



UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**ECUACIONES DE NAVIER STOKES:
EXISTENCIA DE SOLUCIONES POR EL MÉTODO DE
GALERKIN ESPECTRAL DE VARIOS NIVELES
Y RADIO DE CONVERGENCIA**

**Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias Mención
Matemática**

FERNANDO ENRIQUE VÁSQUEZ FERNÁNDEZ

Profesor Tutor: Dra. Elva Ortega Torres

**Antofagasta, Chile.
2015**

Tesis parcialmente financiada por Beca Conicyt Chile.

*A mis padres y
Amanda*

AGRADECIMIENTOS

*Cuando bebas agua, recuerda la fuente.
- Proverbio chino.*

Al término de este trabajo, quisiera agradecer a todos quienes han sido parte de esta etapa. En primer lugar, dar gracias a Dios por cada bendición y compañía en todo momento de mi vida. A mi familia, en especial a mis papás, por apoyarme en esta decisión de seguir estudiando y su comprensión por la distancia que ello conlleva, por sus valores entregados que han servido para direccionar mi vida por un buen camino.

A la profesora Dra. Elva Ortega Torres, por su apoyo tanto como directora del programa de postgrado como también siendo mi profesora guía, por su paciencia y motivación entregada, guiándome durante el desarrollo de este trabajo.

En general, a todo el Departamento de Matemáticas de la Universidad Católica del Norte, tanto profesores como secretarías, por toda su formación y ayuda entregada, siempre con buena disposición.

Al profesor Dr. Marko Rojas Medar de la Universidad del Bio Bio, por motivarme a seguir estudios de postgrado y apoyarme en mi formación académica.

A mis amistades de toda la vida y a quienes he podido conocer durante toda mi etapa de pre y postgrado.

Gracias a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica CONICYT, por ayudar a financiar parcialmente este trabajo.

Fernando Vásquez Fernández
Abril 2015.

ÍNDICE GENERAL

Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Espacios de Funciones	3
1.2. Convergencias	14
1.3. Ecuaciones de Navier-Stokes	15
2. Soluciones fuertes para las ecuaciones de Navier-Stokes	18
2.1. Existencia y unicidad de soluciones: aproximaciones de Galerkin de 1-nivel	19
2.1.1. Existencia y unicidad de soluciones en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$	20
2.1.2. Existencia y unicidad de soluciones en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$	30
2.2. Existencia y unicidad de soluciones: aproximaciones de Galerkin de k-nivel	35
2.2.1. Existencia y unicidad de soluciones en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$	36
2.2.2. Existencia y unicidad de soluciones en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$	43
3. Estimaciones de error para las soluciones aproximadas	47
3.1. Estimaciones de error para las aproximaciones de Galerkin de 1-nivel	47
3.2. Estimaciones de error para las aproximaciones de Galerkin de k-nivel	59
Bibliografía	70

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones de Navier¹-Stokes² es un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento de un fluido y han sido objeto de una extensa investigación a lo largo del tiempo. Un fluido es una sustancia que, debido a su poca cohesión intermolecular, carece de forma propia y adopta la forma del recipiente que lo contiene.

Las ecuaciones de Navier-Stokes fueron propuestas sobre la base de los principios de conservación de la mecánica y la termodinámica en un volumen fluido. Para su formulación diferencial se aplican ciertas condiciones, principalmente en los que los esfuerzos tangenciales guardan una relación lineal con el gradiente de la velocidad.

Las ecuaciones de Navier-Stokes aparecen en el estudio de muchos fenómenos importantes, ya sea solas o acopladas con otras ecuaciones. Por ejemplo, se utilizan en los estudios teóricos en ciencias aeronáuticas, en meteorología, en las corrientes oceánicas, en termo-hidráulica, en la industria del petróleo, en la física del plasma, y en general en cualquier fenómeno en el que se involucren fluidos newtonianos.

Considerando $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n = 2, 3)$ un dominio acotado con borde Γ y $[0, T]$ un intervalo de tiempo, el sistema de ecuaciones de Navier-Stokes que describen el movimiento de un fluido viscoso e incompresible es dado por

$$\partial_t u(x, t) - \nu \Delta u(x, t) + u(x, t) \cdot \nabla u(x, t) + \nabla p(x, t) = f(x, t) \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \quad (1)$$

$$\operatorname{div} u(x, t) = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \quad (2)$$

$$u(x, t) = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times (0, T), \quad (3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{en } \Omega, \quad (4)$$

donde $u(x, t)$ representa la velocidad del fluido en el punto x y el instante t , $p(x, t)$ es la presión hidrostática del fluido, $f(x, t)$ es una fuerza externa dada actuando sobre el fluido y $u_0(x)$ es

¹Claude Navier, ingeniero y físico francés. Trabajó en el campo de las matemáticas aplicadas a la ingeniería, la elasticidad y la mecánica de fluidos.

²George Stokes, matemático y físico irlandés. Realizó contribuciones importantes a la dinámica de fluidos, la óptica y la física matemática.

la velocidad inicial prescrita. La constante $\nu > 0$ es la viscosidad cinemática y la ecuación (2) representa la incompresibilidad del fluido.

Determinar una solución fuerte (solución regular) del problema consiste en hallar (u, p) satisfaciendo (1)-(4). Las ecuaciones (1)-(4) son muy complejas y muy difíciles de resolver analíticamente salvo ciertos tipos de flujos y situaciones muy concretas, por lo que es preciso recurrir al análisis numérico para determinar una solución aproximada. Un método para determinar la existencia de soluciones es el método de Galerkin espectral de 1-nivel, mediante el cual las aproximaciones de la solución del sistema no lineal (1)-(4) son construidas con respecto a una base ortonormal especial de un espacio finito dimensional, y entonces la solución es determinada como el límite de la sucesión de dichas soluciones aproximadas, cuya convergencia es obtenida aplicando argumentos de compacidad basados en cotas a priori para las soluciones aproximadas.

En este trabajo, se estudia la existencia, unicidad y regularidad de las soluciones fuertes de las ecuaciones de Navier-Stokes (sistema (1)-(4)), cuando el flujo ocurre en un dominio acotado bidimensional y tridimensional. Para demostrar la existencia de soluciones se aplica el método de Galerkin espectral de 1-nivel y de K-nivel (multinivel), en el cual las soluciones aproximadas son construidas usando las autofunciones del operador de Stokes como funciones de base de un determinado espacio vectorial. El radio de convergencia del error de las soluciones aproximadas es determinado en función de los valores propios del operador de Stokes.

El método de Galerkin multinivel es un método de multiescala en el cual las ecuaciones de Navier-Stokes no lineales son resueltas solamente sobre un espacio de dimensión baja, y las siguientes aproximaciones son generadas sobre una sucesión de espacios de dimensión mas alta, resolviendo un problema linealizado de Navier-Stokes alrededor de la solución sobre el nivel previo.

El trabajo se desarrolla en tres capítulos. En el Capítulo 1, se introducen las notaciones, definiciones y resultados de análisis funcional que son la base para el desarrollo de los capítulos posteriores, además se plantea el problema a ser estudiado y se hace una breve descripción de los métodos de aproximación a ser aplicados.

En el Capítulo 2, se estudia la existencia y unicidad de soluciones fuertes de las ecuaciones (1)-(4), cuando el flujo ocurre en un dominio acotado bidimensional y tridimensional con borde de clase C^2 . Los resultados de existencia están basados en argumentos de compacidad sobre aproximaciones de Galerkin espectral de 1-nivel y de K-nivel. Además, bajo alguna hipótesis adicional sobre la fuerza externa, se estudia la regularidad de las soluciones.

En el Capítulo 3, se obtienen las estimaciones de error para las soluciones aproximadas consideradas en el Capítulo 2. Las cotas de error son determinadas en función de los autovalores del operador de Stokes y en las normas L^2 y H^1 . Sobre el espacio H_{m_K} , el cual es generado por las m_K funciones propias del operador de Stokes, se establece que el radio de convergencia del error de las aproximaciones de Galerkin de 1-nivel tiene el mismo orden que el radio de convergencia de las aproximaciones de Galerkin de K-nivel. La ventaja numérica es que la aproximación de K-nivel se genera resolviendo un problema de Navier-Stokes linealizado, en tanto que la aproximación de 1-nivel se genera resolviendo las ecuaciones de Navier-Stokes no lineales.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo se introducen algunas definiciones y resultados, que serán usados en el desarrollo del trabajo. Se usará la misma notación tanto para espacios de funciones reales y espacios de funciones vectoriales.

1.1. Espacios de Funciones

Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$), con borde $\Gamma = \partial\Omega$ suficientemente regular.

$C_c^\infty(\Omega)$ denota el espacio de funciones C^∞ con soporte compacto contenido en Ω .

Para $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$, se define el espacio de Banach $L^p(\Omega)$ como

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ es una función medible y } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty\},$$

con norma $\|\cdot\|_p$ definida por

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Cuando $p = 2$ se denota $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|$.

El espacio de Banach $L^\infty(\Omega)$ se define como

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ es una función medible y } |u(x)| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega\},$$

con norma $\|\cdot\|_\infty$ definida por

$$\|u\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf\{C : |u(x)| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega\}.$$

Definición 1.1. Sean X e Y dos espacios de Banach sobre $\mathbb{R}$, con $X \subseteq Y$. El operador inmersión $i : X \rightarrow Y$ es definido por $i(u) = u$ para todo $u \in X$.

Para $p > q$, se tiene que $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, con inmersión continua, esto es, $\|u\|_q \leq C_\Omega \|u\|_p$.

Definición 1.2. Sea $1 \leq p \leq \infty$, se dice que q es el exponente conjugado de p si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $p = 1$ entonces $q = \infty$ e inversamente.

Para $1 < p < \infty$ el espacio dual $(L^p(\Omega))'$ de $L^p(\Omega)$ es definido por

$$(L^p(\Omega))' = \{\phi : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \phi \text{ es un funcional lineal y continuo}\},$$

y su norma es definida como

$$\|\phi\|_{(L^p)'} = \sup_{0 < \|u\|_p \leq 1} \frac{|\langle \phi, u \rangle|}{\|u\|_p}.$$

Se identifica $(L^p(\Omega))' = L^q(\Omega)$ donde $1 < p < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Definición 1.3. Un espacio vectorial H es de Hilbert si H es un espacio de Banach con norma inducida por un producto interno.

Observación 1.1.

- i) Todo espacio de Hilbert es reflexivo, esto es $H'' = H$.
- ii) El espacio $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con producto interno $(\cdot, \cdot)$ y norma $\|u\| = (u, u)^{1/2}$.

Definición 1.4. Sea H un espacio de Hilbert, y $\{e_n\}$ una sucesión en H . Se dice que $\{e_n\}$ es una base hilbertiana de H (o base ortonormal)¹ si satisface:

$$i) \|e_n\|_H = 1 \quad \forall n \quad \text{y} \quad (e_m, e_n)_H = 0, \quad \forall m \neq n.$$

ii) El espacio vectorial generado por $\{e_n\}$ es denso en H .

Una generalización del concepto de los espacios L^p para funciones cuyos valores están en un espacio de Banach, son los llamados espacios de Bochner, los que se definen a continuación.

Sean $1 \leq p \leq \infty$, X un espacio de Banach y $T \in \mathbb{R}$ ($0 < T < \infty$). Se define el espacio de funciones $L^p(0, T; X)$ como sigue

$$L^p(0, T; X) = \{u : (0, T) \rightarrow X : u \text{ es una función medible y } \|u(t)\|_X \in L^p(0, T)\},$$

con norma definida por

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(0, T; X)} &= \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{L^\infty(0, T; X)} &= \sup_{0 < t < T} \|u(t)\|_X. \end{aligned}$$

Observación 1.2.

- i) Si $1 < p < \infty$ y X es reflexivo, entonces $L^p(0, T; X)$ es reflexivo.
- ii) Si $1 \leq q \leq p \leq \infty$, se tiene que $L^p(0, T; X) \subset L^q(0, T; X)$ y la inmersión es continua.

¹Algunos autores dicen que $\{e_n\}$ es un sistema ortonormal completo.

Sobre el dual del espacio $L^p(0, T; X)$ se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Sea $1 \leq p < \infty$ y X un espacio de Hilbert. Entonces, el espacio dual de $L^p(0, T; X)$ es definido por $(L^p(0, T; X))' = L^q(0, T; X')$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Un resultado importante es dado en el siguiente lema.

Lema 1.1. *Sea X un espacio de Banach. Si $f, \partial_t f \in L^p(0, T; X)$ donde $1 \leq p \leq \infty$, entonces salvo un conjunto de medida nula sobre $(0, T)$, $f \in C([0, T], X)$.*

Demostración. Ver [12]. □

Sobre compacidad se tiene el siguiente resultado.

Lema 1.2 (Lion-Aubin). *Sean B_0, B y B_1 espacios de Banach, B_0 y B_1 reflexivos, $B_0 \subset B \subset B_1$ con inmersiones continuas y $B_0 \subset B$ con inmersión compacta. Para $1 \leq p, q < \infty$ y $0 < T < \infty$, se define el espacio*

$$\mathcal{W} = \{u \in L^p(0, T; B_0) : \partial_t u \in L^q(0, T; B_1)\},$$

con norma $\|u\|_{\mathcal{W}} = \|u\|_{L^p(0, T; B_0)} + \|\partial_t u\|_{L^q(0, T; B_1)}$.

Entonces, $\mathcal{W}$ es un espacio de Banach reflexivo y la inmersión

$$\mathcal{W} \hookrightarrow L^p(0, T; B) \text{ es compacta.}$$

Más aun, si $\widetilde{W} = \{u \in L^\infty(0, T; B_0) : \partial_t u \in L^q(0, T; B_1)\}$ donde $1 < q \leq \infty$, se tiene que $\widetilde{W} \hookrightarrow C([0, T], B)$ es continua.

Demostración. Ver [16]. □

En particular, cuando $p = q = 2$, se tiene el siguiente lema.

Lema 1.3. *Sean X_0, X y X_1 espacios de Hilbert tal que $X_0 \subset X \subset X_1$, con $X_0 \hookrightarrow X$ inmersión compacta y $X \hookrightarrow X_1$ inmersión continua. Para $T > 0$ fijo se define el espacio*

$$\mathcal{W}(0, T) = \{u \in L^2(0, T; X_0) : \partial_t u \in L^2(0, T; X_1)\}.$$

Entonces, la inmersión $\mathcal{W}(0, T) \hookrightarrow L^2(0, T; X)$ es compacta.

Con el propósito de definir los espacios de Sobolev, observar que si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, entonces D^α es el operador diferencial definido por

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

donde $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ y $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

A continuación es dada la definición de espacios de Sobolev.

Para $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}$ se definen los espacios de Sobolev

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\},$$

con norma

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{m,p}} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{W^{m,\infty}} &= \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Observación 1.3.

- i) Para $1 \leq p < \infty$, el espacio $W^{m,p}(\Omega)$ es de Banach y separable.
- ii) Para $1 < p < \infty$, el espacio $W^{m,p}(\Omega)$ es reflexivo y uniformemente convexo.

En particular, cuando $p = 2$ se tiene que el espacio $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, el cual es un espacio de Sobolev de orden m en Ω , y se define como

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\},$$

con producto interno

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx,$$

y norma

$$\|u\|_{H^m} = (u, u)_{H^m}^{1/2} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2 \right)^{1/2}.$$

Para $m > n$, se tiene que $H^m(\Omega) \subset H^n(\Omega)$ con inmersión continua.

Para $m \in \mathbb{N}$, el espacio $H_0^m(\Omega)$ es definido como la clausura del espacio $C_c^\infty(\Omega)$ en $H^m(\Omega)$.

En particular, para $m = 1$ se tiene el espacio $H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1}$ y es definido como

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sobre } \Gamma = \partial\Omega\}.$$

Observación 1.4. Para $m \in \mathbb{N}$ se define el espacio $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}}$.

Respecto al dual de los espacios de Sobolev se tienen las siguientes definiciones.

Definición 1.5. Para $m \in \mathbb{N}$, el espacio de Sobolev $W^{-m,p}(\Omega)$ es definido como el espacio dual $(W_0^{m,q}(\Omega))'$ donde q es conjugado de p .

Definición 1.6. El espacio dual de $H_0^m(\Omega)$ es denotado por $H^{-m}(\Omega)$, dotado con la norma

$$\|\varphi\|_{H^{-m}} = \sup_{v \in H_0^m, v \neq 0} \frac{|\langle \varphi, v \rangle|}{\|v\|_{H^m}} = \sup_{0 < \|v\|_{H_0^m} \leq 1} \frac{|\langle \varphi, v \rangle|}{\|v\|_{H_0^m}}.$$

En particular, $H^{-1}(\Omega)$ es el espacio dual de $H_0^1(\Omega)$ y se tiene la siguiente regla de inclusión continua: $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$.

En los siguientes teoremas se dan algunos resultados de inmersión de los espacios de Sobolev.

Teorema 1.2. *Sea Ω un conjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, de clase C^1 . Sean $m \geq 1$ un entero y $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces, se tiene las siguientes inmersiones continuas:*

$$\begin{aligned} \text{Si } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0 &\Rightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*] \text{ donde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}. \\ \text{Si } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0 &\Rightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [p, \infty). \\ \text{Si } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0 &\Rightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Demostración. Ver [2]. □

Teorema 1.3 (Rellich-Kondrachov). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado de clase C^1 y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces, se tiene las siguientes inmersiones compactas:*

$$\begin{aligned} \text{Si } p < n &\Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow^c L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*) \text{ donde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}. \\ \text{Si } p = n &\Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow^c L^q(\Omega), \forall q \in [p, \infty). \\ \text{Si } p > n &\Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow^c C(\overline{\Omega}). \end{aligned}$$

Demostración. Ver [2]. □

Observación 1.5. *En el estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes, los espacios utilizados con mayor frecuencia son $H^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$. Desde el Teorema 1.2 y Teorema 1.3, se deduce:*

$$\begin{aligned} \text{Si } n = 2, H^1(\Omega) &\hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ es continua y compacta para } 2 \leq q < \infty. \\ \text{Si } n = 3, H^1(\Omega) &\hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ es continua para } 1 \leq q \leq 6 \text{ y compacta para } 1 \leq q < 6. \\ \text{Si } n = 2, 3, H^2(\Omega) &\hookrightarrow L^\infty(\Omega) \text{ es continua.} \end{aligned}$$

A seguir, se da la forma integral del teorema del valor medio.

Teorema 1.4 (Teorema del Valor Medio). *Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que:*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Demostración. Ver [11]. □

A seguir se definen algunos operadores diferenciales que aparecen en el sistema de ecuaciones a

ser estudiado. Para una función suficientemente regular $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, se definen

$$\begin{aligned} \text{Gradiente: } \nabla u(x) &= \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial u(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right) = \begin{pmatrix} \nabla u_1(x) \\ \nabla u_2(x) \\ \vdots \\ \nabla u_n(x) \end{pmatrix}. \\ \text{Laplaciano: } \Delta u(x) &= \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_n^2} = \begin{pmatrix} \Delta u_1(x) \\ \Delta u_2(x) \\ \vdots \\ \Delta u_n(x) \end{pmatrix}. \\ \text{Convección: } u(x) \cdot \nabla u(x) &= \begin{pmatrix} u(x) \cdot \nabla u_1(x) \\ u(x) \cdot \nabla u_2(x) \\ \vdots \\ u(x) \cdot \nabla u_n(x) \end{pmatrix}. \\ \text{Divergente: } \operatorname{div} u(x) &= \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial u_n(x)}{\partial x_n}. \end{aligned}$$

Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado, se define el siguiente espacio

$$\mathcal{V} = \{u \in C_c^\infty(\Omega) : \operatorname{div} u = 0 \text{ en } \Omega\}.$$

Asociados al espacio $\mathcal{V}$, los espacios de Hilbert usualmente considerados en el estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes son

$$H = \text{clausura de } \mathcal{V} \text{ en } L^2(\Omega) \quad \text{y} \quad V = \text{clausura de } \mathcal{V} \text{ en } H_0^1(\Omega).$$

El espacio H , su complemento ortogonal $H^\perp$ y el espacio V son caracterizados por

$$H = \{u \in L^2(\Omega) : \operatorname{div} u = 0 \text{ en } \Omega, u \cdot n = 0 \text{ sobre el borde } \Gamma\}, \quad (1.1)$$

$$H^\perp = \{u \in L^2(\Omega) : u = \nabla p \text{ para algún } p \in H^1(\Omega)\}, \quad (1.2)$$

$$V = \{u \in H_0^1(\Omega) : \operatorname{div} u = 0 \text{ en } \Omega\}. \quad (1.3)$$

Los detalles sobre las caracterizaciones dadas en (1.1)-(1.3) se encuentran en [16].

El espacio de Hilbert H está equipado con el producto interno $(\cdot, \cdot)$ inducido por $L^2(\Omega)$ y norma $\|\cdot\|_H = \|\cdot\|$. El espacio de Hilbert V está dotado con el producto interno $(\nabla \cdot, \nabla \cdot)$ y norma $\|\cdot\|_V = \|\nabla \cdot\|$. El espacio dual de H y V es denotado por H' y V' , respectivamente. Además, por el teorema de representación de Riesz, se puede identificar H con H' , entonces se tiene las inclusiones continuas

$$V \subset H \equiv H' \subset V', \quad (1.4)$$

donde V es denso en H y H' es denso en V' .

Notación: Por la identificación $H \equiv H'$ se denota $\langle u, v \rangle = (u, v)$, para $u \in H$ y $v \in V$.

En el siguiente lema, se define una forma trilineal continua.

