



UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Física

**PLASMA NO-NEUTRAL AXIAL-SIMETRICO
BAJO CONFINAMIENTO MAGNETICO
IMPERFECTO**

Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias con
mención en Física.

Lic. Camila Constanza Órdenes Huanca

Profesor Guía: Dr. Luisberis Velázquez Abad

Antofagasta, Chile

2014

Agradecimientos

Al finalizar esta etapa, no puedo dejar de agradecer a quienes colaboraron en la realización de este trabajo:

En primer lugar, a mi gran familia, quienes han sido el pilar fundamental en este proceso con su apoyo y ayuda en todo momento. Siempre incondicionales y dispuestos a hacer lo que sea para ayudarme a cumplir mis sueños. Gracias porque uno de esos sueños ya está cumplido.

A Christian, por compartir su mayor pasión conmigo: la ciencia, lo cual es invaluable; por ser una fuente de aprendizaje, debate y discusión científica para mí y quien, en mis momentos de flaqueza, siempre supo mostrarme lo maravilloso de lo que hacemos, a pesar de la difícil ruta, para volver a reafirmar mi amor por la ciencia.

También quiero agradecer a mi profesor tutor durante estos años, Dr. Luisberis Velázquez, quien además de ser un excelente profesor, ha sido un verdadero guía en mi incipiente desarrollo en la ciencia. Muchísimas gracias por su dedicación en este trabajo (y otros muchos más), su gran disposición, su ayuda y sus valiosos consejos.

Además, al Dr. Sergio Curilef, quien confió en mí y me dió la oportunidad de dar a conocer este trabajo en la lejana Grecia en el presente año e igualmente por su colaboración en este estudio.

Al profesor Ramón Fernández, quien también fue uno de los responsables de mi participación en el congreso en Grecia. Gracias por su labor, su gestión y por tener

siempre una buena disposición a apoyar a quienes fueron sus alumnos alguna vez. Agradezco también al departamento de física de la Universidad Católica del Norte, en especial a los funcionarios y académicos del departamento, quienes siempre me brindaron su ayuda, desde lo más mínimo, para poder llevar a cabo este proyecto. También agradezco profundamente la ayuda y apoyo de mis amigos y compañeros, en especial a quienes fueron parte del grupo de seminarios, ya que en estos dos años de estudio han sido una gran fuente de inspiración y admiración, además de haber colaborado de una u otra forma en la realización de este trabajo. Finalmente, debo agradecer el financiamiento otorgado por la beca de magíster nacional CONICYT 2013-2014, No. 22130297.

A todos ustedes, con mucho cariño.

Camila, Antofagasta, Diciembre de 2014.

Resumen

En este trabajo se estudia la influencia de la evaporación presente en un plasma no-neutral axial-simétrico, compuesto de partículas cargadas idénticas, el cual ha sido confinado de forma imperfecta mediante un campo magnético externo, siendo éste no nulo solamente en una región finita del espacio. Se analizan las modificaciones del comportamiento termodinámico asociado a la evaporación de las partículas a partir del estudio estadístico basado en el ensemble microcanónico. Además se tiene en cuenta el truncamiento del espectro de velocidades asociado a la existencia de una energía umbral para el escape de las partículas de la región de confinamiento. La configuración más probable que puede adoptar el sistema se deriva de un formalismo modificado de la maximización de la entropía, el que permite encontrar los diferentes observables macroscópicos asociados del sistema.

Finalmente, se realiza una comparación de los resultados obtenidos en este estudio teórico con los resultados experimentales de Huang y Driscoll (*Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 2187). En general, la incidencia de un confinamiento imperfecto permite explicar los perfiles de distribución de este experimento, excepto en la región exterior de este sistema, donde es más significativa la influencia de la pared cilíndrica conectada a tierra de la trampa de Penning, cuyo efecto dinámico no es totalmente considerado en el modelo desarrollado en este estudio.

Abstract

We study the evaporation effects on thermo-statistics of 2D pure non-neutral plasma that is imperfectly confined by an external magnetic field, e.g., when magnetic field is non-vanishing inside a finite region only. Statistical description of evaporation effects are analyzed starting from a regularized microcanonical ensemble that only includes those configurations where particles remain trapped inside the confinement region. This goal is achieved introducing a truncation of velocity spectrum that accounts for the existence of a threshold energy for particles evaporation ε_c . These arguments naturally lead to a statistical procedure quite analogous to *maximum entropy approach*, although it includes some nontrivial modifications because of incidence of evaporation. We analyze thermodynamics of this model system as well as the associated particles distributions. Finally, we perform a comparative study of our quasi-stationary profiles with experimental data obtained from Huang & Driscoll experiment (Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 2187).

Índice general

Introducción	5
1. Antecedentes	9
1.1. Estado de Brillouin	9
1.2. Experimento de Huang-Driscoll	11
1.3. Analogía con los sistemas astrofísicos	15
2. Metodología	18
2.1. Desarrollo del modelo	18
2.1.1. Hamiltoniano	18
2.1.2. Descripción microcanónica regularizada	19
2.1.3. Formalismo modificado de máxima entropía	23
2.2. Estudio computacional	28
2.2.1. Resolución numérica	28
2.2.2. Observables macroscópicos	31
2.2.3. Cálculo de la energía de corte	32
3. Discusión de resultados	36
3.1. Generalidades	36
3.1.1. Función de norma	36
3.1.2. Soluciones de las ecuaciones diferenciales	38

3.1.3. Parámetro de saturación δ	40
3.2. Comportamiento termodinámico	43
3.2.1. Curvas de saturación constante	43
3.2.2. Perfiles de distribución	45
3.2.3. Comparación con el experimento	47
Conclusiones	52
Problemas abiertos	54
Bibliografía	55

Índice de figuras

- 1.1. Esquema interior: A temperatura cero (estado fundamental), un plasma no-neutral puro con frecuencia de rotación ω (que tiene una orientación en el sentido anti-horario asociada a partículas con carga positiva q) muestra una distribución axial-simétrica de densidad constante n_B hasta un valor finito de radio $|\mathbf{r}| \leq r_B$ (región gris), el llamado estado estacionario de Brillouin [5]. Por conveniencia para la discusión posterior, se ha representado también la región de confinamiento (cruces) con campo magnético axial homogéneo \mathbf{B} (orientado hacia el interior de la página) y de radio R . Gráfico: Dependencia del parámetro de densidad n_B del estado fundamental *versus* la frecuencia de rotación ω utilizando sus unidades características relevantes. 11
- 1.2. La trampa de Penning cilíndrica ha sido utilizada para el estudio de plasmas no-neutrales en condiciones relativamente ideales [1, 2, 13], por ejemplo: configuraciones de estados estacionarios de columnas de electrones con simetría axial. Esta configuración experimental no evita que los electrones escapen de la región de confinamiento a través de la pared exterior conectada a tierra. A pesar de este proceso disipativo, los plasmas no-neutrales son totalmente capaces de alcanzar configuraciones casi-estacionarias de larga duración [13], cuyo estudio se puede realizar desde una perspectiva termo-estadística. 12
- 1.3. Experimento de Huang y Driscoll [13]. Arriba: Esquema de aparato experimental, con las rejillas de medición. Abajo: Perfiles de distribución experimentales, y los ajustes teóricos considerados por estos autores. 13

1.4.	Otros ajustes teóricos para el experimento de Huang-Driscoll. Arriba, los resultados del estudio de Anteonodo y Tsallis [15] para diferentes valores del parámetro q de la estadística no extensiva. Abajo, se muestra el ajuste presentado por Cabo y colaboradores [18].	17
3.1.	Panel a) Potencial adimensional $\Phi(\xi)$ para diferentes valores del parámetro ν y un valor fijo del parámetro de integración $\bar{\lambda} = 0.5$. Se puede visualizar la existencia de un valor crítico $\nu_c \approx 0.637$ para ν donde esta dependencia experimenta un rápido crecimiento sin anularse para cualquier valor de ξ . Los valores del parámetro ν sobre este valor crítico corresponden a soluciones no físicas del sistema de ecuaciones diferenciales (2.61), por lo cual pueden ser eliminados. Panel b) Dependencia del radio de corte ξ_c <i>versus</i> el parámetro ν para algunos valores fijos del parámetro de integración λ . Estos resultados evidencian que el valor crítico ν_c es realmente una función monótona $\nu_c(\lambda)$ sobre el parámetro de integración λ	39
3.2.	Mapas de contorno para la temperatura inversa β y el parámetro de saturación δ (utilizando unidades características) en el plano de los parámetros de integración $\bar{\lambda} - \nu$ obtenidos de la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales (2.61). La línea negra representa el límite de los valores físicos admisibles de los parámetros de integración $(\bar{\lambda}, \nu)$	42
3.3.	Dependencias de la energía total U y sus tres diferentes contribuciones (la energía cinética total K y energía de rotación K_R , y la energía potencial electrostática V) en función de la temperatura para valores constantes del parámetro de saturación $\delta = 0.5$ (panel a) y $\delta = 0.9$ (panel b). Adicionalmente, se han incluido las dependencias de la densidad central n_0 y el momento de inercia \mathbb{I} . Se debe notar la existencia de valores asintóticos de estas cantidades en los límites de bajas y altas temperaturas.	44

3.4.	<p>Panel a): Perfil de distribución de partículas para $\delta = 0.5$ en diferentes valores de temperatura. Panel interior: Dependencia de la densidad central en función de la temperatura n_0. Los puntos notables de esta curva corresponden a los perfiles de distribución mostrados en el panel principal. Panel b) Muestra las mismas dependencias para un valor fijo del parámetro de saturación $\delta = 0.90$. Es notable la tendencia, a temperatura cero, hacia el <i>estado estacionario de Brillouin</i> de densidad constante para la región $0 < r/R < \delta$.</p>	46
3.5.	<p>Densidad de partículas del experimento de Huang-Driscoll [13]. Ambas dependencias experimentales fueron re-escaladas utilizando la densidad central de partículas $n(0, t)$ para $t = 0.5 \text{ ms}$. Como queda claramente evidenciado, los dos perfiles experimentales ilustrados se anulan para el radio $r_e \approx 0.7$. Reinterpretando r_e como el <i>radio de la región de confinamiento</i>, hemos incluido dos curvas de ajuste usando distribuciones teóricas casi-estacionarias del presente modelo.</p>	49
3.6.	<p>Perfil de vorticidad $\omega(r)$ del estudio experimental-teórico de Rodgers y colaboradores [17], donde se emplearon perfiles teóricos similares a los considerados por Huang y Driscoll [13]. Los datos experimentales muestran una desviación significativa en las regiones externas del sistema (señalado con una flecha) en comparación con el comportamiento que tienen en las regiones centrales. Al parecer, este efecto puede ser explicado por la atracción que ejerce sobre los electrones más externos la pared cilíndrica conectada a tierra en la trampa de Penning.</p>	50

Introducción

Los sistemas no-extensivos comprenden diferentes tipos de sistemas físicos, tales como los sistemas de interacción de largo alcance, en los cuales se puede encontrar los plasmas no neutrales [1–10, 13–18] y los sistemas no extensivos [19–26]; sistemas con comportamientos dinámicos complejos como flúidos turbulentos, materia granular y *glasses* [27–35], así como sistemas pequeños o mesoscópicos: los clusters nucleares, atómicos y moleculares [36–39]. Los sistemas no extensivos presentan propiedades termodinámicas no convencionales como límites termodinámicos diferentes, funciones de respuesta anómalas como capacidades caloríficas negativas, alta sensibilidad a condiciones externas debido a las interacciones de largo alcance, anomalías termodinámicas tales como tiempos de relajación muy lenta y meta-estabilidad, entre otras.

Los plasmas no-neutrales han recibido especial atención en estudios experimentales y teóricos realizados en los últimos años [6–10], sobre todo debido a su importancia en aplicaciones prácticas y sus conexiones directas con otros tipos de sistemas no-extensivos tales como los sistemas astrofísicos y flúidos turbulentos [3, 7]. Un desafío que presentan estos estudios es el análisis del llamado *estado casi-estacionario o metaestable*, los cuales pueden producirse durante la dinámica de los plasmas no-neutrales fuera del equilibrio en procedimientos experimentales [4, 13]. Diferentes formalismos estadísticos han sido propuestos para predecir las características de estos estados [13–18], la mayoría de ellos, basados en principios variacionales no-convencionales análogos a las teorías de máxima entropía [40].

Con anterioridad, se realizó el estudio termo-estadístico del plasma no-neutral compuesto de partículas idénticas bajo condiciones de confinamiento espacial y magnético [42], es decir, las partículas sólo eran libres de moverse dentro de una región circular con fronteras impenetrables, en la cual estaba presente un campo magnético homogéneo. En esta nueva etapa de la investigación, se realizará el estudio termo-estadístico de este tipo de sistema; pero eliminando el confinamiento espacial. Específicamente, se desarrolla un modelo en dos dimensiones de un plasma no-neutral que está *confinado de manera imperfecta* bajo la acción de un campo magnético externo y debido a su influencia es reducida efectivamente sólo a una región finita del espacio. Al no existir una frontera impenetrable, las partículas son libres de escapar, dependiendo de la velocidad que tenga cada una de ellas. Para tener en cuenta los efectos de la evaporación, se impondrá una *restricción energética* para la regularización del espectro de velocidades. La incidencia de fuerzas electrostáticas repulsivas y un campo magnético localizado crean una barrera potencial efectiva de fuerzas, para la cual sólo aquellas partículas cuyas energías cinéticas sean suficientemente bajas podrán ser retenidas en el sistema. Se desarrollará el cálculo de la densidad de estados del ensemble microcanónico, imponiendo la conservación de la energía y el momento angular; pero limitando el cálculo a aquellos estados que correspondan a configuraciones atrapadas del sistema [26].

Los experimentos que involucran plasmas no-neutrales son llevados a cabo bajo este tipo de condiciones de confinamiento. Ejemplos de esto son las columnas de electrones magnetizadas en trampas de Penning cilíndricas [1], cuya configuración experimental está representada en la figura 1.4. Aunque los efectos de la evaporación se manifiestan claramente en estos experimentos [13], su influencia en configuraciones casi-estacionarias de plasmas no-neutrales ha sido muy poco analizada en los estudios previos [13–18].

En nuestra opinión, este problema puede analizarse, haciendo una analogía con el caso de los sistemas astrofísicos como los cúmulos globulares. La estructura y

evolución de estos sistemas están descritas en los modelos de Michie-King [23, 24], los cuales dan cuenta de la incidencia de los efectos evaporativos. En estos modelos, la existencia de un umbral de energía ε_c para la evaporación lleva a un truncaje de los perfiles de distribución en el radio de marea. Esta peculiaridad de la evaporación también ha sido observada en perfiles metaestables de plasmas no-neutrales [6, 13].

El **problema** de esta investigación se enmarca en el estudio de los efectos de evaporación en el plasma no-neutral axial-simétrico, en condiciones de confinamiento magnético. El **objetivo general** es realizar el estudio termo-estadístico del plasma no-neutral axial-simétrico sometido a *confinamiento magnético imperfecto* para su posterior comparación con datos experimentales disponibles en la literatura. Los **objetivos específicos** son (1) obtener la descripción de las propiedades macroscópicas del plasma no neutral en estas condiciones, además de (2) desarrollar algoritmos computacionales que permitan la resolución numérica de las ecuaciones que describen los parámetros termodinámicos del sistema y (3) comparar resultados obtenidos con datos experimentales disponibles en la literatura, en particular, con el experimento de Huang y Driscoll [6].

