrt{2}(\epsilon+5)\sqrt{\epsilon+60}}{(2\epsilon+10)\sqrt{2\epsilon+11}} & \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2(\epsilon+5)}}{\sqrt{2\epsilon+11}} & \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2(\epsilon+5)}}{\sqrt{2\epsilon+11}} \end{bmatrix}^T e$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T, \text{ la matriz}$$

$$A_\epsilon^- = \begin{bmatrix} 0 & 5 & \frac{\sqrt{(2\epsilon+11)^2-1}}{4} & \frac{\sqrt{(2\epsilon+11)^2-1}}{4} & & \\ 5 & 0 & \frac{\sqrt{(2\epsilon+11)^2-1}}{4} & \frac{\sqrt{(2\epsilon+11)^2-1}}{4} & & \\ \frac{\sqrt{(2\epsilon+11)^2-1}}{4} & \frac{\sqrt{(2\epsilon+11)^2-1}}{4} & 0 & 4 & & \rho \mathbf{xy}^T \\ \frac{\sqrt{(2\epsilon+11)^2-1}}{4} & \frac{\sqrt{(2\epsilon+11)^2-1}}{4} & 4 & 0 & & \\ & & & & \rho \mathbf{yx}^T & \begin{matrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

tiene espectro  $\Lambda_\epsilon^- = \{15 + \epsilon, -1 - \epsilon, -2, -3, -4, -5\}$ .

De similar manera construimos la matriz

$$A_\epsilon^+ = \begin{bmatrix} \frac{\epsilon}{2} & \frac{\epsilon+8}{2} & \frac{\sqrt{5(\epsilon+6)}}{2} & \frac{\sqrt{5(\epsilon+6)}}{2} & & \\ \frac{\epsilon+8}{2} & \frac{\epsilon}{2} & \frac{\sqrt{5(\epsilon+6)}}{2} & \frac{\sqrt{5(\epsilon+6)}}{2} & & \\ \frac{\sqrt{5(\epsilon+6)}}{2} & \frac{\sqrt{5(\epsilon+6)}}{2} & 0 & 3 & & \rho \mathbf{xy}^T \\ \frac{\sqrt{5(\epsilon+6)}}{2} & \frac{\sqrt{5(\epsilon+6)}}{2} & 3 & 0 & & \\ & & & & \rho \mathbf{yx}^T & \begin{matrix} \frac{\epsilon}{2} & \frac{\epsilon+10}{2} \\ \frac{\epsilon+10}{2} & \frac{\epsilon}{2} \end{matrix} \end{bmatrix},$$

donde  $\rho = \sqrt{(8 + \epsilon)^2 - 4}$ ,  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3300}}{110} & \frac{\sqrt{3300}}{110} & \frac{\sqrt{110}}{22} & \frac{\sqrt{110}}{22} \end{bmatrix}^T$ ,  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T$ ,  
cuyo espectro es  $\Lambda_\epsilon^+ = \{15 + \epsilon, -1 + \epsilon, -2, -3, -4, -5\}$ .

## Capítulo 4

# Matrices generalizadas doblemente estocásticas no negativas con divisores elementales prescritos

En este capítulo damos condiciones suficientes para la existencia y construcción de matrices generalizadas doblemente estocásticas no negativas con divisores elementales prescritos. Nuestros resultados mejoran los resultados anteriores y generan un procedimiento algorítmico para calcular la matriz solución. En particular, se muestra cómo transformar una matriz estocástica generalizada en una matriz doblemente estocástica no negativa generalizada, sin cambiar los divisores elementales. Caracterizamos también listas  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  de números complejos, que son el espectro de una matriz doblemente estocástica no negativa generalizada, para cada posible forma canónica de Jordan asociada con  $\Lambda$ . El contenido de este capítulo constituye esencialmente la publicación [47].

### 4.1. Preliminares

Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y sea

$$J(A) = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} J_{n_1(\lambda_1)} & & & \\ & J_{n_2(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k(\lambda_k)} \end{bmatrix}$$

la forma canónica de Jordan de  $A$  (en adelante  $JCF$  de  $A$ ). Las submatrices  $n_i \times n_i$ -dimensionales

$$J_{n_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

son los bloques de Jordan de  $J(A)$ . Entonces los divisores elementales de  $A$  son los polinomios  $(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$ , esto es, los polinomios característicos de  $J_{n_i}(\lambda_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

El problema inverso de los divisores elementales para matrices no negativas (en adelante  $NIEDP$ ) es el problema de determinar condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales los polinomios  $(\lambda - \lambda_1)^{n_1}, (\lambda - \lambda_2)^{n_2}, \dots, (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$ ,  $n_1 + \dots + n_k = n$ , son los divisores elementales de una matriz  $A$   $n$ -dimensional no negativa (véase [24, 25, 26, 40]).

El  $NIEDP$  está muy relacionado con otro problema, el problema inverso de valores propios para matrices no negativas (en adelante  $NIEP$ ), que es el problema de determinar condiciones necesarias y suficientes para que una lista de números complejos  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  sea el espectro de una matriz  $A$  no negativa  $n \times n$ . Si existe una matriz no negativa  $A$  con espectro  $\Lambda$ , decimos que  $\Lambda$  es realizable y que  $A$  es la matriz de la realización. Ambos problemas, el  $NIEDP$  y la  $NIEP$  siguen sin resolverse (el  $NIEP$  ha sido resuelto sólo por  $n \leq 4$ ). Un número de condiciones suficientes o criterios de realizabilidad para la existencia de una solución para el  $NIEP$  han sido obtenidos por muchos autores. En contraste, sólo unos pocos trabajos se conocen acerca de la  $NIEDP$  [24, 25, 26, 40, 7, 8, 45].

Una matriz  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  se dice sumas filas  $\gamma$  si todas sus filas suman la misma constante  $\gamma$ , es decir  $\sum_{j=1}^n a_{ij} = \gamma$ ,  $i = 1, \dots, n$ . El conjunto de todas las matrices con sumas fila igual a  $\gamma$  es denotada por  $\mathcal{CS}_\gamma$ . Es claro que  $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T$  es un autovector de cualquier matriz  $A \in \mathcal{CS}_\gamma$ , correspondiente a el autovalor  $\gamma$ . Una matriz no negativa  $A$  es llamada estocástica si  $A \in \mathcal{CS}_1$  y es llamada doblemente estocástica si  $A, A^T \in \mathcal{CS}_1$ . Una matriz  $A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$  o  $A, A^T \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ , es llamada estocástica generalizada o doble estocástica generalizada, respectivamente. La relevancia de las matrices reales sumas filas constante se debe al hecho bien conocido que el problema de encontrar una matriz no negativa con espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  es equivalente a encontrar una matriz no negativa  $\mathcal{CS}_{\lambda_1}$  con espectro  $\Lambda$ .

En [24], Minc prueba el siguiente resultado:

**Teorema 4.1.1.** [24] *Dada una matriz  $A$  positiva diagonalizable (positiva diagonalizable doblemente estocástica), existe una matriz positiva (positiva doblemente es-*

tocástica) con el mismo espectro que  $A$ , y con divisores elementales arbitrariamente prescritos, tal que los divisores elementales correspondientes a valores propios no reales ocurren en pares conjugados.

El Teorema 4.1.1 también vale para matrices positivas diagonalizables estocásticas generalizadas (positiva diagonalizable doblemente estocástica generalizada). Usualmente en el *NIEDP*, en lugar de una matriz positiva diagonalizable estocástica generalizada (diagonalizable positiva doble estocástica generalizada), se nos da una lista de polinomios

$$(\lambda - \lambda_1), (\lambda - \lambda_2)^{n_2}, \dots, (\lambda - \lambda_k)^{n_k}, \dots, n_2 + \dots + n_k = n - 1,$$

o una lista de números complejos  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , de las cuales queremos construir una matriz no negativa o positiva estocástica generalizada o doblemente estocástica generalizada con los polinomios dados como sus divisores elementales. En este capítulo nosotros mostramos como construir una matriz positiva diagonalizable doblemente estocástica con espectro prescrito  $\Lambda$ . Entonces, por el Teorema 4.1.1, podemos garantizar la existencia de una matriz positiva doblemente estocástica generalizada con espectro  $\Lambda$  y con divisores elementales arbitrariamente prescritos, y también podemos construir la matriz. En este sentido, nuestros resultados pueden ser vistos como un complemento útil del Teorema 4.1.1. La condición de positividad es esencial para la prueba del Teorema 4.1.1 y no se sabe si el resultado se mantiene sin esta condición (ver [26]). Aquí mostramos, que bajo ciertas restricciones simples, la condición de positividad podrá relajarse a no negatividad. Así, podemos caracterizar la lista  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  de números complejos, que son el espectro de una matriz doblemente estocástica no negativa para cada una de los posibles *JCF* asociadas con  $\Lambda$ . Nuestros resultados generan un procedimiento algorítmico para calcular la matriz solución.

El siguiente resultado de perturbación, debido a Rado e introducido por Perfect en [29], muestra cómo cambiar  $r$  autovalores de una matriz  $n \times n$ , vía una perturbación de rango  $r$ , sin cambiar los restantes  $n - r$  autovalores. Este resultado se ha empleado con éxito en relación con el *NIEP*, para derivar condiciones suficientes para la existencia y construcción de matrices no negativas con espectro prescrito (ver [29, 39]):

**Teorema 4.1.2.** *Rado [29] Sea  $A$  una matriz arbitraria  $n \times n$  dimensional con espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ . Sea  $X = [\mathbf{x}_1 \mid \dots \mid \mathbf{x}_r]$  tal que  $\text{rank}(X) = r$  y  $A\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ ,  $r \leq n$ . Sea  $C$  una matriz arbitraria  $r \times n$  dimensional. Entonces  $A + XC$  tiene autovalores  $\mu_1, \dots, \mu_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ , donde  $\mu_1, \dots, \mu_r$  son autovalores de la matriz  $\Omega + CX$  con  $\Omega = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ .*

El caso  $r = 1$  en el Teorema 4.1.2, constituye el conocido Teorema de Brauer [4, Theorem 27], también empleado con éxito en relación al *NIEP* (ver [28, 36, 43]).