Lema 1.4. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$). La forma trilineal

$$b : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R},$$

definida por $b(u, v, w) = (u \cdot \nabla v, w)$ es continua.

Más aun, desde que $V \subset H_0^1(\Omega)$, la forma trilinear b es continua sobre $V \times V \times V$.

Demostración. Ver [16]. □

Propiedades de la forma trilineal b definida en Lema 1.4 son dadas en el siguiente lema.

Lema 1.5. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$). Entonces,

$$b(u, v, v) = (u \cdot \nabla v, v) = 0, \quad \forall u \in V, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (1.5)$$

$$b(u, v, w) = -b(u, w, v), \quad \forall u \in V, \quad \forall v, w \in H_0^1(\Omega). \quad (1.6)$$

Demostración. Ver [16]. □

El siguiente resultado se encuentra en [16].

Lema 1.6. Sean V, H, V' los espacios de Hilbert satisfaciendo (1.4). Si una función u pertenece a $L^2(0, T; V)$ y su derivada $\partial_t u$ pertenece a $L^2(0, T; V')$, entonces u es igual c.t.p. a una función continua de $[0, T]$ en H y se tiene la siguiente igualdad

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 = 2 \langle \partial_t u, u \rangle, \quad (1.7)$$

válida en el sentido de distribuciones sobre $[0, T]$.

Para el espacio $L^2(\Omega)$ se tiene la siguiente descomposición de Helmholtz.

Teorema 1.5. Sea Ω un conjunto abierto acotado de clase C^2 . Entonces

$$L^2(\Omega) = H \oplus H^\perp.$$

Demostración. Ver [16]. □

Definición 1.7. Para la descomposición de $L^2(\Omega)$, la proyección ortogonal sobre H se define como el operador lineal autoadjunto y continuo

$$P : L^2(\Omega) \rightarrow H \text{ tal que } Pu = u \text{ si } u \in H, \quad P(\nabla v) = 0 \text{ si } v \in H^1(\Omega). \quad (1.8)$$

Además, $\|Pw\|_H \leq C\|w\| \quad \forall w \in L^2(\Omega)$.

Si $u \in H^2(\Omega)$ se tiene que $-\Delta u \in L^2(\Omega)$, entonces aplicando el operador proyección P definido en (1.8), se define el operador de Stokes $A = -P\Delta$ con dominio $D(A) = H^2(\Omega) \cap V$,

$$A = -P\Delta : H^2(\Omega) \cap V \rightarrow H. \quad (1.9)$$

Lema 1.7. *El operador de Stokes A es autoadjunto definido positivo con inversa $A^{-1} : H \rightarrow H$ compacta y es caracterizado por la relación $(Aw, v) = (\nabla w, \nabla v)$ para todo $w \in D(A), v \in V$.*

Demostración. Ver [10]. □

Lema 1.8. *El operador de Stokes A tiene una sucesión creciente $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$ de autovalores positivos $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \dots$, con $\lambda_i \rightarrow \infty$ cuando $i \rightarrow \infty$. Las correspondientes autofunciones $\{w_i\}_{i \geq 1}$ forman una base hilbertiana en H y satisfacen $Aw_i = \lambda_i w_i$, $w_i \in D(A)$.*

Demostración. Ver [15]. □

Considerando las autofunciones del operador de Stokes dadas en el Lema 1.8, para cada entero m se define el espacio finito dimensional

$$H_m = \text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_m\} \subset H. \quad (1.10)$$

Similar a la definición dada en (1.8) se define la proyección ortogonal

$$P_m : L^2(\Omega) \rightarrow H_m, \quad (1.11)$$

es decir, para todo $u \in L^2(\Omega)$ se tiene

$$P_m u = \sum_{j=1}^m (u, w_j) w_j. \quad (1.12)$$

Lema 1.9. *Las funciones $\left\{ \frac{w_i}{\lambda_i^{1/2}} \right\}$ forman un conjunto ortonormal completo en V con el producto interno $(\nabla u, \nabla v)$ para $u, v \in V$. Para cualquier $u \in V$ la sucesión $\{P_m u\}$ converge a u en V , cuando $m \rightarrow \infty$.*

Demostración. Ver [14]. □

Lema 1.10. *Las funciones $\left\{ \frac{w_i}{\lambda_i} \right\}$ forman un conjunto ortonormal completo en $H^2(\Omega) \cap V$ con el producto interno (Au, Av) para $u, v \in D(A)$.*

Demostración. Ver [14] □

Observación 1.6. *Si $u(t) \in D(A) \subset H$, entonces $P_m Au(t) = AP_m u(t)$. En efecto,*

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{im}(t) w_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \gamma_{im}(t) w_i, & P_m u(t) &= \sum_{i=1}^m \gamma_{im}(t) w_i, \\ Au(t) &= A \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \gamma_{im}(t) w_i \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} A \sum_{i=1}^m \gamma_{im}(t) w_i \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \gamma_{im}(t) Aw_i = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{im}(t) Aw_i, \\ P_m Au(t) &= \sum_{i=1}^m \gamma_{im}(t) Aw_i = A \sum_{i=1}^m \gamma_{im}(t) w_i = AP_m u(t). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Para las aproximaciones definidas en (1.12) se tienen los siguientes resultados de estimaciones de error, cuyas demostraciones se encuentran en [14].

Lema 1.11. *Sea $u \in V$. Entonces se tiene la estimación de error*

$$\|u - P_m u\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_m} \|\nabla u\|^2. \quad (1.14)$$

Lema 1.12. *Sea $u \in V \cap H^2$. Entonces se tiene la estimación de error*

$$\|u - P_m u\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_m^2} \|Au\|^2. \quad (1.15)$$

Lema 1.13. *Sea $u \in V \cap H^2$. Entonces se tiene la estimación de error*

$$\|\nabla u - \nabla P_m u\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_m} \|Au\|^2. \quad (1.16)$$

Un resultado en la teoría de espacios de Sobolev es la siguiente desigualdad.

Teorema 1.6 (Desigualdad de Poincaré). *Si Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, entonces existe una constante positiva C_Ω tal que*

$$\|u\| \leq C_\Omega \|\nabla u\|, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Observación 1.7. *Para que la desigualdad de Poincaré sea válida es suficiente que Ω sea acotado en alguna dirección.*

Observación 1.8. *Como una consecuencia de la desigualdad de Poincaré, si Ω es acotado la norma $\|\nabla u\|$ es equivalente a la norma de u en $H_0^1(\Omega)$, es decir, $\|u\|_{H_0^1} = \|\nabla u\|$.*

Importantes resultados para el estudio de las ecuaciones de Navier Stokes, que pueden ser encontrados en [16], son dados a continuación.

Proposición 1.1. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f \in (C_c^\infty(\Omega))'$. Entonces*

$$f = \nabla p \text{ para algún } p \in (C_c^\infty(\Omega))' \Leftrightarrow (f, v) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (1.17)$$

Proposición 1.2. *Sea Ω un conjunto abierto acotado Lipschitz de $\mathbb{R}^n$.*

i) *Si una distribución p es tal que $\nabla p \in L^2(\Omega)$, entonces $p \in H^1(\Omega)$ y*

$$\|p\|_{H^1} \leq C_\Omega \|\nabla p\|.$$

ii) *Si una distribución p es tal que $\nabla p \in H^{-1}(\Omega)$, entonces $p \in L^2(\Omega)$ y*

$$\|p\|_{H^{-1}} \leq C_\Omega \|\nabla p\|.$$

Otras desigualdades de utilidad que serán usadas en los capítulos posteriores se dan a continuación.

Lema 1.14 (Desigualdad de Young). Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces para $a > 0$ y $b > 0$ se tiene la desigualdad

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Lema 1.15 (Desigualdad de Minkowski). Si $f, g \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, entonces $f + g \in L^p(\Omega)$ y

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Teorema 1.7 (Desigualdad de Hölder). Sea $1 \leq p \leq \infty$. Si $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces, $fg \in L^1(\Omega)$ y

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Cuando $p = q = 2$ la desigualdad es llamada desigualdad de Cauchy-Schwartz.

Demostración. Ver [4]. □

Lema 1.16 (Desigualdad de Hölder generalizada). Si $f_i \in L^{p_i}$, $1 \leq i \leq k$, $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} \leq 1$. Entonces, $f = f_1 f_2 \dots f_k \in L^p(\Omega)$ y se tiene la siguiente desigualdad

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \dots \|f_k\|_{p_k}.$$

Demostración. Ver [1]. □

La demostración del siguiente lema puede verse en [6].

Lema 1.17. Sean $\varphi(t)$, $f(t)$ y $g(t)$ funciones continuas no negativas definidas para todo $t \in [0, \infty)$ tal que

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &\leq g(\varphi(t)) + f(t), \\ \varphi(0) &= \varphi_0. \end{aligned}$$

Entonces, se cumple que $\varphi(t) \leq F(t, \varphi_0)$, para $t \in [0, T(\varphi_0))$, donde $F(\cdot, \varphi_0)$ es la solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} F'(t) &= g(F(t)) + f(t), \\ F(0) &= \varphi_0, \end{aligned}$$

y $[0, T(\varphi_0))$ es el mayor intervalo en el cual la función F es continua.

Lema 1.18 (Lema de Gronwall). Sean g , h , φ y ψ funciones continuas no negativas sobre $[0, \infty)$ tal que

$$\varphi'(t) + \psi(t) \leq g(t)\varphi(t) + h(t).$$

Entonces, se cumple la siguiente desigualdad

$$\varphi(t) + \int_0^t \psi(s) ds \leq (\varphi(0) + \int_0^t h(s) ds) \exp \left(\int_0^t g(s) ds \right).$$

Demostración. Ver [1]. □

Otra versión del Lema de Gronwall es establecido en el siguiente lema.

Lema 1.19. Sean g, h, φ y ψ funciones continuas no negativas definidas en $[0, T)$ y C constante no negativa, tal que para cualquier fijo $t_0 \geq 0$ y $t \geq t_0$

$$\varphi(t) + \psi(t) \leq C + \int_{t_0}^t h(s)ds + \int_{t_0}^t g(s)\varphi(s)ds.$$

Entonces, se cumple la siguiente desigualdad

$$\varphi(t) + \psi(t) \leq \left(C + \int_{t_0}^t h(s)ds\right) \exp\left(\int_{t_0}^t g(s)ds\right).$$

Demostración. Ver [5]. □

Lema 1.20. Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$r \in \left[q, \frac{nq}{n-q}\right] \text{ si } q \in [1, n), \quad r \in [q, \infty) \text{ si } q \geq n.$$

Entonces, para toda función $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\|u\|_r \leq c \|u\|_q^{1-\alpha} \|\nabla u\|_q^\alpha,$$

donde $\alpha = n(r-q)/rq$.

Demostración. La demostración consta de dos pasos, dependiendo de r , y puede encontrarse en [4]. □

En particular, del Lema 1.20 se tienen las siguientes desigualdades

$$\|u\|_3 \leq C \|u\|^{1/2} \|\nabla u\|^{1/2} \quad n = 3, \tag{1.18}$$

$$\|u\|_4 \leq C \|u\|^{1/2} \|\nabla u\|^{1/2} \quad n = 2, \tag{1.19}$$

$$\|u\|_4 \leq C \|u\|^{1/4} \|\nabla u\|^{3/4} \quad n = 3. \tag{1.20}$$

Como una consecuencia de las inclusiones en espacios de Sobolev, se tienen las siguientes desigualdades, que son usadas en el desarrollo de los capítulos posteriores.

Lema 1.21. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con $n = 2, 3$, acotado y u una función suficientemente regular definida en Ω . Entonces

$$\|u\|_3 \leq C \|\nabla u\|, \tag{1.21}$$

$$\|u\|_6 \leq C \|\nabla u\|, \tag{1.22}$$

$$\|u\|_\infty \leq C \|Au\|, \tag{1.23}$$

$$\|\nabla u\|_6 \leq C \|Au\|. \tag{1.24}$$

Ver [8].

Lema 1.22. Si $u \in D(A) = V \cap H^2(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado, se tienen las desigualdades de Agmon, [17]

$$\|u\|_\infty \leq C\|u\|^{1/2}\|Au\|^{1/2} \quad n = 2, \quad (1.25)$$

$$\|u\|_\infty \leq C\|u\|^{1/4}\|Au\|^{3/4} \quad n = 3, \quad (1.26)$$

$$\|u\|_\infty \leq C\|\nabla u\|^{1/2}\|Au\|^{1/2} \quad n = 2, 3. \quad (1.27)$$

1.2. Convergencias

Un concepto que juega un rol importante en el desarrollo de los siguientes capítulos es el de convergencia, por lo cual a continuación se presentan definiciones y propiedades importantes relacionados a este concepto.

Definición 1.8. Sea X un espacio de Banach, $\{v_n\}$ una sucesión en X y $v \in X$. Entonces,

1. Se dice que $\{v_n\}$ converge débilmente a v cuando $n \rightarrow \infty$, si y solo si

$$(f, v_n) \rightarrow (f, v) \quad \forall f \in X' \quad (\text{se denota } v_n \rightharpoonup v).$$

2. Se dice que $\{v_n\}$ converge fuertemente a v cuando $n \rightarrow \infty$, si y solo si

$$\|v_n - v\|_X \rightarrow 0 \quad (\text{se denota } v_n \rightarrow v).$$

Teorema 1.8. Sea X un espacio de Hilbert.

- i) Toda sucesión acotada $\{x_n\}$ en X posee una subsucesión $\{x_{n'}\}$ débilmente convergente en X .
- ii) Toda sucesión $\{x_n\}$ en X débilmente convergente es acotada.

Demostración. Ver [1]. □

Proposición 1.3. Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo. Si $\{x_n\}$ es una sucesión tal que $x_n \rightarrow x$ débilmente en X y $\limsup \|x_n\| \leq \|x\|$. Entonces, $x_n \rightarrow x$ fuertemente en X .

Demostración. Ver [2]. □

Teorema 1.9. Sean X, Y espacios de Hilbert tal que la inmersión $X \hookrightarrow Y$ es compacta. Entonces, toda sucesión débilmente convergente en X es fuertemente convergente en Y .

Demostración. Ver [1]. □

Observación 1.9. Si $u_n \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$, entonces se tiene que $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$, $\text{div} u_n \rightharpoonup \text{div} u$ en $L^2(\Omega)$. En efecto, para todo $v \in L^2(\Omega)$ se tiene $(\nabla(u_n - u), v) = -(u_n - u, \text{div} v) \rightarrow 0$ y $(\text{div}(u_n - u), v) = -(u_n - u, \nabla v) \rightarrow 0$ desde que $\text{div} v, \nabla v \in H^{-1}(\Omega)$ y $u_n \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$.

Lema 1.23. Si u_n converge a u débilmente en $L^2(0, T; V)$ y fuertemente en $L^2(0, T; H)$, entonces para todo $v \in L^2(0, T; V)$,

$$\int_0^T (u_n(t) \cdot \nabla u_n(t), v(t)) dt \rightarrow \int_0^T (u(t) \cdot \nabla u(t), v(t)) dt. \quad (1.28)$$

Demostración. La demostración se encuentra en [16]. $\square$

Lema 1.24. Para $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$, usando integración por partes, se obtiene la identidad de Green:

$$-(\Delta u, v) = (\nabla u, \nabla v) - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma,$$

donde n es el vector normal unitario exterior a Ω .

Observación 1.10.

i) Cuando $u \in D(A)$ y $v \in H_0^1$, se tiene $-(\Delta u, v) = (\nabla u, \nabla v)$.

ii) Cuando $u \in D(A)$ y $v \in V$, se tiene que $(Au, v) = -(\Delta u, v) = (\nabla u, \nabla v)$.

1.3. Ecuaciones de Navier-Stokes

Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) con borde $\Gamma = \partial\Omega$ de clase C^2 y $[0, T]$ un intervalo de tiempo con $0 < T < \infty$. Las ecuaciones de Navier-Stokes las cuales describen el movimiento de un fluido viscoso e incompresible en $Q = \Omega \times (0, T)$ son dadas por (ver [3], [13]):

$$\partial_t u - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f, \quad (1.29)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (1.30)$$

a las cuales se les asocia condiciones iniciales y de borde

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ en } \Omega, \quad u = g \text{ sobre } \Gamma \times (0, T). \quad (1.31)$$

En el sistema (1.29)-(1.31), u representa la velocidad del fluido, p la presión hidrostática, f una fuerza externa prescrita actuando sobre el fluido. La constante $\nu > 0$ es la viscosidad del fluido, u_0 es la velocidad inicial definida en Ω y g es una función definida sobre el borde, la cual por el teorema de la divergencia debe satisfacer la condición de compatibilidad

$$\int_{\Gamma} g \cdot n = 0,$$

donde n es el vector normal unitario exterior a Ω .

Cuando $g = 0$, se tiene el sistema de Navier-Stokes con condición de borde homogéneo, y se plantea el siguiente problema:

Problema (NS): Dada la fuerza externa f y la velocidad inicial u_0 , hallar (u, p) tal que

$$\partial_t u - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f \quad \text{en } Q, \quad (1.32)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{en } Q, \quad (1.33)$$

$$u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times (0, T), \quad (1.34)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{en } \Omega. \quad (1.35)$$

Para la definición de solución fuerte se debe establecer los espacios apropiados al que pertenecen los datos (la fuerza externa f y la velocidad inicial u_0).

Definición 1.9 (Solución Fuerte). Sean $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ y $u_0 \in V$. Se dice que (u, p) es una solución fuerte del Problema (NS) si $u \in L^2(0, T; V \cap H^2(\Omega))$, $\partial_t u \in L^2(0, T; H)$, $p \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ y satisface (1.32)-(1.35).

Multiplicando (1.32) por $v \in V$ e integrando por partes, se obtiene la siguiente formulación débil (o variacional) para el Problema (NS): Dados f y u_0 , hallar u satisfaciendo

$$(\partial_t u, v) + \nu(\nabla u, \nabla v) + (u \cdot \nabla u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V, \quad (1.36)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{en } \Omega. \quad (1.37)$$

Si los datos f y u_0 son menos regulares que los exigidos en la Definición 1.9, se tiene la definición de solución débil.

Definición 1.10 (Solución Débil). Sean $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ y $u_0 \in H$. Se dice que u es una solución débil del Problema (NS) si $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, $\partial_t u \in L^2(0, T; V')$ y satisface la formulación débil (1.36)-(1.37).

Observación 1.11.

- i) Si u es una solución fuerte del Problema (NS), entonces u es una solución débil.
- ii) Si $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $u_0 \in V$ y $u \in L^2(0, T; V \cap H^2(\Omega))$ es una solución débil del Problema (NS), entonces u es una solución fuerte.

Aplicando la proyección ortogonal (1.8) en (1.32), el Problema (NS) puede ser reformulado como sigue: Dados f y u_0 , hallar u satisfaciendo

$$\partial_t u + \nu Au + P(u \cdot \nabla u) = Pf \quad \text{en } Q, \quad (1.38)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{en } Q, \quad (1.39)$$

$$u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times (0, T), \quad (1.40)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{en } \Omega. \quad (1.41)$$

Un método para demostrar la existencia de soluciones del sistema (1.38)-(1.41) es el de Galerkin espectral estándar de 1-nivel, el cual consiste en considerar el espacio finito dimensional H_m definido en (1.10) y construir soluciones aproximadas $u_m(t) \in H_m$ definido por

$$u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m \gamma_{im}(t) w_i(x),$$

satisfaciendo

$$\partial_t u_m + \nu A u_m + P_m(u_m \cdot \nabla u_m) = P_m f, \quad (1.42)$$

$$u_m(x, 0) = P_m u_0(x) = u_{0m}(x). \quad (1.43)$$

Entonces, la solución de (1.38)-(1.41) es obtenida como el límite de las soluciones aproximadas $\{u_m\}$ cuando $m \rightarrow \infty$. En (1.42), para pasar al límite en el término no lineal, son necesarias algunas propiedades de convergencia fuerte de la sucesión, las cuales son obtenidas por métodos de compacidad.

Otro método para obtener resultados de existencia de soluciones del sistema (1.38)-(1.41) es el método de Galerkin espectral de multinivel, el cual consiste en considerar espacios finitos dimensionales H_{m_k} definido en (1.10) con $H_{m_1} \subset H_{m_2} \subset \dots \subset H_{m_k} \subset \dots \subset H_{m_K}$ y las aproximaciones u_k en el espacio H_{m_k} se determinan como sigue:

- i) Se halla la aproximación de Galerkin de 1-nivel $u_1(t) = u_{m_1}(t) \in H_{m_1}$, la cual satisface el sistema no lineal (1.42)-(1.43) con $m = m_1$.
- ii) Para $k = 2, 3, \dots, K$ y H_{m_k} , dada la aproximación $u_{k-1}(t) \in H_{m_{k-1}}$, se determinan las aproximaciones de Galerkin de k-nivel $u_k(t) \in H_{m_k}$ tal que

$$u_k(x, t) = \sum_{i=1}^{m_k} \gamma_{im_k}(t) w_i(x),$$

satisfaciendo el siguiente sistema de Navier-Stokes linealizado

$$\partial_t u_k + \nu A u_k + P_{m_k}(u_k \cdot \nabla u_{k-1}) + P_{m_k}(u_{k-1} \cdot \nabla u_k) = P_{m_k} f + P_{m_k}(u_{k-1} \cdot \nabla u_{k-1}), \quad (1.44)$$

$$u_k(x, 0) = P_{m_k} u_0(x), \quad (1.45)$$

donde P_{m_k} es la proyección de $L^2(\Omega)$ en H_{m_k} .

Entonces, la solución de (1.38)-(1.41) es obtenido como el límite de las soluciones aproximadas $\{u_K\}$ cuando $m_K \rightarrow \infty$.