La **hipótesis** de partida reside en que el plasma no-neutral solo puede ser confinado por el campo magnético exterior en una región finita del espacio debido a la existencia de un umbral de velocidad para el escape de las partículas; pero que a pesar de este proceso, los mecanismos de relajación del sistema son lo suficientemente fuertes como para conducir a éste hacia un estado casi-estacionario, cuya descripción es accesible al análisis estadístico basado en la ergodicidad de su dinámica microscópica.

La **metodología** de este trabajo ha sido inspirada en el modelo casi-ergódico [26], el cual ha sido desarrollado como una alternativa al modelo isotérmico de Antonov, el cual considera los efectos de la evaporación. De acuerdo a estudios recientes sobre el origen de la inestabilidad de la dinámica Hamiltoniana, la interacción gravitacional es responsable del comportamiento altamente caótico en

la dinámica microscópica de los sistemas astrofísicos. Esta propiedad apoya la aplicación de una descripción termoestadística basada en el carácter ergódico de la dinámica macroscópica [25]. Los mismos argumentos podrían ser aplicados en el caso del plasma no-neutral debido a la analogía existente entre la atracción gravitacional y la interacción electrostática. Se demostrará que esta perspectiva conlleva de manera natural a un procedimiento estadístico similar al procedimiento de máxima entropía [40] que incluye modificaciones debido a la existencia de la evaporación de las partículas.

Esta tesis se estructura de la siguiente manera. En el capítulo 1, *Antecedentes*, se discuten las propiedades generales del estado de Brillouin, el experimento de Huang y Driscoll, así como la analogía que tienen estas situaciones de los plasmas no-neutrales en confinamiento imperfecto con los sistemas astrofísicos. En el segundo capítulo, *Metodología*, se derivan las principales ecuaciones de trabajo asociadas a la aplicación de la mecánica estadística clásica del plasma no apantallado bidimensional bajo confinamiento magnético, teniendo en cuenta los efectos de la evaporación. En el tercer capítulo, *Discusión de resultados*, se presentan los resultados obtenidos del estudio numérico del modelo, así como su comparación con los resultados experimentales. Finalmente, se resumen las conclusiones y problemas abiertos de la presente investigación.

Capítulo 1

Antecedentes

1.1. Estado de Brillouin

Los trabajos sobre plasmas no neutrales se remontan al menos al estudio pionero hecho por Brillouin [11], en el cual describe el flujo de un haz partículas cargadas en estado estacionario dentro de un campo magnético. El estado estacionario de Brillouin para un plasma cilíndrico a bajas temperaturas es aquel en el cual las fuerzas de Lorentz $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ debidas a un campo magnético B y a la velocidad angular de rotación $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$, se ven completamente compensadas por las fuerzas electrostáticas repulsivas $q\mathbf{E}$ que existen entre las cargas que lo componen y la fuerza centrífuga $m\omega^2\mathbf{r}$ existente en cada punto del plano:

$$q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + m\omega^2\mathbf{r} = 0. \quad (1.1)$$

En este caso, la densidad se hace independiente de la posición que ocupen sus componentes, por lo cual la velocidad de rotación también lo hace. Considerando la divergencia de esta última relación, se obtiene que perfil de distribución del estado fundamental está caracterizado por la función escalón, tal que:

$$n(\mathbf{r}) = n_B \Theta [r_B - r], \quad (1.2)$$

donde $r = |\mathbf{r}|$. El parámetro densidad n_B está relacionado con el campo magnético \mathbf{B} y la frecuencia de rotación ω mediante la siguiente expresión:

$$\pi q^2 n_B / m = \Gamma(\omega, \mathbf{B}) = \omega (2\omega_L - \omega). \quad (1.3)$$

El valor máximo de la relación anterior $n_B^{max} = m\omega_L^2 / \pi q^2 = \mathbf{B}^2 / 4\pi m$ se obtiene cuando $\omega = \omega_L = -q\mathbf{B}/2m$, la frecuencia de Larmor. Este valor máximo para la densidad es llamado límite de Brillouin. El parámetro radial del estado fundamental r_B depende del número de partículas N a través de la restricción $N = n_B \pi r_B^2$. Brillouin describió flujos del estado estacionario planos y cilíndricos para el caso de electrones; ésta última se puede observar en la figura 3.13. Ambas fueron utilizadas más tarde para el enfoque magnético de haces de electrones en distintos tipos de dispositivos de microondas. Como se verá más adelante, las propiedades del estado fundamental de Brillouin son muy importantes para interpretar los resultados numéricos obtenidos en el presente estudio.

El estudio de la física del plasma comenzó a prosperar en los años 60 debido al interés en energía de fusión, aceleradores y fuentes iónicas. Los trabajos sobre plasmas no neutrales aumentaron en los años 70. El equilibrio de Brillouin cilíndrico fue comprobado en todo el rango de velocidades rotacionales [12] y una gran variedad de configuraciones fueron ideadas y estudiadas, experimental y teóricamente [5]. El confinamiento de plasmas electrónicos e iónicos utilizando trampas de Penning se hizo importante en los años 70 y se desarrolló a través de dos tipos de trampas: hiperbólicas y cilíndricas. Ésta última fue desarrollada por Malmberg, Driscoll y colaboradores, quienes la utilizaron para el estudio de los fenómenos del plasma en situaciones relativamente idealizadas.

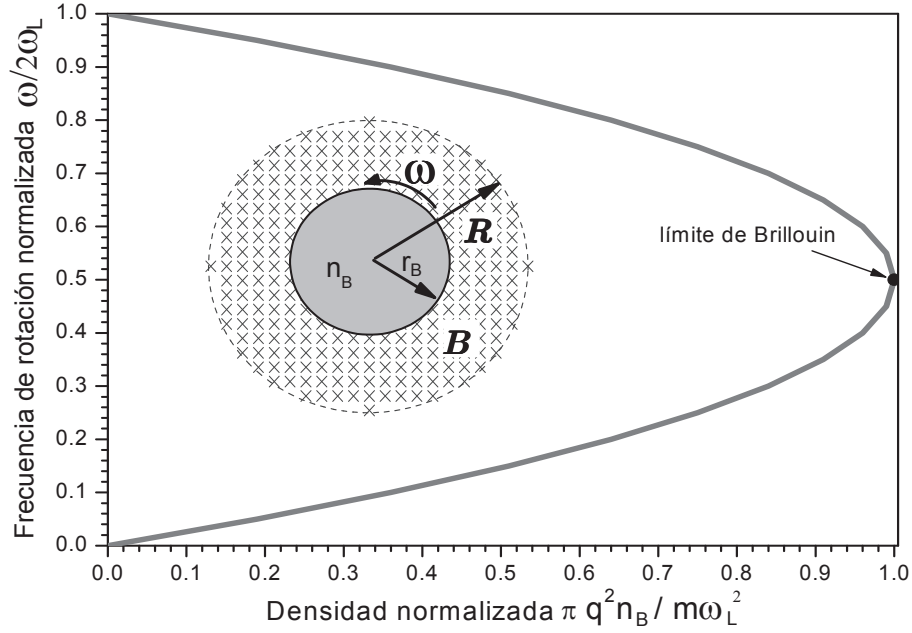


Figura 1.1: Esquema interior: A temperatura cero (estado fundamental), un plasma no-neutral puro con frecuencia de rotación ω (que tiene una orientación en el sentido anti-horario asociada a partículas con carga positiva q) muestra una distribución axial-simétrica de densidad constante n_B hasta un valor finito de radio $|\mathbf{r}| \leq r_B$ (región gris), el llamado estado estacionario de Brillouin [5]. Por conveniencia para la discusión posterior, se ha representado también la región de confinamiento (cruces) con campo magnético axial homogéneo \mathbf{B} (orientado hacia el interior de la página) y de radio R . Gráfico: Dependencia del parámetro de densidad n_B del estado fundamental *versus* la frecuencia de rotación ω utilizando sus unidades características relevantes.

1.2. Experimento de Huang-Driscoll

Huang y Driscoll estudiaron la relajación de una columna magnetizada de electrones sin efectos disipativos, utilizando una trampa de Penning cilíndrica (véase la figura 1.4). Los electrones eran confinados en una serie de cilindros conductores con radio $R_w = 3.05 \text{ cm}$; los cuales estaban situados dentro de una cámara de vacío. El confinamiento magnético se realiza aplicando un voltaje negativo $V_c = -150 \text{ V}$ así como un campo magnético axial uniforme $B_z = 507 \text{ G}$ (véase [13] para mayores detalles experimentales). Perturbando la configuración inicial mediante

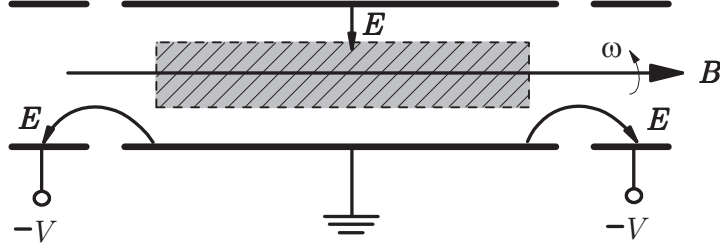


Figura 1.2: La trampa de Penning cilíndrica ha sido utilizada para el estudio de plasmas no-neutrales en condiciones relativamente ideales [1, 2, 13], por ejemplo: configuraciones de estados estacionarios de columnas de electrones con simetría axial. Esta configuración experimental no evita que los electrones escapen de la región de confinamiento a través de la pared exterior conectada a tierra. A pesar de este proceso disipativo, los plasmas no-neutrales son totalmente capaces de alcanzar configuraciones casi-estacionarias de larga duración [13], cuyo estudio se puede realizar desde una perspectiva termo-estadística.

la disminución del voltaje $-V_c$ en una de las tapas del cilindro, el sistema adopta una distribución que no es monótona con una forma hueca debido a la evaporación de los electrones de la región interior. Luego de una rápida relajación, la columna magnetizada de electrones alcanza un estado metaestable con una duración entre $2 - 10^2$ ms. Debido a su importancia que tiene este estudio en el presente trabajo, las dependencias radiales de la densidad inicial de partículas y la correspondiente al estado metaestable se exhiben en la figura 3.5.

Estos autores demostraron que la distribución de partículas observada para el estado metaestable no puede ser explicada a través de la maximización de la entropía de Boltzmann-Gibbs:

$$S = - \int d^2\mathbf{r} n(\mathbf{r}) \log [n(\mathbf{r})/n_0] \quad (1.4)$$

debido a que esta aproximación predice configuraciones con un comportamiento plano en las regiones interiores para restricciones sobre el número de partículas

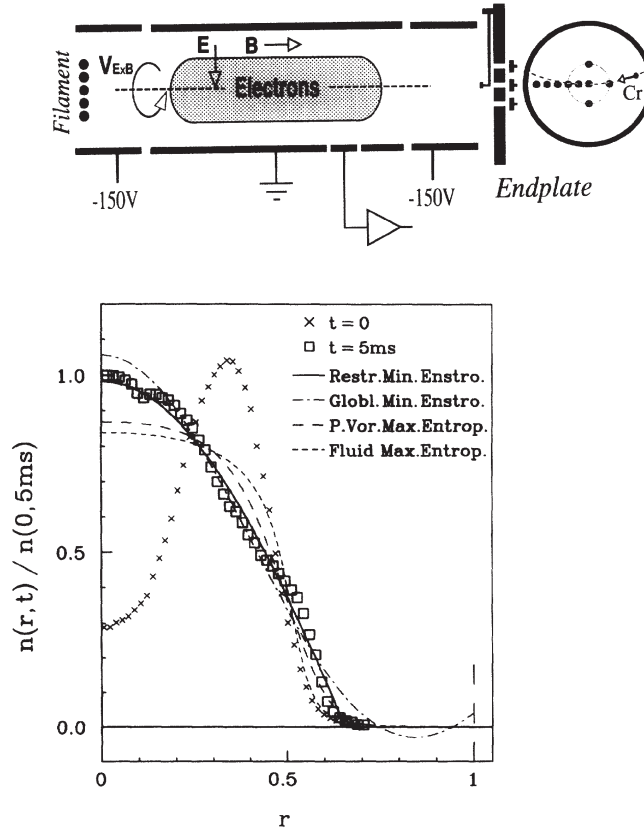


Figura 1.3: Experimento de Huang y Driscoll [13]. Arriba: Esquema de aparato experimental, con las rejillas de medición. Abajo: Perfiles de distribución experimentales, y los ajustes teóricos considerados por estos autores.

N_L , la energía potencial H_ϕ y el momento angular P_θ :

$$\begin{aligned}
 N_L &= R_w^2 \int d^2\mathbf{r} n(\mathbf{r}), \quad H_\phi = -\frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r} [\varphi(\mathbf{r})/\phi_0] [n(\mathbf{r})/n_0], \\
 P_\theta &= \int d^2\mathbf{r} (1 - r^2) n(\mathbf{r})/n_0,
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

donde $r = R/R_w$, $n_0 = N_L/R_w^2$ y $\phi_0 = eN_L$. Los autores utilizaron en total, cuatro teorías fenomenológicas con el fin de observar cuál de ellas era la que presentaba un mejor ajuste a los datos obtenidos experimentalmente. Estas fueron: la *maximización de la entropía en el punto de vórtice*, la *maximización de la entropía de un*

fluído continuo, la *minimización global de la enstrofía en el punto de vórtice* y la *minimización restringida de la enstrofía en el punto de vórtice*. Ellos afirman que la calidad del ajuste se realiza de mejor manera cuando se minimiza el *funcional de la enstrofía*, en particular, utilizando la última teoría, lo cual está asociado con la débil invarianza de las ecuaciones de Poisson derivadas [4]:

$$Z_m = \int d^2\mathbf{r} [n(\mathbf{r})/n_0]^m, \quad (1.6)$$

con exponente $m = 2$ considerando un truncaje de la distribución de partículas $n(\mathbf{r})$ para cierto valor de radio, es decir, los autores utilizan un radio de corte, ya que para un radio mayor a este valor, la densidad se vuelve negativa y por lo tanto, sin un sentido físico. Es importante notar que este radio de corte se impone en este estudio con el objetivo de evitar este problema. Por esto, los autores llaman a este método *minimización restringida de la enstrofía*.

Un año después [14], Boghosian afirmó que la extremización anterior era un caso particular de la estadística no extensiva de Tsallis [16]:

$$S_q = \frac{1}{q-1} \int d^2\mathbf{r} [n(\mathbf{r})/n_0] - [n(\mathbf{r})/n_0]^q \quad (1.7)$$

con índice no extensivo $q = 1/2$. El propio Tsallis y Anteonodo reconsideraron el análisis de Boghosian [15] utilizando valores ligeramente mayores para el parámetro q y declararon que la *cola* del perfil correspondiente al estado metaestable era mejor descrita utilizando un valor de $q \approx 0.55$. Nuevamente, estos autores reafirman el método utilizado por Huang y Driscoll, pero el parámetro de ajuste q sigue sin tener una interpretación física clara. En años recientes, Cabo y colaboradores [18] retomaron este experimento y presentaron un estudio teórico que combina la entropía de Boltzmann-Gibbs (1.4) con una cuarta restricción:

$$E_q = - \int d^2\mathbf{r} [\varphi(\mathbf{r})/\phi_0] [n(\mathbf{r})/n_0]^q \quad (1.8)$$

la cual se asemeja a los *valores de expectación* q de la estadística de Tsallis [15]. Aunque el truncaje de la distribución de partículas fue un denominador común en

todos estos estudios previos, ninguno de ellos entra al análisis detallado del rol de la evaporación de partículas para comprender a cabalidad este experimento.