**Teorema 4.1.3.** [4] Sea  $A$  una matriz arbitraria  $n \times n$  dimensional con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Sea  $\mathbf{v}$  un autovector  $A$  correspondiente a  $\lambda_k$  y sea  $\mathbf{q}$  cualquier vector  $n$ -dimensional. Entonces la matriz  $A + \mathbf{v}\mathbf{q}^T$  tiene autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k + \mathbf{v}^T\mathbf{q}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ .

Necesitamos también el siguiente resultado de [40]:

**Lema 4.1.1.** [40] Sea  $A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$  con JCF  $J(A) = S^{-1}AS$ . Sea  $\mathbf{q}^T = (q_1, \dots, q_n)$  y  $\lambda_1 + \sum_{i=1}^n q_i \neq \lambda_i, i = 2, \dots, n$ . Entonces  $A + \mathbf{e}\mathbf{q}^T$  tiene JCF  $J(A) + \left(\sum_{i=1}^n q_i\right) E_{11}$ . En particular, si  $\sum_{i=1}^n q_i = 0$ ,  $A$  y  $A + \mathbf{e}\mathbf{q}^T$  son similares.

En [40, 45], mediante el uso de los resultados de perturbación de Brauer y Rado, los autores obtuvieron condiciones suficientes constructivas para la existencia de una matriz no negativa y positiva con sumas fila constante y divisores elementales prescritos. La novedad en este trabajo es que, utilizando los resultados de perturbación de Brauer y Rado podemos construir matrices no negativas (positivas) doblemente estocásticas con divisores elementales prescritos.

Así, en este capítulo damos condiciones suficientes para la existencia y construcción de una matriz no negativa (positiva) doblemente estocástica generalizada con divisores elementales prescritos. En particular, en la sección 2, aplicando la perturbación de Brauer, mostramos como transformar una matriz estocástica generalizada con divisores elementales dados en una matriz no negativa (positiva) doblemente estocástica, sin cambiar los divisores elementales. En la sección 3, aplicando la perturbación de Rado, mostramos como construir una matriz no negativa (positiva) doblemente estocástica generalizada con divisores elementales prescritos. En la sección 4, caracterizamos listas  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  de números complejos, los cuales son el espectro de una matriz no negativa doblemente estocástica generalizada para cada una de las posibles JCF asociados con  $\Lambda$ . Finalmente, en la sección 5, damos algunos ejemplos que ilustran estos resultados.

## 4.2. Teorema de Brauer para matrices doblemente estocásticas generalizadas

En esta sección consideramos una lista de números complejos  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  y mostramos como construir una matriz no negativa doblemente estocástica generalizada con espectro  $\Lambda$  y divisores elementales prescritos. Hasta ahora, el resultado de perturbación de Brauer (Teorema 4.1.3) ha sido explotado con éxito para obtener condiciones para la existencia de matrices estocásticas generalizadas no negativas con espectro y divisores elementales prescritos (ver [40, 45]). La novedad aquí es que

es posible aplicar el resultado de Brauer para transformar una matriz estocástica generalizada, con divisores elementales dados, en una matriz no negativa (positiva) doblemente estocástica generalizada, a expensas de aumentar o disminuir el autovalor de Perron  $\lambda_1$  a  $\lambda_1 + \alpha$ , pero siempre manteniendo los divisores elementales. En particular, bajo ciertas condiciones, obtenemos a partir de una matriz  $A$  estocástica generalizada, una matriz no negativa doblemente estocástica generalizada con los mismos divisores elementales que  $A$  (siendo cero el incremento del autovalor de Perron). Esto es lo que afirma el siguiente resultado.

**Teorema 4.2.1.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos, con  $\bar{\Lambda} = \Lambda$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$ ,  $\lambda_1 > |\lambda_i|$ ,  $i = 2, \dots, n$ . donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  son reales y  $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$  son números complejos no reales, satisfaciendo*

- i)  $\lambda_1 \geq M + \sum_{k=2}^n m_k$ .
- ii)  $\lambda_1 > \text{Re } \lambda_k + \text{Im } \lambda_k + n(m_k)$ ,  $k = 2, \dots, n$ .
- iii)  $\text{Re } \lambda_k + \text{Im } \lambda_k - \frac{t}{n}\epsilon < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k$ ,  $k = 2, \dots, n$ .

donde

$$M = \max_{2 \leq k \leq n} \{0, \text{Re } \lambda_k + \text{Im } \lambda_k\}; \quad m_k = -\min\{0, \text{Re } \lambda_k, \text{Im } \lambda_k, \epsilon\}, \quad k = 2, \dots, n,$$

y  $\epsilon < 0$ , con

$$|\epsilon| \leq \min \left\{ \min_{2 \leq k \leq p} |\lambda_k|, \min_{p+1 \leq k \leq n} |\text{Im } \lambda_k|, \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n \lambda_i \right\}, \quad (4.1)$$

para los reales  $\lambda_k \neq 0$ ,  $k = 2, \dots, p$ , o

$$|\epsilon| \leq \min \left\{ \min_{p+1 \leq k \leq n} |\text{Im } \lambda_k|, \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n \lambda_i \right\}, \quad (4.2)$$

si  $\lambda_k = 0$ , donde  $\lambda_k$  es un cero del divisor elemental  $(\lambda - \lambda_k)^{n_k}$  con  $n_k \geq 2$ , y  $t$  es el número total de veces que  $\epsilon$  aparece en JCF, en ciertas posiciones  $(i, i + 1)$ ,  $i = 2, \dots, n - 1$ .

Entonces existe una matriz no negativa doblemente estocástica generalizada para cada uno de los posibles JCF asociados con  $\Lambda$ .

*Demostración.* Sean  $\lambda_l$  reales,  $l = 2, \dots, p$ , y sea  $x_h = \text{Re } \lambda_h$  and  $y_h = \text{Im } \lambda_h$ ,  $h =$



$(i, i + 1)$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \sum_{k=2}^n r_k - \sum_{k=2}^n q_k &= \lambda_1 - \sum_{k=2}^n r_k - \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n (\lambda_1 - \operatorname{Re} \lambda_k - \operatorname{Im} \lambda_k - nr_k) + \frac{1}{n} t\epsilon \\ &= \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k + t\epsilon \right) \geq 0. \end{aligned}$$

En la posición  $(k, 1)$ ,  $k = 2, \dots, n$ , tenemos que por la condición *iii*)

$$\lambda_1 - \operatorname{Re} \lambda_k - \operatorname{Im} \lambda_k - \sum_{k=2}^n r_k - \sum_{k=2}^n q_k = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k + t\epsilon \right) - \operatorname{Re} \lambda_k - \operatorname{Im} \lambda_k \geq 0.$$

Así, todas las entradas en  $B$  son no negativas. Ahora mostremos que  $B, B^T \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ : Es claro que  $B \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ :  $B\mathbf{e} = (A' + \mathbf{e}\mathbf{q}^T)\mathbf{e} = \lambda_1\mathbf{e}$ . Las entradas de la primera columna de  $B$ , con  $\epsilon$  apareciendo  $t$  veces en las posiciones  $(i, i + 1)$  en la  $JCF$  deseada suman

$$\begin{aligned} n\lambda_1 - \sum_{k=2}^n \lambda_k - n \sum_{k=2}^n r_k - n \sum_{k=2}^n q_k - t\epsilon \\ &= n\lambda_1 - \sum_{k=2}^n \lambda_k - n \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n (\lambda_1 - \operatorname{Re} \lambda_k - \operatorname{Im} \lambda_k) - \frac{t}{n} \epsilon \right] - t\epsilon \\ &= n\lambda_1 - \sum_{k=2}^n \lambda_k - \left[ (n-1)\lambda_1 - \sum_{k=2}^n \lambda_k - t\epsilon \right] - t\epsilon \\ &= \lambda_1. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Finalmente, es claro que por la definición de  $q_k$ , las entradas de las columnas de 2 a  $n$  suman también  $\lambda_1$ .  $\square$

**Observación 1.** Observamos que si la matriz  $A$ , en el Teorema 4.2.1, es diagonalizable, entonces para el Teorema 4.2.1, podemos construir una matriz positiva diagonalizable doblemente estocástica generalizada  $\Lambda$ , y entonces por el Teorema 4.1.1 podemos garantizar la existencia de una matriz positiva doblemente estocástica generalizada con divisores elementales arbitrariamente prescritos. En otras palabras, cualquier lista  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , la cual es realizable por el Teorema 4.2.1, por una matriz positiva diagonalizable doblemente estocástica generalizada, da lugar a una matriz positiva doblemente estocástica generalizada para cada una de las posibles  $JCF$  asociadas a  $\Lambda$ .

Para una lista  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  de números reales, tenemos el siguiente corolario. Observe que en este caso

$$M = \max_{2 \leq k \leq n} \{0, \lambda_k\}; \quad m_k = -\min\{0, \lambda_k, \epsilon\}, \quad k = 2, \dots, n.$$

**Corolario 4.2.1.** Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números reales, con  $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$ ,  $\lambda_1 > |\lambda_i|$ ,  $i = 2, \dots, n$ .

If

$$i) \quad \lambda_1 \geq \max_{2 \leq k \leq n} \{0, \lambda_k\} - \sum_{2 \leq k \leq n} \min\{0, \lambda_k, \epsilon\}$$

$$ii) \quad \lambda_1 > \max_{2 \leq k \leq n} \{\lambda_k + nm_k\}$$

$$iii) \quad \lambda_k < \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i + t\epsilon \right), \quad k = 2, \dots, n,$$

entonces existe una matriz no negativa doblemente estocástica generalizada, con espectro  $\Lambda$ , y divisores elementales arbitrariamente prescritos.

**Corolario 4.2.2.** Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista real del tipo Suleimanova, esto es, una lista con

$$\lambda_1 > 0 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n.$$

Si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$  y  $\lambda_1 + (n-1)\lambda_n \geq 0$ , entonces existe una matriz no negativa doblemente estocástica generalizada con espectro  $\Lambda$  y con divisores elementales arbitrariamente prescritos.