Teóricamente se demuestra que bajo ciertas condiciones sobre los valores propios $\{\lambda_i\}$ del operador de Stokes, el método de Galerkin de K-nivel es más eficiente que el método de Galerkin de 1-nivel sobre el espacio H_{m_K} . Respecto al radio de convergencia de los errores de las aproximaciones, se demuestra que sobre el espacio H_{m_K} los errores de las aproximaciones de Galerkin de 1-nivel y de K-nivel tienen radio de convergencia del mismo orden.

CAPÍTULO 2

SOLUCIONES FUERTES PARA LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

Aplicando el método de Galerkin espectral de 1-nivel y K-nivel, se estudia la existencia y unicidad de soluciones fuertes en el caso bidimensional y tridimensional para el siguiente Problema:

Problema 1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n = 2, 3)$ un dominio acotado y $[0, T]$ un intervalo de tiempo. Dados $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ y $u_0 \in V$, hallar $(u, p) \in L^2(0, T; V \cap H^2(\Omega)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega))$ satisfaciendo

$$\partial_t u - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \quad (2.2)$$

$$u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times (0, T), \quad (2.3)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{en } \Omega, \quad (2.4)$$

donde $u(0) = u(\cdot, 0)$.

Usando las propiedades del operador proyección P definido en (1.8) se puede reformular el Problema 1 como sigue:

Problema 2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n = 2, 3)$ un dominio acotado y $[0, T]$ un intervalo de tiempo. Dados $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ y $u_0 \in V$, hallar $u \in L^2(0, T; D(A))$ satisfaciendo

$$\partial_t u + \nu Au + P(u \cdot \nabla u) = Pf \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \quad (2.5)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{en } \Omega. \quad (2.6)$$

Observación 2.1. Si u es una solución del Problema 2, también se verifica que $u \in L^\infty(0, T; V)$ y $\partial_t u \in L^2(0, T; H)$. Luego, por Lema 1.2 se concluye que u es igual c.t.p. a una función continua de $[0, T]$ en V . Así, la condición inicial (2.6) tiene sentido.

Observación 2.2. La existencia de la presión p satisfaciendo la ecuación (2.1) es obtenida desde (2.5) y la Proposición 1.1. En efecto, si u es solución del Problema 2 entonces, usando la desigualdad de Hölder y (1.23), se tiene

$$\|u \cdot \nabla u\| \leq \|u\|_\infty \|\nabla u\| \leq C \|Au\| \|\nabla u\| \leq C \|Au\|,$$

desde que $u \in L^2(0, T; D(A)) \cap L^\infty(0, T; V)$. Luego,

$$\|\partial_t u - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u - f\| \leq \|\partial_t u\| + \nu \|Au\| + \|u \cdot \nabla u\| + \|f\| \leq \|\partial_t u\| + C_\nu \|Au\| + \|f\|,$$

y entonces usando la desigualdad de Young, se obtiene

$$\int_0^T \|(\partial_t u - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u - f)(s)\|^2 ds \leq C \int_0^T (\|\partial_t u(s)\|^2 + \|Au(s)\|^2 + \|f(s)\|^2) ds,$$

y como $\partial_t u \in L^2(0, T; H)$, se deduce que

$$\int_0^T \|(\partial_t u - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u - f)(s)\|^2 ds \leq C,$$

lo cual implica que

$$\partial_t u - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u - f \in L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.7)$$

Haciendo el producto interno de (2.5) con $v(t) \in H$, se tiene que

$$(\partial_t u(t) - \nu \Delta u(t) + u(t) \cdot \nabla u(t) - f(t), v(t)) = 0 \quad \forall v(t) \in H,$$

entonces por Proposición 1.1, existe una función $p(t)$ tal que

$$\partial_t u(t) - \nu \Delta u(t) + u(t) \cdot \nabla u(t) - f(t) = -\nabla p(t), \quad (2.8)$$

y entonces por Proposición 1.2 y (2.7), se tiene que $p \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

Observación 2.3. Para demostrar la existencia de soluciones (u, p) del Problema 1, por la Observación 2.2, es suficiente demostrar la existencia de soluciones u del Problema 2. Por lo tanto, si u es la única solución del Problema 2, entonces (u, p) es la única solución del Problema 1, donde p es única salvo una constante aditiva.

Observación 2.4. En lo que sigue, C denota una constante real no negativa que puede depender de los datos (Ω, f, u_0, ν) y tomar diferentes valores en distintas situaciones.

2.1. Existencia y unicidad de soluciones: aproximaciones de Galerkin de 1-nivel

Para probar la existencia de soluciones del Problema 2, se usará el método de Galerkin espectral estándar de 1-nivel, mediante el cual se define una sucesión de soluciones aproximadas y la solución es determinada como el límite de dicha sucesión de aproximaciones.

Por el Lema 1.8, las autofunciones $\{w_i\}$ del operador de Stokes A forman una base hilbertiana en H . Para cada m entero, se define el espacio finito dimensional H_m como en (1.10), esto es, $H_m = \text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$. El método de Galerkin consiste en hallar una solución aproximada u_m del Problema 2 como sigue

$$u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m \gamma_{im}(t) w_i(x), \quad (2.9)$$

donde los coeficientes $\gamma_{im}(t)$ son determinados de tal modo que $u_m(t)$ satisfaga las siguientes ecuaciones:

$$\partial_t u_m(t) + \nu A u_m(t) + P_m(u_m(t) \cdot \nabla u_m(t)) = P_m f(t), \quad (2.10)$$

$$u_m(0) = P_m u_0 = u_{0m}. \quad (2.11)$$

Observación 2.5.

i) Para $i = 1, 2, \dots, m$ el coeficiente $\gamma_{im}(0) = (u_0, w_i)$.

En efecto, por la definición dada en (1.12), (2.9) y (2.11) se tiene que

$$\sum_{i=1}^m (u_0, w_i) w_i = P_m u_0 = u_m(0) = \sum_{i=1}^m \gamma_{im}(0) w_i \Rightarrow \sum_{i=1}^m [\gamma_{im}(0) - (u_0, w_i)] w_i = 0,$$

y desde que $\{w_i\}$ forman una base se obtiene el resultado.

ii) Por Lema 1.9, para $i = 1, 2, \dots, m$ se tiene que $\gamma_{im}(0) = \lambda_i^{-1}(\nabla u_m(0), \nabla w_i)$.

iii) Para $i = 1, 2, \dots, m$, $(\nabla u_0, \nabla w_i) = (u_0, A w_i) = \lambda_i(u_0, w_i) = \lambda_i \gamma_{im}(0)$.

Para determinar estimaciones a priori para las soluciones aproximadas u_m , para el sistema (2.10)-(2.11) se tiene la siguiente formulación débil: hallar $u_m(t)$ tal que

$$(\partial_t u_m(t), w_i) + \nu(\nabla u_m(t), \nabla w_i) + (u_m(t) \cdot \nabla u_m(t), w_i) = (f(t), w_i) \quad \forall w_i \in H_m, \quad (2.12)$$

$$u_m(0) = u_{0m}. \quad (2.13)$$

2.1.1. Existencia y unicidad de soluciones en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Teorema 2.1. Sea Ω un dominio bidimensional acotado, con borde uniformemente de clase C^2 y un intervalo de tiempo $(0, T]$, $0 < T < \infty$. Sean $u_0 \in V$ y $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Entonces, existe una única solución u del Problema 2, tal que

$$u \in L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; D(A)), \quad \partial_t u \in L^2(0, T; H). \quad (2.14)$$

Además, la solución u satisface los siguientes resultados de regularidad:

$$\|u(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u(s)\|^2 ds \leq C, \quad (2.15)$$

$$\|\nabla u(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|A u(s)\|^2 ds \leq C, \quad (2.16)$$

$$\int_0^t \|\partial_t u(s)\|^2 ds \leq C. \quad (2.17)$$

Más aun, si $\partial_t f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, entonces

$$\tau(t)\|\partial_t u(t)\|^2 + \nu \int_0^t \tau(s)\|\nabla \partial_t u(s)\|^2 ds \leq C, \quad (2.18)$$

$$\nu \tau(t)\|Au(t)\|^2 \leq C, \quad (2.19)$$

donde $\tau(t) = \min\{1, t\}$, con $t \in (0, T]$. También, las aproximaciones $\{u_m\}$ satisfacen las estimaciones (2.15)-(2.19), con C constante independiente de m .

Demostración. Considerando el sistema (2.12)-(2.13) se determinan estimaciones a priori para las aproximaciones u_m .

Estimación (2.15).

Considerando $w_i = u_m(t)$ en (2.12), se obtiene

$$(\partial_t u_m, u_m) + \nu(Au_m, u_m) + (u_m \cdot \nabla u_m, u_m) = (f, u_m). \quad (2.20)$$

Entonces, usando integración por partes, se obtiene

$$(Au_m, u_m) = (\nabla u_m, \nabla u_m) = \|\nabla u_m\|^2. \quad (2.21)$$

Luego, llevando (2.21) en (2.20) y considerando (1.5), se tiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m\|^2 + \nu \|\nabla u_m\|^2 = (f, u_m). \quad (2.22)$$

Para el término derecho de la ecuación (2.22), usando las desigualdades de Hölder y Poincaré y la desigualdad de Young, se tiene

$$|(f, u_m)| \leq \|f\| \|u_m\| \leq C \|f\| \|\nabla u_m\| \leq C_\nu \|f\|^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla u_m\|^2. \quad (2.23)$$

Reemplazando (2.23) en (2.22), resulta

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m\|^2 + \nu \|\nabla u_m\|^2 \leq C_\nu \|f\|^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla u_m\|^2,$$

desde donde se deduce

$$\frac{d}{dt} \|u_m\|^2 + \nu \|\nabla u_m\|^2 \leq C \|f\|^2. \quad (2.24)$$

Luego, integrando (2.24) entre 0 y $t \in (0, T]$, teniendo en cuenta que $\|u_m(0)\| \leq \|u_0\|$ se obtiene

$$\|u_m(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u_m(s)\|^2 ds \leq \|u_0\|^2 + C \int_0^t \|f(s)\|^2 ds \leq C, \quad (2.25)$$

para todo $t \in (0, T]$.

Estimación (2.16).

Reemplazando $w_i = Au_m(t)$ en (2.12), se tiene

$$(\partial_t u_m, Au_m) + \nu(Au_m, Au_m) + (u_m \cdot \nabla u_m, Au_m) = (f, Au_m). \quad (2.26)$$

Para el primer término de (2.26) usando integración por partes y Lema 1.6, se obtiene

$$(\partial_t u_m, Au_m) = (\nabla \partial_t u_m, \nabla u_m) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m\|^2. \quad (2.27)$$

Llevando (2.27) en (2.26), resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m\|^2 + \nu \|Au_m\|^2 &= (f, Au_m) - (u_m \cdot \nabla u_m, Au_m) \\ &\leq |(f, Au_m)| + |(u_m \cdot \nabla u_m, Au_m)|. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Luego, para los términos del lado derecho de (2.28), usando (1.25) junto con las desigualdades de Hölder y Young, se tiene

$$\begin{aligned} |(u_m \cdot \nabla u_m, Au_m)| &\leq \|u_m\|_\infty \|\nabla u_m\| \|Au_m\| \\ &\leq C \|u_m\|^{1/2} \|Au_m\|^{1/2} \|\nabla u_m\| \|Au_m\| \\ &\leq C \|u_m\|^{1/2} \|\nabla u_m\| \|Au_m\|^{3/2} \\ &\leq C_\nu \|u_m\|^2 \|\nabla u_m\|^4 + \frac{\nu}{4} \|Au_m\|^2, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$|(f, Au_m)| \leq \|f\| \|Au_m\| \leq \frac{1}{\nu} \|f\|^2 + \frac{\nu}{4} \|Au_m\|^2. \quad (2.30)$$

Llevando las desigualdades (2.29)-(2.30) en (2.28), se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m\|^2 + \nu \|Au_m\|^2 \leq \frac{1}{\nu} \|f\|^2 + C_\nu \|u_m\|^2 \|\nabla u_m\|^4 + \frac{\nu}{2} \|Au_m\|^2,$$

y considerando (2.25), resulta

$$\frac{d}{dt} \|\nabla u_m\|^2 + \nu \|Au_m\|^2 \leq C \|f\|^2 + C \|\nabla u_m\|^4. \quad (2.31)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $\|\nabla u_m(0)\| \leq \|\nabla u_0\|$, la desigualdad (2.25) y aplicando el Lema 1.18 en (2.31), se deduce

$$\begin{aligned} \|\nabla u_m(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|Au_m(s)\|^2 ds &\leq (\|\nabla u_0\|^2 + C \int_0^t \|f(s)\|^2 ds) \exp \left(C \int_0^t \|\nabla u_m(s)\|^2 ds \right) \\ &\leq C (\|\nabla u_0\|^2 + \int_0^t \|f(s)\|^2 ds) \leq C, \end{aligned} \quad (2.32)$$

para todo $t \in (0, T]$.

Estimación (2.17).

Reemplazando $w_i = \partial_t u_m(t)$ en (2.12), se obtiene

$$\begin{aligned} \|\partial_t u_m\|^2 &= -\nu(Au_m, \partial_t u_m) - (u_m \cdot \nabla u_m, \partial_t u_m) + (f, \partial_t u_m) \\ &\leq \nu|(Au_m, \partial_t u_m)| + |(u_m \cdot \nabla u_m, \partial_t u_m)| + |(f, \partial_t u_m)|. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Para los términos del lado derecho de (2.33), usando (1.25), (2.25) y la desigualdad de Hölder, se tiene

$$\nu|(Au_m, \partial_t u_m)| \leq \nu\|Au_m\|\|\partial_t u_m\| \leq C_\nu\|Au_m\|^2 + \frac{1}{6}\|\partial_t u_m\|^2, \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} |(u_m \cdot \nabla u_m, \partial_t u_m)| &\leq \|u_m\|_\infty \|\nabla u_m\| \|\partial_t u_m\| \\ &\leq C\|u_m\|^{1/2} \|Au_m\|^{1/2} \|\nabla u_m\| \|\partial_t u_m\| \\ &\leq C\|Au_m\|^{1/2} \|\nabla u_m\| \|\partial_t u_m\| \\ &\leq C\|Au_m\| \|\nabla u_m\|^2 + \frac{1}{6}\|\partial_t u_m\|^2 \\ &\leq C\|Au_m\|^2 + C\|\nabla u_m\|^4 + \frac{1}{6}\|\partial_t u_m\|^2, \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$|(f, \partial_t u_m)| \leq \|f\| \|\partial_t u_m\| \leq C\|f\|^2 + \frac{1}{6}\|\partial_t u_m\|^2. \quad (2.36)$$

Reemplazando (2.34)-(2.36) en (2.33), se obtiene

$$\|\partial_t u_m\|^2 \leq C\|Au_m\|^2 + C\|\nabla u_m\|^4 + C\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|\partial_t u_m\|^2,$$

y entonces observando (2.32), se deduce

$$\|\partial_t u_m\|^2 \leq C(\|Au_m\|^2 + \|\nabla u_m\|^2 + \|f\|^2). \quad (2.37)$$

Ahora, integrando (2.37) entre 0 y t , y teniendo en cuenta (2.25) y (2.32), se obtiene

$$\int_0^t \|\partial_t u_m(s)\|^2 ds \leq C \left(\int_0^t \|Au_m(s)\|^2 ds + \int_0^t \|\nabla u_m(s)\|^2 ds + \int_0^t \|f(s)\|^2 ds \right) \leq C, \quad (2.38)$$

para todo $t \in (0, T]$.

Existencia de Soluciones.

Desde (2.32) y (2.38) se concluye que

$$\{u_m\} \text{ es acotada en } L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; D(A)), \quad (2.39)$$

$$\{\partial_t u_m\} \text{ es acotada en } L^2(0, T; H). \quad (2.40)$$

Por lo tanto, observando (2.39)-(2.40) y el Teorema 1.8, existe una subsucesión $\{u_{m'}\}$ y un elemento u tal que

$$u_{m'} \rightarrow u \text{ débil-* en } L^\infty(0, T; V), \quad (2.41)$$

$$u_{m'} \rightarrow u \text{ débilmente en } L^2(0, T; D(A)), \quad (2.42)$$

$$\partial_t u_{m'} \rightarrow \partial_t u \text{ débilmente en } L^2(0, T; H). \quad (2.43)$$

Más aun, aplicando el Lema 1.3 junto al Teorema 1.9, se tiene que

$$u_{m'} \rightarrow u \text{ fuertemente en } L^2(0, T; V). \quad (2.44)$$

A seguir se prueba que u es solución del Problema 2, para lo cual se pasa al límite en (2.12).

Sea la función $\psi \in C^\infty([0, T])$, entonces multiplicando (2.12) por $\psi(t)$ e integrando entre 0 y T , se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^T (\partial_t u_m(t), w_i \psi(t)) dt + \nu \int_0^T (Au_m(t), w_i \psi(t)) dt \\ + \int_0^T (u_m(t) \cdot \nabla u_m(t), w_i \psi(t)) dt = \int_0^T (f(t), w_i \psi(t)) dt. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Desde que $w_i \psi \in L^2(0, T; H)$ pasando al límite con la sucesión m' y observando (2.42)-(2.43), se tiene

$$\int_0^T (Au_{m'}(t), w_i \psi(t)) dt \rightarrow \int_0^T (Au(t), w_i \psi(t)) dt, \quad (2.46)$$

$$\int_0^T (\partial_t u_{m'}(t), w_i \psi(t)) dt \rightarrow \int_0^T (\partial_t u(t), w_i \psi(t)) dt. \quad (2.47)$$

Como $w_i \psi \in L^2(0, T; V)$, por el Lema 1.23 teniendo en cuenta (2.42) y (2.44), se tiene

$$\int_0^T (u_{m'}(t) \cdot \nabla u_{m'}(t), w_i \psi(t)) dt \rightarrow \int_0^T (u(t) \cdot \nabla u(t), w_i \psi(t)) dt. \quad (2.48)$$

Por lo tanto, pasando al límite en (2.45) cuando $m \rightarrow \infty$ y teniendo en cuenta (2.46), (2.47) y (2.48) se concluye que u satisface

$$\begin{aligned} \int_0^T (\partial_t u(t), w_i \psi(t)) dt + \nu \int_0^T (Au(t), w_i \psi(t)) dt + \int_0^T (u(t) \cdot \nabla u(t), w_i \psi(t)) dt \\ = \int_0^T (f(t), w_i \psi(t)) dt, \end{aligned} \quad (2.49)$$

para todo $w_i \in V$. Luego, por densidad (2.49) se mantiene para todo $w\psi \in L^2(0, T; V)$, esto es, u satisface (2.5).

Prueba de condición inicial.

De (2.32), para todo $t \in (0, T]$ se tiene que

$$\|\nabla u(t)\|^2 \leq C(\|\nabla u_0\|^2 + \int_0^t \|f(s)\|^2 ds),$$

de lo cual se deduce

$$\limsup_{t \rightarrow 0+} \|\nabla u(t)\|^2 \leq C\|\nabla u_0\|^2. \quad (2.50)$$

Entonces, por (2.50) y la Proposición 1.3, para probar que $\nabla u(t) \rightarrow \nabla u_0$ fuerte en $L^2(\Omega)$ cuando $t \rightarrow 0^+$, basta probar que $\nabla u(t) \rightarrow \nabla u_0$ débil en $L^2(\Omega)$, esto es, se demuestra que

$$(\nabla u(t) - \nabla u_0, \nabla w_i) \rightarrow 0, \quad (2.51)$$

cuando $t \rightarrow 0^+$.

Reescribiendo $\nabla u(t) - \nabla u_0$ convenientemente, se tiene

$$\begin{aligned} |(\nabla u(t) - \nabla u_0, \nabla w_i)| &= |(\nabla u(t) - \nabla u_m(t) + \nabla u_m(t) - \nabla u_m(0) + \nabla u_m(0) - \nabla u_0, \nabla w_i)| \\ &\leq |(\nabla u(t) - \nabla u_m(t), \nabla w_i)| + |(\nabla u_m(t) - \nabla u_m(0), \nabla w_i)| \\ &\quad + |(\nabla u_m(0) - \nabla u_0, \nabla w_i)|. \end{aligned} \quad (2.52)$$

A seguir se prueba que cada uno de los términos del lado derecho de (2.52) tienden a 0 cuando $m \rightarrow \infty$ y $t \rightarrow 0^+$.

Para verificar que $(\nabla u(t) - \nabla u_m(t), \nabla w_i) \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$, se fija $t \in (0, T)$ y se define la función suave

$$h(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq t/2, \\ 1 & \text{si } s \geq t. \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} (\nabla u(t) - \nabla u_m(t), \nabla w_i) &= \int_0^t \frac{d}{ds} (h(s)(\nabla u(s) - \nabla u_m(s)), \nabla w_i) ds \\ &= \int_0^t (\partial_s h(s)(\nabla u(s) - \nabla u_m(s)), \nabla w_i) ds \\ &\quad + \int_0^t (h(s)(\nabla \partial_s u(s) - \nabla \partial_s u_m(s)), \nabla w_i) ds \\ &= \int_0^t (\partial_s h(s)(u(s) - u_m(s)), Aw_i) ds \\ &\quad + \int_0^t (h(s)(\partial_s u(s) - \partial_s u_m(s)), Aw_i) ds. \end{aligned}$$

Luego, como $u_m \rightarrow u$ y $\partial_t u_m \rightarrow \partial_t u$ débilmente en $L^2(0, T; H)$ cuando $m \rightarrow \infty$, se tiene que

$$(\nabla u(t) - \nabla u_m(t), \nabla w_i) \rightarrow 0, \quad (2.53)$$

cuando $t \rightarrow 0^+$.