1.3. Analogía con los sistemas astrofísicos

Como muchas fuerzas atractivas en la naturaleza, la gravitación no es capaz de confinar completamente un sistema de partículas. Al contrario de los estudios sobre gases y líquidos en laboratorios, los sistemas astrofísicos reales, por razones obvias, no pueden ser encerrados en recipientes con paredes rígidas impenetrables. Por lo tanto, la incidencia de la evaporación es crucial para entender la estructura y evaporación de este tipo de sistemas [43]. De acuerdo a los modelos de Michie-King para los cúmulos globulares y galaxias elípticas [23, 24], los efectos de la evaporación introducen un truncaje y la distribución individual casi-estacionaria:

$$f_{qs}(\mathbf{r}, \mathbf{p}|\beta, \varepsilon_c) = \mathcal{A} \left[e^{\beta[\varepsilon_c - \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})]} - 1 \right] \Theta [\varepsilon_c - \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})], \quad (1.9)$$

donde $\varepsilon_c < 0$ representa el umbral de energía de los constituyentes del sistema (estrellas) para que sean capaces de escapar de la influencia del campo gravitacional del cúmulo globular (o galaxia) a la que pertenecen y se vean inmersos en la influencia gravitacional de la galaxia cercana (u otros sistemas mayores). Aquí, $\Theta(x)$ es la función *Heaviside*, $\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m + m\varphi(\mathbf{r})$ es la energía mecánica individual de las partículas, $\varphi(\mathbf{r})$ es el potencial gravitacional en la posición \mathbf{r} , mientras que A es una constante de normalización. El truncaje de la distribución de una partícula (1.9) conlleva a la anulación de la distribución de densidad en el radio de marea (*tidal radius*):

$$R_t = -\frac{GMm}{\varepsilon_c} \simeq \left(\frac{M}{2M_G} \right)^{\frac{1}{3}} R_o, \quad (1.10)$$

donde M es la masa total del sistema, m es la masa de cada una de las partículas, M_G es la masa de la galaxia cercana y R_o es la distancia orbital. La incidencia de la evaporación es totalmente compatible con las observaciones [43].

La *restricción energética* que se impone en este estudio (la cual se verá explícitamente en el capítulo *Metodología*) permite una descripción cualitativa de la mayoría de las características termo-estadísticas obtenidas de los modelos de Michie King [26], tales como los perfiles de distribución con núcleos isotérmicos y halos politrópicos, la existencia de configuraciones con capacidades caloríficas negativas, fenómenos colectivos como el colapso gravitacional y disrupción evaporativa, etc. A primera vista, el escape de las estrellas en un cúmulo globular debido a la influencia gravitacional de la galaxia cercana es una situación similar al escape de los electrones en trampas de Penning cilíndricas. La ergodicidad microscópica de los sistemas astrofísicos puede tener lugar en el comportamiento termo-estadístico de los plasmas no neutrales debido a la analogía existente entre la gravitación y la interacción electrostática no apantallada.

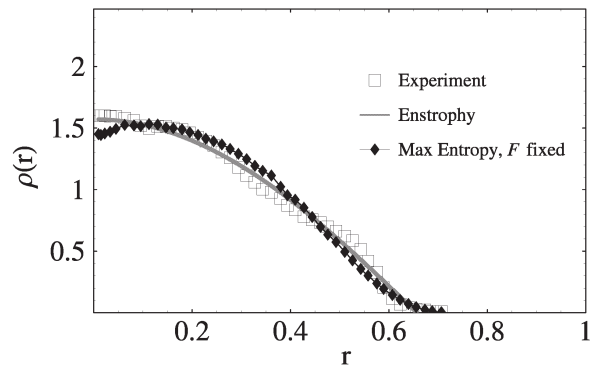
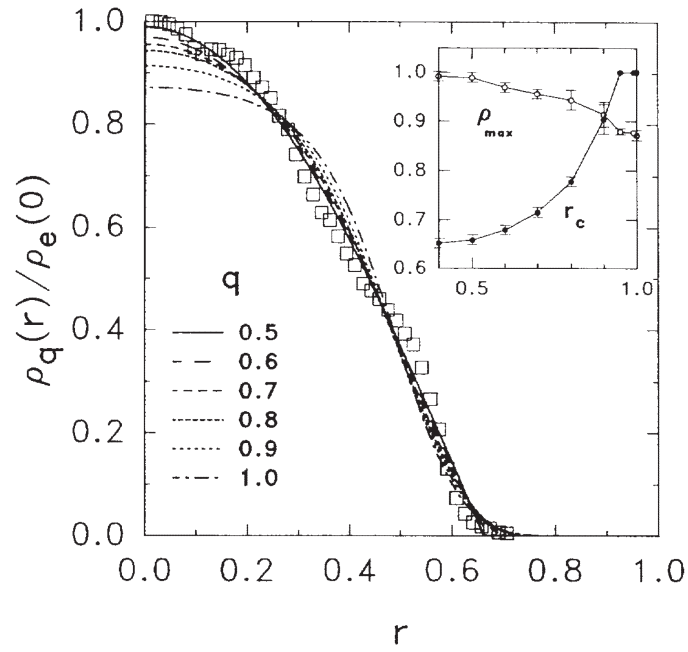


Figura 1.4: Otros ajustes teóricos para el experimento de Huang-Driscoll. Arriba, los resultados del estudio de Anteonodo y Tsallis [15] para diferentes valores del parámetro q de la estadística no extensiva. Abajo, se muestra el ajuste presentado por Cabo y colaboradores [18].

Capítulo 2

Metodología

2.1. Desarrollo del modelo

2.1.1. Hamiltoniano

Consideremos el Hamiltoniano genérico de un gas no relativista compuesto de partículas puntuales idénticas de masa m y carga q :

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \sum_i \frac{1}{2m} (\mathbf{p}_i - q\mathbf{A}_i)^2 + \sum_{i < j} q\varphi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j), \quad (2.1)$$

el cual está localizado sobre un plano real bidimensional R^2 . Los vectores $(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i)$ representan la posición y el momentum lineal de la i -ésima partícula; $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}(\mathbf{r}_i)$ denota el potencial vector magnético en la posición de la i -ésima partícula; el índice i recorre cada una de las N partículas que constituyen el plasma no-neutral. La función $\varphi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$:

$$\varphi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = -q \log \left(\frac{1}{R} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \right) \quad (2.2)$$

es el potencial electrostático bidimensional asociado a las partículas con posiciones \mathbf{r}_i y \mathbf{r}_j . Por conveniencia, se asumirá el caso más simple donde el campo magnético sólo actúa dentro de la región circular magnética de radio R con centro en el origen del plano, anulándose para cualquier otro punto fuera de ésta región. El campo

magnético tiene un valor constante \mathbf{B} en la dirección perpendicular al plano R^2 . Esta situación queda descrita en el siguiente vector potencial magnético:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \begin{cases} \mathbf{B} \times \mathbf{r}, & \text{si } |\mathbf{r}| < R, \\ 0, & \text{si } |\mathbf{r}| \geq R. \end{cases} \quad (2.3)$$

El radio R de la región circular magnética aparece en la ecuación (2.2) para garantizar el carácter adimensional del argumento de la función logarítmica. Aquellas partículas del sistema que alcancen la frontera de esta región circular y la sobrepasen, van a quedar desligadas del sistema. En estas condiciones, esas partículas solo estarían sometidas a la interacción electrostática, la que las impulsa a alejarse progresivamente del sistema, teniendo lugar eventos de evaporación.

De forma alternativa, el presente modelo puede ser interpretado como un sistema de líneas de cargas en interacción, cada una de las cuales está orientada en la dirección perpendicular al plano R^2 , las cuales sólo pueden moverse en cualquier dirección paralela a este plano; pero no en la perpendicular. El Hamiltoniano (2.1) describiría en este caso la energía del sistema por unidad de longitud, mientras que las constantes q y m deben ser interpretadas como las densidades lineales de carga y masa. A pesar de su aparente simplicidad, este modelo de dos dimensiones es ampliamente utilizado para describir plasmas no-neutrales con simetría axial-simétrica, ya que captura las propiedades físicas esenciales de estos sistemas.

2.1.2. Descripción microcanónica regularizada

El análisis termo-estadístico se llevará a cabo en el ensemble microcanónico, considerando la energía total U , el momento angular total L :

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \quad (2.4)$$

y el número total de partículas N como las variables macroscópicas que controlan la evolución casi-estacionaria del sistema bajo la incidencia de la evaporación,

mientras que el radio R y la intensidad del campo magnético \mathbf{B} son parámetros de control externos que caracterizan el confinamiento magnético imperfecto.

La descripción estadística es muy semejante al problema del plasma no-neutral con restricción espacial [42]. El objetivo principal es el cálculo de la densidad de estados:

$$\Omega = \frac{1}{N!} \int_{\mathcal{P}_R} \delta[U - H(\mathbf{r}, \mathbf{p})] \delta[M - L(\mathbf{r}, \mathbf{p})] \prod_{i=1}^N \frac{d^2\mathbf{r}_i d^2\mathbf{p}_i}{(2\pi\hbar)^2}, \quad (2.5)$$

donde la función delta de Dirac permite mantener siempre fijas las dos magnitudes que se conservan. Para tener en cuenta los efectos de la evaporación se va a imponer una *restricción energética*, es decir, el volumen accesible \mathcal{P}_R del espacio de fase está restringido a aquellas configuraciones microscópicas donde la energía mecánica de individual $\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ de cada partícula atrapada satisface la siguiente restricción:

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m + w(\mathbf{r}) < \varepsilon_c, \quad (2.6)$$

donde ε_c representa la energía máxima (mínima) que debe tener una partícula para ser retenida (o para escapar) de la región magnética del sistema y $w(\mathbf{r})$ representa el campo potencial efectivo:

$$w(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\Gamma\mathbf{r}^2 + q\varphi(\mathbf{r}). \quad (2.7)$$

Puede verificarse que este campo potencial efectivo reproduce la incidencia de fuerzas electrostáticas repulsivas, la fuerza de Lorentz magnética y la expulsión inercial de la fuerza centrífuga:

$$\mathbf{F} = -\nabla w(\mathbf{r}) \equiv q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + m\omega^2\mathbf{r} \quad (2.8)$$

con velocidad de rotación $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$, el que va a crear una barrera efectiva de fuerzas para las partículas del sistema. Aquellas partículas cuyas energías cinéticas sean suficientemente bajas van a ser retenidas en el sistema.

La restricción (2.6) se implementa de forma más directa en términos de la función de partición $Z = Z(z, w, N|R, \mathbf{B})$ con argumentos complejos z y w :

$$Z = \frac{1}{N!} \int_{\mathcal{P}_R} e^{-zH(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - wL(\mathbf{r}, \mathbf{p})} \prod_{i=1}^N \frac{d^2\mathbf{r}_i d^2\mathbf{p}_i}{(2\pi\hbar)^2}, \quad (2.9)$$

la cual se relaciona con la densidad de estados (2.5) en la forma:

$$\Omega = \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} d\bar{z} \int_{-\beta\omega-i\infty}^{-\beta\omega+i\infty} d\bar{w} e^{zU+wM} Z. \quad (2.10)$$

Esta expresión fue obtenida haciendo uso de la representación de Fourier de la delta de Dirac:

$$\delta(y-x) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} d\bar{k} e^{k(y-x)}, \quad (2.11)$$

donde la convención $d\bar{a} = da/2\pi i$ fue asumida para expresar los diferenciales de las variables de intergración complejas.

Analicemos con más detalle las contribuciones a la función de partición proveniente de la integración de los momentos:

$$\int \exp \left[-z \frac{1}{2m} (\mathbf{p}_i - q\mathbf{A}_i)^2 - \mathbf{w} \cdot \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \right] d^2\mathbf{p}_i. \quad (2.12)$$

Aquí, z es la temperatura inversa compleja y \mathbf{w} un vector complejo dirigido en la dirección perpendicular al plano. Teniendo en cuenta la identidad del producto mixto $\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{w} \times \mathbf{r}_i$ y definiendo la magnitud vectorial \mathbf{Q} :

$$\mathbf{Q}_i = \sqrt{\frac{z}{2m}} (\mathbf{p}_i - q\mathbf{A}_i), \quad (2.13)$$

la integral (2.12) puede reescribirse en la forma:

$$\int \exp \left(-\mathbf{Q}_i^2 - \sqrt{\frac{2m}{z}} \mathbf{w} \times \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{Q}_i - q\mathbf{w} \times \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{A}_i \right) d^2\mathbf{p}_i. \quad (2.14)$$

El argumento exponencial puede ser transformado completando la forma cuadrática de \mathbf{Q}_i :

$$\mathbf{Q}_i^2 + \sqrt{\frac{2m}{z}} \mathbf{w} \times \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{Q}_i \equiv \left(\mathbf{Q} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2m}{z}} \mathbf{w} \times \mathbf{r}_i \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{2m}{z}} \mathbf{w} \times \mathbf{r}_i \right)^2. \quad (2.15)$$

Teniendo en cuenta la expresión (2.3), resulta conveniente definir el vector \mathbf{q}_i :

$$\mathbf{q}_i = q\mathbf{A}_i + m \frac{1}{z} \mathbf{w} \times \mathbf{r}_i \equiv m \left(\frac{1}{z} \mathbf{w} - \omega_B \right) \times \mathbf{r}_i, \quad (2.16)$$

y el pseudo-potencial escalar $u(r)$:

$$u(r) = q \frac{1}{z} \mathbf{w} \times \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{A}_i - \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{z} \mathbf{w} \times \mathbf{r}_i \right)^2 = -\frac{1}{2} m \frac{1}{z} \mathbf{w} \times \mathbf{r}_i \cdot \left(2\omega_B + \frac{1}{z} \mathbf{w} \right) \times \mathbf{r}_i. \quad (2.17)$$

De acuerdo con el método del mejor descenso, la combinación $-\mathbf{w}/z$ se reduce a que la frecuencia de rotación del sistema es ω , de ahí que el pseudo-potencial escalar $u(r)$ adopte una forma armónica:

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m \Gamma \mathbf{r}^2, \quad (2.18)$$

donde Γ es la combinación:

$$\Gamma = -\frac{\mathbf{w}}{z} \cdot \left(2\omega_L + \frac{\mathbf{w}}{z} \right) \sim \Gamma = \omega (2\omega_L - \omega), \quad (2.19)$$

que considera el efecto conjunto de la rotación del sistema y la acción del campo magnético externo, siendo $\omega_L = -q\mathbf{B}/2m$ la frecuencia de Larmor [41]. De esta forma, la integral (2.12) adopta la forma de una partícula en rotación y la acción de un campo potencial externo:

$$\int \exp \left\{ -z \left[\frac{1}{2m} (\mathbf{p}_i - \mathbf{q}_i)^2 + u(\mathbf{r}_i) \right] \right\} d^2 \mathbf{p}_i \quad (2.20)$$

Escogiendo de forma conveniente la intensidad del campo magnético \mathbf{B} , y la frecuencia de rotación del sistema es tal que $0 < \omega < 2\omega_B$, el potencial efectivo (2.7) puede formar una barrera potencial finita, es decir, va a existir un valor de energía para la cual las partículas cuyas energías no superen dicho valor van a ser retenidas por en el sistema. Por el contrario, aquellas cuyas energías superen este valor umbral van a escapar. Aplicando la condición de truncaje (2.6), la integración por los momentos arroja el siguiente resultado:

$$\int \exp \left\{ -z \left[\frac{1}{2m} (\mathbf{p}_i - \mathbf{q}_i)^2 \right] \right\} d^3 \mathbf{p}_i = \frac{2m\pi}{z} [1 - \exp \{ -z [\varepsilon_c - w(\mathbf{r}_i)] \}]. \quad (2.21)$$

Considerando las contribuciones de cada partícula, y el potencial electrostático total, la función de partición puede ser escrita de la forma:

$$Z = \frac{1}{N!} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2 z} \right)^N \int e^{-zW(\mathbf{r}) + \Psi(\mathbf{r})} \prod_{i=1}^N d^2 \mathbf{r}_i, \quad (2.22)$$

donde $W(\mathbf{r})$ y $\Psi(\mathbf{r})$ representan las siguientes funciones complejas:

$$W(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{1}{2} m \Gamma(z, w) \mathbf{r}_i^2 + \sum_{i < j} q \varphi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \quad (2.23)$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_i \chi(\mathbf{r}_i | z, w). \quad (2.24)$$

Se ha introducido la función compleja $\Gamma(z, w)$:

$$\Gamma(z, w) = -\frac{w}{z} \left(2\omega_L + \frac{w}{z} \right), \quad (2.25)$$

además de una *función de truncaje* $\chi(\mathbf{r} | \varphi, z, w)$:

$$\chi(\mathbf{r} | \varphi, z, w) = \log \left[1 - e^{-z[\varepsilon_c - w(\mathbf{r})]} \right]. \quad (2.26)$$

Puede notarse que la presencia de la función $\chi(\mathbf{r} | \varphi, z, w)$ fuerza la anulación de la expresión integrado en (2.22) para regiones del espacio donde no satisfaga la desigualdad $w(\mathbf{r}) < \varepsilon_c$. Necesariamente, la restricción energética (2.6) implica una restricción espacial, es decir, que el sistema va a confinarse en una región finita dada. Este hecho es totalmente análogo a la existencia del llamado radio de marea (*tidal radius*) de los cúmulos globulares en astrofísica, en el cual la densidad de partículas del sistema se anula abruptamente. El radio de marea es la distancia donde el campo gravitatorio del cúmulo globular es dominado por el campo gravitatorio de la galaxia cercana, por los que los constituyentes del sistema sufren eventos de evaporación.