Los siguientes resultados dan información para responder la siguiente pregunta: ¿Cuál es el incremento en el autovalor de Perron  $\lambda_1$  de una matriz  $A$  no negativa estocástica generalizada, con divisores elementales prescritos, necesario para obtener una matriz  $B$  no negativa doblemente estocástica generalizada, con los mismos divisores elementales que  $A$ ? Una primera aproximación es:

**Teorema 4.2.2.** Sea  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  una matriz no negativa estocástica generalizada con espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , y autovalor de Perron  $\lambda_1$ , con divisores elementales

$$(\lambda - \lambda_1), (\lambda - \lambda_2)^{n_2}, \dots, (\lambda - \lambda_k)^{n_k}, \dots, n_2 + \dots + n_k = n - 1.$$

Entonces  $\Lambda_\alpha = \{\lambda_1 + \alpha, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , donde

$$\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^n a_{ik} - \lambda_1,$$

es el espectro de una matriz no negativa doblemente estocástica generalizada con los mismos divisores elementales que  $A$  para  $\lambda_k \neq \lambda_1$ .

*Demostración.* Sea  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$  y

$$c_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} \quad \text{with} \quad c_0 = \max_{1 \leq k \leq n} c_k.$$

Observe que  $c_0 \geq \lambda_1$ . Entonces podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que  $c_0 > \lambda_1$ , en otro caso  $A$  es una matriz no negativa doblemente estocástica generalizada. Sea

$$\mathbf{q}^T = (q_1, q_2, \dots, q_n), \quad \text{with } q_k = \frac{1}{n} (c_0 - c_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

Observe que  $\sum_{k=1}^n c_k = n\lambda_1$ . Puesto que  $q_k \geq 0$ ,  $A + \mathbf{e}\mathbf{q}^T \geq 0$ . Es claro que todas las

columnas de  $A + \mathbf{e}\mathbf{q}^T$  suman  $c_0$ , y todas las filas de  $A + \mathbf{e}\mathbf{q}^T$  suman  $\lambda_1 + \sum_{k=1}^n q_k = \lambda_1 + c_0 - \lambda_1 = c_0$ . Entonces  $\alpha = c_0 - \lambda_1$ . Finalmente, por el Lema 4.1.1,  $A + \mathbf{e}\mathbf{q}^T$  tiene los mismos divisores elementales que  $A$  para  $\lambda_k \neq \lambda_1$ .  $\square$

El Teorema 4.2.2 da  $\alpha > 0$ . Así para obtener una matriz no negativa doblemente estocástica generalizada, en este caso tenemos que aumentar el autovalor de Perron  $\lambda_1$  a  $\lambda_1 + \alpha$ . Sin embargo, también es posible disminuir  $\lambda_1$ , y todavía obtener una matriz no negativa doblemente estocástica generalizada, como muestra el siguiente ejemplo. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con espectro } \left\{ 6, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i \right\}.$$

Entonces  $c_0 = 11$ ,  $\alpha = c_0 - \lambda_1 = 5$ , y

$$A + \mathbf{e}\mathbf{q}^T = A + \mathbf{e} \left( 0, \frac{7}{3}, \frac{8}{3} \right) = \begin{bmatrix} 3 & \frac{13}{3} & \frac{11}{3} \\ 2 & \frac{13}{3} & \frac{14}{3} \\ 6 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

es doblemente estocástica con autovalor de Perron 11. Pero el siguiente resultado mostrará que es posible tomar  $\alpha = -1$ .

**Teorema 4.2.3.** *Sea  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  una matriz no negativa estocástica generalizada con espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , con autovalor de Perron  $\lambda_1$ , y divisores elementales*

$$(\lambda - \lambda_1), (\lambda - \lambda_2)^{n_2}, \dots, (\lambda - \lambda_k)^{n_k}, \dots, n_2 + \dots + n_k = n - 1.$$

Entonces  $\Lambda_\alpha = \{\lambda_1 + \alpha, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , donde  $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$ , con

$$i) \quad \alpha_1 \geq \max_{2 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^n a_{ik} - \lambda_1 \tag{4.4}$$

$$ii) \quad \alpha_2 \geq \sum_{k=2}^n (\lambda_1 - \sum_{i=1}^n a_{ik}) - n \min_{1 \leq i \leq n} a_{i1},$$

es el espectro de una matriz doblemente estocástica generalizada con los mismo divisores elementales que  $A$  para  $\lambda_k \neq \lambda_1$ .

*Demostración.* Sea  $A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$  y

$$B = A + \alpha \mathbf{e} \mathbf{e}_1^T = \begin{bmatrix} \alpha + a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \alpha + a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha + a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Es claro que  $B \in \mathcal{CS}_{\lambda_1 + \alpha}$  es no negativa. Sea

$$q_k = \frac{1}{n} \left( \lambda_1 + \alpha - \sum_{i=1}^n a_{ik} \right), \quad k = 2, \dots, n$$

$$\mathbf{q}^T = \left( -\sum_{k=2}^n q_k, q_2, \dots, q_n \right).$$

Entonces

$$B + \mathbf{e} \mathbf{q}^T = \begin{bmatrix} \alpha + a_{11} - \sum_{k=2}^n q_k & a_{12} + q_2 & \cdots & a_{1n} + q_n \\ \alpha + a_{21} - \sum_{k=2}^n q_k & a_{22} + q_2 & \cdots & a_{2n} + q_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha + a_{n1} - \sum_{k=2}^n q_k & a_{n2} + q_2 & \cdots & a_{nn} + q_n \end{bmatrix}.$$

Por (4.4) *i*),  $q_k \geq 0$  para  $k = 2, \dots, n$ , y por (4.4) *ii*), tenemos

$$\alpha + \min_{1 \leq i \leq n} a_{i1} - \sum_{k=2}^n q_k \geq 0.$$

Así,  $B + \mathbf{e} \mathbf{q}^T$  es no negativa y por el Lema 4.1.1 tiene los mismos divisores elementales que  $B$ . Además  $(B + \mathbf{e} \mathbf{q}^T) \mathbf{e} = (\lambda_1 + \alpha) \mathbf{e}$ , y por la forma en que hemos definido los  $q_k$ , las entradas de  $B + \mathbf{e} \mathbf{q}^T$ , en las columnas de 2 a  $n$  suman  $\lambda_1 + \alpha$ . Las entradas de la primera columna de  $B + \mathbf{e} \mathbf{q}^T$  suman

$$\begin{aligned} n\alpha + \sum_{i=1}^n a_{i1} - n \sum_{k=2}^n q_k &= n\alpha + \sum_{i=1}^n a_{i1} - \sum_{k=2}^n \left( \lambda_1 + \alpha - \sum_{i=1}^n a_{ik} \right) \\ &= n\alpha - (n-1)(\lambda_1 + \alpha) + \sum_{i=1}^n a_{i1} + \sum_{k=2}^n \sum_{i=1}^n a_{ik} \\ &= n\alpha - (n-1)(\lambda_1 + \alpha) + n\lambda_1 \\ &= \lambda_1 + \alpha. \end{aligned}$$

□

Así, para el ejemplo anterior tenemos:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_1 = 4 - 6 = -2, \quad \alpha_2 = 2 + 3 - 6 = -1.$$

Entonces  $\alpha = -1$  y

$$B = A - \mathbf{e}\mathbf{e}_1^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}^T = \left(-1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \text{con}$$

$$B + \mathbf{e}\mathbf{q}^T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ 4 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \in \mathcal{CS}_5 \text{ es doblemente estocástica}$$

y tiene espectro  $\{5, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i\}$ . Observamos que la selección de  $\alpha$  es óptima solo desde el punto de vista del Teorema 4.2.1.

### 4.3. El Teorema de Rado para matrices doblemente estocásticas generalizadas

**Teorema 4.3.1.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos  $\bar{\Lambda} = \Lambda$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$ ,  $\lambda_1 > |\lambda_i|$ ,  $i = 2, \dots, n$ . Supongase que existe una partición  $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_{p_0}$  con*

$$\Lambda_0 = \{\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0p_0}\}, \quad \lambda_{01} = \lambda_1$$

$$\Lambda_k = \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, \quad p_k = p, \quad k = 1, \dots, p_0,$$

donde las listas  $\Lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, p_0$ , tienen el mismo cardinal  $p_k = p$ , de tal forma que:

i) Para cada  $k = 1, \dots, p_0$ , existe una lista

$$\Gamma_k = \{\omega_k, \lambda_{k1}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, \quad 0 < \omega_k < \lambda_1$$

la cual es realizable por una matriz no negativa (positiva)  $A_k$ , con  $A_k, A_k^T \in \mathcal{CS}_{\omega_k}$ , y con divisores elementales prescritos

$$(\lambda - \omega_k), (\lambda - \lambda_{k1})^{n_{k1}}, \dots, (\lambda - \lambda_{kj})^{n_{kj}}, \quad n_{k1} + \dots + n_{kj} = p_k,$$

y

ii) existe una matriz  $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{p_0}$  no negativa (positiva) tal que  $B, B^T \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ , con espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{p_0}$ .

Entonces existe una matriz  $A$  no negativa (positiva), tal que  $A, A^T \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ , con espectro  $\Lambda$  y con divisores elementales prescritos asociados a las listas  $\Lambda_k$ .