Para el segundo término del lado derecho de (2.52), se tiene

$$\begin{aligned} |(\nabla u_m(t) - \nabla u_m(0), \nabla w_i)| &= |(u_m(t) - u_m(0), Aw_i)| \\ &= \left| \int_0^t \frac{d}{ds} (u_m(s), Aw_i) ds \right| = \left| \int_0^t (\partial_s u_m(s), Aw_i) ds \right| \\ &\leq \int_0^t |(\partial_s u_m(s), Aw_i)| ds \\ &\leq \int_0^t \|\partial_s u_m(s)\| \|Aw_i\| ds. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Luego, usando la desigualdad de Young y (2.38), desde (2.54) se obtiene

$$|(\nabla u_m(t) - \nabla u_m(0), \nabla w_i)| \leq \frac{1}{2} \int_0^t (\|\partial_s u_m(s)\|^2 + \|Aw_i\|^2) ds \rightarrow 0, \quad (2.55)$$

cuando $t \rightarrow 0^+$.

Por otro lado, teniendo en cuenta (ii) y (iii) de la Observación 2.5, para $i = 1, 2, \dots, m$ se tiene que $(\nabla u_m(0), \nabla w_i) = (\nabla u_0, \nabla w_i)$, lo que implica

$$(\nabla u_m(0) - \nabla u_0, \nabla w_i) = 0, \quad m \geq i. \quad (2.56)$$

Entonces, por (2.53), (2.55) y (2.56) en (2.52), se deduce (2.51). Así, de (2.50) y (2.51) se concluye que $\nabla u(t) \rightarrow \nabla u_0$, cuando $t \rightarrow 0^+$. Por la Observación (2.1), y la unicidad del límite, se concluye que $u(0) = u_0$ en V .

Por lo tanto, u es solución del Problema 2.

Unicidad de solución.

Considerar u_1 y u_2 dos soluciones de (2.5), esto es

$$\begin{aligned} \partial_t u_1 + \nu A u_1 + P(u_1 \cdot \nabla u_1) &= P f, \\ \partial_t u_2 + \nu A u_2 + P(u_2 \cdot \nabla u_2) &= P f. \end{aligned}$$

Restando estas dos igualdades y denotando $v = u_1 - u_2$, se obtiene

$$\partial_t v + \nu A v + P(u_1 \cdot \nabla u_1) - P(u_2 \cdot \nabla u_2) = 0, \quad (2.57)$$

$$v(0) = 0. \quad (2.58)$$

Haciendo el producto de (2.57) con v , se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|^2 + \nu \|\nabla v\|^2 + (u_1 \cdot \nabla u_1 - u_2 \cdot \nabla u_2, v) = 0. \quad (2.59)$$

Por otro lado,

$$u_1 \cdot \nabla u_1 - u_2 \cdot \nabla u_2 = u_1 \cdot \nabla(v + u_2) - u_2 \cdot \nabla u_2 = u_1 \cdot \nabla v + v \cdot \nabla u_2. \quad (2.60)$$

Reemplazando (2.60) en (2.59) y usando (1.5), se tiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|^2 + \nu \|\nabla v\|^2 + (v \cdot \nabla u_2, v) = 0,$$

y se sigue que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|^2 + \nu \|\nabla v\|^2 = -(v \cdot \nabla u_2, v) \leq |(v \cdot \nabla u_2, v)|. \quad (2.61)$$

Luego, teniendo en cuenta la propiedad (1.6), la desigualdad de Hölder y desigualdad (1.19), para el término del lado derecho de (2.61) se tiene

$$|(v \cdot \nabla u_2, v)| = |(v \cdot \nabla v, u_2)| \leq \|v\|_4 \|\nabla v\| \|u_2\|_4 \leq C \|v\|^{1/2} \|\nabla v\|^{3/2} \|u_2\|^{1/2} \|\nabla u_2\|^{1/2}.$$

Aplicando desigualdad de Young en la última desigualdad (con $p = 4$ y $q = 4/3$), y teniendo en cuenta que u_2 es solución y satisface (2.15), resulta

$$|(v \cdot \nabla u_2, v)| \leq \nu \|\nabla v\|^2 + C_\nu \|v\|^2 \|u_2\|^2 \|\nabla u_2\|^2 \leq \nu \|\nabla v\|^2 + C \|v\|^2 \|\nabla u_2\|^2, \quad (2.62)$$

y reemplazando (2.62) en (2.61), se tiene

$$\frac{d}{dt} \|v\|^2 \leq C \|v\|^2 \|\nabla u_2\|^2. \quad (2.63)$$

Teniendo en cuenta (2.15), (2.58) y aplicando el Lema 1.18 en (2.63), se obtiene

$$\|v(t)\|^2 \leq \|v(0)\|^2 \exp \left(C \int_0^t \|\nabla u_2(s)\|^2 ds \right) = 0. \quad (2.64)$$

Por lo tanto, se deduce que $v(t) = 0$, de donde se sigue que $u_1 = u_2$ y la unicidad está probada. Más aun, de las convergencias (2.41)-(2.44) se tiene que la solución u satisface las estimaciones (2.15)-(2.17).

A seguir, se demuestra que las aproximaciones de Galerkin u_m satisfacen las condiciones (2.18) y (2.19).

Estimación (2.18).

Derivando (2.12) con respecto a t , se tiene

$$(\partial_t^2 u_m, w_i) + \nu (\nabla \partial_t u_m, \nabla w_i) + (\partial_t u_m \cdot \nabla u_m, w_i) + (u_m \cdot \nabla \partial_t u_m, w_i) = (\partial_t f, w_i).$$

Reemplazando $w_i = \partial_t u_m(t)$, se obtiene

$$(\partial_t^2 u_m, \partial_t u_m) + \nu \|\nabla \partial_t u_m\|^2 + (\partial_t u_m \cdot \nabla u_m, \partial_t u_m) = (\partial_t f, \partial_t u_m),$$

y entonces aplicando el Lema 1.6, resulta

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_t u_m\|^2 + \nu \|\nabla \partial_t u_m\|^2 \leq |(\partial_t u_m \cdot \nabla u_m, \partial_t u_m)| + |(\partial_t f, \partial_t u_m)|. \quad (2.65)$$

Usando las desigualdades (1.22) y (1.19), la desigualdad de Hölder y la desigualdad de Young, se obtiene

$$\begin{aligned} |(\partial_t u_m \cdot \nabla u_m, \partial_t u_m)| &\leq \|\partial_t u_m\|_4^2 \|\nabla u_m\| \\ &\leq C \|\partial_t u_m\| \|\nabla \partial_t u_m\| \|\nabla u_m\| \\ &\leq \frac{\nu}{4} \|\nabla \partial_t u_m\|^2 + C_\nu \|\partial_t u_m\|^2 \|\nabla u_m\|^2, \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} |(\partial_t f, \partial_t u_m)| &\leq \|\partial_t f\| \|\partial_t u_m\| \leq C \|\partial_t f\| \|\nabla \partial_t u_m\| \\ &\leq C_\nu \|\partial_t f\|^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla \partial_t u_m\|^2. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Reemplazando (2.66)-(2.67) en (2.65), se tiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_t u_m\|^2 + \nu \|\nabla \partial_t u_m\|^2 \leq \frac{\nu}{2} \|\nabla \partial_t u_m\|^2 + C_\nu \|\partial_t u_m\|^2 \|\nabla u_m\|^2 + C_\nu \|\partial_t f\|^2,$$

y observando (2.16), se obtiene

$$\frac{d}{dt} \|\partial_t u_m\|^2 + \nu \|\nabla \partial_t u_m\|^2 \leq C \|\partial_t u_m\|^2 + C \|\partial_t f\|^2. \quad (2.68)$$

En vista de que $\partial_t u_m$ satisface (2.17), por Teorema del Valor Medio existe una sucesión decreciente $\{\varepsilon_k\}$ tal que

$$\begin{aligned} \int_0^{\varepsilon_1} \|\partial_t u_m(s)\|^2 ds &= \varepsilon_1 \|\partial_t u_m(\varepsilon_2)\|^2 \text{ con } 0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1, \\ \int_0^{\varepsilon_2} \|\partial_t u_m(s)\|^2 ds &= \varepsilon_2 \|\partial_t u_m(\varepsilon_3)\|^2 \geq \varepsilon_3 \|\partial_t u_m(\varepsilon_3)\|^2 \text{ con } 0 < \varepsilon_3 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1, \\ &\vdots \\ \int_0^{\varepsilon_{k-1}} \|\partial_t u_m(s)\|^2 ds &= \varepsilon_{k-1} \|\partial_t u_m(\varepsilon_k)\|^2 \geq \varepsilon_k \|\partial_t u_m(\varepsilon_k)\|^2 \text{ con } 0 < \varepsilon_k < \varepsilon_{k-1} < \dots < \varepsilon_1. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Luego, si $\varepsilon_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, de (2.69) se obtiene que

$$\varepsilon_k \|\partial_t u_m(\varepsilon_k)\|^2 \leq \int_0^{\varepsilon_{k-1}} \|\partial_t u_m(s)\|^2 ds \rightarrow 0 \Rightarrow \varepsilon_k \|\partial_t u_m(\varepsilon_k)\|^2 \rightarrow 0. \quad (2.70)$$

Multiplicando (2.68) por $\tau(t)$, se tiene

$$\tau(t) \frac{d}{dt} \|\partial_t u_m\|^2 + \nu \tau(t) \|\nabla \partial_t u_m\|^2 \leq C_\nu \tau(t) \|\partial_t u_m\|^2 + C_\nu \tau(t) \|\partial_t f\|^2. \quad (2.71)$$

Como

$$\frac{d}{dt} (\tau(t) \|\partial_t u_m\|^2) = \tau(t) \frac{d}{dt} \|\partial_t u_m\|^2 + \tau'(t) \|\partial_t u_m\|^2, \quad (2.72)$$

reemplazando (2.72) en (2.71), teniendo en cuenta que $\tau'(t) < 1$ y $\tau(t) < 1$, se tiene

$$\frac{d}{dt} (\tau(t) \|\partial_t u_m\|^2) + \nu \tau(t) \|\nabla \partial_t u_m\|^2 \leq C \|\partial_t u_m\|^2 + C \|\partial_t f\|^2. \quad (2.73)$$

Integrando (2.73) entre ε_k y t y observando que $\tau(\varepsilon_k) \leq \varepsilon_k$, se obtiene

$$\begin{aligned} \tau(t) \|\partial_t u_m(t)\|^2 + \nu \int_{\varepsilon_k}^t \tau(s) \|\nabla \partial_t u_m(s)\|^2 ds &\leq \varepsilon_k \|\partial_t u_m(\varepsilon_k)\|^2 + C \int_{\varepsilon_k}^t \|\partial_t u_m(s)\|^2 ds \\ &\quad + C \int_{\varepsilon_k}^t \|\partial_t f(s)\|^2 ds. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Luego, haciendo $\varepsilon_k \rightarrow 0$ en (2.74) y considerando (2.70), se tiene

$$\tau(t) \|\partial_t u_m(t)\|^2 + \nu \int_0^t \tau(s) \|\nabla \partial_t u_m(s)\|^2 ds \leq C \int_0^t \|\partial_t f(s)\|^2 ds + C \int_0^t \|\partial_t u_m(s)\|^2 ds,$$

así teniendo en cuenta (2.17) y la hipótesis sobre $\partial_t f$, se obtiene

$$\tau(t)\|\partial_t u_m(t)\|^2 + \nu \int_0^t \tau(s)\|\nabla \partial_t u_m(s)\|^2 ds \leq C, \quad (2.75)$$

para todo $t \in (0, T]$.

Estimación (2.19).

Reemplazando $w_i = Au_m(t)$ en (2.12), se obtiene

$$\begin{aligned} \nu \|Au_m\|^2 &= (f, Au_m) - (\partial_t u_m, Au_m) - (u_m \cdot \nabla u_m, Au_m) \\ &\leq |(f, Au_m)| + |(\partial_t u_m, Au_m)| + |(u_m \cdot \nabla u_m, Au_m)|. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Para los términos del lado derecho de (2.76), aplicando las desigualdades de Hölder y Young, teniendo en cuenta (1.25) y (2.16), se tiene

$$|(f, Au_m)| \leq \|f\| \|Au_m\| \leq C_\nu \|f\|^2 + \frac{\nu}{8} \|Au_m\|^2, \quad (2.77)$$

$$|(\partial_t u_m, Au_m)| \leq \|\partial_t u_m\| \|Au_m\| \leq C_\nu \|\partial_t u_m\|^2 + \frac{\nu}{8} \|Au_m\|^2, \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} |(u_m \cdot \nabla u_m, Au_m)| &\leq \|u_m\|_\infty \|\nabla u_m\| \|Au_m\| \leq C \|u_m\|^{1/2} \|Au_m\|^{3/2} \\ &\leq C_\nu \|u_m\|^2 + \frac{\nu}{4} \|Au_m\|^2. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Reemplazando (2.77)-(2.79) en la desigualdad (2.76), se obtiene

$$\nu \|Au_m(t)\|^2 \leq C_\nu \|f(t)\|^2 + C_\nu \|\partial_t u_m(t)\|^2 + C_\nu \|u_m(t)\|^2 + \frac{\nu}{2} \|Au_m(t)\|^2,$$

y entonces considerando (2.15), se deduce

$$\nu \|Au_m(t)\|^2 \leq C \|f(t)\|^2 + C \|\partial_t u_m(t)\|^2 + C.$$

Luego, multiplicando la última desigualdad por $\tau(t) \leq 1$, se obtiene

$$\nu \tau(t) \|Au_m(t)\|^2 \leq C \|f(t)\|^2 + C \tau(t) \|\partial_t u_m(t)\|^2 + C. \quad (2.80)$$

Como $f, \partial_t f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ entonces $f \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Luego, teniendo en cuenta (2.18) desde (2.80), se concluye

$$\nu \tau(t) \|Au_m(t)\|^2 \leq C, \quad (2.81)$$

para todo $t \in (0, T]$.

Finalmente, razonando de manera análoga a la obtención de (2.75) y (2.81), partiendo desde (2.5) se deduce que u satisface las estimaciones (2.18)-(2.19). $\square$

2.1.2. Existencia y unicidad de soluciones en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

Teorema 2.2. *Sea Ω un dominio tridimensional acotado, con borde uniformemente de clase C^2 y un intervalo de tiempo $(0, T]$, para algún $0 < T < \infty$. Sean $f, \partial_t f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $u_0 \in V$ y ν suficientemente grande o los datos $\|f\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}$ y $\|\nabla u_0\|$ pequeños. Entonces, existe un $T_* = \min\{T, T_1\}$ con T_1 dependiendo de $\|f\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}$ y $\|\nabla u_0\|$, tal que el Problema 2 tiene una única solución u satisfaciendo*

$$u \in L^\infty(0, T_*; V) \cap L^2(0, T_*; D(A)), \quad \partial_t u \in L^2(0, T_*; H). \quad (2.82)$$

Además, la solución u satisface los resultados de regularidad (2.15)-(2.19) para todo $0 < t \leq T_*$, donde $\tau(t) = \min\{1, t\}$. También, las aproximaciones $\{u_m\}$ satisfacen las desigualdades (2.15)-(2.19).

Demostración. Para la demostración de las estimaciones (2.15)-(2.19), algunos cálculos coinciden con los hechos en el caso bidimensional, por lo cual solamente se detallan los cálculos en aquellos términos que requieren ser tratados de manera diferente.

Estimación (2.15).

Similarmente como para (2.25), se obtiene que

$$\{u_m\} \text{ es acotada en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V). \quad (2.83)$$

Estimación (2.16).

Reemplazando $w_i = Au_m(t)$ en (2.12) y siguiendo los mismos pasos como en (2.27)-(2.28), se tiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m\|^2 + \nu \|Au_m\|^2 \leq |(f, Au_m)| + |(u_m \cdot \nabla u_m, Au_m)|. \quad (2.84)$$

Para los términos del lado derecho de (2.84) usando (1.22), (1.18) y las desigualdades de Hölder y Young, se tiene

$$\begin{aligned} |(u_m \cdot \nabla u_m), Au_m| &\leq \|u_m\|_6 \|\nabla u_m\|_3 \|Au_m\| \\ &\leq C \|\nabla u_m\| \|\nabla u_m\|^{1/2} \|Au_m\|^{1/2} \|Au_m\| \\ &\leq C \|\nabla u_m\|^{3/2} \|Au_m\|^{3/2} \\ &\leq C_\nu \|\nabla u_m\|^6 + \frac{\nu}{4} \|Au_m\|^2, \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$|(f, Au_m)| \leq \|f\| \|Au_m\| \leq \frac{1}{\nu} \|f\|^2 + \frac{\nu}{4} \|Au_m\|^2. \quad (2.86)$$

Llevando las desigualdades (2.85)-(2.86) en (2.84), se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m\|^2 + \nu \|Au_m\|^2 \leq \frac{1}{\nu} \|f\|^2 + C_\nu \|\nabla u_m\|^6 + \frac{\nu}{2} \|Au_m\|^2,$$

desde donde resulta

$$\frac{d}{dt} \|\nabla u_m\|^2 + \nu \|Au_m\|^2 \leq \frac{2}{\nu} \|f\|^2 + 2C_\nu \|\nabla u_m\|^6. \quad (2.87)$$

Observar que usando la desigualdad de Poincaré, se tiene

$$\|\nabla u_m\|^2 = (\nabla u_m, \nabla u_m) = (Au_m, u_m) \leq \|Au_m\| \|u_m\| \leq C_\Omega \|Au_m\| \|\nabla u_m\|,$$

y considerando $\tilde{c} = C_\Omega^{-1}$, implica que

$$\|Au_m\| \geq \tilde{c} \|\nabla u_m\|. \quad (2.88)$$

Usando (2.88) en (2.87), se obtiene

$$\frac{d}{dt} \|\nabla u_m\|^2 + \tilde{c}\nu \|\nabla u_m\|^2 \leq \frac{2}{\nu} \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + 2C_\nu \|\nabla u_m\|^6. \quad (2.89)$$

Luego,

$$\frac{d}{dt} \|\nabla u_m\|^2 + \tilde{c}\nu \|\nabla u_m\|^2 - \frac{2}{\nu} \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq 2C_\nu \|\nabla u_m\|^6. \quad (2.90)$$

Como ν suficientemente grande o f pequeño, entonces siempre es posible hallar que

$$\|\nabla u_m\|^2 > \frac{2}{\tilde{c}\nu^2} \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2,$$

lo cual implica que $\tilde{c}\nu \|\nabla u_m\|^2 - \frac{2}{\nu} \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 > 0$, y así desde (2.90) se obtiene

$$\frac{d}{dt} \|\nabla u_m\|^2 \leq 2C_\nu \|\nabla u_m\|^6. \quad (2.91)$$

A seguir se demuestra que

$$\|\nabla u_m(t)\|^2 \leq \mu \quad \text{para } 0 \leq t \leq T_1, \quad (2.92)$$

donde

$$\mu = \max\{4\|\nabla u_0\|^2, \frac{8}{\tilde{c}\nu^2} \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2\} \quad \text{y} \quad T_1 = \frac{3}{4C_\nu \mu^2}.$$

Prueba de (2.92):

Para $t \in (0, T]$ se define $z(t) = \max\{\mu/2, \|\nabla u_m(t)\|^2\}$, entonces la función z es en c.t.p. diferenciable y se tiene

$$\frac{dz}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{si } \|\nabla u_m\|^2 \leq \frac{\mu}{2}, \\ \frac{d}{dt} \|\nabla u_m\|^2 & \text{si } \|\nabla u_m\|^2 > \frac{\mu}{2}. \end{cases} \quad (2.93)$$

Como $\|\nabla u_m(0)\| \leq \|\nabla u_0\|$ y $\|\nabla u_0\|$ pequeño, por la definición de $z(t)$ se tiene que

$$z(0) = \max\{\mu/2, \|\nabla u_m(0)\|^2\} = \frac{\mu}{2}.$$

Desde (2.91) y (2.93),

$$\frac{dz}{dt} \leq 2C_\nu z^3, \quad (2.94)$$

$$z(0) = \mu/2. \quad (2.95)$$

Por Lema 1.17, la solución $z(t)$ de (2.94)-(2.95) es acotada por la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2C_\nu\varphi^3, \quad (2.96)$$

$$\varphi(0) = \mu/2. \quad (2.97)$$

Resolviendo (2.96), se obtiene

$$-\frac{1}{2\varphi^2} + C = 2C_\nu t \Rightarrow 2C - 4C_\nu t = \frac{1}{\varphi^2}, \quad (2.98)$$

y aplicando la condición inicial (2.97), se obtiene que $C = 2/\mu^2$. Luego

$$\frac{4}{\mu^2} - 4C_\nu t = \frac{1}{\varphi^2} \Rightarrow \varphi^2(t) = \frac{\mu^2}{4(1 - C_\nu\mu^2 t)}. \quad (2.99)$$

Ahora, para $t \leq T_1$ se tiene que $4(1 - \mu^2 C_\nu T_1) \leq 4(1 - \mu^2 C_\nu t)$ y desde (2.99), se obtiene

$$\varphi^2(t) = \frac{\mu^2}{4(1 - C_\nu\mu^2 t)} \leq \frac{\mu^2}{4(1 - \mu^2 C_\nu T_1)}. \quad (2.100)$$

Luego, para $T_1 = \frac{3}{4C_\nu\mu^2}$, por la definición de $z(t)$, Lema 1.17 y (2.100), se obtiene

$$\|\nabla u_m(t)\|^4 \leq z^2(t) \leq \varphi^2(t) \leq \frac{\mu^2}{4(1 - \mu^2 C_\nu T_1)} = \mu^2,$$

de donde se sigue (2.92).