2.1.3. Formalismo modificado de máxima entropía

La función de partición (2.22) no puede ser desarrollada en términos de la integración sobre la posición. Es por esto que se realiza una *aproximación al continuo* utilizando la aproximación de campo medio [42]. Por lo tanto, la función de partición se puede reescribir de la siguiente manera:

$$Z = \int \mathcal{D}n(\mathbf{r}) \mathcal{D}\varphi(\mathbf{r}) \delta \{ \varphi(\mathbf{r}) - G[\mathbf{r} | n] \} \delta \{ N - N[n] \} e^{S[n|z] + \Psi[n, \varphi | z, w] - zW[n, \varphi | z, w]}, \quad (2.27)$$

donde se ha introducido el funcional para la entropía $S[n|z]$:

$$S[n|z] = - \int d^2\mathbf{r} n(\mathbf{r}) \left[\log n(\mathbf{r}) - 1 + \log \left(\frac{2\pi\hbar^2 z}{m} \right) \right], \quad (2.28)$$

el número total de partículas $N[n]$ y la función de truncaje $\Psi[n, \varphi|z, w]$:

$$N[n] = \int d^2\mathbf{r} n(\mathbf{r}), \quad \Psi[n, \varphi|z, w] = \int d^2\mathbf{r} \chi(\mathbf{r}|\varphi, z, w) n(\mathbf{r}), \quad (2.29)$$

el potencial total $W[n, \varphi|z, w]$:

$$W[n, \varphi|z, w] = \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r} \left[m\Gamma(z, w)\mathbf{r}^2 + q\varphi(\mathbf{r}) \right] n(\mathbf{r}), \quad (2.30)$$

y la función de Green $G[\mathbf{r}|n]$ para el potencial electrostático $\varphi(\mathbf{r})$ en términos de la densidad de partículas $n(\mathbf{r})$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = G[\mathbf{r}|n] = - \int d^2\mathbf{r}' q \log \left(\frac{1}{R} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \right) n(\mathbf{r}'). \quad (2.31)$$

Considerando la representación de Fourier de las deltas de Dirac:

$$\delta(y - x) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} d\bar{k} e^{k(y-x)}, \quad (2.32)$$

se puede reescribir la densidad de estados (2.5):

$$\Omega(U, M, N|R, \mathbf{B}) = \int \mathcal{D}n(\mathbf{r}) \mathcal{D}\varphi(\mathbf{r}) \mathcal{D}\bar{J}(\mathbf{r}) d\bar{z} d\bar{w} d\bar{\Lambda} e^{\mathcal{L}[n, \varphi, J, z, w, \Lambda|U, M, N|R, \mathbf{B}]}, \quad (2.33)$$

donde $\mathcal{L} = \mathcal{L}[n, \varphi, J, z, w, \Lambda|U, M, N|R, \mathbf{B}]$ representa el funcional de Legendre:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & S[n|z] + \Psi[n, \varphi|z, w] + z \left\{ U + \frac{w}{z} M - W[n, \varphi|z, w] \right\} + \\ & + \Lambda \{ N - N[n] \} + \int d^2\mathbf{r} J(\mathbf{r}) \{ \varphi(\mathbf{r}) - G[\mathbf{r}|n] \}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Para continuar el tratamiento analítico de la expresión (2.33), es necesario aplicar el *método del mejor descenso*, es decir, buscar la distribución de densidad que más contribuye al resultado de la integral funcional. En este caso, el problema

se reduce a la búsqueda de extremo del funcional (2.34), donde la entropía microcanónica $S(U, M, N|R, \mathbf{B})$ se puede estimar a través del siguiente problema de *min-max*:

$$S(U, M, N|R, \mathbf{B}) \simeq \min_{(z, w, \Lambda, J)} \max_{(n, \varphi)} \mathcal{L} [n, \varphi, J, z, w, \Lambda|U, M, N|R, \mathbf{B}]. \quad (2.35)$$

El cálculo (2.35) se puede justificar por la aproximación Gaussiana de la integral funcional (2.33). De acuerdo a ello, las cantidades complejas (z, w, Λ, J) están sujetas a una minimización, mientras que las variables reales (n, φ) están sujetas a una maximización. Los valores más probables de los parámetros complejos deben ser reemplazados por su parte real respectiva, $z \rightarrow \beta$, $w \rightarrow -\beta\omega$, $\Lambda \rightarrow \mu$, y $J(\mathbf{r}) \rightarrow j(\mathbf{r})$. Como se evidencia en el siguiente análisis, β representa la temperatura inversa, ω es la frecuencia de rotación del sistema, μ es el potencial químico, mientras que $j(\mathbf{r})$ representa el multiplicador de Lagrange asociado a la dependencia funcional del potencial electrostático $\varphi(\mathbf{r})$ con la densidad de partículas $n(\mathbf{r})$.

El problema de extremización (2.35) con funcional (2.34) tiene una semejanza directa con el procedimiento de máxima entropía, de manera que puede referirse como *formalismo modificado de máxima entropía*. Los multiplicadores de Legendre (z, w) asociados a las restricciones sobre la energía total U y el momento angular total M aparecen de una manera inusual: como parámetros en las dependencias funcionales de estas restricciones. El segundo término en el funcional de la entropía total, $S[n|z] + \Psi[n, \varphi|z, w]$, obedece una dependencia no trivial que da cuenta del truncaje de las distribuciones en la frontera de la región de confinamiento.

Las condiciones estacionarias que nos llevan a expresiones para los distintos observables son:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dz} = \frac{d\mathcal{L}}{dw} = \frac{d\mathcal{L}}{d\Lambda} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta j(\mathbf{r})} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta n(\mathbf{r})} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi(\mathbf{r})} = 0 \quad (2.36)$$

la cual, para el caso de la variable compleja z arroja como resultado la expresión

para la energía total $U = K + K_R + V$

$$K = \frac{N}{\beta} - \int d^2\mathbf{r} n(\mathbf{r}) \sigma(\mathbf{r}) [\varepsilon_c - u(\mathbf{r})], \quad (2.37)$$

$$K_R = \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r} m\omega^2 \mathbf{r}^2 n(\mathbf{r}), V = \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r} qn(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}),$$

donde K representa a la energía cinética, K_R es la energía cinética de rotación, mientras que V es la energía potencial. Además se ha introducido la función auxiliar $\sigma(\mathbf{r})$:

$$\sigma(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{\exp\{\beta[\varepsilon_c - w(\mathbf{r})]\} - 1} \quad (2.38)$$

asociada a la afectación que sufre la energía cinética debido a la existencia de un truncaje de velocidades. La condición estacionaria con respecto a la variable compleja \mathbf{w} :

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} \right|_{\mathbf{w}=-\beta\omega} = 0 \Rightarrow \mathbf{M} = \int d^2r mn(\mathbf{r}) \mathbf{r}^2 [1 + \sigma(\mathbf{r})] (\omega - \omega_B) \quad (2.39)$$

se reduce a la expresión del momento angular total. Una vez más, la presencia de la función auxiliar (2.38) indica la afectación relacionada con el truncaje del espectro de velocidades. Se ha considerado la siguiente fórmula para reducir la función compleja $\Gamma(z, w)$:

$$\Gamma(z, w) \rightarrow \omega(2\omega_L - \omega), \quad z \frac{d}{dw} \Gamma(z, w) \rightarrow 2(\omega - \omega_L),$$

$$\Gamma(z, w) + z \frac{d}{dz} \Gamma(z, w) \rightarrow \omega^2, \quad (2.40)$$

la cual se obtiene luego de reemplazar las variables complejas por sus partes reales $-w/z \rightarrow \omega$ y $z \rightarrow \beta$. Luego, la condiciones estacionarias con respecto a la variable compleja x y la función compleja $J(\mathbf{r})$ se reducen a las expresión del número total de partículas y del potencial electrostático:

$$N = \int d^2\mathbf{r} n(\mathbf{r}) \quad \text{y} \quad \varphi(\mathbf{r}) = - \int d^2\mathbf{r}' q \log\left(\frac{1}{R} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right) n(\mathbf{r}'). \quad (2.41)$$

Finalmente, obtenemos la condición estacionaria con respecto a la densidad $n(\mathbf{r})$:

$$\log\left[n(\mathbf{r}) \left(\frac{2\pi\hbar^2\beta}{m}\right)\right] + \mu + \beta \left[\frac{1}{2}q\varphi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}m\Gamma\mathbf{r}^2\right] + G[\mathbf{r}|j] - \chi(\mathbf{r}|z, \mathbf{w}; \mathbf{B}) = 0 \quad (2.42)$$

y la asociada al potencial $\varphi(\mathbf{r})$:

$$j(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\beta q n(\mathbf{r}) - \beta q \sigma(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}). \quad (2.43)$$

Combinando estas últimas expresiones, la densidad de partículas se expresa como sigue:

$$n(\mathbf{r}) = A e^{-\beta q G(\mathbf{r}|\sigma\rho)} \left\{ e^{\beta[\varepsilon_c - w(\mathbf{r})]} - 1 \right\}, \quad (2.44)$$

donde la constante de normalización $A = \exp(-\mu - \beta\varepsilon_c)m/2\pi\hbar^2\beta$. De acuerdo con esta expresión, la densidad de partículas se anula cuando $w(\mathbf{R}) = \varepsilon_c$, donde $R = |\mathbf{R}|$ corresponde a la dimensión lineal del sistema. La densidad $n(\mathbf{r})$ se puede escribir en la forma:

$$n(\mathbf{r}) = A e^{\mathcal{C}(\mathbf{r})} \left[e^{\Phi(\mathbf{r})} - 1 \right], \quad (2.45)$$

donde se ha introducido el potencial adimensional $\Phi(\mathbf{r})$:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \beta [\varepsilon_c - w(\mathbf{r})] \quad (2.46)$$

y la función auxiliar $\mathcal{C}(\mathbf{r})$:

$$\mathcal{C}(\mathbf{r}) = -\beta q G[\mathbf{r}|\sigma n] = \beta q \int d^2\mathbf{r}' q \log\left(\frac{1}{R}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right) \sigma(\mathbf{r}') n(\mathbf{r}'). \quad (2.47)$$

El truncaje de velocidades asociado a la evaporación de partículas tiene dos efectos sobre la distribución de partículas: la anulación de $n(\mathbf{r})$ debido a la anulación del potencial adimensional $\Phi(\mathbf{r})$ en la frontera del sistema, y la modificación en la distribución que introduce la presencia de la función $\mathcal{C}(\mathbf{r})$ que afecta toda la regiones del sistema.

2.2. Estudio computacional

2.2.1. Resolución numérica

La resolución numérica del presente problema conviene llevarla a cabo mediante la integración de la ecuación de Poisson:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -2\pi qn(\mathbf{r}), \quad (2.48)$$

donde se asume simetría axial para la distribución de partículas:

$$n(\mathbf{r}) = n(r) \text{ and } \varphi(\mathbf{r}) = \varphi(r). \quad (2.49)$$

Dado que la expresión del potencial electrostático $\varphi(\mathbf{r})$ relacionada a la densidad $n(\mathbf{r})$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}|n) = - \int d^2\mathbf{r}' q \log\left(\frac{1}{R} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right) n(\mathbf{r}') \quad (2.50)$$

corresponde a su solución de Green. Este problema puede escribirse en términos del potencial adimensional $\Phi(\mathbf{r})$ de la forma:

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 2\pi q^2\beta n(\mathbf{r}) - 2\beta m\Gamma. \quad (2.51)$$

De manera análoga, la función $\mathcal{C}(\mathbf{r})$ también puede escribirse mediante un problema tipo Poisson:

$$\Delta\mathcal{C}(\mathbf{r}) = 2\pi q^2\beta n(\mathbf{r}) \sigma(\mathbf{r}). \quad (2.52)$$

Teniendo en cuenta aquellas soluciones con simetría axial, e introduciendo una coordenada radial adimensional $x = r/R$, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} \Phi(x) \right] = 2\pi q^2\beta R^2 A e^{\mathcal{C}(x)} [e^{\Phi(x)} - 1] - 4\lambda, \quad (2.53)$$

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} \mathcal{C}(x) \right] = 2\pi q^2\beta R^2 A e^{\mathcal{C}(x)}, \quad (2.54)$$

donde el parámetro adimensional λ se define como:

$$\lambda \equiv \frac{1}{2}\beta m\Gamma R^2. \quad (2.55)$$

Las condiciones del potencial adimensional en el origen vienen dadas por:

$$\Phi(0) = \Phi_0, \quad \frac{d}{dx}\Phi(0) = 0, \quad (2.56)$$

donde Φ_0 se va a utilizar como parámetro de integración numérica. En la frontera del sistema, se impone que el potencial adimensional $\Phi(\xi)$ se anule:

$$\Phi(1) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}\Phi(1) = \eta - 2\lambda, \quad (2.57)$$

mientras que su derivada permite obtener el parámetro η relacionado con la temperatura inversa β :

$$\eta = \beta q^2 N. \quad (2.58)$$

Las condiciones de la función auxiliar $\mathcal{C}(x)$ son un poco más elaboradas. Conviene redefinir esta función en la forma:

$$\mathcal{D}(x) = \mathcal{C}(x) + \log(\beta q^2 R^2 A) - 2 \log \kappa, \quad (2.59)$$

donde κ es un parámetro tal que la función $\mathcal{D}(x)$ se anule en el origen:

$$\mathcal{D}(0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}\mathcal{D}(0) = 0. \quad (2.60)$$

Si redefinimos la coordenada x en la forma $\xi = \kappa x$, el sistema de ecuaciones (2.53) se escribe en su forma definitiva:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left[\xi \frac{d}{d\xi} \Phi(\xi) \right] &= 2\pi e^{\mathcal{D}(\xi)} [e^{\Phi(\xi)} - 1] - 4\bar{\lambda}, \\ \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left[\xi \frac{d}{d\xi} \mathcal{D}(\xi) \right] &= 2\pi e^{\mathcal{D}(\xi)}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

donde $\bar{\lambda} = \lambda/\kappa^2$. Las condiciones de estas funciones en el origen son:

$$\Phi(0) = \Phi_0, \quad \frac{d}{d\xi}\Phi(0) = 0, \quad \mathcal{D}(0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d}{d\xi}\mathcal{D}(0) = 0, \quad (2.62)$$

mientras que en la frontera se tiene lo siguiente:

$$\Phi(\xi_c) = 0 \text{ y } \xi \frac{d}{d\xi} \Phi(\xi_c) = \eta - 2\lambda. \quad (2.63)$$

donde $\xi_c = \kappa$, es decir, que el valor del parámetro κ corresponde al valor de anulación del potencial adimensional $\Phi(\xi)$ según la nueva coordenada radial ξ . Introduciendo las funciones $G_1(\xi)$ y $G_2(\xi)$:

$$G_1(\xi) = \xi \frac{d}{d\xi} \Phi(\xi); \quad G_2(\xi) = \xi \frac{d}{d\xi} \mathcal{D}(\xi), \quad (2.64)$$

el problema puede reescribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \Phi(\xi) &= \frac{1}{\xi} G_1(\xi), \quad \frac{d}{d\xi} \mathcal{D}(\xi) = \frac{1}{\xi} G_2(\xi), \\ \frac{d}{d\xi} G_1(\xi) &= 2\pi \xi e^{\mathcal{D}(\xi)} [e^{\Phi(\xi)} - 1] - 4\bar{\lambda} \xi, \quad \frac{d}{d\xi} G_2(\xi) = 2\pi \xi e^{\mathcal{D}(\xi)}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

el cual puede integrarse mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden, cuya implementación se realiza mediante la programación en FORTRAN 90.