*Demostración.* Por *i)* definimos

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{p_0} \end{bmatrix},$$

donde  $A_k$  es tal que  $A_k, A_k^T \in \mathcal{CS}_{\omega_k}$  es no negativa (positiva), con espectro  $\Gamma_k$  y divisores elementales prescritos asociados a la lista  $\Gamma_k$ . Por *ii)*, Sea  $C = B - \Omega$ , donde  $\Omega = \text{diag} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{p_0}\}$ , y sea  $X = [\mathbf{x}_1 \mid \dots \mid \mathbf{x}_{p_0}]$  la matriz cuyas columnas son autovectores normalizados de  $M$  correspondientes a los autovalores  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{p_0}$ , respectivamente. Observe que  $\mathbf{x}_k, k = 1, \dots, p_0$ , es no negativa con entradas  $\frac{1}{\sqrt{p}}$  y ceros,

$$\mathbf{x}_k^T = \left( 0, \dots, 0, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{p}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{p}}}_{p \text{ times}}, 0, \dots, 0 \right).$$

Sea  $\tilde{C} = CX^T$ . Entonces

$$X\tilde{C} = XCX^T = \frac{1}{p} \begin{bmatrix} 0 & B_{12} & \cdots & B_{1p_0} \\ B_{21} & 0 & \ddots & B_{2p_0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ B_{p_01} & \cdots & B_{p_0,p_0-1} & 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} b_{ij} & b_{ij} & b_{ij} & \cdots & b_{ij} \\ b_{ij} & b_{ij} & b_{ij} & \cdots & b_{ij} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{ij} & b_{ij} & b_{ij} & \cdots & b_{ij} \end{bmatrix}$$

es positiva con  $\frac{1}{p}B_{ij} \in \mathcal{CS}_{b_{ij}}$ . Entonces por el Teorema 4.1.2,  $A = M + X\tilde{C}$  es no negativa (positiva) con espectro  $\Lambda$ . Además,

$$A\mathbf{e} = (M + X\tilde{C})\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_{p_0} \\ \vdots \\ \omega_{p_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 - \omega_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 - \omega_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 - \omega_{p_0} \\ \vdots \\ \lambda_1 - \omega_{p_0} \end{bmatrix} = A^T\mathbf{e} = \lambda_1\mathbf{e}.$$

Entonces  $A = M + X\tilde{C}$  es una matriz  $n \times n$  no negativa (positiva) doblemente estocástica generalizada, con divisores elementales prescritos asociados a la lista  $\Lambda_k$ .  $\square$

Para aplicar el Teorema 4.3.1 necesitamos una matriz no negativa  $B$  (positiva)  $p_0 \times p_0$  generalizada doblemente estocástica con espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales  $\omega_1, \dots, \omega_{p_0}$ . Para  $p_0 = 2$ , la matriz no negativa (positiva) doblemente estocástica generalizada es necesariamente simétrica, con  $\omega_1 = \omega_2$  y autovalores  $\lambda_1, \lambda_2 = 2\omega_1 - \lambda_1$ ,

$$B = \begin{bmatrix} \omega_1 & \lambda_1 - \omega_1 \\ \lambda_1 - \omega_1 & \omega_1 \end{bmatrix}.$$

Para el caso  $p_0 = 3$  tenemos la siguiente condición suficiente:

**Lema 4.3.1.** *Sea  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  y  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  con  $\lambda_1 > |\lambda_i|$ ,  $i = 2, 3$ , y  $\lambda_1 \geq \omega_1 \geq \omega_2 \geq \omega_3 \geq 0$ . Si*

- i)  $(\lambda_2 - \lambda_3)^2 \leq 4 [(\omega_1 - \omega_2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)(\omega_2 - \omega_3) + (\omega_2 - \omega_3)^2]$*
- ii)  $\lambda_1 - \omega_1 - y \geq 0$*
- iii)  $\omega_3 - \omega_2 + y \geq 0$ ,*

donde

$$y = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \omega_1 + \omega_2 - \omega_3) + \frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{\alpha - (\lambda_2 - \lambda_3)^2}, \quad \text{con}$$

$$\alpha = 4 [(\omega_1 - \omega_2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)(\omega_2 - \omega_3) + (\omega_2 - \omega_3)^2],$$

entonces existe una matriz  $B$   $3 \times 3$  no negativa (positiva) doblemente estocástica generalizada con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ .

*Demostración.* Consideremos la matriz

$$B = \begin{bmatrix} \omega_1 & \lambda_1 - \omega_1 - y & y \\ \omega_3 - \omega_2 + y & \omega_2 & \lambda_1 - \omega_3 - y \\ \lambda_1 - \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - y & \omega_1 - \omega_2 + y & \omega_3 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Claramente  $B, B^T \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$  con las entradas diagonales prescritas. Por *ii)* se sigue que  $\lambda_1 - \omega_3 - y \geq 0$  y  $\lambda_1 - \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - y \geq \omega_2 - \omega_3 \geq 0$ . Por *iii)*  $\omega_3 - \omega_2 + y \geq 0$ , y por *i)*  $y \geq 0$  y entonces  $\omega_1 - \omega_2 + y \geq 0$ . Así,  $B$  es no negativa. Finalmente un simple cálculo algebraico muestra que  $B$  tiene los autovalores prescritos.  $\square$

El siguiente resultado da también información acerca del incremento necesario en el autovalor de Perron  $\lambda_1$ , para obtener una matriz no negativa doblemente estocástica generalizada sin cambiar los divisores elementales asociados a  $\lambda_k \neq \lambda_1$ , desde el punto de vista del Teorema 4.3.1.

**Teorema 4.3.2.** Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos con  $\bar{\Lambda} = \Lambda$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$ ,  $\lambda_1 > |\lambda_i|$ ,  $i = 2, \dots, n$ . Supóngase que existe una partición  $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_{p_0}$  con

$$\Lambda_0 = \{\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0p_0}\}, \quad \lambda_{01} = \lambda_1$$

$$\Lambda_k = \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, \quad p_k = p, \quad k = 1, \dots, p_0,$$

donde las lista  $\Lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, p_0$ , tiene el mismo cardinal  $p_k = p$ , de tal manera que:  
*i)* para cada  $k = 1, \dots, p_0$ , existe una lista  $\Gamma_k = \{\omega_k, \lambda_{k1}, \dots, \lambda_{kp_k}\}$ ,  $0 < \omega_k < \lambda_1$ , el cual es realizable por una matriz no negativa  $A_k \in \mathcal{CS}_{\omega_k}$  con divisores elementales prescritos

$$(\lambda - \omega_k), (\lambda - \lambda_{k1})^{n_{k1}}, \dots, (\lambda - \lambda_{kj})^{n_{kj}}, \quad n_{k1} + \dots + n_{kj} = p_k,$$

y existe una lista  $\Gamma_{k,\alpha_k} = \{\omega_k + \alpha_k, \lambda_{k1}, \dots, \lambda_{kp_k}\}$ , la cual es realizable por una matriz no negativa doblemente estocástica generalizada  $A_{k,\alpha_k}$ , con divisores elementales

$$(\lambda - \omega_k - \alpha_k), (\lambda - \lambda_{k1})^{n_{k1}}, \dots, (\lambda - \lambda_{kj})^{n_{kj}}, \quad n_{k1} + \dots + n_{kj} = p_k.$$

*ii)* Existe una matriz  $B \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ ,  $p_0 \times p_0$  no negativa con espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{p_0}$  y existe una matriz  $B_\alpha$ ,  $p_0 \times p_0$  no negativa doblemente estocástica generalizada con espectro  $\Lambda_{0,\alpha} = \{\lambda_1 + \alpha, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0p_0}\}$  y entradas diagonales  $\omega_1 + \alpha_1, \omega_2 + \alpha_2, \dots, \omega_{p_0} + \alpha_{p_0}$ .

Entonces  $\Lambda_\alpha = \{\lambda_1 + \alpha, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  es el espectro de una matriz  $A_\alpha$ ,  $n \times n$  no negativa doblemente estocástica generalizada con espectro  $\Lambda_\alpha$ , y con divisores elementales asociados a las listas  $\Lambda_k$ .

*Demostración.* Por *i)* sea  $M = A_{1,\alpha_1} \oplus A_{2,\alpha_2} \oplus \dots \oplus A_{p_0,\alpha_{p_0}}$ , la cual tiene el espectro  $\sum_{k=1}^{p_0} \Gamma_{k,\alpha_k}$ .

Por *ii)* sea  $C = B_\alpha - \Omega_\alpha$ , donde  $\Omega_\alpha = \text{diag}\{\omega_1 + \alpha_1, \dots, \omega_{p_0} + \alpha_{p_0}\}$ , y sea  $X = [\mathbf{x}_1 \mid \dots \mid \mathbf{x}_{p_0}]$  la matriz cuyas columnas son los autovectores normalizados de  $M$  correspondientes a los autvalores  $\omega_1 + \alpha_1, \dots, \omega_{p_0} + \alpha_{p_0}$ , respectivamente. Además, por *ii)*

tenemos  $\lambda_1 + \lambda_{02} + \dots + \lambda_{0p_0} = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{p_0}$ . Entonces  $\alpha = \sum_{k=1}^{p_0} \alpha_k$  y por el

Teorema 4.3.1,  $A_\alpha = M + XCX^T$  es no negativa generalizada doblemente estocástica con espectro  $\Lambda_\alpha$  y con los divisores elementales prescritos asociados a las listas  $\Lambda_k$ .  $\square$

## 4.4. Mas sobre matrices estocásticas y doblemente estocásticas

Comenzamos esta sección con el siguiente Lema:

**Lema 4.4.1.** Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos, la cual es realizable por una matriz no negativa doblemente estocástica generalizada. Entonces para todo  $\epsilon > 0$ , la lista

$$\Lambda_\epsilon = \{\lambda_1 + \epsilon, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

es realizable por una matriz positiva doblemente estocástica generalizada.

*Demostración.* Sea  $A$  una matriz no negativa doblemente estocástica generalizada con autovalor de Perron  $\lambda_1$ . Sea  $\mathbf{q}^T = (\frac{\epsilon}{n}, \dots, \frac{\epsilon}{n})$ . Entonces es claro que  $A + \mathbf{e}\mathbf{q}^T$  es positiva. Además,

$$\begin{aligned} (A + \mathbf{e}\mathbf{q}^T)\mathbf{e} &= A\mathbf{e} + \mathbf{q}^T\mathbf{e}\mathbf{e} = \lambda_1\mathbf{e} + \epsilon\mathbf{e} = (\lambda_1 + \epsilon)\mathbf{e} \text{ and} \\ (A + \mathbf{e}\mathbf{q}^T)^T\mathbf{e} &= A^T\mathbf{e} + \mathbf{q}\mathbf{e}^T\mathbf{e} = \lambda_1\mathbf{e} + n\mathbf{q} = \lambda_1\mathbf{e} + \epsilon\mathbf{e} = (\lambda_1 + \epsilon)\mathbf{e}. \end{aligned}$$

□

En [2] y [21], los autores muestran que si  $A$  es una matriz no negativa irreducible con una columna o fila positiva, entonces  $A$  es similar a una matriz positiva. El siguiente resultado caracteriza listas de números complejos, que resuelven el *NIEDP*. Esto es, listas  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  las cuales son realizables por una matriz no negativa estocástica generalizada para cada posible *JCF* asociado con  $\Lambda$ .