Por otro lado, desde (2.87) y (2.92), para $t \leq T_* = \min\{T, T_1\}$ se tiene

$$\frac{d}{dt} \|\nabla u_m\|^2 + \nu \|Au_m\|^2 \leq C(\mu, \nu),$$

e integrando entre 0 y $t \leq T_*$,

$$\|\nabla u_m(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|Au_m(s)\|^2 ds \leq \|\nabla u_m(0)\|^2 + CT_* \leq C, \quad (2.101)$$

para todo $t \in (0, T_*]$. Luego, se concluye que

$$\{u_m\} \text{ es acotada en } L^\infty(0, T_*; V) \cap L^2(0, T_*; D(A)). \quad (2.102)$$

Estimación (2.17).

Reemplazando $w_i = \partial_t u_m(t)$ en (2.12), se tiene

$$\|\partial_t u_m\|^2 = -\nu(Au_m, \partial_t u_m) - (u_m \cdot \nabla u_m, \partial_t u_m) + (f, \partial_t u_m), \quad (2.103)$$

y usando (2.34) y (2.36), se obtiene

$$\|\partial_t u_m\|^2 \leq C_\nu \|Au_m\|^2 + \frac{1}{3} \|\partial_t u_m\|^2 + C\|f\|^2 + |(u_m \cdot \nabla u_m, \partial_t u_m)|. \quad (2.104)$$

Para el último término del lado derecho de (2.104), usando la desigualdad de Hölder junto con (1.23) y (2.101), se tiene

$$\begin{aligned} |(u_m \cdot \nabla u_m, \partial_t u_m)| &\leq \|u_m\|_\infty \|\nabla u_m\| \|\partial_t u_m\| \\ &\leq C \|Au_m\| \|\nabla u_m\| \|\partial_t u_m\| \\ &\leq C \|Au_m\|^2 \|\nabla u_m\|^2 + \frac{1}{6} \|\partial_t u_m\|^2 \\ &\leq C \|Au_m\|^2 + \frac{1}{6} \|\partial_t u_m\|^2. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Luego, reemplazando (2.105) en (2.104)

$$\|\partial_t u_m\|^2 \leq C \|Au_m\|^2 + \frac{1}{2} \|\partial_t u_m\|^2 + C\|f\|^2,$$

lo cual implica

$$\|\partial_t u_m\|^2 \leq C \|Au_m\|^2 + C\|f\|^2. \quad (2.106)$$

Luego, integrando (2.106) entre 0 y t , y teniendo en cuenta (2.101), se obtiene

$$\int_0^t \|\partial_t u_m(s)\|^2 ds \leq C \int_0^t \|Au_m(s)\|^2 ds + C \int_0^t \|f(s)\|^2 ds \leq C, \quad (2.107)$$

para todo $t \in (0, T_*]$. Así, de (2.107) se concluye que

$$\{\partial_t u_m\} \quad \text{es acotada en } L^2(0, T_*; H). \quad (2.108)$$

Existencia de solución.

Observando (2.102), (2.108) y el Teorema 1.8 existe una subsucesión $\{u_{m'}\}$ y un elemento u tal que

$$\begin{aligned} u_{m'} &\rightarrow u \text{ débil-* en } L^\infty(0, T_*; V), \\ u_{m'} &\rightarrow u \text{ débilmente en } L^2(0, T_*; D(A)), \\ \partial_t u_{m'} &\rightarrow \partial_t u \text{ débilmente en } L^2(0, T_*; H). \end{aligned}$$

Más aun, usando el Lema 1.3 junto al Teorema 1.9, se tiene que

$$u_m \rightarrow u \text{ fuertemente en } L^2(0, T_*; V). \quad (2.109)$$

Pasando la límite de forma similar que en el caso bidimensional, se prueba que existe u la única solución del Problema 2.

Desde las desigualdades (2.25), (2.32) y (2.38) se demuestra que para $T = T_*$ la solución u satisface las desigualdades (2.15)-(2.17).

A seguir, al igual que para el caso $n = 2$, se prueba que las aproximaciones u_m también satisfacen (2.18) y (2.19).

Estimación (2.18).

Siguiendo los mismos pasos como para obtener (2.65), se tiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_t u_m\|^2 + \nu \|\nabla \partial_t u_m\|^2 \leq |(\partial_t u_m \cdot \nabla u_m, \partial_t u_m)| + |(\partial_t f, \partial_t u_m)|. \quad (2.110)$$

Usando la propiedad (1.6), desigualdades (1.22) y (1.18) y las desigualdades de Hölder y Young, se tiene

$$\begin{aligned} |(\partial_t u_m \cdot \nabla u_m, \partial_t u_m)| &= |(\partial_t u_m \cdot \nabla \partial_t u_m, u_m)| \leq \|\partial_t u_m\|_3 \|\nabla \partial_t u_m\| \|u_m\|_6 \\ &\leq C \|\partial_t u_m\|^{1/2} \|\nabla \partial_t u_m\|^{3/2} \|\nabla u_m\| \\ &\leq \frac{\nu}{4} \|\nabla \partial_t u_m\|^2 + C_\nu \|\partial_t u_m\|^2 \|\nabla u_m\|^4, \end{aligned} \quad (2.111)$$

$$|(\partial_t f, \partial_t u_m)| \leq \|\partial_t f\| \|\partial_t u_m\| \leq C \|\partial_t f\| \|\nabla \partial_t u_m\| \leq C_\nu \|\partial_t f\|^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla \partial_t u_m\|^2. \quad (2.112)$$

Reemplazando (2.111)-(2.112) en (2.110) y observando (2.16), se obtiene

$$\frac{d}{dt} \|\partial_t u_m\|^2 + \nu \|\nabla \partial_t u_m\|^2 \leq C \|\partial_t u_m\|^2 + C \|\partial_t f\|^2. \quad (2.113)$$

Multiplicando (2.113) por $\tau(t)$ y teniendo en cuenta (2.71)-(2.73), se tiene

$$\frac{d}{dt} (\tau(t) \|\partial_t u_m\|^2) + \nu \tau(t) \|\nabla \partial_t u_m\|^2 \leq C \tau(t) \|\partial_t u_m\|^2 + C \tau(t) \|\partial_t f\|^2. \quad (2.114)$$

En vista que $\partial_t u_m$ satisface (2.17), igual que para el caso bidimensional obtenido en (2.70), se tiene que existe una sucesión $\varepsilon_k \rightarrow 0$, tal que $\varepsilon_k \|\partial_t u(\varepsilon_k)\|^2 \rightarrow 0$.

Integrando (2.114) entre ε_k y $t \leq T_*$, así como también el hecho que $\tau(\varepsilon_k) \leq \varepsilon_k$ se obtiene

$$\begin{aligned} \tau(t) \|\partial_t u_m(t)\|^2 + \nu \int_{\varepsilon_k}^t \tau(s) \|\nabla \partial_t u_m(s)\|^2 ds &\leq \varepsilon_k \|\partial_t u_m(\varepsilon_k)\|^2 + C \int_{\varepsilon_k}^t \|\partial_t u_m(s)\|^2 ds \\ &\quad + C \int_{\varepsilon_k}^t \|\partial_t f(s)\|^2 ds. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Luego, haciendo $\varepsilon_k \rightarrow 0$ en (2.115) y considerando (2.17), se tiene

$$\tau(t) \|\partial_t u_m(t)\|^2 + \nu \int_0^t \tau(s) \|\nabla \partial_t u_m(s)\|^2 ds \leq C \int_0^t \|\partial_t f(s)\|^2 ds + C \int_0^t \|\partial_t u_m(s)\|^2 ds \leq C, \quad (2.116)$$

para todo $t \in (0, T_*]$, desde donde se sigue (2.18).

Estimación (2.19).

Similar como para obtener (2.76), se tiene

$$\nu \|Au_m\|^2 \leq |(f, Au_m)| + |(\partial_t u_m, Au_m)| + |(u_m \cdot \nabla u_m, Au_m)|. \quad (2.117)$$

Aplicando la desigualdad de Hölder, la desigualdad de Young y (1.27) para los términos del lado derecho de (2.117), se obtiene

$$|(f, Au_m)| \leq \|f\| \|Au_m\| \leq C_\nu \|f\|^2 + \frac{\nu}{8} \|Au_m\|^2, \quad (2.118)$$

$$|(\partial_t u_m, Au_m)| \leq \|\partial_t u_m\| \|Au_m\| \leq C_\nu \|\partial_t u_m\|^2 + \frac{\nu}{8} \|Au_m\|^2, \quad (2.119)$$

$$\begin{aligned} |(u_m \cdot \nabla u_m, Au_m)| &\leq \|u_m\|_\infty \|\nabla u_m\| \|Au_m\| \leq C \|\nabla u_m\|^{3/2} \|Au_m\|^{3/2} \\ &\leq C_\nu \|\nabla u_m\|^6 + \frac{\nu}{4} \|Au_m\|^2. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Reemplazando (2.118)-(2.120) en (2.117) y entonces considerando (2.16), se tiene

$$\nu \|Au_m(t)\|^2 \leq C \|f(t)\|^2 + C \|\partial_t u_m(t)\|^2 + C. \quad (2.121)$$

Multiplicando (2.121) por $\tau(t) \leq 1$, teniendo en cuenta que $f \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ y la desigualdad (2.18), se obtiene

$$\nu \tau(t) \|Au_m(t)\|^2 \leq C \tau(t) \|f(t)\|^2 + C \tau(t) \|\partial_t u_m(t)\|^2 + C \leq C, \quad (2.122)$$

para todo $t \in (0, T_*]$, de donde se sigue (2.19).

Finalmente, razonando de manera análoga a las estimaciones anteriores se concluye que la solución u también satisface (2.18)-(2.19). $\square$

2.2. Existencia y unicidad de soluciones: aproximaciones de Galerkin de k-nivel

Para la prueba de existencia de soluciones se usa el método de Galerkin espectral de k-nivel, mediante el cual se define una sucesión de soluciones aproximadas satisfaciendo un sistema de ecuaciones de Navier-Stokes linealizado y la solución del Problema 2 es determinada como el límite de la sucesión de aproximaciones de Galerkin de k-nivel.

Por el Lema 1.8, las autofunciones $\{w_i\}$ del operador de Stokes A forman una base hilbertiana en H . Para cada m_k entero, se define el espacio finito dimensional H_{m_k} como en (1.10), esto es, $H_{m_k} = \text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_{m_{k-1}}, w_{m_k}\}$.

El método de Galerkin de k-nivel consiste en lo siguiente:

i) Hallar $u_1(t) = u_{m_1}(t) \in H_{m_1}$ la aproximación de Galerkin de 1-nivel que satisface el sistema no lineal (2.10)-(2.11) con $m = m_1$.

ii) Para cada k fijado ($k = 2, 3, \dots$) y $H_{m_k} = \text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_{m_{k-1}}, w_{m_k}\}$, dado $u_{k-1}(t) \in H_{m_{k-1}}$, hallar la aproximación de Galerkin de k -nivel $u_k(t) \in H_{m_k}$ tal que

$$u_k(x, t) = \sum_{i=1}^{m_k} \gamma_{im_k}(t) w_i(x), \quad (2.123)$$

donde los coeficientes $\gamma_{im_k}(t)$ son determinados de tal modo que $u_k(t)$ satisfaga el siguiente sistema de Navier-Stokes linealizado

$$\begin{aligned} \partial_t u_k(t) + \nu A u_k(t) + P_{m_k}(u_k(t) \cdot \nabla u_{k-1}(t)) + P_{m_k}(u_{k-1}(t) \cdot \nabla u_k(t)) \\ = P_{m_k} f(t) + P_{m_k}(u_{k-1}(t) \cdot \nabla u_{k-1}(t)), \end{aligned} \quad (2.124)$$

$$u_k(0) = P_{m_k} u_0, \quad (2.125)$$

donde P_{m_k} es la proyección de $L^2(\Omega)$ en H_{m_k} .

Para el sistema (2.124)-(2.125) se tiene la formulación débil: Hallar $u_k(t)$ tal que

$$\begin{aligned} (\partial_t u_k(t), w_i) + \nu (\nabla u_k(t), \nabla w_i) + (u_k(t) \cdot \nabla u_{k-1}(t), w_i) + (u_{k-1}(t) \cdot \nabla u_k(t), w_i) \\ = (f(t), w_i) + (u_{k-1}(t) \cdot \nabla u_{k-1}(t), w_i) \quad \forall w_i \in H_{m_k} \end{aligned} \quad (2.126)$$

$$u_k(0) = P_{m_k} u_0. \quad (2.127)$$

2.2.1. Existencia y unicidad de soluciones en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Previamente a la demostración del teorema de existencia de soluciones del Problema 2, se demuestran algunas estimaciones para las aproximaciones u_k de Galerkin de k -nivel.

Teorema 2.3. *Con las condiciones del Teorema 2.1, las aproximaciones u_k de Galerkin de k -nivel del sistema lineal (2.124)-(2.125) satisfacen las siguientes estimaciones:*

$$\|u_k(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u_k(s)\|^2 ds \leq C, \quad (2.128)$$

$$\|\nabla u_k(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|A u_k(s)\|^2 ds + \int_0^t \|\partial_t u_k(s)\|^2 ds \leq C, \quad (2.129)$$

$$\tau(t) \|\partial_t u_k(t)\|^2 + \nu \tau(t) \|A u_k(t)\|^2 + \nu \int_0^t \tau(s) \|\nabla \partial_t u_k(s)\|^2 ds \leq C, \quad (2.130)$$

para $t \in (0, T]$ y $k = 1, 2, \dots, K$.

Demostración. La demostración de las estimaciones es realizada por inducción sobre k .

i) Por construcción se tiene que $u_1(t) = u_m(t)$ es una aproximación de Galerkin de 1-nivel que satisface el sistema no lineal (2.10)-(2.11), entonces por (2.25), (2.32), (2.38), (2.75) y (2.81) se concluye que $u_1(t)$ satisface (2.128)-(2.130).

ii) Se asume que (2.128)-(2.130) es satisfecho para $k = r - 1$ con $2 \leq r \leq K$.

iii) Por demostrar que (2.128)-(2.130) es satisfecho para $k = r$:

Estimación (2.128).

Reemplazando $w_i = u_k(t) \in H_{m_k}$ en (2.126) y usando (1.5), se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_k\|^2 + \nu \|\nabla u_k\|^2 \leq |(f, u_k)| + |(u_{k-1} \cdot \nabla u_{k-1}, u_k)| + |(u_k \cdot \nabla u_{k-1}, u_k)|. \quad (2.131)$$

Para los términos del lado derecho de (2.131), usando (1.23), la inducción sobre (2.128) para $k = r - 1$ y las desigualdades de Hölder y Young, se tiene

$$|(f, u_k)| \leq \|f\| \|u_k\| \leq C \|f\| \|\nabla u_k\| \leq C_\nu \|f\|^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla u_k\|^2, \quad (2.132)$$

$$\begin{aligned} |(u_{k-1} \cdot \nabla u_{k-1}, u_k)| &= |(u_{k-1} \cdot \nabla u_k, u_{k-1})| \\ &\leq \|u_{k-1}\|_\infty \|\nabla u_k\| \|u_{k-1}\| \\ &\leq C \|Au_{k-1}\| \|\nabla u_k\| \leq C_\nu \|Au_{k-1}\|^2 + \frac{\nu}{8} \|\nabla u_k\|^2, \end{aligned} \quad (2.133)$$

$$\begin{aligned} |(u_k \cdot \nabla u_{k-1}, u_k)| &= |(u_k \cdot \nabla u_k, u_{k-1})| \\ &\leq \|u_k\| \|\nabla u_k\| \|u_{k-1}\|_\infty \\ &\leq C \|u_k\| \|\nabla u_k\| \|Au_{k-1}\| \leq C_\nu \|u_k\|^2 \|Au_{k-1}\|^2 + \frac{\nu}{8} \|\nabla u_k\|^2. \end{aligned} \quad (2.134)$$

Reemplazando (2.132)-(2.134) en (2.131), se tiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_k\|^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla u_k\|^2 \leq C_\nu \|f\|^2 + C_\nu \|\nabla u_{k-1}\|^4 + C_\nu \|u_k\|^2 \|Au_{k-1}\|^2,$$

y por inducción sobre (2.129) para $k = r - 1$, queda

$$\frac{d}{dt} \|u_k\|^2 + \nu \|\nabla u_k\|^2 \leq C \|f\|^2 + C \|\nabla u_{k-1}\|^2 + C \|u_k\|^2 \|Au_{k-1}\|^2. \quad (2.135)$$

Aplicando el Lema 1.18 en (2.135), se tiene

$$\begin{aligned} \|u_k(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u_k(s)\|^2 ds \\ \leq (\|u_k(0)\|^2 + C \int_0^t \|f(s)\|^2 ds + C \int_0^t \|\nabla u_{k-1}(s)\|^2 ds) \exp \left(C \int_0^t \|Au_{k-1}(s)\|^2 ds \right), \end{aligned}$$

y por inducción sobre (2.128) y (2.129) para $k = r - 1$, se sigue (2.128) para $k = r$ y $t \in (0, T]$.

Estimación (2.129).

Reemplazando $w_i = Au_k(t)$ en (2.126), se tiene

$$\begin{aligned} (\partial_t u_k, Au_k) + \nu (Au_k, Au_k) &= (f, Au_k) + (u_{k-1} \cdot \nabla u_{k-1}, Au_k) - (u_k \cdot \nabla u_{k-1}, Au_k) \\ &\quad - (u_{k-1} \cdot \nabla u_k, Au_k), \end{aligned}$$

de donde se deduce

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_k\|^2 + \nu \|Au_k\|^2 &\leq |(f, Au_k)| + |(u_{k-1} \cdot \nabla u_{k-1}, Au_k)| + |(u_k \cdot \nabla u_{k-1}, Au_k)| \\ &\quad + |(u_{k-1} \cdot \nabla u_k, Au_k)|. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Para los términos del lado derecho de (2.136), usando (1.23) y (1.25), las desigualdades de Hölder y Young, la inducción sobre (2.129) para $k = r - 1$ y (2.128), se tiene

$$|(f, Au_k)| \leq \|f\| \|Au_k\| \leq C_\nu \|f\|^2 + \frac{\nu}{8} \|Au_k\|^2, \quad (2.137)$$

$$\begin{aligned} |(u_{k-1} \cdot \nabla u_{k-1}, Au_k)| &\leq \|u_{k-1}\|_\infty \|\nabla u_{k-1}\| \|Au_k\| \\ &\leq C \|Au_{k-1}\| \|Au_k\| \leq C_\nu \|Au_{k-1}\|^2 + \frac{\nu}{8} \|Au_k\|^2, \end{aligned} \quad (2.138)$$

$$\begin{aligned} |(u_k \cdot \nabla u_{k-1}, Au_k)| &\leq \|u_k\|_\infty \|\nabla u_{k-1}\| \|Au_k\| \\ &\leq C \|u_k\|^{1/2} \|Au_k\|^{1/2} \|\nabla u_{k-1}\| \|Au_k\| \\ &\leq C \|\nabla u_{k-1}\|^{1/2} \|Au_k\|^{3/2} \leq C_\nu \|\nabla u_{k-1}\|^2 + \frac{\nu}{8} \|Au_k\|^2, \end{aligned} \quad (2.139)$$

$$\begin{aligned} |(u_{k-1} \cdot \nabla u_k, Au_k)| &\leq \|u_{k-1}\|_\infty \|\nabla u_k\| \|Au_k\| \\ &\leq C \|Au_{k-1}\| \|\nabla u_k\| \|Au_k\| \leq C_\nu \|Au_{k-1}\|^2 \|\nabla u_k\|^2 + \frac{\nu}{8} \|Au_k\|^2. \end{aligned} \quad (2.140)$$

Reemplazando (2.137)-(2.140) en (2.136), se obtiene

$$\frac{d}{dt} \|\nabla u_k\|^2 + \nu \|Au_k\|^2 \leq C \|f\|^2 + C \|Au_{k-1}\|^2 + C \|\nabla u_{k-1}\|^2 + C \|Au_{k-1}\|^2 \|\nabla u_k\|^2. \quad (2.141)$$

Aplicando Lema 1.18 en (2.141), se tiene

$$\begin{aligned} \|\nabla u_k(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|Au_k(s)\|^2 ds \\ \leq (\|\nabla u_k(0)\|^2 + C \int_0^t (\|f(s)\|^2 + \|Au_{k-1}(s)\|^2 + \|\nabla u_{k-1}(s)\|^2) ds) \\ \times \exp \left(C \int_0^t \|Au_{k-1}(s)\|^2 ds \right), \end{aligned}$$

y luego por inducción sobre (2.128) y (2.129) para $k = r - 1$, se sigue

$$\|\nabla u_k(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|Au_k(s)\|^2 ds \leq C, \quad (2.142)$$

para $t \in (0, T]$.