Los parámetros de integración Φ_0 y $\bar{\lambda}$ obedecen restricciones adicionales. La no-negatividad de la densidad $n(\xi)$ implica la no-negatividad del potencial adimensional $\Phi(\xi)$. Para que se produzca la anulación del potencial adimensional $\Phi(\xi)$ en la frontera del sistema, se hace necesario satisfacer la restricción:

$$2\pi e^{\mathcal{D}(\xi)} [e^{\Phi(\xi)} - 1] - 4\bar{\lambda} < 0 \quad (2.66)$$

para $0 \leq \xi < \xi_c$. Si esta condición no tiene lugar para un ξ_1 dado, el potencial adimensional $\Phi(\xi)$ crecería indefinidamente sin anularse para $\xi > \xi_1$. Para que esta desigualdad tenga lugar para $0 \leq \xi < \xi_c$, basta que esta condición tenga lugar en el origen:

$$2\pi [e^{\Phi_0} - 1] - 4\bar{\lambda} < 0. \quad (2.67)$$

De aquí se deduce que el parámetro Φ_0 debe estar acotado para cada valor de $\bar{\lambda}$:

$$0 < \Phi_0 < \Phi_{max} = \log \left(1 + \frac{2}{\pi} \bar{\lambda} \right). \quad (2.68)$$

2.2.2. Observables macroscópicos

Los observables macroscópicos del sistema en estudio pueden reescribirse en términos de las nuevas variables adimensionales. En el caso de la densidad de partículas, ésta queda expresada de la siguiente forma:

$$n(\xi) = \frac{1}{\eta} \kappa^2 e^{\mathcal{D}(\xi)} \left[e^{\Phi(\xi)} - 1 \right], \quad (2.69)$$

la que se ha expresado en unidades de la densidad característica $n_c = N/R^2$. Para el caso de la energía total del sistema U , ésta se compone de la suma de energías cinética K , potencial V y rotacional K_R :

$$U = K + K_R + V, \quad (2.70)$$

por lo tanto, se puede escribir cada una de ellas en términos adimensionales como sigue:

$$\begin{aligned} K &= 1/\eta - \mathbb{K}/\eta^2 - (\bar{\lambda} - \eta\omega^2/2\kappa^2) \mathbb{T}/\eta^2, \\ K_R &= \omega^2 \mathbb{R}/2\eta\kappa^2, \quad V = \varepsilon_c/2 - (\mathbb{P} + \bar{\lambda}\mathbb{R})/2\eta^2, \end{aligned} \quad (2.71)$$

donde se han considerado las integrales auxiliares:

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &= \int_0^{\xi_c} 2\pi\xi d\xi \Phi(\xi) e^{\mathcal{D}(\xi)}, \quad \mathbb{T} = \int_0^{\xi_c} 2\pi\xi d\xi \xi^2 e^{\mathcal{D}(\xi)}, \\ \mathbb{P} &= \int_0^{\xi_c} 2\pi\xi d\xi \Phi(\xi) e^{\mathcal{D}(\xi)} \left[e^{\Phi(\xi)} - 1 \right], \\ \mathbb{R} &= \int_0^{\xi_c} 2\pi\xi d\xi \xi^2 e^{\mathcal{D}(\xi)} \left[e^{\Phi(\xi)} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Las energías anteriores se han expresado en las unidades características U_c :

$$U_c = N^2 q^2, \quad (2.73)$$

mientras que las frecuencias de rotación en unidades características ω_c :

$$\omega_c = \sqrt{\frac{Nq^2}{mR^2}}. \quad (2.74)$$

La integral \mathbb{R} está relacionada con el momento de inercia I_{zz} del sistema:

$$I_{zz} = \frac{1}{\kappa^2 \eta} \mathbb{R}, \quad (2.75)$$

el que se ha expresado en unidades características I_c :

$$I_c = NmR^2. \quad (2.76)$$

2.2.3. Cálculo de la energía de corte

El valor de energía de corte ε_c , es decir, la energía mecánica máxima de las partículas retenidas en el sistema, se expresa de la siguiente forma:

$$\varepsilon_c = q\varphi(R) + \frac{1}{2}m\Gamma R^2. \quad (2.77)$$

Para evaluar esta expresión es necesario encontrar el potencial electrostático $\varphi(r)$, el cual está determinado por la ecuación (2.41). Aplicando el teorema de la divergencia y teniendo en cuenta la simetría axial, tenemos que el gradiente del potencial es:

$$-\nabla_r \varphi(r) = -\frac{\partial}{\partial r} \varphi(r) = q \frac{N(r)}{r}, \quad (2.78)$$

donde $N(r)$ representa el número de partículas encerradas dentro de un radio r , de lo cual es posible obtener:

$$\varphi(0) - \varphi(r) = q \int_0^r dr \frac{N(r)}{r}. \quad (2.79)$$

Dicha función es posible reescribirla en términos del radio adimensional ξ de la siguiente manera:

$$N(\xi) = \frac{N}{\eta} \mathbb{N}(\xi), \quad (2.80)$$

siendo $\mathbb{N}(\xi)$ la integral definida como sigue:

$$\mathbb{N}(\xi) \equiv \int_0^\xi 2\pi\xi d\xi e^{\mathcal{D}(\xi)} [e^{\Phi(\xi)} - 1]. \quad (2.81)$$

La expresión (2.79) también puede ser reescrita utilizando parámetros adimensionales:

$$M(\xi) = q\mathbb{M}(\xi), \quad (2.82)$$

donde $\mathbb{M}(\xi)$ representa:

$$\mathbb{M}(\xi) \equiv \int_0^\xi d\xi \frac{\mathbb{N}(\xi)}{\xi}. \quad (2.83)$$

Definidos estos términos, se da paso a una expresión para el potencial en el origen:

$$\varphi(0) = -q \int 2\pi r dr n(r) \log\left(\frac{r}{R}\right), \quad (2.84)$$

y que puede ser reescrito como sigue:

$$\varphi(0) = qN \log(\kappa) - q \frac{N}{\eta} \mathbb{C}(\xi). \quad (2.85)$$

La función $\mathbb{C}(\xi)$ es la siguiente integral:

$$\mathbb{C}(\xi) = \int_0^\xi 2\pi \xi d\xi e^{\mathcal{D}(\xi)} [e^{\Phi(\xi)} - 1] \log(\xi), \quad (2.86)$$

Además, se obtiene que η se puede reescribir como la integral

$$\eta = \int_0^{\xi_c} 2\pi \xi d\xi e^{\mathcal{D}(\xi)} [e^{\Phi(\xi)} - 1], \quad (2.87)$$

que es consistente con la expresión (2.80) obtenida anteriormente, ya que el número de partículas encerradas en un radio R debe ser exactamente N . El potencial en el borde de la región magnética $\varphi(R)$ es:

$$\varphi(R) = Nq \log(\kappa) - Nq \frac{1}{\eta} [\mathbb{C}(\xi_c) + \mathbb{M}(\xi_c)], \quad (2.88)$$

a partir de la cual se encuentra el valor de la energía de corte ε_c :

$$\varepsilon_c = Nq^2 \log(\kappa) - Nq^2 \frac{1}{\eta} [\mathbb{C}(\xi_c) + \mathbb{M}(\xi_c)] + \frac{1}{2} m\Gamma R^2, \quad (2.89)$$

y su expresión en unidades características de energía U_c :

$$\varepsilon_c = \log(\xi_c) - \frac{1}{\eta} [\mathbb{C}(\xi_c) + \mathbb{M}(\xi_c)] + \frac{\bar{\lambda}\xi_c^2}{\eta} \quad (2.90)$$

Para encontrar los parámetros termodinámicos asociados a las variables definidas anteriormente, es necesario realizar el desarrollo en series de Taylor para pequeñas distancias de las funciones $\mathbb{N}(\xi)$, $\mathbb{M}(\xi)$ y $\mathbb{C}(\xi)$. Ellas pueden obtenerse del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbb{N}(\xi)}{d\xi} &= 2\pi\xi e^{\mathcal{D}(\xi)} [e^{\Phi(\xi)} - 1], \quad \frac{d\mathbb{M}(\xi)}{d\xi} = \frac{\mathbb{N}(\xi)}{\xi}, \\ \frac{d\mathbb{C}(\xi)}{d\xi} &= 2\pi\xi e^{\mathcal{D}(\xi)} [e^{\Phi(\xi)} - 1] \log(\xi).\end{aligned}\tag{2.91}$$

Al realizar dicha expansión en series se obtiene:

$$\Phi(\xi) = \Phi_0 + a\xi^2, \quad \mathcal{F}(\xi) = b\xi^2,\tag{2.92}$$

donde las constantes a y b están descritas por las expresiones:

$$a = \frac{1}{2}\pi [\exp(\Phi_0) - 1] - \bar{\lambda}, \quad b = \frac{1}{2}\pi.\tag{2.93}$$

Para el segundo sistema de ecuaciones (2.91) se arriba a lo siguiente:

$$\mathbb{N}(\xi) = c\xi^2 + O(\xi^4), \quad \mathbb{M}(\xi) = \frac{1}{2}c\xi^2 + O(\xi^4), \quad \mathbb{C}(\xi) = c \left[\log(\xi) - \frac{1}{2} \right] \xi^2 + O[\xi^4 \log(\xi)],\tag{2.94}$$

donde el valor de c viene dado por:

$$c = \pi (e^{\Phi_0} - 1).\tag{2.95}$$

Utilizando estas últimas definiciones, es posible reescribir el momento de inercia \mathbb{I} y el momento angular M como sigue:

$$\mathbb{I} = \mathbb{R}/\eta\kappa^2 \text{ and } M = \mathbb{J}(\omega - \omega_L),\tag{2.96}$$

donde \mathbb{J} es el momento de inercia modificado:

$$\mathbb{J} = (\mathbb{R} + \mathbb{T})/\eta\kappa^2,\tag{2.97}$$

el cual da cuenta de la modificación de la contribución magnética del momento angular total debido al truncaje del espectro de velocidades.

La resolución numérica de estos sistemas de ecuaciones, así como el cálculo de las integrales auxiliares (2.72), se efectúa de forma simultánea con la integración numérica de las ecuaciones diferenciales (2.65) mediante su implementación computacional en FORTRAN 90.

Capítulo 3

Discusión de resultados

3.1. Generalidades

3.1.1. Función de norma

La ecuación (2.45) describe un perfil de densidad truncado muy similar al asociado al modelo de Michie-King [23, 24]. A primera vista, el efecto de la evaporación podría considerarse como una perturbación que modifica el perfil de distribución cerca de la frontera de la región de confinamiento. Sin embargo, debido a la interacción electrostática de largo alcance, el efecto de la evaporación afecta al sistema como un todo. Una prueba clara de ello es la presencia de la función auxiliar $\mathcal{C}(\mathbf{r})$ dada por la ecuación (2.47). Se puede comenzar por la función distribución de una partícula $f_{eq}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ con la forma matemática de un perfil de Maxwell-Boltzmann truncado:

$$f_{qs}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathcal{A} e^{-\beta \left[\frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\varphi(\mathbf{r}) + \omega \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{p} \right]} \Theta [\varepsilon_c - \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})] \quad (3.1)$$

con frecuencia de rotación ω , potencial vector (2.3) y energía mecánica individual $\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \tilde{\mathbf{p}}^2/2m + w(\mathbf{r})$. La integración directa de la expresión anterior permite

obtener el factor de truncaje:

$$n(\mathbf{r}) = \int d^2\mathbf{p} f_{eq}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = A \left\{ e^{\beta[\varepsilon_c - w(\mathbf{r})]} - 1 \right\} \Theta[\varepsilon_c - w(\mathbf{r})], \quad (3.2)$$

donde $A = 2m\pi\mathcal{A}/\beta$ es la constante de normalización; pero la función de norma $\mathcal{C}(\mathbf{r})$ no aparece. Este simple razonamiento evidencia que la normalización C es una función sobre la posición. Específicamente, la distribución casi-estacionaria de una partícula $f_{eq}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ debería obedecer la siguiente expresión matemática:

$$f_{qs}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathcal{A}(\mathbf{r}) e^{-\beta\left[\frac{1}{2m}(\mathbf{p}-q\mathbf{A})^2 + q\varphi(\mathbf{r}) + \omega \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{p}\right]} \Theta[\varepsilon_c - \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})], \quad (3.3)$$

donde $\mathcal{A}(\mathbf{r}) \equiv \mathcal{A}e^{\mathcal{C}(\mathbf{r})}$. La presencia de la función de norma $\mathcal{C}(\mathbf{r})$ es una consecuencia no trivial de la evaporación en conjunto con las interacciones electrostáticas de carácter de largo alcance (2.2) y debido a ello, cada región del sistema se ve influenciado por este efecto.