**Teorema 4.4.1.** Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos con  $\bar{\Lambda} = \Lambda$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$ ,  $\lambda_1 > |\lambda_i|$ ,  $i = 2, \dots, n$ . Sea

$$\begin{aligned} M &= \max_{2 \leq k \leq n} \{0, \operatorname{Re} \lambda_k + \operatorname{Im} \lambda_k\}; \\ m_k &= -\min\{0, \operatorname{Re} \lambda_k, \operatorname{Im} \lambda_k, \}, \quad k = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Entonces, si

$$\lambda_1 > M + \sum_{k=2}^n m_k, \tag{4.6}$$

existe una matriz positiva estocástica generalizada con espectro  $\Lambda$ , para cada posible *JCF* asociado con  $\Lambda$ .

*Demostración.* Sea  $A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$  la matriz inicial en el Teorema 4.2.1, con *JCF* diagonal. Puesto que (4.6) vale, podemos tomar  $r_k > 0$ ,  $k = 2, \dots, n$ , de tal manera que las entradas de la primera fila y primera columna de  $A + \mathbf{e}\mathbf{r}^T$  son positivas. Entonces  $A + \mathbf{e}\mathbf{r}^T$  es diagonalizable irreducible no negativa estocástica generalizada. Por lo tanto, a partir del resultado en [2], mencionado anteriormente,  $B = A + \mathbf{e}\mathbf{r}^T$  es similar a una matriz diagonalizable positiva estocástica generalizada, y por el Teorema 4.1.1, existe una matriz positiva estocástica generalizada con espectro  $\Lambda$  y divisores elementales arbitrariamente prescritos asociados a  $\Lambda$ . □

**Corolario 4.4.1.** Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos con  $\bar{\Lambda} = \Lambda$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$ ,  $\lambda_1 > |\lambda_i|$ ,  $i = 2, \dots, n$ . Entonces, si las condiciones (4.6) y (4.4), con desigualdades estrictas y divisores elementales, son satisfechas, existe una matriz positiva doblemente estocástica generalizada con espectro  $\Lambda$  y divisores elementales arbitrariamente prescritos asociados a  $\Lambda$ .

*Demostración.* De la demostración del Teorema 4.4.1 existe una matriz irreducible diagonalizable no negativa estocástica generalizada  $B = A + \mathbf{er}^T$ , que es similar a una matriz positiva estocástica generalizada  $C$ . Puesto que (4.4) vale, con desigualdad estricta, entonces  $C + \mathbf{eq}^T$ , para un vector  $\mathbf{q}$  apropiado, es diagonalizable positiva doblemente estocástica generalizada, y por el Teorema 4.1.1 se sigue el resultado.  $\square$

## 4.5. Ejemplos

**Ejemplo 4.5.1.** Sea  $\Lambda = \{12, 5, 2, 2, 0, -1, -1, -2 + i, -2 - i\}$ . Queremos construir una matriz positiva  $A$  doblemente estocástica generalizada con divisores elementales

$$(\lambda - 12), (\lambda - 5), (\lambda - 2)^2, \lambda, (\lambda + 1)^2, \lambda^2 + 4\lambda + 5$$

y por el Teorema 4.2.1, computamos las matrices positivas doblemente estocásticas generalizadas

$$A_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 10 & 5 & 6 \\ 7 & 11 & 3 \\ 4 & 5 & 12 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 5 & 3 & 10 \\ 11 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

con espectro  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ , y divisores elementales  $(\lambda - 7), (\lambda - 2)^2; (\lambda - 6), \lambda^2 + 4\lambda + 5;$  y  $(\lambda - 4), (\lambda + 1)^2$ , respectivamente. Además, por el Lema 4.3.1 computamos

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{con espectro } \Lambda_0, \quad \text{y } C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente

$$XCX^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{bmatrix} + X C X^T$$

es la matriz deseada positiva doblemente estocástica generalizada con los divisores elementales prescritos.

**Ejemplo 4.5.2.** La lista

$$\Lambda = \{10, -1, -1, -1, -1, -4\}$$

no satisface el corolario 4.2.2. Sin embargo, por el Teorema 4.3.1 podemos construir una matriz no negativa doblemente estocástica generalizada con espectro  $\Lambda$  y divisores elementales

$$(\lambda - 10), (\lambda + 4), (\lambda + 1)^2, (\lambda + 1)^2.$$

Tomamos la partición

$$\Lambda_0 = \{10, -4\}, \Gamma_1 = \Gamma_2 = \{3, -1, -1\}.$$

Entonces

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, A_1 = A_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

y

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{bmatrix} + X C X^T$$

es no negativa doblemente estocástica generalizada con los divisores elementales prescritos.

**Ejemplo 4.5.3.** La lista  $\Lambda = \{8, 1, -2, -2, -1 + i, -1 - i\}$  es el espectro de la matriz no negativa estocástica generalizada

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{CS}_8,$$

con divisores elementales  $(\lambda - 8), (\lambda - 1), (\lambda + 2)^2, (\lambda^2 + 2\lambda + 2)$ . ¿Cuál es el incremento  $\alpha$  necesario en  $\lambda_1 = 8$  para obtener una matriz no negativa doblemente estocástica generalizada  $B$  con divisores elementales  $(\lambda - 8 + \alpha), (\lambda - 1), (\lambda + 2)^2, (\lambda^2 + 2\lambda + 2)$ ? Por el Teorema 4.2.3-(4.4), computamos  $\alpha = 4$ . Sea  $A' = A + 4\mathbf{e}\mathbf{e}_1^T$ . Entonces

$$B = A' + \mathbf{e} \left( -5, \frac{11}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, 1 \right)$$

es la matriz deseada no negativa doblemente estocástica generalizada con espectro

$$\Lambda' = \{12, 1, -2, -2, -1 + i, -1 - i\}$$

y los divisores elementales prescritos. Puesto que  $\Lambda$  satisface la condición (4.6) del Teorema 4.4.1, Entonces existe una matriz estocástica generalizada con espectro  $\Lambda$  para cada uno de los cuatro posibles JCF asociados a  $\Lambda$ . Como  $\Lambda'$  satisface el corolario 4.4.1, entonces existe también una matriz positiva doblemente estocástica generalizada con espectro  $\Lambda'$ . Ahora, si aplicamos el Teorema 4.3.2, tenemos la partición

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \{8, 1\}, \quad \Lambda_1 = \{-2, -2\}, \quad \Lambda_2 = \{-1 + i, -1 - i\}, \quad \text{con} \\ \Gamma_1 &= \{4, -2, -2\}, \quad \Gamma_2 = \{5, -1 + i, -1 - i\}, \quad \omega_1 = 4, \quad \omega_2 = 5. \end{aligned}$$

Por el Teorema 4.2.3-(4.4) computamos la matriz no negativa doblemente estocástica generalizada

$$A_{1,\alpha_1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 5 \\ 6 & 7 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_{2,\alpha_2} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 8 \\ 9 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

donde  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ , con espectro  $\Gamma_{1,\alpha_1} = \{5, -2, -2\}$  y  $\Gamma_{2,\alpha_2} = \{5, -1 + i, -1 - i\}$ . También computamos

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

con espectro  $\{\lambda_1 + \alpha, 1\} = \{9, 1\}$  y entradas diagonales  $\omega_1 + \alpha_1 = 5$  y  $\omega_2 + \alpha_2 = 5$ . Entonces

$$\begin{bmatrix} A_{1,\alpha_1} & \\ & A_{2,\alpha_2} \end{bmatrix} + X C X$$

es no negativa doblemente estocástica generalizada con espectro

$$\Lambda_\alpha = \{9, 1, -2, -2, -1 + i, -1 - i\}$$

y divisores elementales  $(\lambda - 9), (\lambda - 1), (\lambda + 2)^2, \lambda^2 + 2\lambda + 2$ .

# Capítulo 5

## Familia de matrices con espectro y divisores elementales prescritos

Es sabido que si una lista de números complejos  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  es realizable por una matriz  $A$  no negativa, entonces esta es realizable por otras matrices no negativas diferentes a  $A$  (es suficiente considerar  $PAP^T$ , con  $P$  una matriz de permutación). En este capítulo, con ayuda de los resultados de perturbación de Brauer [4] y Rado [29], lograremos construir una familia de matrices que realizan una lista  $\Lambda \subset \mathbb{C}$ . En la sección 2, construimos una familia de matrices no negativas con divisores elementales prescritos. En la sección 3 damos una condición suficiente para que el problema de asignamiento de polos de sistemas multi-entradas y multi-salidas para matrices no negativas, tenga una solución.

### 5.1. Perturbaciones de rango $r$

En esta sección re-escribimos nuevamente los Teoremas de Brauer y Rado [4, 29], con una notación adecuada para la eficiente lectura del capítulo.

**Teorema 5.1.1.** [4] *Asumimos lo siguiente:*

- i) Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  una matriz arbitraria con  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ;*
- ii) Sea  $u \in \mathbb{C}^n$  un autovector de  $A$  asociado con el autovalor  $\lambda_1$ ;*
- iii) Sea  $v \in \mathbb{C}^n$  un vector arbitrario.*

*Entonces  $\sigma(A + uv^T) = \{\lambda_1 + v^t u, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ .*

**Teorema 5.1.2.** [29] *Sea  $r \leq n$ . Asumimos lo siguiente:*

- i) Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  una matriz arbitraria con  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ;*
- ii) Sea  $U = [u_1 \mid \dots \mid u_r] \in \mathbb{C}^{n \times r}$  una matriz de rango  $r$  tal que  $Au_i = \lambda_i u_i$  para cada  $i = 1, \dots, r$ ;*

iii) Sea  $V = [v_1 \mid \dots \mid v_r] \in \mathbb{C}^{n \times r}$  una matriz arbitraria;

iv) Sea  $\Omega = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^{r \times r}$

Entonces  $\sigma(A + UV^T) = \sigma(\Omega + V^T U) \cup \{\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n\}$

El siguiente es un resultado principal.