Por otro lado, reemplazando $w_i = \partial_t u_k(t)$ en (2.126), se obtiene

$$(\partial_t u_k, \partial_t u_k) + \nu (Au_k, \partial_t u_k) + (u_k \cdot \nabla u_{k-1}, \partial_t u_k) + (u_{k-1} \cdot \nabla u_k, \partial_t u_k) = (f, \partial_t u_k) + (u_{k-1} \cdot \nabla u_{k-1}, \partial_t u_k),$$

y entonces

$$\begin{aligned} \|\partial_t u_k\|^2 &\leq |(f, \partial_t u_k)| + |(u_{k-1} \cdot \nabla u_{k-1}, \partial_t u_k)| + \nu |(Au_k, \partial_t u_k)| + |(u_k \cdot \nabla u_{k-1}, \partial_t u_k)| \\ &\quad + |(u_{k-1} \cdot \nabla u_k, \partial_t u_k)|. \end{aligned} \quad (2.143)$$

Para los términos del lado derecho de (2.143), usando (1.23), las desigualdades de Hölder y Young, y la desigualdad (2.142), se tiene

$$|(f, \partial_t u_k)| \leq \|f\| \|\partial_t u_k\| \leq C \|f\|^2 + \frac{1}{10} \|\partial_t u_k\|^2, \quad (2.144)$$

$$\begin{aligned} |(u_{k-1} \cdot \nabla u_{k-1}, \partial_t u_k)| &\leq \|u_{k-1}\|_\infty \|\nabla u_{k-1}\| \|\partial_t u_k\| \\ &\leq C \|Au_{k-1}\| \|\partial_t u_k\| \leq C \|Au_{k-1}\|^2 + \frac{1}{10} \|\partial_t u_k\|^2, \end{aligned} \quad (2.145)$$

$$\nu |(Au_k, \partial_t u_k)| \leq \nu \|Au_k\| \|\partial_t u_k\| \leq C \|Au_k\|^2 + \frac{1}{10} \|\partial_t u_k\|^2, \quad (2.146)$$

$$\begin{aligned} |(u_k \cdot \nabla u_{k-1}, \partial_t u_k)| &\leq \|u_k\|_\infty \|\nabla u_{k-1}\| \|\partial_t u_k\| \\ &\leq C \|Au_k\| \|\partial_t u_k\| \leq C \|Au_k\|^2 + \frac{1}{10} \|\partial_t u_k\|^2, \end{aligned} \quad (2.147)$$

$$\begin{aligned} |(u_{k-1} \cdot \nabla u_k, \partial_t u_k)| &\leq \|u_{k-1}\|_\infty \|\nabla u_k\| \|\partial_t u_k\| \\ &\leq C \|Au_{k-1}\| \|\partial_t u_k\| \leq C \|Au_{k-1}\|^2 + \frac{1}{10} \|\partial_t u_k\|^2. \end{aligned} \quad (2.148)$$

Reemplazando (2.144)-(2.148) en (2.143), se obtiene

$$\|\partial_t u_k\|^2 \leq C \|f\|^2 + C \|Au_{k-1}\|^2 + C \|Au_k\|^2. \quad (2.149)$$

Integrando (2.149) entre 0 y $t \in (0, T]$, y teniendo en cuenta (2.142), se obtiene

$$\int_0^t \|\partial_t u_k(s)\|^2 ds \leq C \int_0^t \|f(s)\|^2 ds + C \int_0^t \|Au_{k-1}(s)\|^2 ds + C \int_0^t \|Au_k(s)\|^2 ds \leq C. \quad (2.150)$$

Así, de (2.142) y (2.150) se concluye (2.129).

Estimación (2.130).

Derivando (2.126) con respecto a t , reemplazando $w_i = \partial_t u_k(t)$ y usando (1.5), se tiene

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 u_k, \partial_t u_k) + \nu (A \partial_t u_k, \partial_t u_k) &= (\partial_t f, \partial_t u_k) + (\partial_t u_{k-1} \cdot \nabla u_{k-1}, \partial_t u_k) + (u_{k-1} \cdot \nabla \partial_t u_{k-1}, \partial_t u_k) \\ &\quad - (\partial_t u_k \cdot \nabla u_{k-1}, \partial_t u_k) - (u_k \cdot \nabla \partial_t u_{k-1}, \partial_t u_k) \\ &\quad - (\partial_t u_{k-1} \cdot \nabla u_k, \partial_t u_k), \end{aligned}$$

y entonces se deduce

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_t u_k\|^2 + \nu \|\nabla \partial_t u_k\|^2 &\leq |(\partial_t f, \partial_t u_k)| + |(\partial_t u_{k-1} \cdot \nabla u_{k-1}, \partial_t u_k)| + |(u_{k-1} \cdot \nabla \partial_t u_{k-1}, \partial_t u_k)| \\ &\quad + |(\partial_t u_k \cdot \nabla u_{k-1}, \partial_t u_k)| + |(u_k \cdot \nabla \partial_t u_{k-1}, \partial_t u_k)| \\ &\quad + |(\partial_t u_{k-1} \cdot \nabla u_k, \partial_t u_k)|. \end{aligned} \quad (2.151)$$

Para los términos del lado derecho de (2.151), usando las desigualdades de Hölder, Poincaré y Young, así como también las desigualdades (1.23), (1.19) y (2.129), se tiene

$$\begin{aligned} |(\partial_t f, \partial_t u_k)| &\leq \|\partial_t f\| \|\partial_t u_k\| \leq C \|\partial_t f\| \|\nabla \partial_t u_k\| \\ &\leq C_\nu \|\partial_t f\|^2 + \frac{\nu}{12} \|\nabla \partial_t u_k\|^2, \end{aligned} \quad (2.152)$$

$$\begin{aligned} |(\partial_t u_{k-1} \cdot \nabla u_{k-1}, \partial_t u_k)| &= |(\partial_t u_{k-1} \cdot \nabla \partial_t u_k, u_{k-1})| \\ &\leq \|\partial_t u_{k-1}\| \|\nabla \partial_t u_k\| \|u_{k-1}\|_\infty \\ &\leq C \|\partial_t u_{k-1}\| \|\nabla \partial_t u_k\| \|Au_{k-1}\| \\ &\leq C_\nu \|\partial_t u_{k-1}\|^2 \|Au_{k-1}\|^2 + \frac{\nu}{12} \|\nabla \partial_t u_k\|^2, \end{aligned} \quad (2.153)$$

$$\begin{aligned} |(u_{k-1} \cdot \nabla \partial_t u_{k-1}, \partial_t u_k)| &= |(u_{k-1} \cdot \nabla \partial_t u_k, \partial_t u_{k-1})| \\ &\leq C_\nu \|\partial_t u_{k-1}\|^2 \|Au_{k-1}\|^2 + \frac{\nu}{12} \|\nabla \partial_t u_k\|^2, \end{aligned} \quad (2.154)$$

$$\begin{aligned} |(\partial_t u_k \cdot \nabla u_{k-1}, \partial_t u_k)| &\leq \|\partial_t u_k\|_4^2 \|\nabla u_{k-1}\| \\ &\leq C \|\partial_t u_k\| \|\nabla \partial_t u_k\| \leq C_\nu \|\partial_t u_k\|^2 + \frac{\nu}{12} \|\nabla \partial_t u_k\|^2, \end{aligned} \quad (2.155)$$

$$\begin{aligned} |(u_k \cdot \nabla \partial_t u_{k-1}, \partial_t u_k)| &= |(u_k \cdot \nabla \partial_t u_k, \partial_t u_{k-1})| \\ &\leq \|u_k\|_\infty \|\nabla \partial_t u_k\| \|\partial_t u_{k-1}\| \\ &\leq C \|Au_k\| \|\nabla \partial_t u_k\| \|\partial_t u_{k-1}\| \\ &\leq C_\nu \|Au_k\|^2 \|\partial_t u_{k-1}\|^2 + \frac{\nu}{12} \|\nabla \partial_t u_k\|^2, \end{aligned} \quad (2.156)$$

$$\begin{aligned} |(\partial_t u_{k-1} \cdot \nabla u_k, \partial_t u_k)| &= |(\partial_t u_{k-1} \cdot \nabla \partial_t u_k, u_k)| \\ &\leq C_\nu \|Au_k\|^2 \|\partial_t u_{k-1}\|^2 + \frac{\nu}{12} \|\nabla \partial_t u_k\|^2. \end{aligned} \quad (2.157)$$

Reemplazando (2.152)-(2.157) en (2.151), se obtiene

$$\frac{d}{dt} \|\partial_t u_k\|^2 + \nu \|\nabla \partial_t u_k\|^2 \leq C \|\partial_t f\|^2 + C \|\partial_t u_k\|^2 + C \|\partial_t u_{k-1}\|^2 (\|Au_{k-1}\|^2 + \|Au_k\|^2). \quad (2.158)$$

Multiplicando (2.158) por $\tau(t) \leq 1$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\tau(t) \|\partial_t u_k\|^2) + \nu \tau(t) \|\nabla \partial_t u_k\|^2 &\leq \tau'(t) \|\partial_t u_k\|^2 + C \|\partial_t f\|^2 + C \|\partial_t u_k\|^2 \\ &\quad + C \tau(t) \|\partial_t u_{k-1}\|^2 (\|Au_{k-1}\|^2 + \|Au_k\|^2), \end{aligned}$$

y desde que $\tau'(t) \leq 1$, usando inducción sobre (2.130) para $k = r - 1$, se obtiene

$$\frac{d}{dt} (\tau(t) \|\partial_t u_k\|^2) + \nu \tau(t) \|\nabla \partial_t u_k\|^2 \leq C \|\partial_t u_k\|^2 + C \|\partial_t f\|^2 + C (\|Au_{k-1}\|^2 + \|Au_k\|^2). \quad (2.159)$$

Similar como para obtener (2.70), dado que $\partial_t u_k(t)$ satisface (2.129) existe una sucesión $\varepsilon_n \rightarrow 0$, tal que $\varepsilon_n \|\partial_t u_k(\varepsilon_n)\|^2 \rightarrow 0$.

Integrando (2.159) entre ε_n y $t \in (0, T]$ y observando que $\tau(\varepsilon_n) \leq \varepsilon_n$, se obtiene

$$\begin{aligned} \tau(t)\|\partial_t u_k(t)\|^2 + \nu \int_{\varepsilon_n}^t \tau(s)\|\nabla \partial_t u_k(s)\|^2 ds \\ \leq \varepsilon_n \|\partial_t u_k(\varepsilon_n)\|^2 + C \int_{\varepsilon_n}^t \|\partial_t u_k(s)\|^2 ds + C \int_{\varepsilon_n}^t \|\partial_t f(s)\|^2 ds \\ + C \int_{\varepsilon_n}^t (\|Au_{k-1}(s)\|^2 + \|Au_k(s)\|^2) ds. \end{aligned} \quad (2.160)$$

Luego, haciendo $\varepsilon_n \rightarrow 0$ en (2.160), se tiene

$$\begin{aligned} \tau(t)\|\partial_t u_k(t)\|^2 + \nu \int_0^t \tau(s)\|\nabla \partial_t u_k(s)\|^2 ds \leq C \int_0^t \|\partial_t u_k(s)\|^2 ds + C \int_0^t \|\partial_t f(s)\|^2 ds \\ + C \int_0^t (\|Au_{k-1}(s)\|^2 + \|Au_k(s)\|^2) ds, \end{aligned}$$

lo cual por (2.129) y la condición sobre $\partial_t f$, implica

$$\tau(t)\|\partial_t u_k(t)\|^2 + \nu \int_0^t \tau(s)\|\nabla \partial_t u_k(s)\|^2 ds \leq C, \quad (2.161)$$

para $t \in (0, T]$.

Por otro lado, reemplazando $w_i = Au_k(t)$ en (2.126) se tiene

$$\begin{aligned} \nu(Au_k, Au_k) &= -(\partial_t u_k, Au_k) - (u_k \cdot \nabla u_{k-1}, Au_k) - (u_{k-1} \cdot \nabla u_k, Au_k) \\ &\quad + (f, Au_k) + (u_{k-1} \cdot \nabla u_{k-1}, Au_k), \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} \nu\|Au_k\|^2 &\leq |(\partial_t u_k, Au_k)| + |(u_k \cdot \nabla u_{k-1}, Au_k)| + |(u_{k-1} \cdot \nabla u_k, Au_k)| \\ &\quad + |(f, Au_k)| + |(u_{k-1} \cdot \nabla u_{k-1}, Au_k)|. \end{aligned} \quad (2.162)$$

Para los términos del lado derecho de (2.162), usando (1.23), (1.25) y (2.129), se tiene

$$|(\partial_t u_k, Au_k)| \leq \|\partial_t u_k\| \|Au_k\| \leq C_\nu \|\partial_t u_k\|^2 + \frac{\nu}{10} \|Au_k\|^2, \quad (2.163)$$

$$\begin{aligned} |(u_k \cdot \nabla u_{k-1}, Au_k)| &\leq \|u_k\|_\infty \|\nabla u_{k-1}\| \|Au_k\| \\ &\leq C \|u_k\|^{1/2} \|Au_k\|^{3/2} \leq C_\nu \|u_k\|^2 + \frac{\nu}{10} \|Au_k\|^2, \end{aligned} \quad (2.164)$$

$$\begin{aligned} |(u_{k-1} \cdot \nabla u_k, Au_k)| &\leq \|u_{k-1}\|_\infty \|\nabla u_k\| \|Au_k\| \\ &\leq C \|Au_{k-1}\| \|Au_k\| \leq C_\nu \|Au_{k-1}\|^2 + \frac{\nu}{10} \|Au_k\|^2, \end{aligned} \quad (2.165)$$

$$|(f, Au_k)| \leq \|f\| \|Au_k\| \leq C_\nu \|f\|^2 + \frac{\nu}{10} \|Au_k\|^2, \quad (2.166)$$

$$\begin{aligned} |(u_{k-1} \cdot \nabla u_{k-1}, Au_k)| &\leq \|u_{k-1}\|_\infty \|\nabla u_{k-1}\| \|Au_k\| \\ &\leq C \|Au_{k-1}\| \|Au_k\| \leq C_\nu \|Au_{k-1}\|^2 + \frac{\nu}{10} \|Au_k\|^2. \end{aligned} \quad (2.167)$$

Reemplazando (2.163)-(2.167) en (2.162), se obtiene

$$\nu \|Au_k\|^2 \leq C \|\partial_t u_k\|^2 + C \|u_k\|^2 + C \|Au_{k-1}\|^2 + C \|f\|^2,$$

y entonces multiplicando por $\tau(t) \leq 1$, usando (2.161) y (2.128), y la inducción sobre (2.130) para $k = r - 1$, se sigue

$$\nu \tau(t) \|Au_k\|^2 \leq C \tau(t) \|\partial_t u_k\|^2 + C \|u_k\|^2 + C \tau(t) \|Au_{k-1}\|^2 + C \tau(t) \|f\|^2 \leq C, \quad (2.168)$$

para $t \in (0, T]$.

Por lo tanto, (2.161) y (2.168) implican (2.130). $\square$

A seguir, se enuncia el teorema de existencia y unicidad de soluciones.

Teorema 2.4. *Con las condiciones del Teorema 2.3, las soluciones u_k de Galerkin de k -nivel del sistema lineal (2.124)-(2.125) convergen a la única solución u del Problema 2 dada en el Teorema 2.1.*

Demostración. Por el Teorema 2.3 observando las desigualdades (2.128) y (2.129) para las aproximaciones u_k , se tiene que existe una subsucesión $u_{k'}$ y una función u tal que

$$u_{k'} \rightarrow u \text{ débil en } L^2(0, T; D(A)), \quad (2.169)$$

$$\partial_t u_{k'} \rightarrow \partial_t u \text{ débil en } L^2(0, T; H), \quad (2.170)$$

y por resultados de compacidad

$$u_{k'} \rightarrow u \text{ fuerte en } L^2(0, T; V). \quad (2.171)$$

Multiplicando (2.126) por la función $\psi \in C^\infty([0, T])$ e integrando entre 0 y T , se tiene

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\partial_t u_k(t), w_i \psi(t)) dt + \nu \int_0^T (Au_k(t), w_i \psi(t)) dt \\ & + \int_0^T (u_k(t) \cdot \nabla u_{k-1}(t), w_i \psi(t)) dt + \int_0^T (u_{k-1}(t) \cdot \nabla u_k(t), w_i \psi(t)) dt \\ & = \int_0^T (f(t), w_i \psi(t)) dt + \int_0^T (u_{k-1}(t) \cdot \nabla u_{k-1}(t), w_i \psi(t)) dt. \end{aligned} \quad (2.172)$$

Cuando $k' \rightarrow \infty$, observando las convergencias (2.169) y (2.170), se tiene

$$\int_0^T (\partial_t u_k(t), w_i \psi(t)) dt \rightarrow \int_0^T (\partial_t u(t), w_i \psi(t)) dt, \quad (2.173)$$

$$\int_0^T (Au_k(t), w_i \psi(t)) dt \rightarrow \int_0^T (Au(t), w_i \psi(t)) dt. \quad (2.174)$$

Como $w_i\psi \in L^2(0, T; V)$, teniendo en cuenta Lema 1.23, (2.169) y (2.171), se tiene

$$\int_0^T (u_k(t) \cdot \nabla u_{(k-1)}(t), w_i\psi(t))dt \rightarrow \int_0^T (u(t) \cdot \nabla u(t), w_i\psi(t))dt, \quad (2.175)$$

$$\int_0^T (u_{(k-1)}(t) \cdot \nabla u_k(t), w_i\psi(t))dt \rightarrow \int_0^T (u(t) \cdot \nabla u(t), w_i\psi(t))dt, \quad (2.176)$$

$$\int_0^T (u_{(k-1)}(t) \cdot \nabla u_{(k-1)}(t), w_i\psi(t))dt \rightarrow \int_0^T (u(t) \cdot \nabla u(t), w_i\psi(t))dt. \quad (2.177)$$

Por lo tanto, pasando al límite en (2.172) cuando $m_k \rightarrow \infty$ y teniendo en cuenta (2.173)-(2.177), se concluye que u satisface

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\partial_t u(t), w_i\psi(t))dt + \nu \int_0^T (Au(t), w_i\psi(t))dt + \int_0^T (u(t) \cdot \nabla u(t), w_i\psi(t))dt \\ &= \int_0^T (f(t), w_i\psi(t))dt, \end{aligned} \quad (2.178)$$

para todo $w_i \in V$. Luego, por densidad (2.178) se mantiene para todo $w\psi \in L^2(0, T; V)$, esto es u satisface (2.5). Fácilmente se prueba que u satisface (2.51), lo cual implica que u satisface la condición inicial (2.6). $\square$

2.2.2. Existencia y unicidad de soluciones en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

Al igual que en el caso bidimensional, previamente a la demostración del teorema de existencia, se demuestran algunas estimaciones para las aproximaciones u_k de Galerkin de k -nivel.

Teorema 2.5. *Sea Ω un dominio tridimensional acotado, con borde uniformemente de clase C^2 y un intervalo de tiempo $(0, T]$, para algún $0 < T < \infty$. Sean $f, \partial_t f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $u_0 \in V$. Entonces, las aproximaciones u_k de Galerkin de k -nivel donde $k = 1, 2, \dots, K$ satisfacen las estimaciones (2.128)-(2.130) dadas en el Teorema 2.3, para $t \in (0, T_*]$ con T_* definido en Teorema 2.2.*

Demostración. Como en el Teorema 2.3, por inducción se asume que las estimaciones (2.128)-(2.130) son válidas para $k = r - 1$ con $2 \leq r \leq K$.

Estimación (2.128).

Razonando de manera análoga al caso bidimensional se obtiene

$$\|u_k(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u_k(s)\|^2 ds \leq C,$$

para $t \in (0, T_*]$.

Estimación (2.129).

Similar como para obtener (2.136), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_k\|^2 + \nu \|Au_k\|^2 &\leq |(f, Au_k)| + |(u_{k-1} \cdot \nabla u_{k-1}, Au_k)| \\ &\quad + |(u_k \cdot \nabla u_{k-1}, Au_k)| + |(u_{k-1} \cdot \nabla u_k, Au_k)|. \end{aligned} \quad (2.179)$$

Para el tercer término del lado derecho de (2.179), usando las desigualdades de Hölder y Young, (1.27) y la inducción sobre (2.129) para $k = r - 1$, se tiene

$$\begin{aligned} |(u_k \cdot \nabla u_{k-1}, Au_k)| &\leq \|u_k\|_\infty \|\nabla u_{k-1}\| \|Au_k\| \\ &\leq C \|\nabla u_k\|^{1/2} \|Au_k\|^{3/2} \leq C_\nu \|\nabla u_k\|^2 + \frac{\nu}{8} \|Au_k\|^2. \end{aligned} \quad (2.180)$$

Reemplazando (2.137), (2.138), (2.140) y (2.180) en (2.179), se obtiene

$$\frac{d}{dt} \|\nabla u_k\|^2 + \nu \|Au_k\|^2 \leq C \|f\|^2 + C \|Au_{k-1}\|^2 + C \|\nabla u_k\|^2 + C \|Au_{k-1}\|^2 \|\nabla u_k\|^2. \quad (2.181)$$

Aplicando el Lema 1.18 en (2.181), se obtiene

$$\begin{aligned} &\|\nabla u_k(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|Au_k(s)\|^2 ds \\ &\leq (\|\nabla u_k(0)\|^2 + C \int_0^t \|f(s)\|^2 ds + C \int_0^t \|Au_{k-1}(s)\|^2 ds + C \int_0^t \|\nabla u_k(s)\|^2 ds) \\ &\quad \times \exp \left(C \int_0^t \|Au_{k-1}(s)\|^2 ds \right). \end{aligned} \quad (2.182)$$

Luego, usando (2.128) y la inducción sobre (2.129) para $k = r - 1$, de (2.182) se tiene

$$\|\nabla u_k(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|Au_k(s)\|^2 ds \leq C, \quad (2.183)$$

para $t \in (0, T_*]$.