3.1.2. Soluciones de las ecuaciones diferenciales

La no negatividad de la densidad de partículas implica que el potencial adimensional $\Phi(\xi)$ también lo sea. La anulación del potencial adimensional $\Phi(\xi)$ requiere un decrecimiento monótono, por lo menos, cerca del punto $\xi = 0$. Se puede obtener la siguiente expansión en series de potencias de la función $\Phi(\xi)$ para pequeños valores de ξ :

$$\Phi(\xi) = \Phi_0 + c(\Phi_0, \lambda) \xi^2 + O(\xi^4), \quad (3.4)$$

donde el coeficiente $c(\Phi_0, \lambda)$:

$$c(\Phi_0, \lambda) = \frac{1}{2}\pi \{e^{\Phi_0} - 1\} - \bar{\lambda} \quad (3.5)$$

debe ser negativo. De acuerdo a esto, los parámetros de integración $(\Phi_0, \bar{\lambda})$ obedecen las desigualdades:

$$0 < \Phi_0 < \Phi_{max} = \log\left(1 + \frac{2\bar{\lambda}}{\pi}\right). \quad (3.6)$$

Por conveniencia, se emplea el parámetro ν definido por:

$$\nu = \Phi_0/\Phi_{max} = \Phi_0/\log\left(1 + 2\bar{\lambda}/\pi\right) \quad (3.7)$$

en lugar del parámetro de integración Φ_0 . De acuerdo a la desigualdad (3.6), los valores admisibles de ν deben estar restringidos al intervalo $0 < \nu < 1$.

La dependencia radial del potencial adimensional $\Phi(\xi)$ se muestra en la figura 3.1.a. Es notable la existencia de un valor crítico $\nu_c < 1$ del parámetro ν donde la función $\Phi(\xi)$ experimenta un crecimiento abrupto sin anularse para cualquier valor de ξ . De acuerdo a esto, las dependencias donde $\nu > \nu_c$ corresponden a soluciones no físicas del sistema de ecuaciones diferenciales (2.61). La dependencia del radio de corte ξ_c *versus* ν para valores fijos de $\bar{\lambda}$ se muestran en la figura 3.1.b. El valor crítico ν_c es una función monótona sobre el parámetro de integración λ , $\nu_c(\bar{\lambda})$. Aparentemente, la dependencia $\xi_c(\nu, \lambda)$ diverge cuando $\nu \rightarrow \nu_c(\bar{\lambda})$, o por lo menos, la función $\xi_c(\nu, \lambda)$ deja de ser analítica en este punto.

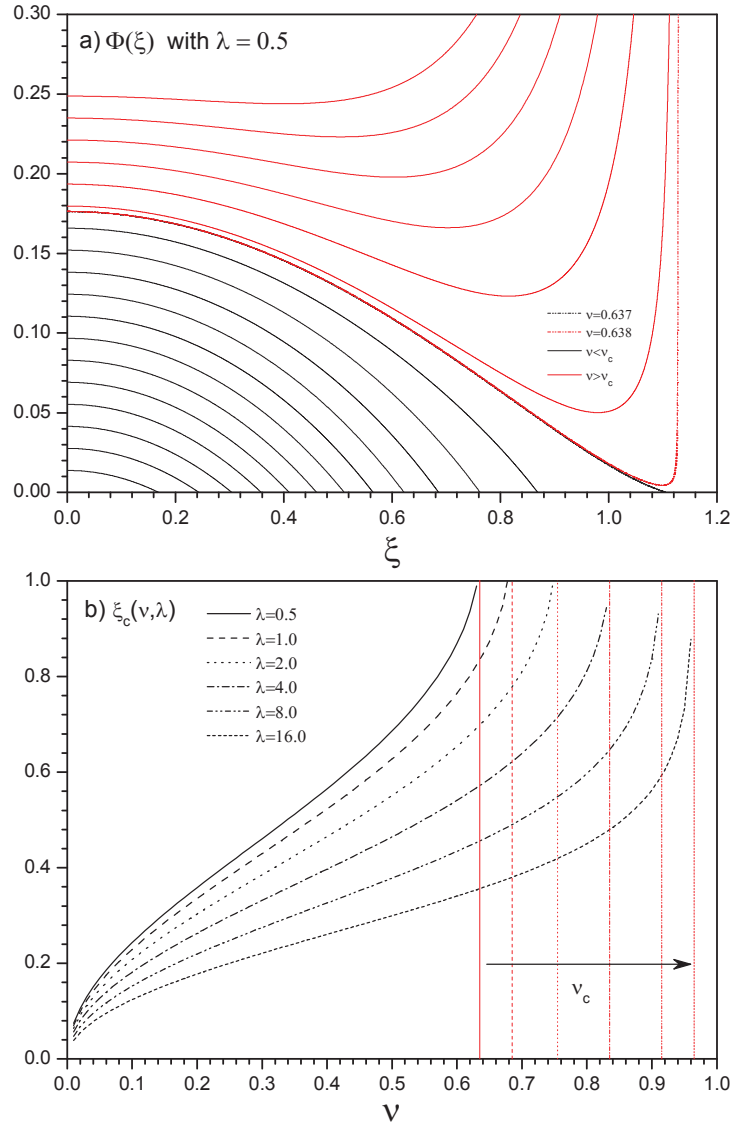


Figura 3.1: Panel a) Potencial adimensional $\Phi(\xi)$ para diferentes valores del parámetro ν y un valor fijo del parámetro de integración $\bar{\lambda} = 0.5$. Se puede visualizar la existencia de un valor crítico $\nu_c \approx 0.637$ para ν donde esta dependencia experimenta un rápido crecimiento sin anularse para cualquier valor de ξ . Los valores del parámetro ν sobre este valor crítico corresponden a soluciones no físicas del sistema de ecuaciones diferenciales (2.61), por lo cual pueden ser eliminados. Panel b) Dependencia del radio de corte ξ_c versus el parámetro ν para algunos valores fijos del parámetro de integración λ . Estos resultados evidencian que el valor crítico ν_c es realmente una función monótona $\nu_c(\lambda)$ sobre el parámetro de integración λ .

3.1.3. Parámetro de saturación δ

Considerando las ecuaciones (2.40) y (2.96), se puede obtener la siguiente restricción entre el campo magnético B y el momento angular total del sistema M :

$$\frac{B^2}{B_m^2} - \frac{M^2}{M_m^2} = 1, \quad (3.8)$$

donde $B_m = 1/\delta$ y $M_m = \mathbb{J}/\delta$. El valor δ :

$$\delta = \sqrt{\frac{\eta}{2\lambda}} = \sqrt{\frac{\eta}{2\bar{\lambda}\kappa^2}} \quad (3.9)$$

será llamado de aquí en adelante como *parámetro de saturación* debido a su relevancia física. Claramente, los valores del campo magnético y el momento angular describen una hipérbola en el plano $M - B$. Los parámetros (B_m, M_m) de estas curvas dependen sólo de los parámetros de integración $(\bar{\lambda}, \nu)$, así como los perfiles de densidad (2.69) y la temperatura inversa β . En otras palabras, la densidad de partículas $n(r)$ y la temperatura inversa del sistema β son independientes de los valores concretos del campo magnético B y el momento angular M que tomen sobre estas hipérbolas, por lo cual, para cualquier valor sobre dicha hipérbola, se obtiene el mismo perfil de densidad. Sin pérdida de generalidad, el análisis se restringirá a los perfiles de distribución donde el momento angular se anula $M = 0$. Bajo estas condiciones, el sistema rotará a la frecuencia de Larmor $\omega = \omega_L$ y el campo magnético tomará su valor mínimo $B = B_m = 1/\delta$.

Los mapas de contorno de la temperatura inversa β y el parámetro de saturación δ en el plano $\bar{\lambda} - \nu$ se muestran en la figura 3.2. Las regiones blancas representan a los valores de los parámetros $(\bar{\lambda}, \nu)$ donde se tienen soluciones no físicas. El parámetro de saturación δ exhibe una débil dependencia del parámetro de integración $\bar{\lambda}$. De acuerdo a estos resultados numéricos, los valores admisibles del parámetro de saturación δ obedecen la siguiente restricción:

$$0 < \delta < 1. \quad (3.10)$$

Es fácil comprender el significado físico de este resultado, reconsiderando las unidades características para el campo magnético B_c . De acuerdo a la relación $\delta \equiv B_c/B_m$, la ecuación (3.10) puede ser escrita en términos del número de partículas N como sigue:

$$0 < N < N_{max} = \mathbf{B}^2 R^2 / 4m. \quad (3.11)$$

Esto significa que un campo magnético \mathbf{B} que sólo existe dentro de una región magnética circular de radio R , es incapaz de confinar un número de partículas mayor a N_{max} . Precisamente, un valor más grande del número de partículas involucra fuerzas electrostáticas repulsivas más fuertes, las cuales no pueden ser compensadas por la influencia confinadora del campo magnético externo dentro de la región magnética de radios R . La raíz del parámetro de saturación δ es la razón entre el número de partículas N y su límite superior N_{max} , $\delta^2 \equiv N/N_{max}$, y por lo tanto, este parámetro caracteriza la saturación en dicho límite (3.11).

Este límite superior está directamente relacionado con el estado estacionado de Brillouin [3], el cual aparece a temperatura cero (estado fundamental) cuando las fuerzas electrostáticas repulsivas están completamente compensadas por las fuerzas de Lorentz. Un plasma no-neutral dentro de un campo magnético extendido infinitamente \mathbf{B} adoptará un perfil de densidad constante a temperatura nula, con densidad n_p . Denotando $\omega_p = \sqrt{4\pi q^2 n_p / m}$ como la frecuencia del plasma, la densidad n_p está relacionada con el campo magnético \mathbf{B} y la frecuencia de rotación ω mediante la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2}\omega_p^2 = \omega(2\omega_L - \omega), \quad (3.12)$$

donde $\omega_L = -q\mathbf{B}/2m$. Para un número finito de partículas N , el perfil de distribución con densidad constante:

$$n_B(r) = n_p \Theta(r_B - r) \quad (3.13)$$

dentro de una región de radio $r_B = \sqrt{N/n_p\pi}$, donde $\Theta(x)$ es la función escalón de Heaviside. El valor máximo de la densidad $n_p = m\omega_L^2/2\pi q^2 = \mathbf{B}^2/4\pi m$

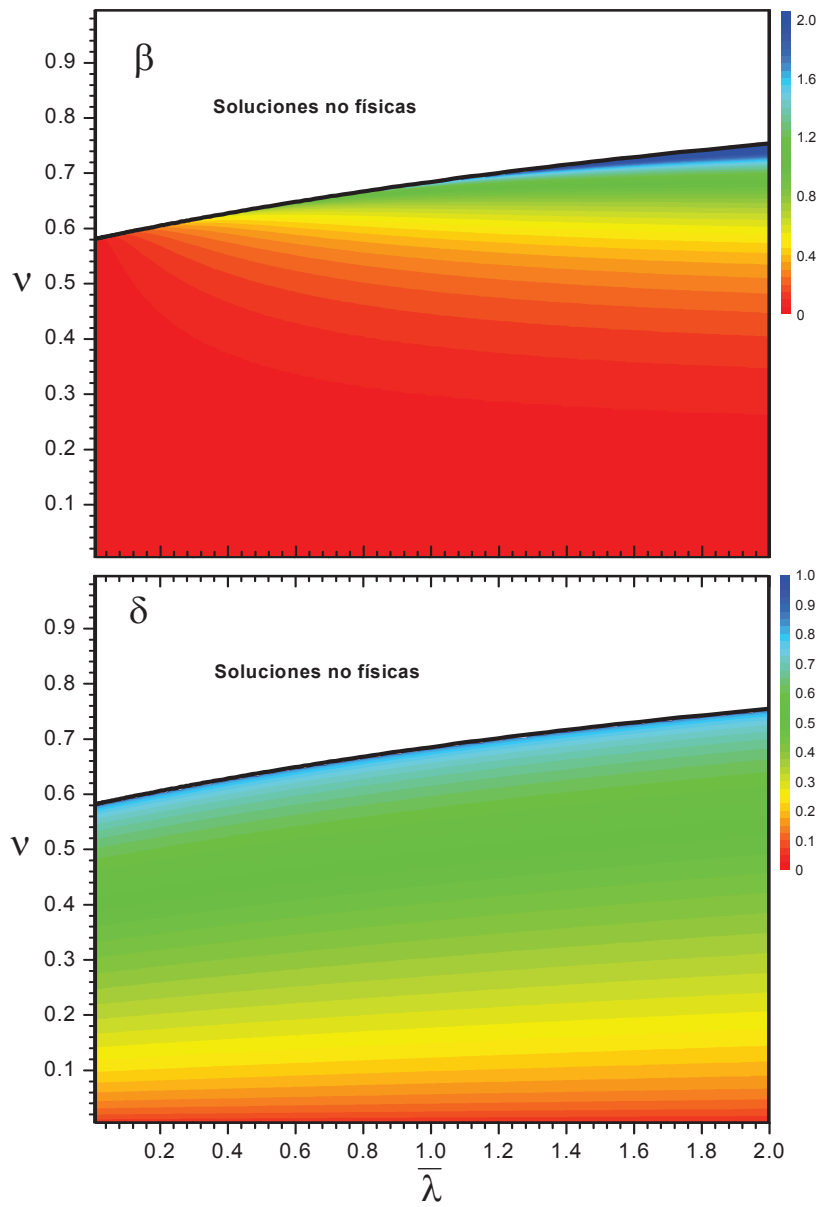


Figura 3.2: Mapas de contorno para la temperatura inversa β y el parámetro de saturación δ (utilizando unidades características) en el plano de los parámetros de integración $\bar{\lambda}-\nu$ obtenidos de la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales (2.61). La línea negra representa el límite de los valores físicos admisibles de los parámetros de integración $(\bar{\lambda}, \nu)$.

se obtiene cuando $\omega = \omega_L$, esto es, cuando el momento angular total $M = 0$. Esta densidad máxima es llamada límite de Brillouin. El radio de Brillouin correspondiente $r_B = \sqrt{4Nm/\mathbf{B}^2}$ no puede ser mayor que el radio R de la región de confinamiento magnético, $r_B < R$. Consecuentemente, se vuelve a obtener la desigualdad (3.10) considerando el parámetro de saturación $\delta \equiv r_B/R$.

3.2. Comportamiento termodinámico

3.2.1. Curvas de saturación constante

Se puede tener una mejor comprensión de los efectos de la evaporación en la termodinámica de un plasma puro no neutral, estudiando las curvas para valores constantes del parámetro de saturación $\delta = \text{const}$. La dependencia de algunos observables importantes en función de la temperatura a valores constantes del parámetro de saturación δ se muestran en la figura 3.3. La dependencia de la energía U versus la temperatura T evidencia la existencia de una correspondencia biyectiva entre estos observables. De acuerdo a ello, existe una equivalencia entre las descripciones microcanónicas y canónicas para este tipo de sistema no-extensivo, y por lo tanto, la temperatura T es un buen parámetro de control, así como la energía total U . El crecimiento de la temperatura lleva a una redistribución de las partículas que constituyen el sistema, desde las regiones interiores hacia las regiones más externas. Dicho efecto se manifiesta aquí como una reducción de la densidad central n_0 y el crecimiento del momento de inercia \mathbb{I} . Esta tendencia se manifiesta en el comportamiento matemático de otros observables, tales como el aumento de la energía cinética total K y la energía cinética de rotación K_R , y la reducción de la energía potencial total V .