**Corolario 5.1.1.** *Asumimos que  $r \leq n$  y que se cumple lo siguiente:*

i) Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  una matriz arbitraria con  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ;

ii) Sea  $U = [u_1 \mid \dots \mid u_r] \in \mathbb{C}^{n \times r}$  una matriz de rango  $r$  tal que  $Au_i = \lambda_i u_i$  para cada  $i = 1, \dots, r$ ;

iii) Sea  $W = [w_1 \mid \dots \mid w_r] \in \mathbb{C}^{n \times r}$  una matriz tal que  $W^T U = I_r$ ;

iv) Sea  $C \in \mathbb{C}^{r \times r}$  una matriz arbitraria y sea  $\Omega = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \in \mathbb{C}^{r \times r}$ .

Entonces  $\sigma(A + UCW^T) = \sigma(\Omega + C) \cup \{\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n\}$ .

*Demostración.* Si tomamos  $V = WC^T$  en el teorema de Rado, entonces  $\Omega + V^T U = \Omega + C$  y  $A + UV^T = A + UCW^T$ .  $\square$

La ventaja de este resultado respecto de los teoremas 5.1.1 y 5.1.2, es que permite contruir una familia de matrices con espectro prescrito puesto que el conjunto de autovalores  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\}$  de  $\Omega + C$  no depende de la matriz  $W$ . Esto es, para cualquier  $W$  tal que  $W^T U = I_r$ , nosotros podemos construir una nueva matriz  $A + UCW^T$  con el espectro deseado  $\{\mu_1, \dots, \mu_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n\}$ .

**Corolario 5.1.2.** *Asumimos lo siguiente:*

i) Sea  $S = [s_{ij}]_{i,j=1}^r \in \mathbb{C}^{r \times r}$  una matriz arbitraria con  $\sigma(S) = \{\rho_1, \dots, \rho_s\}$ .

ii) Para  $i = 1, \dots, r$  sea  $A_i \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$  una matriz arbitraria con un autovalor  $s_{ii}$ .

iii) Para cada  $i = 1, \dots, r$  sea  $u_i \in \mathbb{C}^{n_i}$  un autovector de  $A_i$  tal que  $A_i u_i = s_{ii} u_i$ .

iv) Para cada  $i = 1, \dots, r$  sea  $w_i \in \mathbb{C}^{n_i}$  un vector tal que  $w_i^T u_i = 1$ .

Entonces la matriz

$$\begin{bmatrix} A_1 & s_{12}u_1w_2^T & \cdots & s_{1r}u_1w_r^T \\ s_{21}u_2w_1^T & A_2 & \cdots & s_{2r}u_2w_r^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{r1}u_rw_1^T & s_{r2}u_rw_2^T & \cdots & A_r \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

tiene espectro  $\{\sigma(A_1) - \{s_{11}\}\} \cup \dots \cup \{\sigma(A_r) - \{s_{rr}\}\} \cup \{\rho_1, \dots, \rho_r\}$ .

*Demostración.* Vamos a aplicar el corolario anterior. Entonces sea

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n_1+\dots+n_r) \times (n_1+\dots+n_r)};$$

Sea

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_r \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n_1+\dots+n_r) \times r};$$

y observemos que para cada  $i = 1, \dots, r$ , la  $i$ -ésima columna de  $U$  es un autovector de  $A$  con autovalor  $s_{ii}$ .

Sea

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_r \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n_1+\dots+n_r) \times r},$$

observamos que  $W^T U = I_r$ .

Sea

$$C = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & \cdots & s_{1r} \\ s_{21} & 0 & \cdots & s_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{r1} & s_{r2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces, del Corolario 5.1.1,  $A + UCW^T$  tiene espectro  $\{\rho_1, \dots, \rho_r\} \cup \{\sigma(A) - \{s_{11}, \dots, s_{rr}\}\}$ . □

Los precedentes de este resultado se pueden encontrar en el artículo de Perfect [29], quien usó el Teorema de Rado para derivar un criterio de realizabilidad para el RNIEP. Ese criterio fué extendido en [39] y aplicado mas tarde en el caso complejo [42, 44].

**Corolario 5.1.3.** *Sea  $A \in CS_{\lambda_1}$  una matriz positiva con espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ . Entonces, existe un vector  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)^T$  tal que  $A + \omega\omega^T$  da una familia de matrices no negativas con espectro  $\Lambda$ .*

*Demostración.* Es suficiente tomar  $\omega$  con  $\sum_{i=1}^n \omega_i = 0$ . □

**Ejemplo 5.1.1.** *Sea*

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{17}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{17}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{13}{4} & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{13}{4} & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} \end{bmatrix} \in \mathcal{CS}_6.$$

*A tiene espectro  $\Lambda = \{6, 1, -2, -4\}$ . Entonces, si tomamos  $\omega = [\alpha, \beta, -\beta, -\alpha]$ , la matriz*

$$B = A + e\omega^T = \begin{bmatrix} \alpha + \frac{1}{4} & \beta + \frac{17}{4} & -\beta + \frac{1}{4} & -\alpha + \frac{5}{4} \\ \alpha + \frac{17}{4} & \beta + \frac{1}{4} & -\beta + \frac{1}{4} & -\alpha + \frac{5}{4} \\ \alpha + \frac{1}{4} & \beta + \frac{13}{4} & -\beta + \frac{1}{4} & -\alpha + \frac{9}{4} \\ \alpha + \frac{1}{4} & \beta + \frac{13}{4} & -\beta + \frac{9}{4} & -\alpha + \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

*nos da, para  $0 \leq \alpha, \beta \leq \frac{1}{4}$ , una familia de matrices no negativas con espectro  $\Lambda$ .*

**Ejemplo 5.1.2.** *La matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

*tiene autovalores  $\{5, 5, 2, -5, -5\}$ . Entonces*

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} \alpha & \sigma & \eta \\ 1 - \alpha & -\sigma & -\eta \\ \beta & \delta & \theta \\ -\beta & 1 - \delta & -\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*con  $W^T U = I$ . Calculamos*

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \text{ con } C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

*B tiene espectro  $\{6, 3, 3\}$  y entradas diagonales  $\{5, 5, 2\}$ .*

*Así, para  $\eta = \theta = \sigma = \beta = 0; 0 \leq \alpha, \delta \leq 1$ , la matriz*

$$A + UCW^T = \begin{bmatrix} \eta & 5 - \eta & \theta & -\theta & 1 \\ 5 + \eta & -\eta & \theta & -\theta & 1 \\ \alpha & -\alpha + 1 & \beta & -\beta + 5 & 0 \\ \alpha & -\alpha + 1 & \beta + 5 & -\beta & 0 \\ 4\sigma & -4\sigma & 4\delta & -4\delta + 4 & 2 \end{bmatrix}$$

*da una familia de matrices no negativas con espectro  $\Lambda = \{6, 3, 3, -5, -5\}$ .*

## 5.2. Problema inverso de los divisores elementales

En esta sección mostraremos como construir una familia de matrices no negativas con divisores elementales prescritos. Aquí utilizamos el corolario 5.1.1 para el caso no negativo y también podemos resolver el problema inverso de divisores elementales para una familia de matrices positivas con sumas filas constantes y espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  en los siguientes casos, los cuales fueron ya resueltos para el *NIEDP* en [40, 45].

i)  $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ ,

ii)  $\lambda_1 > 0 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ ,

iii)  $Re\lambda_i \leq 0, |Re\lambda_i| \geq |Im\lambda_i|$ .

El siguiente Corolario del Teorema 5.1.2 es claro:

**Corolario 5.2.1.** *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos, con  $\Lambda = \bar{\Lambda}$ ,  $\lambda_1 \geq \max_i |\lambda_i|, i = 2, \dots, n$ , y  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ . Asumimos que existe una partición  $\Lambda = \Lambda_0 \cup \dots \cup \Lambda_r$ , donde algunas listas  $\Lambda_i, i = 1, \dots, r$ , pueden ser vacías, tales que*

i) *Sea  $S = [s_{ij}]_{i,j=1}^r$  una matriz no negativa  $r$ -dimensional con espectro  $\sigma(S) = \Lambda_0 = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ .*

ii) *Para cada  $i = 1, \dots, r$  existe una matriz  $A_i$   $p_i$ -dimensional, con sumas filas constantes igual a  $s_{ii}$  y espectro  $\Lambda = \{s_{ii}, \lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{ip_i}\}$ , y divisores elementales prescritos asociados con  $\Lambda_i$ .*

iii) *Para cada  $i = 1, \dots, r$  sea  $u_i = e$  un autovector de  $A_i$  correspondiente a el autovalor  $s_{ii}$  y sea  $U = [u_1 | \dots | u_r]$ .*

iv) *Para cada  $i = 1, \dots, r$  sea  $w_i$  un vector no negativo tal que  $w_i^T e = 1$ .*

*Entonces la matriz  $A + UCW^T$ , donde  $C = S - \text{diag}\{s_{11}, s_{22}, \dots, s_{rr}\}$  tiene espectro  $\Lambda$  y divisores elementales prescritos asociado con  $\Lambda_i, i = 1, \dots, r$ .*

**Ejemplo 5.2.1.** *Sea  $\Lambda = \{7, 1, -2, -2, -1 + 3i, -1 - 3i\}$ . Queremos construir una familia de matrices no negativas con espectro  $\Lambda$  y con divisores elementales  $(\lambda - 7), (\lambda - 1), (\lambda + 2)^2, \lambda^2 + 2\lambda + 10$ . Entonces tomamos la partición*