También, al igual que para el caso $n = 2$ se cumple la desigualdad (2.150). Por lo tanto, (2.183) y (2.150) implican (2.129).

Estimación (2.130).

Similar como para (2.151), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_t u_k\|^2 + \nu \|\nabla \partial_t u_k\|^2 &\leq |(\partial_t f, \partial_t u_k)| + |(\partial_t u_{k-1} \cdot \nabla u_{k-1}, \partial_t u_k)| + |(u_{k-1} \cdot \nabla \partial_t u_{k-1}, \partial_t u_k)| \\ &\quad + |(\partial_t u_k \cdot \nabla u_{k-1}, \partial_t u_k)| + |(u_k \cdot \nabla \partial_t u_{k-1}, \partial_t u_k)| \\ &\quad + |(\partial_t u_{k-1} \cdot \nabla u_k, \partial_t u_k)|. \end{aligned} \quad (2.184)$$

Para el cuarto término del lado derecho de (2.184), usando (1.23) y las desigualdades de Hölder y Young, se tiene

$$\begin{aligned}
|(\partial_t u_k \cdot \nabla u_{k-1}, \partial_t u_k)| &= |(\partial_t u_k \cdot \nabla \partial_t u_k, u_{k-1})| \\
&\leq \|\partial_t u_k\| \|\nabla \partial_t u_k\| \|u_{k-1}\|_\infty \\
&\leq C \|\partial_t u_k\| \|\nabla \partial_t u_k\| \|Au_{k-1}\| \\
&\leq C_\nu \|\partial_t u_k\|^2 \|Au_{k-1}\|^2 + \frac{\nu}{12} \|\nabla \partial_t u_k\|^2.
\end{aligned} \tag{2.185}$$

Los otros términos de (2.184) son estimados por (2.152)-(2.154) y (2.156)-(2.157), luego reemplazando éstas desigualdades y (2.185) en (2.184), se obtiene

$$\frac{d}{dt} \|\partial_t u_k\|^2 + \nu \|\nabla \partial_t u_k\|^2 \leq C \|\partial_t f\|^2 + C \|\partial_t u_{k-1}\|^2 (\|Au_{k-1}\|^2 + \|Au_k\|^2) + C \|\partial_t u_k\|^2 \|Au_{k-1}\|^2. \tag{2.186}$$

Multiplicando (2.186) por $\tau(t) \leq 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (\tau(t) \|\partial_t u_k\|^2) + \nu \tau(t) \|\nabla \partial_t u_k\|^2 &\leq \tau'(t) \|\partial_t u_k\|^2 + C \|\partial_t f\|^2 + C \tau(t) \|\partial_t u_k\|^2 \|Au_{k-1}\|^2 \\
&\quad + C \tau(t) \|\partial_t u_{k-1}\|^2 (\|Au_{k-1}\|^2 + \|Au_k\|^2),
\end{aligned}$$

y usando inducción sobre (2.130) para $k = r - 1$ y el hecho que $\tau'(t) \leq 1$, resulta

$$\frac{d}{dt} (\tau(t) \|\partial_t u_k\|^2) + \nu \tau(t) \|\nabla \partial_t u_k\|^2 \leq C \|\partial_t u_k\|^2 + C \|\partial_t f\|^2 + C (\|Au_{k-1}\|^2 + \|Au_k\|^2). \tag{2.187}$$

Similar como para obtener (2.70) dado que $\partial_t u_k(t)$ satisface (2.129), existe una sucesión $\varepsilon_n \rightarrow 0$, tal que $\varepsilon_n \|\partial_t u_k(\varepsilon_n)\|^2 \rightarrow 0$.

Integrando (2.187) entre ε_n y t , y observando que $\tau(\varepsilon_n) \leq \varepsilon_n$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\tau(t) \|\partial_t u_k(t)\|^2 + \nu \int_{\varepsilon_n}^t \tau(s) \|\nabla \partial_t u_k(s)\|^2 ds &\leq \varepsilon_n \|\partial_t u_k(\varepsilon_n)\|^2 + C \int_{\varepsilon_n}^t \|\partial_t u_k(s)\|^2 ds \\
&\quad + C \int_{\varepsilon_n}^t \|\partial_t f(s)\|^2 ds + C \int_{\varepsilon_n}^t \|Au_{k-1}(s)\|^2 ds \\
&\quad + C \int_{\varepsilon_n}^t \|Au_k(s)\|^2 ds,
\end{aligned}$$

y entonces tomando límite cuando $\varepsilon_n \rightarrow 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
\tau(t) \|\partial_t u_k(t)\|^2 + \nu \int_0^t \tau(s) \|\nabla \partial_t u_k(s)\|^2 ds &\leq C \int_0^t \|\partial_t u_k(s)\|^2 ds + C \int_0^t \|\partial_t f(s)\|^2 ds \\
&\quad + C \int_0^t \|Au_{k-1}(s)\|^2 ds + C \int_0^t \|Au_k(s)\|^2 ds,
\end{aligned}$$

y luego, teniendo en cuenta (2.129), se sigue

$$\tau(t) \|\partial_t u_k(t)\|^2 + \nu \int_0^t \tau(s) \|\nabla \partial_t u_k(s)\|^2 ds \leq C, \tag{2.188}$$

para $t \in (0, T_*]$.

Similar como para (2.162), se tiene

$$\begin{aligned} \nu \|Au_k\|^2 &\leq |(\partial_t u_k, Au_k)| + |(u_k \cdot \nabla u_{k-1}, Au_k)| + |(u_{k-1} \cdot \nabla u_k, Au_k)| \\ &\quad + |(f, Au_k)| + |(u_{k-1} \cdot \nabla u_{k-1}, Au_k)|. \end{aligned} \quad (2.189)$$

Para el segundo término del lado derecho de (2.189), usando las desigualdades de Hölder y Young, (1.27) y (2.129), se tiene

$$\begin{aligned} |(u_k \cdot \nabla u_{k-1}, Au_k)| &\leq \|u_k\|_\infty \|\nabla u_{k-1}\| \|Au_k\| \\ &\leq C \|\nabla u_k\|^{1/2} \|Au_k\|^{3/2} \leq C_\nu \|\nabla u_k\|^2 + \frac{\nu}{10} \|Au_k\|^2. \end{aligned} \quad (2.190)$$

Los otros términos del lado derecho de (2.189) satisfacen las estimaciones (2.163), (2.165)-(2.167), luego reemplazando estas desigualdades y (2.190) en (2.189), se obtiene

$$\nu \|Au_k\|^2 \leq C \|\partial_t u_k\|^2 + C \|\nabla u_k\|^2 + C \|Au_{k-1}\|^2 + C \|f\|^2. \quad (2.191)$$

Multiplicando (2.191) por $\tau(t) \leq 1$ y observando (2.129), se tiene

$$\nu \tau(t) \|Au_k\|^2 \leq C \tau(t) \|\partial_t u_k\|^2 + C + C \tau(t) \|Au_{k-1}\|^2 + C \|f\|^2,$$

y entonces usando inducción sobre (2.130) para $k = r - 1$ y (2.188), se sigue

$$\nu \tau(t) \|Au_k(t)\|^2 \leq C, \quad (2.192)$$

para $t \in (0, T_*]$.

Por lo tanto, de (2.188) y (2.192) se sigue (2.130). $\square$

A seguir se tiene el siguiente resultado de existencia y unicidad soluciones.

Teorema 2.6. *Con las condiciones del Teorema 2.5, las soluciones u_k de Galerkin de k -nivel del sistema lineal (2.124)-(2.125) convergen a la única solución u del Problema 2 dada por el Teorema 2.2.*

Demostración. Para la demostración se razona de igual forma al caso bidimensional dada en el Teorema 2.4. $\square$

CAPÍTULO 3

ESTIMACIONES DE ERROR PARA LAS SOLUCIONES APROXIMADAS

En las normas $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ y $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$), se determinan estimaciones de error para las aproximaciones de Galerkin de 1-nivel definidas en (2.9)-(2.11) y para las aproximaciones de Galerkin de K-nivel definidas en (2.123)-(2.125).

El radio de convergencia es determinado en función de los valores propios del operador de Stokes y se demuestra que cuando $m = m_K$, sobre el espacio H_{m_K} la aproximación de Galerkin u_{m_K} de 1-nivel y la aproximación de Galerkin u_K de K-nivel tienen radio de convergencia del mismo orden.

Al igual que en el capítulo anterior, en lo que sigue C denota una constante real no negativa que puede tomar diferentes valores en distintas situaciones.

3.1. Estimaciones de error para las aproximaciones de Galerkin de 1-nivel

Para las aproximaciones u_m de Galerkin de 1-nivel y la solución u del Problema 2 dada en Teorema 2.1 y en Teorema 2.2, se define

$$q_m(x, t) = u(x, t) - P_m u(x, t), \quad e_m(x, t) = P_m u(x, t) - u_m(x, t), \quad (3.1)$$

con P_m dado en (1.12), esto es

$$P_m u(x, t) = \sum_{i=1}^m (u(x, t), w_i(x)) w_i(x).$$

Entonces,

$$u(x, t) - u_m(x, t) = q_m(x, t) + e_m(x, t). \quad (3.2)$$

Observando (2.11),

$$e_m(0) = P_m u(0) - u_m(0) = P_m u_0 - u_m(0) = 0. \quad (3.3)$$

Para el primer término del lado derecho de (3.2) se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) un dominio acotado y u la única solución del Problema 2 dada por el Teorema 2.1 o el Teorema 2.2. Para $0 < t \leq T^*$ ($T^* = T$ si $n = 2$, $T^* = T_*$ si $n = 3$), la función $q_m(t)$ definida en (3.1) satisface las siguientes estimaciones:*

$$\|q_m(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla q_m(s)\|^2 ds \leq C \lambda_m^{-1}, \quad (3.4)$$

$$\tau(t) \|\nabla q_m(t)\|^2 + \int_0^t \tau(s) \|\partial_t q_m(s)\|^2 ds \leq C \lambda_m^{-1}, \quad (3.5)$$

$$\tau(t) \|q_m(t)\|^2 + \int_0^t \|q_m(s)\|^2 ds \leq C \lambda_m^{-2}, \quad (3.6)$$

donde λ_m es el m -ésimo valor propio del operador de Stokes A y $\tau(t) = \min\{1, t\}$.

Demostración. De Lema 1.11 y Lema 1.13 dados en el capítulo 1, se tiene

$$\|q_m(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla q_m(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{\lambda_m} \|\nabla u\|^2 + \frac{\nu}{\lambda_m} \int_0^t \|Au(s)\|^2 ds,$$

y entonces observando (2.16) se sigue (3.4).

De Lema 1.11 y Lema 1.13, se tiene

$$\tau(t) \|\nabla q_m(t)\|^2 + \int_0^t \tau(s) \|\partial_t q_m(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{\lambda_m} \tau(t) \|Au(t)\|^2 + \frac{1}{\lambda_m} \int_0^t \tau(s) \|\nabla \partial_t u(s)\|^2 ds,$$

luego observando (2.18) y (2.19) se sigue (3.5).

De Lema 1.12, se tiene

$$\tau(t) \|q_m(t)\|^2 + \int_0^t \|q_m(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{\lambda_m^2} \tau(t) \|Au(t)\|^2 + \frac{1}{\lambda_m^2} \int_0^t \|Au(s)\|^2 ds,$$

luego teniendo en cuenta (2.16) y (2.19) se obtiene (3.6). $\square$

Para obtener las estimaciones del error, teniendo en cuenta el Teorema 3.1 y la definición dada en (3.2), solo resta determinar estimaciones para $e_m(t)$. Para el segundo término del lado derecho de (3.2) se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) un dominio acotado y u la única solución del Problema 2 dada en el Teorema 2.1 si $n = 2$ y en el Teorema 2.2 si $n = 3$. Para $0 < t \leq T^*$ ($T^* = T$ si $n = 2$, $T^* = T_*$ si $n = 3$), la función $e_m(t)$ definida en (3.1) satisface las siguientes estimaciones:*

$$\|e_m(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla e_m(s)\|^2 ds \leq C \lambda_m^{-3/2}, \quad (3.7)$$

$$\nu \tau(t) \|\nabla e_m\|^2 + \int_0^t \tau(s) \|\partial_t e_m(s)\|^2 ds \leq C \lambda_m^{-1}, \quad (3.8)$$

donde λ_m es el m -ésimo valor propio del operador de Stokes A y $\tau(t) = \min\{1, t\}$.

Demostración. Aplicando la proyección P_m en (2.5), observando (1.13) y haciendo el producto interno con $v \in H_m$, se tiene

$$(P_m \partial_t u(t), v) + \nu(AP_m u(t), v) + (u(t) \cdot \nabla u(t), v) = (f(t), v), \quad (3.9)$$

desde que $P_m v = v$ y $Pv = v$. También, haciendo el producto interno de (2.10) con $v \in H_m$, se tiene

$$(\partial_t u_m(t), v) + \nu(Au_m(t), v) + (u_m(t) \cdot \nabla u_m(t), v) = (f(t), v). \quad (3.10)$$

Luego, restando (3.10) desde (3.9) y observando la definición de e_m dada en (3.1), se obtiene

$$(\partial_t e_m, v) + \nu(Ae_m, v) + ((u - u_m) \cdot \nabla u, v) + (u_m \cdot \nabla(u - u_m), v) = 0. \quad (3.11)$$

Como $u - u_m = e_m + q_m$ entonces (3.11) se reescribe como

$$(\partial_t e_m, v) + \nu(Ae_m, v) + ((e_m + q_m) \cdot \nabla u, v) + (u_m \cdot \nabla(e_m + q_m), v) = 0. \quad (3.12)$$

Considerando la ecuación (3.12) se determinan las estimaciones (3.7)-(3.8).

Estimación (3.7).

Tomando $v = e_m(t) \in H_m$ en (3.12) y considerando (1.5), se tiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e_m\|^2 + \nu(Ae_m, e_m) + (e_m \cdot \nabla u, e_m) + (q_m \cdot \nabla u, e_m) + (u_m \cdot \nabla q_m, e_m) = 0,$$

de donde se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e_m\|^2 + \nu \|\nabla e_m\|^2 \leq |(e_m \cdot \nabla u, e_m)| + |(q_m \cdot \nabla u, e_m)| + |(u_m \cdot \nabla q_m, e_m)|. \quad (3.13)$$

Para los términos del lado derecho de (3.13), usando (1.23), (1.27) y las desigualdades de Hölder y Young, se tiene

$$\begin{aligned} |(e_m \cdot \nabla u, e_m)| &\leq |(e_m \cdot \nabla e_m, u)| \\ &\leq \|e_m\| \|\nabla e_m\| \|u\|_\infty \\ &\leq C \|e_m\| \|\nabla e_m\| \|Au\| \\ &\leq C_\nu \|e_m\|^2 \|Au\|^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla e_m\|^2, \\ |(q_m \cdot \nabla u, e_m)| + |(u_m \cdot \nabla q_m, e_m)| &= |(q_m \cdot \nabla e_m, u)| + |(u_m \cdot \nabla e_m, q_m)| \\ &\leq \|q_m\| \|\nabla e_m\| \|u\|_\infty + \|u_m\|_\infty \|\nabla e_m\| \|q_m\| \\ &\leq C \|q_m\| \|\nabla e_m\| \|\nabla u\|^{1/2} \|Au\|^{1/2} \\ &\quad + C \|\nabla u_m\|^{1/2} \|Au_m\|^{1/2} \|\nabla e_m\| \|q_m\| \\ &\leq C_\nu \|\nabla u\| \|Au\| \|q_m\|^2 + \frac{\nu}{8} \|\nabla e_m\|^2 \\ &\quad + C_\nu \|\nabla u_m\| \|Au_m\| \|q_m\|^2 + \frac{\nu}{8} \|\nabla e_m\|^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Reemplazando (3.14)-(3.15) en (3.13) y teniendo en cuenta (2.16), se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e_m\|^2 + \nu \|\nabla e_m\|^2 \leq C_\nu \|e_m\|^2 \|Au\|^2 + C_\nu (\|Au\| + \|Au_m\|) \|q_m\|^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla e_m\|^2,$$

y luego se sigue que

$$\frac{d}{dt} \|e_m\|^2 + \nu \|\nabla e_m\|^2 \leq C \|e_m\|^2 \|Au\|^2 + C (\|Au\| + \|Au_m\|) \|q_m\|^2. \quad (3.16)$$

Aplicando el Lema 1.18 a (3.16), y teniendo en cuenta (3.3) y (2.16), se tiene

$$\begin{aligned} \|e_m(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla e_m(s)\|^2 ds &\leq C \left(\int_0^t (\|Au(s)\| + \|Au_m(s)\|) \|q_m(s)\|^2 ds \right) \\ &\quad \times \exp \left(C \int_0^t \|Au(s)\|^2 ds \right) \\ &\leq C \int_0^t (\|Au(s)\| + \|Au_m(s)\|) \|q_m(s)\|^2 ds. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Aplicando la desigualdad de Hölder en el lado derecho de (3.17), se obtiene

$$\begin{aligned} \|e_m(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla e_m(s)\|^2 ds &\leq C \int_0^t (\|Au(s)\| + \|Au_m(s)\|) \|q_m(s)\|^2 ds \\ &\leq C \left(\int_0^t \|Au(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|q_m(s)\|^4 ds \right)^{1/2} \\ &\quad + C \left(\int_0^t \|Au_m(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|q_m(s)\|^4 ds \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

y entonces teniendo en cuenta (2.16) y (3.4), resulta

$$\begin{aligned} \|e_m(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla e_m(s)\|^2 ds &\leq C \left(\int_0^t \|q_m(s)\|^4 ds \right)^{1/2} \\ &\leq C \left(\lambda_m^{-1} \int_0^t \|q_m(s)\|^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Luego, usando (3.6) en el lado derecho de (3.18), se obtiene

$$\|e_m(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla e_m(s)\|^2 ds \leq C (\lambda_m^{-3})^{1/2},$$

para $t \in (0, T^*]$, de donde se concluye (3.7).

Estimación (3.8).

Tomando $v = \partial_t e_m(t) \in H_m$ en (3.12), se tiene

$$\|\partial_t e_m\|^2 + \nu (Ae_m, \partial_t e_m) + ((e_m + q_m) \cdot \nabla u, \partial_t e_m) + (u_m \cdot \nabla (e_m + q_m), \partial_t e_m) = 0,$$

y entonces

$$\|\partial_t e_m\|^2 + \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla e_m\|^2 \leq |((e_m + q_m) \cdot \nabla u, \partial_t e_m)| + |(u_m \cdot \nabla(e_m + q_m), \partial_t e_m)|. \quad (3.19)$$

Luego, para los términos del lado derecho de (3.19), usando (1.21)-(1.24) y las desigualdades de Hölder y Young, se tiene

$$\begin{aligned} |((e_m + q_m) \cdot \nabla u, \partial_t e_m)| &\leq (\|e_m\|_3 + \|q_m\|_3) \|\nabla u\|_6 \|\partial_t e_m\| \\ &\leq C(\|\nabla e_m\| + \|\nabla q_m\|) \|Au\| \|\partial_t e_m\| \\ &\leq C(\|\nabla e_m\|^2 + \|\nabla q_m\|^2) \|Au\|^2 + \frac{1}{4} \|\partial_t e_m\|^2, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} |(u_m \cdot \nabla(e_m + q_m), \partial_t e_m)| &\leq \|u_m\|_\infty (\|\nabla e_m\| + \|\nabla q_m\|) \|\partial_t e_m\| \\ &\leq C \|Au_m\| (\|\nabla e_m\| + \|\nabla q_m\|) \|\partial_t e_m\| \\ &\leq C \|Au_m\|^2 (\|\nabla e_m\|^2 + \|\nabla q_m\|^2) + \frac{1}{4} \|\partial_t e_m\|^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Por lo tanto, reemplazando (3.20)-(3.21) en (3.19), resulta

$$\|\partial_t e_m\|^2 + \nu \frac{d}{dt} \|\nabla e_m\|^2 \leq C(\|\nabla e_m\|^2 + \|\nabla q_m\|^2) (\|Au\|^2 + \|Au_m\|^2). \quad (3.22)$$

Multiplicando (3.22) por $\tau(t)$ y observando (2.19), se tiene

$$\begin{aligned} \tau(t) \|\partial_t e_m\|^2 + \nu \tau(t) \frac{d}{dt} \|\nabla e_m\|^2 &\leq C(\|\nabla e_m\|^2 + \|\nabla q_m\|^2) \tau(t) (\|Au\|^2 + \|Au_m\|^2) \\ &\leq C(\|\nabla e_m\|^2 + \|\nabla q_m\|^2). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Como

$$\frac{d}{dt} (\tau(t) \|\nabla e_m\|^2) = \tau(t) \frac{d}{dt} \|\nabla e_m\|^2 + \tau'(t) \|\nabla e_m\|^2 \leq \tau(t) \frac{d}{dt} \|\nabla e_m\|^2 + \|\nabla e_m\|^2,$$

la desigualdad (3.23) es equivalente a

$$\tau(t) \|\partial_t e_m\|^2 + \nu \frac{d}{dt} (\tau(t) \|\nabla e_m\|^2) \leq \nu \|\nabla e_m\|^2 + C(\|\nabla e_m\|^2 + \|\nabla q_m\|^2). \quad (3.24)$$

Integrando (3.24) entre 0 y $t \in (0, T^*]$, y teniendo en cuenta (3.3), se tiene

$$\nu \tau(t) \|\nabla e_m(t)\|^2 + \int_0^t \tau(s) \|\partial_t e_m(s)\|^2 ds \leq C \int_0^t \|\nabla e_m(s)\|^2 ds + C \int_0^t \|\nabla q_m(s)\|^2 ds. \quad (3.25)$$

Por lo tanto, aplicando (3.4) y (3.7) en (3.25) queda demostrado (3.8). $\square$

A seguir, teniendo en cuenta los resultados del Teorema 3.1 y Teorema 3.2, en las normas $L^\infty(0, T^*; L^2(\Omega))$ y $L^2(0, T^*; H^1(\Omega))$ se tiene el siguiente teorema

Teorema 3.3. *Con las condiciones del Teorema 3.1 y el Teorema 3.2, si el m -ésimo valor propio λ_m del operador de Stokes A es tal que $\lambda_m \geq \hat{c}$ para alguna constante real $\hat{c} > 1$, entonces el error $u(t) - u_m(t)$ satisface las siguientes estimaciones:*

$$\|u(t) - u_m(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u(s) - \nabla u_m(s)\|^2 ds \leq C\lambda_m^{-1}, \quad (3.26)$$

$$\nu\tau(t)\|\nabla u(t) - \nabla u_m(t)\|^2 + \int_0^t \tau(s)\|\partial_t u(s) - \partial_t u_m(s)\|^2 ds \leq C\lambda_m^{-1}, \quad (3.27)$$

para todo $0 < t \leq T^*$ y $\tau(t) = \min\{1, t\}$.