Como se observa en todas las curvas para saturación constante, el plasma puro no neutral bajo un confinamiento magnético imperfecto muestra dos compor-

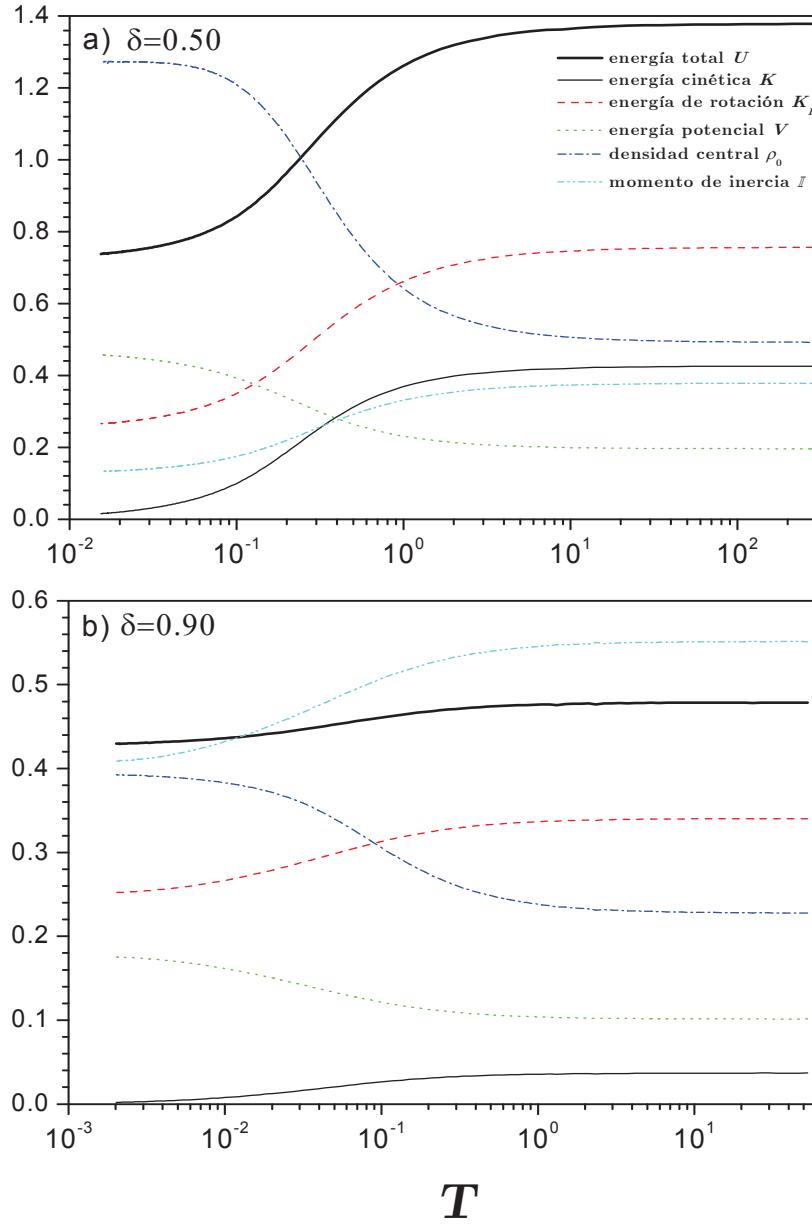


Figura 3.3: Dependencias de la energía total U y sus tres diferentes contribuciones (la energía cinética total K y energía de rotación K_R , y la energía potencial electrostática V) en función de la temperatura para valores constantes del parámetro de saturación $\delta = 0.5$ (panel a) y $\delta = 0.9$ (panel b). Adicionalmente, se han incluido las dependencias de la densidad central n_0 y el momento de inercia I . Se debe notar la existencia de valores asintóticos de estas cantidades en los límites de bajas y altas temperaturas.

tamientos asintóticos. La primera de ellas corresponde al estado estacionario de Brillouin, la cual se alcanza a temperatura cero. La otra corresponde a cierta distribución asintótica que se establece a un límite infinito de temperatura. Las propiedades de este tipo de configuraciones dependen del parámetro de saturación δ . Todas las configuraciones casi-estacionarias están restringidas a un intervalo finito de energía:

$$U_0(\delta) \leq U < U_e(\delta). \quad (3.14)$$

Aquí, $U_0(\delta)$ es la energía total correspondiente al estado estacionario de Brillouin, mientras que $U_e(\delta)$ es la energía de la *disrupción evaporativa*. Precisamente, cualquier configuración que tenga energía $U \geq U_e(\delta)$ será inestable. Para este tipo de situaciones, el campo magnético externo es incapaz de confinar a las partículas, por lo que el sistema experimentará una evaporación repentina en orden de reducir su exceso de energía. La existencia de este límite superior para la energía total es otra característica distintiva de los sistemas que experimentan evaporación de sus constituyentes. En particular, este comportamiento también está presente en la termodinámica de los sistemas estelares truncados [26], tales como los cúmulos globulares.

3.2.2. Perfiles de distribución

Los perfiles de distribución asociados para diferentes valores de temperatura se muestran en la figura 3.4. Para temperaturas suficientemente bajas, se observa una tendencia de las partículas a converger hacia el perfil de Brillouin (3.13), donde la densidad de partículas prácticamente cae a cero para un radio característico $r_c < R$. Estrictamente, la anulación de todas estas distribuciones de partículas siempre toma lugar en la frontera de la región de confinamiento, $r = R$. Sin embargo, la influencia de la evaporación puede ser ignorada para temperaturas muy bajas y valores muy pequeños del parámetro de saturación δ . Los efectos

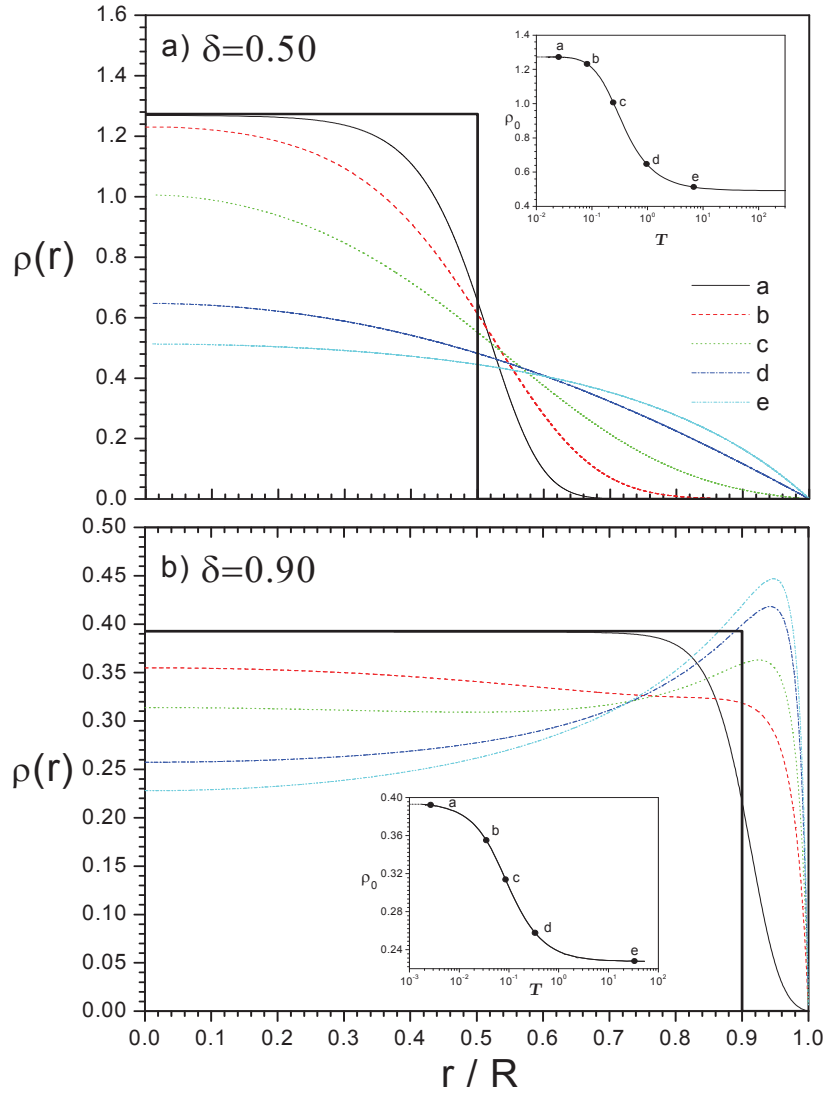


Figura 3.4: Panel a): Perfil de distribución de partículas para $\delta = 0.5$ en diferentes valores de temperatura. Panel interior: Dependencia de la densidad central en función de la temperatura n_0 . Los puntos notables de esta curva corresponden a los perfiles de distribución mostrados en el panel principal. Panel b) Muestra las mismas dependencias para un valor fijo del parámetro de saturación $\delta = 0.90$. Es notable la tendencia, a temperatura cero, hacia el *estado estacionario de Brillouin* de densidad constante para la región $0 < r/R < \delta$.

de la evaporación se vuelven más relevantes con el crecimiento progresivo de la temperatura y para valores cada vez mayores del parámetro de saturación δ .

Es notable la gran variedad de formas matemáticas de los perfiles casi-estacionarios asociados con incidencia de evaporación. En el caso particular de los perfiles relacionados al parámetro de saturación $\delta = 0.5$, se observa que la densidad y su derivada se anulan en el radio de corte R para las dependencias a - c con temperaturas bajas. Por el contrario, la densidad se anula; pero no su primera derivada en las dependencias d y e con temperaturas mucho mayores. Un comportamiento inesperado se observa para perfiles casi-estacionarios con altos valores del parámetro de saturación δ . Para el caso específico de los perfiles con un valor de parámetro de saturación de $\delta = 0.9$, en particular, las dependencias con bajas temperaturas a y b son casi planas en las regiones interiores, pero muestran un decaimiento repentino cerca del radio de corte R . Los perfiles con temperaturas altas c - e exhiben una dependencia radial que no es monótona como aquella que es asociada con la inestabilidad diocotróon débil [3]. Desde un punto de vista dinámico, los perfiles que tienen altos valores de parámetro de saturación δ y temperatura T experimentarán efectos de la evaporación más severos, y por lo tanto, mostrarán una rápida evolución hacia perfiles casi-estacionarios con valores más bajos de saturación y temperatura.

3.2.3. Comparación con el experimento

En un intento de comparar las distribuciones casi-estacionarias de nuestro modelo termo-estadístico con los datos experimentales disponibles en la literatura, se reconsiderará el estudio experimental de Huang y Driscoll [13]. Los dos perfiles experimentales que se exhiben en la figura 3.5 se anulan en el mismo radio de truncaje $\mathbf{r}_c \simeq 0.7$. Consecuentemente, se puede reinterpretar \mathbf{r}_c como el radio efectivo de la región de confinamiento de la configuración experimental. Este valor

es utilizado en la figura 3.5 para ajustar el perfil metaestable utilizando las curvas teóricas obtenidas en el modelo considerado en este estudio. En general, los perfiles casi-estacionarios con un parámetro de saturación $\delta = 0.54 - 0.6$ y bajas temperaturas proporcionan un ajuste razonable de los datos experimentales. La buena concordancia que se observa en las regiones interiores del sistema es bastante significativo. En esta región el análisis de Huang y Driscoll mostraba una mayor desviación entre los resultados del experimento y el perfil derivados de la estadística de Boltzmann-Gibbs.

El comportamiento de la distribución de partículas para los puntos encerrados en la elipse no puede explicarse según nuestro modelo. Esta discrepancia pudiera ser asociada en una parte a las limitaciones de las mediciones en este experimento, y por otra parte, a las simplificaciones asumidas para arribar al modelo termo-estadístico presentado en este estudio. Por ejemplo, la columna de electrones experimenta una lenta evolución casi-estacionaria bajo la incidencia de los efectos evaporativos. En principio, el promedio sobre diferentes tiempos de diferentes condiciones iniciales podrían explicar el comportamiento oscilatorio inusual que se observa en los datos experimentales, y que es más pronunciado para los puntos dentro de la elipse. Por otra parte, la pared exterior conectada a tierra de la trampa de Penning (representado en la figura 1.4) puede inducir un campo electrostático efectivo \mathbf{E} cuya influencia sólo se considera a través del radio finito \mathbf{r}_c de la región de confinamiento. Para una distribución de partículas axial-simétrica de las partículas del plasma, la carga inducida en esta pared metálica no ejerce fuerza alguna sobre el sistema. Sin embargo, como las fluctuaciones térmicas de la densidad son inevitables, y de forma general, van a ser más pronunciadas en la región exterior del sistema (por tener menor densidad).

Estas desviaciones de la distribución axial de la densidad van a inducir, en promedio, un campo eléctrico que atrae a los electrones hacia la pared, lo que debe afectar la distribución del plasma en esta región exterior. Resulta interesante que

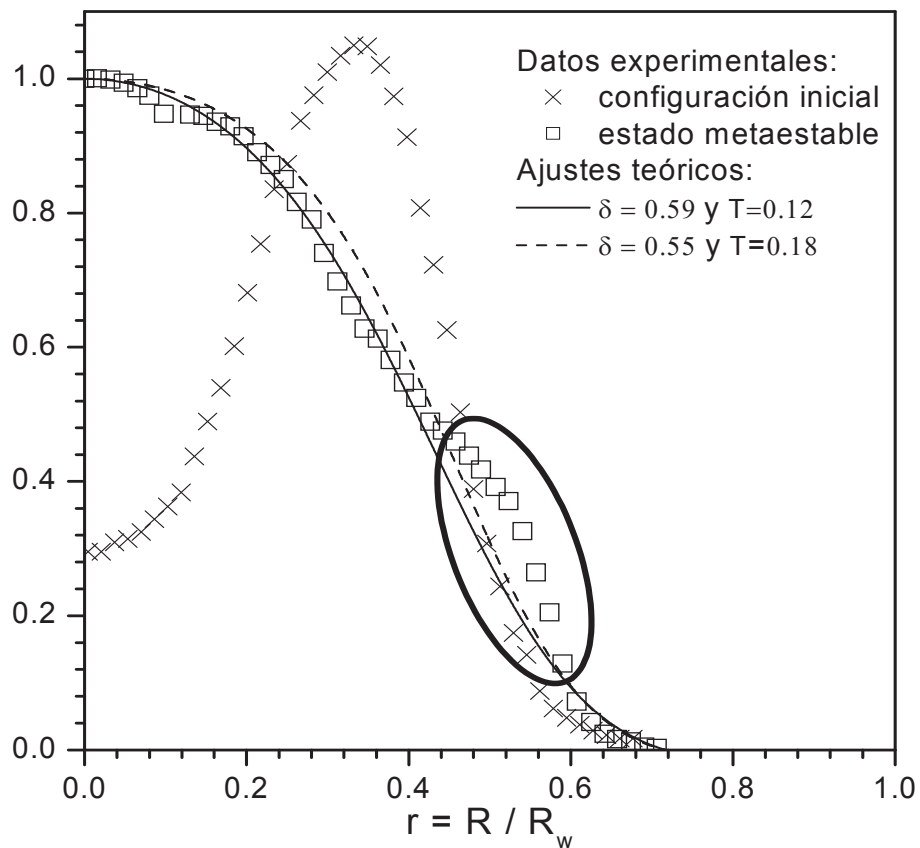


Figura 3.5: Densidad de partículas del experimento de Huang-Driscoll [13]. Ambas dependencias experimentales fueron re-escaladas utilizando la densidad central de partículas $n(0, t)$ para $t = 0.5$ ms. Como queda claramente evidenciado, los dos perfiles experimentales ilustrados se anulan para el radio $r_e \approx 0.7$. Reinterpretando r_e como el *radio de la región de confinamiento*, hemos incluido dos curvas de ajuste usando distribuciones teóricas casi-estacionarias del presente modelo.