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \{7, -1 + 3i, -1 - 3i\}, \Lambda_1 = \{-2, -2\}, \Lambda_2 = 1, \Lambda_3 = \theta, \\ \Gamma_1 &= \{4, -2, -2\}, \Gamma_2 = \{1, 1\}, \Gamma_3 = \{0\}. \end{aligned}$$

*Computamos la matriz*

$$S = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ \frac{34}{7} & 1 & \frac{8}{7} \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

*con espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales  $\{4, 1, 0\}$ , y las matrices*

5. Familia de matrices con espectro y divisores elementales prescritos 52

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & -1 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [-4 \ 2 \ 2] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = [0],$$

con espectro  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ , respectivamente. Observe que la matriz  $A_1$  tiene divisores elementales  $(\lambda - 4)(\lambda + 2)^2$ . Sea

$$W = \begin{bmatrix} \alpha & \sigma & \eta \\ 1 - \alpha & -\sigma & -\eta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & \delta & \theta \\ -\beta & 1 - \delta & -\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces  $W^T U = I$ , y

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{bmatrix} + UCW^T$$

$$= \begin{bmatrix} 3\eta & 2 - 3\eta & 2 & 3\theta & -3\theta & 3 \\ 3\eta + 3 & -3\eta & 1 & 3\theta & -3\theta & 3 \\ 3\eta + 2 & 2 - 3\eta & 0 & 3\theta & -3\theta & 3 \\ \frac{34}{7}\alpha + \frac{8}{7}\eta & \frac{34}{7} - \frac{8}{7}\eta - \frac{34}{7}\alpha & 0 & \frac{8}{7}\theta + \frac{34}{7}\beta & -\frac{8}{7}\theta - \frac{34}{7}\beta & \frac{8}{7} \\ \frac{34}{7}\alpha + \frac{8}{7}\eta & \frac{34}{7} - \frac{8}{7}\eta - \frac{34}{7}\alpha & 0 & \frac{8}{7}\theta + \frac{34}{7}\beta & 1 - \frac{8}{7}\theta - \frac{34}{7}\beta & \frac{8}{7} \\ 7\sigma & -7\sigma & 0 & 7\sigma & 7\delta & 7 - 7\delta \end{bmatrix}$$

es una familia de matrices con espectro  $\Lambda$  y divisores elementales deseados. En particular para

$$\eta = \sigma = \theta = \beta = 0, 0 \leq \alpha, \delta \leq 1$$

tenemos la familia de matrices no negativas

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ \frac{34}{7}\alpha & \frac{34}{7} - \frac{34}{7}\alpha & 0 & 1 & 0 & \frac{8}{7} \\ \frac{34}{7}\alpha & \frac{34}{7} - \frac{34}{7}\alpha & 0 & 0 & 1 & \frac{8}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 7\delta & 7 - 7\delta & 0 \end{bmatrix}$$

con espectro  $\Lambda$  y divisores elementales

$$(\lambda - 7), (\lambda - 1), (\lambda + 2), \lambda^2 + 2\lambda + 10.$$

### 5.3. Problema no negativo de asignamiento de polos

En [5] los autores muestran aplicaciones del Teorema de Rado, a las técnicas de asignamiento de polos para sistemas múltiples de entrada y salida definidos por pares de matrices  $(A, B)$  (MIMO). En esta sección nosotros mostramos una versión de ese resultado para matrices no negativas.

Sea  $A$  una matriz  $n \times n$ ,  $B$  matriz  $n \times r$  con  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ . Sea además  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\}$  una lista de números. El problema de asignamiento de polos para MIMO consiste en encontrar condiciones sobre el par  $A, B$  para la existencia de una matriz  $F$  tal que

$$\sigma(A + BF^T) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r, \lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_n\}.$$

Presentamos el siguiente resultado

**Teorema 5.3.1.** *Sea  $(A, B)$  un par de matrices con  $A$   $n$ -dimensional no negativa y  $B$   $n \times r$ -dimensional. Sea  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  y sea  $\mu = \{\mu_1, \dots, \mu_r\}$  una lista de números. Sea  $X = [\alpha_1 x_1 \mid \dots \mid \alpha_r x_r]$  una matriz de rango  $r$  y tal que  $A^T x_i = \lambda_i x_i, i = 1, 2, \dots, r$ . Si existe una columna  $b_j = [b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}]^T$  de la matriz  $B$ , con todas las entradas no negativas tal que  $b_j^T x_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, r, \sigma(\Omega + [b_j \mid \dots \mid b_j]^T X) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\}$  y  $\sum_{i=1}^r \alpha_i x_{si} \geq 0, s = 1, 2, \dots, n$ , entonces existe una matriz no negativa  $F$  tal que la matriz no negativa  $A + BF^T$  tiene espectro  $\mu_1, \dots, \mu_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ .*

*Demostración.* Sea la matriz  $n \times r$

$$C^T = [b_j \mid \dots \mid b_j] = B[e_j \mid \dots \mid e_j],$$

donde  $e_j$  es la  $j^{\text{th}}$  columna de la matriz identidad de orden  $r$ . Entonces

$$\begin{aligned} C^T X^T &= B[e_j \mid \dots \mid e_j] X^T \\ &= \begin{bmatrix} b_{1j} \sum_{i=1}^r \alpha_i x_{1i} & \cdots & b_{1j} \sum_{i=1}^r \alpha_i x_{ni} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{nj} \sum_{i=1}^r \alpha_i x_{1i} & \cdots & b_{nj} \sum_{i=1}^r \alpha_i x_{ni} \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

Si tomamos  $F^T = [e_j \mid \dots \mid e_j] X^T$ , entonces

$$0 \leq A + C^T X^T = A + B[e_j \mid \dots \mid e_j] X^T = A + BF^T$$

y por el Teorema 5.1.2 de Rado

$$\sigma(A + BF^T) = \sigma(A + C^T X^T) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\} \cup \{\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n\}$$

□

**Ejemplo 5.3.1.** Consideremos  $(A, B)$  y  $\mu = \{8 + \sqrt{19}, 8 - \sqrt{19}\}$  donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [b_1 \mid b_2],$$

con  $\sigma(A) = \{6, 3, 3, -5, -5\}$ . Computamos los autovectores de  $A^T$ :

$$\mathbf{x}_{\lambda=6} = [1, 1, 1, 1, 1]^T, \mathbf{x}_{\lambda=3} = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1\right]^T$$

$$\mathbf{x}_{\lambda=-5} = \left\{[-5, 5, 0, 1, 0]^T, \left[\frac{35}{4}, -\frac{179}{20}, -\frac{7}{4}, 0, 1\right]^T\right\}.$$

Puesto que  $b_2 = [0, 0, 0, 4, 1]^T$ ,  $b_2^T x_{\lambda=6} \neq 0$ , y  $b_2^T x_{\lambda=3} \neq 0$ , podemos cambiar los autovalores  $\lambda = 6, \lambda = 3$  a  $\mu_1 = 8 + \sqrt{19}, 8 - \sqrt{19}$  respectivamente. Para hacer esto, sea

$$C^T = [b_2 \mid b_2] = B \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = B[e_2 \mid e_2]$$

con

$$X^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ -\frac{1}{2}\alpha_2 & -\frac{1}{2}\alpha_2 & -\frac{1}{2}\alpha_2 & \frac{1}{4}\alpha_2 & \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Puesto que  $\sigma(\Omega + [b_2 \mid b_2]^T X) = \{\mu_1, \mu_2\}$ , entonces

$$\begin{aligned} 6 + 5\alpha_1 + 3 + 2\alpha_2 &= 8 + \sqrt{19} + 8 - \sqrt{19} \\ (6 + 5\alpha_1)(3 + 2\alpha_2) - (5\alpha_1)(2\alpha_2) &= (8 + \sqrt{19})(8 - \sqrt{19}). \end{aligned}$$

Así,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ .

Tomando  $F^T = [e_2 \mid e_2]X^T$ , nosotros tenemos que

$$A + BF^T = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 10 & 5 & 8 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{4} & \frac{5}{4} & 4 \end{bmatrix}$$

es no negativa con espectro

$$\sigma(A + BF^T) = \sigma(\Omega + [e_2 \mid e_2]^T B^T X) \cup \{3, -5, -5\}$$

donde

$$\Omega + [e_2 \mid e_2]^T B^T X = \begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

tiene el espectro  $8 + \sqrt{19}, 8 - \sqrt{19}$ .

# Conclusiones y posible trabajo futuro

En este trabajo se extendieron y mejoraron criterios existentes en la literatura respecto de los problemas SNIEP, NIEDP, un problema de completación y la pregunta de Guo para matrices simétricas no negativas. Los resultados centrales aplicados en esta tesis son un Teorema de Rado[29] y el Teorema de Brauer[4]. Los principales resultados de este trabajo son:

- Establecimos una nueva condición suficiente para el SNIEP. En particular para  $n = 5$  mostramos una manera de construir matrices simétricas con espectro prescrito, mostrando así que la lista  $\Lambda = \{6, 1, 1, -4, -4\}$  es realizable por una matriz simétrica no circulante.
- Respecto al problema de completación, es decir: dada dos listas  $\Lambda, D$  de números reales encontrar condiciones necesarias y/o suficientes para la existencia de una matriz estructurada con entradas diagonales  $D$  y autovalores  $\Lambda$ , desarrollamos para  $n = 3$  una condición suficiente para la existencia de una matriz no negativa doblemente estocástica con entradas diagonales y autovalores prescritos. Para  $n = 4$  mostramos una condición suficiente para la existencia de una matriz simétrica no negativa con entradas diagonales y autovalores prescritos, la cual es independiente de la condición establecida por Fiedler [10].
- Mostramos avances para una solución a la pregunta de Guo [12]. En particular mostramos que si una lista  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  es realizable por una matriz simétrica no negativa reducible, entonces  $\Lambda_\epsilon = \{\lambda_1 + \epsilon, \lambda_2 \pm \epsilon, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$  es también simétricamente realizable por una matriz no negativa. Establecimos también que si una lista  $\Lambda$  satisface los criterios de realizabilidad  $S1$ , entonces la lista  $\Lambda_\epsilon$  es simétricamente realizable.
- Mostramos una condición suficiente para la realizabilidad de una lista compleja  $\Lambda$ , por una matriz no negativa (positiva) doblemente estocástica con divisores elementales prescritos. Esta condición suficiente mejora criterios establecidos en

la literatura.