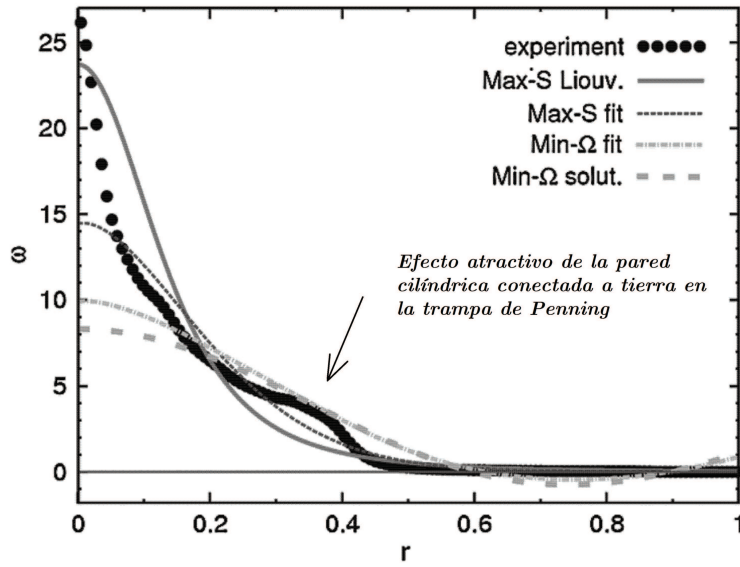


Figura 3.6: Perfil de vorticidad $\omega(r)$ del estudio experimental-teórico de Rodgers y colaboradores [17], donde se emplearon perfiles teóricos similares a los considerados por Huang y Driscoll [13]. Los datos experimentales muestran una desviación significativa en las regiones externas del sistema (señalado con una flecha) en comparación con el comportamiento que tienen en las regiones centrales. Al parecer, este efecto puede ser explicado por la atracción que ejerce sobre los electrones más externos la pared cilíndrica conectada a tierra en la trampa de Penning.

estas desviaciones del comportamiento de los perfiles de distribución también se observa en otros experimentos, por ejemplo, en el estudio considerado por Rodgers y colaboradores [17] (véase figura 3.6). Es importante destacar que este comportamiento guarda cierta analogía con el origen de las fuerzas de Van der Waals, la que tienen lugar por la incidencia de dipolos eléctricos instantáneos, que en promedio, inducen fuerzas atractivas entre moléculas no-polares. En principio, este campo eléctrico efectivo debido a la presencia de la pared cilíndrica conectada a tierra debe determinar el radio de la región de confinamiento magnético para esta situación experimental. Lamentablemente, el modelo que hemos desarrollado en este estudio no considera este efecto y debe ser a futuro mejorado.

Conclusiones

Se ha desarrollado un modelo termo-estadístico de un plasma no-neutral axial-simétrico que está confinado de manera imperfecta mediante un campo magnético externo. Se realizó una descripción estadística basado en la ergodicidad de la dinámica microscópica y la existencia de una regularización energética (2.6) que da cuenta de la influencia de la evaporación. Estas consideraciones llevan naturalmente a una aproximación modificada de la maximización de la entropía que captura los efectos termo-estadísticos de la evaporación de partículas. De acuerdo a nuestro análisis, la termodinámica del plasma no-neutral en estas condiciones está sometido a ciertas restricciones: (i) un límite superior (3.11) para el número total de partículas N que pueden ser confinadas dentro de la región magnética; (ii) un rango finito de energía $U_0(\delta) \leq u < U_e(\delta)$ para configuraciones casi-estacionarias; y (iii) distribuciones de partículas que se anulan en la frontera de la región de confinamiento. La influencia de la evaporación dentro de la descripción termodinámica es altamente dependiente del parámetro de saturación δ , el cual representa la raíz cuadrada de la fracción del límite superior (3.11) correspondiente a un número total de partículas dado N . Otra característica relevante es la presencia de la función de norma (2.47), la cual describe la perturbación que generan los efectos de la evaporación sobre la región de confinamiento como consecuencia del carácter no extensivo de las interacciones electrostáticas presentes entre las partículas que conforman el sistema.

Además, se ha realizado un estudio comparativo entre las distribuciones casi-

estacionarias de nuestro modelo con la distribución de partículas correspondiente al estado metaestable observado en el experimento de Huang y Driscoll [13]. Si bien, en dicho experimento se obtiene un buen ajuste del perfil de distribución con el método de *minimización restringida de la enstrofía*, aún no se explica claramente el valor que toma el radio de corte o por qué se hace negativa la densidad de partículas pasado ese valor de radio. Aunque los estudios que se han realizado previamente sobre este experimento proporcionaron una caracterización aceptable de las distribuciones observadas, en ellos usualmente se utilizan parámetros de ajuste que no tienen una clara interpretación física, como es el caso del parámetro q . Por el contrario, los parámetros de ajuste utilizados en este análisis son el radio efectivo de la región de confinamiento r_e , el correspondiente parámetro de saturación δ , y la temperatura a la que se encuentra el plasma T , los cuales tienen un significado físico directo. Nuestros perfiles teóricos proporcionan, además, una caracterización aceptable de los perfiles de distribución observados. De esta manera, la existencia de un confinamiento imperfecto parece cumplir un rol importante para comprender los resultados obtenidos en el experimento de Huang y Driscoll.

Problemas abiertos

El presente estudio presenta una serie de problemas abiertos:

- Obtener el perfil de distribución asintótico correspondiente al límite superior de la energía total del sistema, a modo de poder caracterizarlo de manera más detallada y así tener el rango real de energía que puede tener el sistema para cierto valor del parámetro de saturación.
- Realizar un estudio más completo sobre la distribución de partículas en el experimento de Huang y Driscoll para entender la región que no se ajusta con nuestros resultados teóricos. En particular, este análisis debe considerar los efectos atractivos efectivos que experimenta la nube electrónica en la región más cercana a la pared conectada a tierra, la cual deben estar asociados a las fluctuaciones térmicas de la densidad.
- Caracterizar de forma más detallada la estabilidad de las partículas en el sistema para predecir el tamaño de la región efectiva de confinamiento magnético imperfecto para ciertas condiciones experimentales dadas, por ejemplo, para valores dados de la intensidad del campo magnético exterior, el radio de la pared conectada a tierra, etc.

Bibliografía

- [1] MALMBERG. J. H. and DEGRASSIE. J. S. 1975, *Properties of Nonneutral Plasma*, Physical Review Letters, Vol.**35**, 577.
- [2] MALMBERG. J. H. and DRISCOLL C. F. 1980, *Long-Time Containment of a Pure Electron Plasma*, Physical Review Letters, Vol.**44**, 654, .
- [3] DAVIDSON. R. C. 1990, *An introduction to Physics of nonneutral plasmas*, Frontiers in Physics, Addison-Wesley.
- [4] DRISCOLL. C. F. and FINE. K. S. 1990, *Experiments on vortex dynamics in pure electron plasmas*, Physics of Fluids B, Vol.**2**, 1359.
- [5] GOULD. R. W. Gould 1995, *Dynamics of non-neutral plasmas*, Physics of Plasmas, Vol.**2**, 2151.
- [6] HUANG. X.-P., ANDEREGG. F., HOLLMAN. E. M., DRISCOLL. C. F. and OÑEILL. T. M. 1997, *Steady-State Confinement of Non-neutral Plasmas by Rotating Electric Fields*, Physical Review Letters, Vol.**78**, 875.
- [7] DUBIN. D. H. E. and OÑEILL. T. M. 1999, *Trapped nonneutral plasmas, liquids, and crystals (the thermal equilibrium states)*, Reviews of Modern Physics, Vol.**71**, 87.
- [8] MATTOR. N., CHANG. B. T. and MITCHELL. T. B. 2006, *Beat-Wave Reso-*

- nant Down Scattering of Diocotron and Kelvin Modes*, Physical Review Letters, Vol.**96**, 045003.
- [9] FAJANS. J., GOULD. R. W. 2003, *Non-neutral plasma equilibria, trapping, separatrices, and separatrix crossing in magnetic mirrors*, Physics of Plasmas, Vol.**10**, 1209.
- [10] ANDEREGG. F., DRISCOLL. C. F., DUBIN. D. H. E. and OÑEILL. T. M. 2009, *Wave-Particle Interactions in Electron Acoustic Waves in Pure Ion Plasmas*, Physical Review Letters, Vol.**102**, 095001.
- [11] BRILLOUIN. L. 1945, *A Theorem of Larmor and Its Importance for Electrons in Magnetic Fields*, Physical Review, Vol.**67**, 260.
- [12] THEISS. A. J., MAHAFFEY. R. A. and TRIVELPIECE. A.W. 1975, *Rigid-Rotor Equilibria of Nonneutral Plasmas*, Physical Review Letters, Vol. **35**, 1436.
- [13] HUANG. X. -P. and DRISCOLL. C. F. 1994, *Relaxation of 2D turbulence to a metaequilibrium near the minimum enstrophy state*, Physical Review Letters, Vol.**72**, 2187.
- [14] BOGHOSIAN. B. M. 1996, *Thermodynamic description of the relaxation of two-dimensional turbulence using Tsallis statistics*, Physical Review E, Vol.**53**, 4754.
- [15] ANTEONODO. C. and TSALLIS. C. 1997, *Two-dimensional turbulence in pure-electron plasma: a nonextensive thermostatistical description*, Journal of Molecular Liquids, Vol.**71**, 255.
- [16] TSALLIS. C. 2001, *Nonextensive Statistical Mechanics and Thermodynamics: Historical Background and Present Status*, in S. Abe, Y. Okamoto (Eds) *No-*

nextensive Statistical Mechanics and Its Applications, Lecture notes in Physics 560, Springer.

- [17] RODGERS. D. J., SERVIDIO. S., MATTHAEUS. W. H., MONTGOMERY. D. C., MITCHELL. T. B. and AZIZ. T. 2009, *Hydrodynamic Relaxation of an Electron Plasma to a Near-Maximum Entropy State*, Physical Review Letters, Vol.**102**, 244501.
- [18] CABO. A., CURILEF. S., GONZALEZ. A., CABO-BIZET. N. G. and VERA. C. A. 2011, *A statistical physics of stationary and metastable states*, Journal of Statistical Mechanics, **P02012**.
- [19] LYNDEN-BELL. D. 1999, *Negative specific heat in astronomy, physics and chemistry*, Physica A, Vol.**263**, 293.
- [20] SYLOS LABINI. F., MONTUORI. M. and PIETRONERO. L. 1998, *Scale-invariance of galaxy clustering*, Physics Reports, Vol.**293**, 61.
- [21] KOYMA. H. Koyma and KONISHI. T. 2001, *Emergence of power-law correlation in 1-dimensional self-gravitating system*, Physics Letters A, Vol.**279**, 226.
- [22] TORCINI. A. and ANTONI. M. 1999, *Equilibrium and dynamical properties of two-dimensional N-body systems with long-range attractive interactions*, Physical Review E, Vol.**59**, 2746.
- [23] MICHIE. R. W. Michie 1963, *On the distribution of high energy stars in spherical stellar systems*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol.**125**, 127; 1963, *The dynamics of spherical stellar systems*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, *ibid* **126**, 331.
- [24] KING. I. A. 1962, *The structure of star clusters. I. An empirical density law*, The Astronomical Journal, Vol.**67**, 471; 1965, *The structure of star clusters*.

- II. Steady-state velocity distributions*, The Astronomical Journal, *ibid* **70**, 376; 1966, *The structure of star clusters. III. Some simple dynamical models*, The Astronomical Journal, **71**, 276; 1966, *The structure of star clusters. IV. Photoelectric surface photometry in nine globular clusters*, The Astronomical Journal, **71**, 64.
- [25] CIPRIANI. P. and PETTINI. M. 2003, *Strong Chaos in N-body problem and Microcanonical Thermodynamics of Collisionless Self Gravitating Systems*, Astrophysics and Space Science, Vol.**283**, 347.
- [26] VELAZQUEZ. L. and GUZMAN. F. 2009, *Alternative model of the Antonov problem: Generalization with the presence of a mass spectrum*, Physical Review E, Vol.**79**, 011120.
- [27] BATCHELOR. G. K. 1969, *Computation of the energy spectrum in homogeneous two dimensional turbulence*, Physics of Fluids (Suppl. II), Vol.**12**, 233.
- [28] KRAICHNAN. R. H. and MONTGOMERY. D. 1980, *Two-dimensional turbulence*, Reports on Progress in Physics, Vol.**43**, 547.
- [29] MONTGOMERY. D., MATHAEUS. W. H., STRIBLING. W. T., MARTINEZ. D. and OUGHTON. S. 1992, *Relaxation in two dimensions and the 'sinh-Poisson' equation*, Physics of Fluids A, Vol.**4**, 3.
- [30] BECK. C., LEWIS. G.S. and SWINNEY. H. L. 2001, *Measuring nonextensivity parameters in a turbulent Couette-Taylor flow*, Physical Review E, Vol.**63**, 035303.
- [31] SOLOMON. T. H., WEEKS. E. R. and SWINNEY. H. L. 1993, *Observation of anomalous diffusion and Lévy flights in a two-dimensional rotating flow*, Physical Review Letters, Vol.**71**, 3975.

- [32] SHLESINGER. M. F. and ZASLAVSKY. G. M. 1995, *Lévy flights and related topics*, Springer-Verlag: Berlin, 347p.
- [33] KUDROLLI. A. and HENRY. J. 2000, *Non-Gaussian velocity distributions in excited granular matter in the absence of clustering*, Physical Review E, Vol.**62**, R1489.
- [34] PARISI. G. 2000, *The physics of the glass transition*, Physica A, Vol.**280**, 115.
- [35] DEBENEDETTI. P.G. and STILLINGER. F.H. 2001, *Supercooled liquids and the glass transition*, Nature, Vol.**410**, 259.
- [36] DÁGOSTINO. M., GULMINELLI. F., CHOMAZ. Ph., BRUNO. M., CANNATA. F., BOUGAULT. R., COLONNA. N., GRAMEGNA. F., IORI. I., LE NEINDRE. N., MARGAGLIOTTI. G. V., MASTINU. P. F., MILAZZO. P. M., MORONI. A. and VANNINI. G. 2000, *Negative heat capacity in the critical region of nuclear fragmentation: an experimental evidence of the liquid-gas phase transition*, Physics Letters B, Vol.**473**, 219.
- [37] GROSS. D. H. E. 2001, *Microcanonical thermodynamics: Phase transitions in Small systems, 66 Lectures Notes in Physics*, World scientific: Singapore.
- [38] SCHMIDT. M., KUSCHE. R., HIPPLER. T., DONGES. J., KRONMULLER. W., von ISSENDORFF. B. and HABRERLAND. H. 2001, *Negative Heat Capacity for a Cluster of 147 Sodium Atoms*, Physical Review Letters, Vol.**86**, 1191.
- [39] VISWANATHAN. G. M., AFANASYEV. V., BULDYREV. S. V., MURPHY. E. J., PRINCE. P. A. and STANLEY. H. E. 1996, *Lévy flight search patterns of wandering albatrosses*, Nature, Vol.**381**, 413.
- [40] JAYNES. E. T. 1957, *Information Theory and Statistical Mechanics I*,

Vol.106, 620; *Information theory and statistical mechanics II*, Vol.108, 171,
Physical Review

- [41] BREDOV. M., RUMIANTSEV. V. and TOPTIGUIN. T. 1985, *Electrodinámica Clásica*. (Mir: Moscú) p.77
- [42] ORDENES. C. 2012, Tesis de Licenciatura, Universidad Católica del Norte, Antofagasta.
- [43] BINNEY. J. and TREMAINE. S. 1994, *Galactic Dynamics*, Princeton, NJ: Princeton University Press.