- Mostramos como construir una familia de matrices que realiza una lista  $\Lambda$ , y establecimos una versión no negativa del problema de asignamiento de polos (MIMO) [5].

De forma natural, en el futuro inmediato pretendemos trabajar sobre los siguientes problemas

- Encontrar una manera de construir una matriz ortogonal  $P$  tal que  $Py \geq 0$  y  $PDP^T \geq 0$ , donde  $y, D$  son como en el Teorema 2.2.2.
- Tratar de implementar el método de construcción del Teorema 2.3.4, para construir matrices simétricas con entradas diagonales y autovalores prescritos, con  $n \geq 5$
- Establecer una versión simétrica del Teorema de Rado, que permita generar una familia de matrices simétricas no negativas que realizan una lista  $\Lambda$ .
- Buscar una respuesta a la pregunta de Guo, para criterios de realizabilidad particulares.

# Bibliografía

- [1] A. Berman, R. J. Plemmons, Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences, in : Classics in Applied Mathematics 9, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1994.
- [2] A. Borobia, On Nonnegative Matrices Similar to Positive Matrix, Linear Algebra Applications 266 (1997) 365-379.
- [3] A. Borobia, J. Moro, R. L. Soto, Negativity compensation in the nonnegative inverse eigenvalue problem, Linear Algebra Appl., 393 (2004) 73-89.
- [4] A. Brauer, Limits for the characteristic roots of a matrix. IV: Applications to stochastic matrices, Duke Math. J., 19 (1952) 75-91.
- [5] R. Bru, R. Canto, R. L. Soto, A. Urbano, A Brauer's theorem and related results, Central European Journal of Mathematics, (2012), 312-321.
- [6] Z. B. Charles, M. Farber, C. Johnson, Lee Kennedy-Shaffer, The relation between the diagonal entries and the eigenvalues of a symmetric matrix, based upon the sign pattern of its off-diagonal entries, Linear Algebra Applications 00 (2012) 1-16.
- [7] J. Ccapa, R. L. Soto, On Spectra Perturbation and Elementary Divisors of Positive Matrices, Electronic Journal of Linear Algebra, 18 (2009), 462-481.
- [8] J. Ccapa, R. L. Soto, On elementary divisors perturbation of nonnegative matrices, Linear Algebra Appl. 432 (2010) 546-555.
- [9] P. D. Egleston, T. D. Lenker, S. K. Narayan, The nonnegative inverse eigenvalue problem, Linear Algebra and its applications, 379(2004), 475-490.
- [10] M. Fiedler, Eigenvalues of nonnegative symmetric matrices, Linear Algebra Appl. 9 (1974) 119-142.

- 
- [11] W. Guo, An Inverse Eigenvalue Problem for Nonnegative Matrices, *Linear Algebra and its Applications* 249(1996) 67-78.
  - [12] W. Guo, Eigenvalue of Nonnegative Matrices, *Linear Algebra and its Applications* 266(1997) 261-270.
  - [13] C. Johnson, Row Stochastic Matrices Similar to Doubly-stochastic Matrices, *Linear Multilinear Algebra* 10 (1981) 113-130.
  - [14] O. Holtz, *M*-Matrices Satisfy Newton's inequalities, *American Mathematical Society*, Vol 0.
  - [15] A. Horn, Doubly stochastic matrices and the diagonal of matrix rotations, *Amer. J. Math.*, 76(1954) 620-630.
  - [16] R. Kellogg, Matrices Similar to a Positive or Essentially Positive Matrix, *Linear Algebra Applicatios* 4 (1971) 191-204.
  - [17] T. Laffey, E. Meehan, A Refinement of an Inequality of Johnson, Loewy and London on Nonnegative Matrices and some Applications, *Electron J. Linear Algebra* 3 (1998) 119-128.
  - [18] T. J. Laffey, E. Meehan, A characterization of trace zero nonnegative  $5 \times 5$  matrices, *Linear Algebra Appl.* 302-303 (1999) 295-302.
  - [19] T. J. Laffey, H. Smigoc, Nonnegative realization of spectra having negative real parts, *Linear Algebra Appl.*, 416 (2006) 148-159.
  - [20] T. J. Laffey, H. Smigoc, Construction of nonnegative symmetric matrices with given spectrum, *Linear Algebra Appl.* 421 (2007) 97-109.
  - [21] T. J. Laffey, R. Loewy, H. Smigoc, Nonnegative matrices that are similar to positive matrices, *SIAM J. Matrix Analysis Appl.* 31 (2009) 629-649.
  - [22] R. Loewy, D. London, A note on an inverse problem for nonnegative matrices, *Linear Multilinear Algebra* 6 (1978) 83-90.
  - [23] M.E. Meehan, Some results on matrix spectra, Ph.D. thesis, National University of Ireland, Dublin, 1998.
  - [24] H. Minc, Inverse elementary divisor problem for nonnegative matrices, *Proceedings American Mathematical Society*, 83 NUm. 4:(1981) 665-669.
  - [25] H. Minc, Inverse elementary divisor problem for doubly stochastic matrices. *Linear Multilinear Algebra* 11 (1982) 121-131.
  - [26] H. Minc, *Nonnegative Matrices*, John Wiley Sons, Inc, (1988).

- 
- [27] H. Perfect, On positive Stochastic Matrices with Real Characteristic Roots, *Proc. Cambridge Philos Soc.* 48 (1952) 271-276.
  - [28] H. Perfect, Methods of constructing certain stochastic matrices, *Duke Math. J.* 20 (1953) 395-404.
  - [29] H. Perfect, Methods of constructing certain stochastic matrices II, *Duke Math. J.* 22(1955) 305-311.
  - [30] N. Radwan, An Inverse Eigenvalues Problem for Symmetric and Normal Matrices, *Linear Algebra Applications* 248(1996)101-109.
  - [31] O. Rojo, R. L. Soto, Guo perturbations for symmetric nonnegative matrices with complex spectrum, *Linear Algebra Appl.* 368 (2003) 594-607.
  - [32] F. Salzmänn, A Note Eigenvalues of Nonnegative Matrices, *Linear Algebra Applications* 5 (1972) 329-338.
  - [33] I. Schur, Über eine Klasse von Mittelbildungen mit Anwendungen auf der Determinantentheorie, *Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft*, vol. 22 (1923), 9-20.
  - [34] H. Smigoc, The inverse eigenvalue problem for nonnegative matrices. *Linear Algebra Appl.* 393 (2004) 365-374.
  - [35] R. L. Soto, On the Inverse Spectrum Problem for Positive Generalized Stochastic matrices, *Computer and Mathematics with Applications* 43 (2001) 641-656.
  - [36] R. L. Soto, Existence and construction of nonnegative matrices with prescribed spectrum, *Linear Algebra and its Applications* 369(2003) 169-184.
  - [37] R. L. Soto, Realizability by symmetric nonnegative matrices, *Proyecciones* 24 (1) (2005) 65-78.
  - [38] R. L. Soto, Realizability criterion for the symmetric nonnegative inverse eigenvalue problem, *Linear Algebra Appl.* 416 (2-3) (2006) 783-794.
  - [39] R. L. Soto, O. Rojo, Applications of a Brauer theorem in the nonnegative inverse eigenvalue problem, *Linear Algebra and its Applications.* 416 (2006) 844-856.
  - [40] R. L. Soto, J. Ccapa, Nonnegative matrices with prescribed elementary divisors, *Electronic Journal of Linear Algebra*, 17 (2008) 287-303.
  - [41] R. L. Soto, O. Rojo, J. Moro, A. Borobia, Symmetric nonnegative inverse eigenvalue problem, *Linear Algebra Appl.* 428 (2008) 2574-2584.

- 
- [42] R. L. Soto, M. Salas, C. Manzaneda, Nonnegative realization of complex spectra, *Electronic Journal of Linear Algebra* 20 (2010) 595-609.
- [43] R. L. Soto, A family of realizability criteria for the real and symmetric nonnegative inverse eigenvalue problem, *Numerical Linear Algebra with Applications*, (2011).
- [44] R. L. Soto, O. Rojo, C. B. Manzaneda, On Nonnegative Realization of Partitioned Spectra, *Electronic Journal of Linear Algebra* 22 (2011) 557-572.
- [45] R. L. Soto, R. C. Diaz, H. Nina, M. Salas, Nonnegative matrices with prescribed spectrum and elementary divisors, *Linear Algebra Appl.* 439 (2013) 3591-3604.
- [46] R. L. Soto, E. Valero, On symmetric nonnegative matrices with prescribed spectrum, *International Mathematical Forum*, Vol.9, no. 24, (2014) 1161-1176.
- [47] R. L. Soto, E. Valero, M. Salas, H. Nina, Nonnegative generalized doubly stochastic matrices with prescribed elementary divisors, (2014) Sometido.
- [48] G. Soules, Constructing Symmetric Nonnegative Matrices, *Linear Multilinear Algebra* 13 (1983) 241-251.
- [49] O. Spector, A characterization of trace zero symmetric nonnegative  $5 \times 5$  matrices, *Linear Algebra and its Applications*, (2011) 434:1000-1017.
- [50] K. Suleimanova, Stochastic Matrices with Real Characteristic Values, *Dokl Akad Nauk SSSR* 66 (1949) 343-345.
- [51] Torre-Mayo, M.R. Abril-Raymundo, E. Alarcia-Estévez, C. Marjuán, M. Pisonero, The nonnegative inverse eigenvalue problem from the coefficients of the characteristic polynomial. EBL digraphs, *Linear Algebra Appl.* 426 (2007) 729-773.
- [52] Xuefeng Wang, Chi-Kwong Li, Yiu-Tung Poon, Perturbing eigenvalues of nonnegative matrices, *Linear Algebra Appl.* (2014) Article in press.