Demostración. Por la definición dada en (3.2), se tiene que $u(t) - u_m(t) = q_m(t) + e_m(t)$ entonces usando la desigualdad triangular y la desigualdad de Young, resulta

$$\|u(t) - u_m(t)\|^2 \leq (\|q_m(t)\| + \|e_m(t)\|)^2 \leq 2\|q_m(t)\|^2 + 2\|e_m(t)\|^2. \quad (3.28)$$

Luego, observado (3.28) se sigue

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_m(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u(s) - \nabla u_m(s)\|^2 ds &\leq 2\|q_m(t)\|^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla q_m(s)\|^2 ds \\ &\quad + 2\|e_m(t)\|^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla e_m(s)\|^2 ds, \end{aligned}$$

y entonces usando las estimaciones (3.4) y (3.7), se obtiene

$$\|u(t) - u_m(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u(s) - \nabla u_m(s)\|^2 ds \leq C\lambda_m^{-1} + C\lambda_m^{-3/2}. \quad (3.29)$$

Como por hipótesis $\lambda_m^{-1} \leq \hat{c}^{-1} < 1$ entonces se tiene que $\lambda_m^{-3/2} \leq \lambda_m^{-1}$, por lo tanto de (3.29) se sigue el resultado (3.26).

Similarmente, por la definición dada en (3.2), se tiene que

$$\begin{aligned} \nu\tau(t)\|\nabla u(t) - \nabla u_m(t)\|^2 + \int_0^t \tau(s)\|\partial_t u(s) - \partial_t u_m(s)\|^2 ds \\ \leq 2\nu\tau(t)\|\nabla q_m(t)\|^2 + 2 \int_0^t \tau(s)\|\partial_t q_m(s)\|^2 ds \\ + 2\nu\tau(t)\|\nabla e_m(t)\|^2 + 2 \int_0^t \tau(s)\|\partial_t e_m(s)\|^2 ds, \end{aligned}$$

y luego usando las estimaciones (3.5) y (3.8) se sigue (3.27). $\square$

Con el propósito de encontrar mejores cotas para el error $u - u_m$ en la norma $L^2(0, T^*, L^2(\Omega))$, previamente se dan algunos resultados técnicos utilizando las soluciones de una ecuación auxiliar linealizada similar a lo usado por Heywood & Rannacher [7] y Hill & Süli [9].

Para $s \in (0, T^*)$ y $g \in L^2(0, s; L^2(\Omega))$ el problema consiste en hallar $\varphi(t) \in H$ con $\varphi(s) = 0$ y tal que para $u(t)$ solución del Problema 2, satisfice

$$-(v, \partial_t \varphi(t)) + \nu(v, A\varphi(t)) + (v \cdot \nabla u(t), \varphi(t)) + (u(t) \cdot \nabla v, \varphi(t)) = -(v, g(t)), \quad (3.30)$$

para todo $v \in H$.

Para (3.30), por el método de Galerkin es posible construir una solución aproximada

$$\phi(t) = \sum_{i=1}^m \gamma_{im}(t) w_i \in H_m,$$

donde los coeficientes $\gamma_{im}(t)$ son determinados de tal forma que para $t \in (0, s)$, $\phi(t)$ satisface la siguiente ecuación

$$-(v, \partial_t \phi(t)) + \nu(v, A\phi(t)) + (v \cdot \nabla u(t), \phi(t)) + (u(t) \cdot \nabla v, \phi(t)) = -(v, g(t)), \quad (3.31)$$

para todo $v \in H_m$, con $\phi(s) = 0$.

Más aun, la solución $\phi(t) \in H_m$ es única. En efecto, sean $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ dos soluciones aproximadas de (3.31), es decir

$$-(v, \partial_t \phi_1(t)) + \nu(v, A\phi_1(t)) + (v \cdot \nabla u(t), \phi_1(t)) + (u(t) \cdot \nabla v, \phi_1(t)) = -(v, g(t)), \quad (3.32)$$

$$-(v, \partial_t \phi_2(t)) + \nu(v, A\phi_2(t)) + (v \cdot \nabla u(t), \phi_2(t)) + (u(t) \cdot \nabla v, \phi_2(t)) = -(v, g(t)). \quad (3.33)$$

Restando (3.32) y (3.33), y definiendo $\tilde{\phi}(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t)$ se obtiene

$$-(v, \partial_t \tilde{\phi}(t)) + \nu(v, A\tilde{\phi}(t)) + (v \cdot \nabla u(t), \tilde{\phi}(t)) + (u(t) \cdot \nabla v, \tilde{\phi}(t)) = 0. \quad (3.34)$$

Haciendo $v = \tilde{\phi}$ en (3.34), se tiene

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{\phi}\|^2 + \nu \|\nabla \tilde{\phi}\|^2 = -(\tilde{\phi} \cdot \nabla u, \tilde{\phi}) = (\tilde{\phi} \cdot \nabla \tilde{\phi}, u) \leq |(\tilde{\phi} \cdot \nabla \tilde{\phi}, u)|. \quad (3.35)$$

Para el término del lado derecho de (3.35), usando las desigualdades de Hölder y Young y (1.23), se tiene

$$|(\tilde{\phi} \cdot \nabla \tilde{\phi}, u)| \leq \|\tilde{\phi}\| \|\nabla \tilde{\phi}\| \|u\|_\infty \leq C \|\tilde{\phi}\| \|\nabla \tilde{\phi}\| \|Au\| \leq \nu \|\nabla \tilde{\phi}\|^2 + C_\nu \|\tilde{\phi}\|^2 \|Au\|^2. \quad (3.36)$$

Reemplazando (3.36) en (3.35), se tiene

$$-\frac{d}{dt} \|\tilde{\phi}\|^2 \leq C \|\tilde{\phi}\|^2 \|Au\|^2. \quad (3.37)$$

Integrando (3.37) entre t y $s \in (0, T^*]$, se obtiene

$$\|\tilde{\phi}(t)\|^2 \leq C \int_t^s \|\tilde{\phi}(\tau)\|^2 \|Au(\tau)\|^2 d\tau. \quad (3.38)$$

Aplicando el Lema (1.19) y observando (2.16), se tiene

$$\|\tilde{\phi}(t)\|^2 \leq 0. \quad (3.39)$$

Por lo tanto, se deduce que $\tilde{\phi}(t) = 0$, de donde se sigue que $\phi_1(t) = \phi_2(t)$.

Lema 3.1. *La solución ϕ del problema (3.31) satisface la siguiente regularidad:*

$$\sup_{0 \leq r \leq s} \|\nabla \phi(r)\|^2 + \nu \int_0^s (\|A\phi(t)\|^2 + \|\nabla \phi(t)\|^2) dt \leq C \int_0^s \|g(t)\|^2 dt, \quad (3.40)$$

para todo $s \in (0, T^*]$.

Demostración. Tomando $v = \phi(t)$ en (3.31) y observando (1.5), se tiene

$$-(\phi, \partial_t \phi) + \nu(\phi, A\phi) + (\phi \cdot \nabla u, \phi) = -(\phi, g),$$

y entonces se sigue que

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\phi\|^2 + \nu \|\nabla \phi\|^2 \leq |(\phi, g)| + |(\phi \cdot \nabla u, \phi)|. \quad (3.41)$$

Luego, para los términos del lado derecho de (3.41), usando (1.23) y las desigualdades de Hölder y Poincaré se tiene

$$|(\phi, g)| \leq \|\phi\| \|g\| \leq C \|\nabla \phi\| \|g\| \leq C_\nu \|g\|^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla \phi\|^2, \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} |(\phi \cdot \nabla u, \phi)| &= |(\phi \cdot \nabla \phi, u)| \leq \|\phi\| \|\nabla \phi\| \|u\|_\infty \\ &\leq C \|\phi\| \|\nabla \phi\| \|Au\| \leq C_\nu \|\phi\|^2 \|Au\|^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla \phi\|^2. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Reemplazando (3.42) y (3.43) en (3.41), se obtiene

$$-\frac{d}{dt} \|\phi\|^2 + \nu \|\nabla \phi\|^2 \leq C \|g\|^2 + C \|\phi\|^2 \|Au\|^2. \quad (3.44)$$

Integrando entre r y s , y teniendo en cuenta que $\phi(s) = 0$, resulta

$$\|\phi(r)\|^2 + \nu \int_r^s \|\nabla \phi(t)\|^2 dt \leq C \int_r^s \|g(t)\|^2 dt + C \int_r^s \|\phi(t)\|^2 \|Au(t)\|^2 dt.$$

Usando Lema 1.19 y (2.16), se tiene

$$\begin{aligned} \|\phi(r)\|^2 + \nu \int_r^s \|\nabla \phi(t)\|^2 dt &\leq (C \int_r^s \|g(t)\|^2 dt) \exp(C \int_r^s \|Au(t)\|^2 dt) \\ &\leq C \int_r^s \|g(t)\|^2 dt \\ &\leq C \int_0^s \|g(t)\|^2 dt, \end{aligned} \quad (3.45)$$

para todo $0 \leq r \leq s$ donde $0 < s \leq T^*$.

Por otro lado, tomando $v = A\phi(t)$ en (3.31), se obtiene

$$-(A\phi, \partial_t \phi) + \nu(A\phi, A\phi) + (A\phi \cdot \nabla u, \phi) + (u \cdot \nabla A\phi, \phi) = -(A\phi, g),$$

y observando (1.6), se tiene

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \phi\|^2 + \nu \|A\phi\|^2 - (A\phi \cdot \nabla \phi, u) - (u \cdot \nabla \phi, A\phi) = -(A\phi, g),$$

y entonces

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \phi\|^2 + \nu \|A\phi\|^2 \leq |(A\phi \cdot \nabla \phi, u)| + |(u \cdot \nabla \phi, A\phi)| + |(A\phi, g)|. \quad (3.46)$$

Para los términos del lado derecho de (3.46), usando (1.23) y desigualdades de Hölder y Young, se tiene

$$\begin{aligned} |(A\phi \cdot \nabla \phi, u)| + |(u \cdot \nabla \phi, A\phi)| &\leq 2\|A\phi\| \|\nabla \phi\| \|u\|_\infty \\ &\leq C\|A\phi\| \|\nabla \phi\| \|Au\| \\ &\leq \frac{\nu}{4} \|A\phi\|^2 + C_\nu \|Au\|^2 \|\nabla \phi\|^2, \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$|(A\phi, g)| \leq \|A\phi\| \|g\| \leq \frac{\nu}{4} \|A\phi\|^2 + C_\nu \|g\|^2. \quad (3.48)$$

Reemplazando (3.47) y (3.48) en (3.46), se obtiene

$$-\frac{d}{dt} \|\nabla \phi\|^2 + \nu \|A\phi\|^2 \leq C \|Au\|^2 \|\nabla \phi\|^2 + C \|g\|^2. \quad (3.49)$$

Integrando (3.49) entre r y s , y teniendo en cuenta que $\nabla \phi(s) = 0$, resulta

$$\|\nabla \phi(r)\|^2 + \nu \int_r^s \|A\phi(t)\|^2 dt \leq C \int_r^s \|Au(t)\|^2 \|\nabla \phi(t)\|^2 dt + C \int_r^s \|g(t)\|^2 dt.$$

Usando Lema 1.19 y (2.16) en la última desigualdad, se tiene

$$\begin{aligned} \|\nabla \phi(r)\|^2 + \nu \int_r^s \|A\phi(t)\|^2 dt &\leq (C \int_r^s \|g(t)\|^2 dt) \exp(C \int_r^s \|Au(t)\|^2 dt) \\ &\leq C \int_r^s \|g(t)\|^2 dt \\ &\leq C \int_0^s \|g(t)\|^2 dt. \end{aligned} \quad (3.50)$$

De (3.45) y (3.50) para todo $0 \leq r \leq s$ se obtiene

$$\nu \int_r^s \|\nabla \phi(t)\|^2 dt + \nu \int_r^s \|A\phi(t)\|^2 dt \leq 2C \int_0^s \|g(t)\|^2 dt,$$

luego para $r = 0$ se tiene

$$\nu \int_0^s \|\nabla \phi(t)\|^2 dt + \nu \int_0^s \|A\phi(t)\|^2 dt \leq C \int_0^s \|g(t)\|^2 dt, \quad (3.51)$$

y entonces de (3.50) y (3.51), resulta

$$\|\nabla \phi(r)\|^2 + \nu \int_0^s \|\nabla \phi(t)\|^2 dt + \nu \int_0^s \|A\phi(t)\|^2 dt \leq C \int_0^s \|g(t)\|^2 dt,$$

para $s \in (0, T^*]$, desde donde se sigue (3.40) y el lema queda demostrado. $\square$

Usando el Lema 3.1, para el segundo término del lado derecho de (3.2) se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.4. *Con las condiciones del Teorema 3.1 y el Teorema 3.2, para $t \in (0, T^*]$ la función $e_m(t)$ definida en (3.1) satisface la siguiente estimación:*

$$\tau(t)\|e_m(t)\|^2 + \int_0^t (\|e_m(s)\|^2 + \nu\tau(s)\|\nabla e_m(s)\|^2)ds \leq C\lambda_m^{-2}. \quad (3.52)$$

Demostración. Tomando $v = e_m(t)$ y $g(t) = e_m(t)$ en (3.31), se tiene

$$(e_m, \partial_t \phi) - \nu(e_m, A\phi) - (e_m \cdot \nabla u, \phi) - (u \cdot \nabla e_m, \phi) = \|e_m\|^2. \quad (3.53)$$

También, con $g(t) = e_m(t)$ desde (3.40), se tiene

$$\sup_{0 \leq t \leq s} \|\nabla \phi(t)\|^2 + \nu \int_0^s \|A\phi(t)\|^2 dt \leq C \int_0^s \|e_m(t)\|^2 dt. \quad (3.54)$$

Por otro lado, tomando $v = \phi(t) \in H_m$ en (3.12), y recordando que A es un operador autoadjunto, se tiene

$$(\partial_t e_m, \phi) + \nu(e_m, A\phi) + ((e_m + q_m) \cdot \nabla u, \phi) + (u_m \cdot \nabla(e_m + q_m), \phi) = 0. \quad (3.55)$$

Sumando (3.53) y (3.55), se tiene

$$\|e_m\|^2 = (e_m, \partial_t \phi) + (\partial_t e_m, \phi) + (q_m \cdot \nabla u, \phi) + (u \cdot \nabla q_m, \phi) - ((u - u_m) \cdot \nabla(e_m + q_m), \phi),$$

y entonces como $e_m + q_m = u - u_m$, resulta

$$\begin{aligned} \|e_m\|^2 &= \frac{d}{dt}(e_m, \phi) + (q_m \cdot \nabla u, \phi) + (u \cdot \nabla q_m, \phi) - ((u - u_m) \cdot \nabla(u - u_m), \phi) \\ &\leq \frac{d}{dt}(e_m, \phi) + |(q_m \cdot \nabla u, \phi)| + |(u \cdot \nabla q_m, \phi)| + |((u - u_m) \cdot \nabla(u - u_m), \phi)|. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Para los términos del lado derecho de (3.56), usando la desigualdad de Hölder y (1.23), se tiene

$$\begin{aligned} |(q_m \cdot \nabla u, \phi)| + |(u \cdot \nabla q_m, \phi)| &= |(q_m \cdot \nabla \phi, u)| + |(u \cdot \nabla \phi, q_m)| \\ &\leq 2\|q_m\| \|\nabla \phi\| \|u\|_\infty \leq C\|q_m\| \|\nabla \phi\| \|Au\|, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} |((u - u_m) \cdot \nabla(u - u_m), \phi)| &= \|u - u_m\| \|\nabla(u - u_m)\| \|\phi\|_\infty \\ &\leq C\|u - u_m\| \|\nabla(u - u_m)\| \|A\phi\|. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Luego, reemplazando (3.57)-(3.58) en (3.56), se obtiene

$$\|e_m\|^2 \leq \frac{d}{dt}(e_m, \phi) + C\|\nabla \phi\| \|Au\| \|q_m\| + C\|A\phi\| \|u - u_m\| \|\nabla u - \nabla u_m\|. \quad (3.59)$$

Integrando (3.59) entre 0 y $s = t$, recordando que $e_m(0) = 0$ y $\phi(s) = 0$, así como también usando (3.26), se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|e_m(s)\|^2 ds &\leq C \int_0^t \|\nabla \phi(s)\| \|Au(s)\| \|q_m(s)\| ds \\
&\quad + C \int_0^t \|A\phi(s)\| \|u(s) - u_m(s)\| \|\nabla u(s) - \nabla u_m(s)\| ds \\
&\leq C \int_0^t \|\nabla \phi(s)\| \|Au(s)\| \|q_m(s)\| ds \\
&\quad + C \lambda_m^{-1/2} \int_0^t \|A\phi(s)\| \|\nabla u(s) - \nabla u_m(s)\| ds.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Para los términos del lado derecho de (3.60), usando la desigualdad de Hölder junto con las desigualdades (2.16) y (3.54), se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|\nabla \phi(s)\| \|Au(s)\| \|q_m(s)\| ds &\leq \left(\int_0^t \|\nabla \phi(s)\|^2 \|Au(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|q_m(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \|\nabla \phi(s)\|^2 \int_0^t \|Au(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|q_m(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \\
&\leq C \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \|\nabla \phi(s)\|^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|q_m(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \\
&\leq C \left(\int_0^t \|e_m(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|q_m(s)\|^2 ds \right)^{1/2},
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|A\phi(s)\| \|\nabla(u - u_m)(s)\| ds &\leq \left(\int_0^t \|A\phi(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|\nabla(u - u_m)(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \\
&\leq C \left(\int_0^t \|e_m(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|\nabla(u - u_m)(s)\|^2 ds \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Reemplazando (3.61) y (3.62) en (3.60), se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|e_m(s)\|^2 ds &\leq C \left(\int_0^t \|e_m(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|q_m(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \\
&\quad + C \lambda_m^{-1/2} \left(\int_0^t \|e_m(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|\nabla(u - u_m)(s)\|^2 ds \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

y luego se deduce

$$\left(\int_0^t \|e_m(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \leq C \left(\int_0^t \|q_m(s)\|^2 ds \right)^{1/2} + C \lambda_m^{-1/2} \left(\int_0^t \|\nabla(u - u_m)(s)\|^2 ds \right)^{1/2}. \tag{3.63}$$

Elevando al cuadrado (3.63) y aplicando la desigualdad de Young, se obtiene

$$\int_0^t \|e_m(s)\|^2 ds \leq C \int_0^t \|q_m(s)\|^2 ds + C \lambda_m^{-1} \int_0^t \|\nabla(u - u_m)(s)\|^2 ds,$$

y entonces, considerando las desigualdades (3.6) y (3.26), se obtiene

$$\int_0^t \|e_m(s)\|^2 ds \leq C\lambda_m^{-2}, \quad (3.64)$$

para $t \in (0, T^*]$.

Similar como para (3.16), se tiene

$$\frac{d}{dt}\|e_m\|^2 + \nu\|\nabla e_m\|^2 \leq C\|e_m\|^2\|Au\|^2 + C(\|Au\| + \|Au_m\|)\|q_m\|^2. \quad (3.65)$$

Multiplicando (3.65) por $\tau(t)$ y observando (2.19), se obtiene

$$\begin{aligned} \tau(t)\frac{d}{dt}\|e_m\|^2 + \nu\tau(t)\|\nabla e_m\|^2 &\leq C\tau(t)\|e_m\|^2\|Au\|^2 + C\tau(t)(\|Au\| + \|Au_m\|)\|q_m\|^2 \\ &\leq C\|e_m\|^2 + C\|q_m\|^2. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Como

$$\frac{d}{dt}(\tau(t)\|e_m\|^2) = \tau(t)\frac{d}{dt}\|e_m\|^2 + \tau'(t)\|e_m\|^2,$$

con $\tau'(t) < 1$, desde (3.66) se deduce

$$\frac{d}{dt}(\tau(t)\|e_m\|^2) + \nu\tau(t)\|\nabla e_m\|^2 \leq \tau'(t)\|e_m\|^2 + C\|e_m\|^2 + C\|q_m\|^2 \leq C\|e_m\|^2 + C\|q_m\|^2. \quad (3.67)$$

Integrando (3.67) entre 0 y $t \in (0, T^*]$, y recordando que $e_m(0) = 0$, se tiene

$$\tau(t)\|e_m(t)\|^2 + \nu \int_0^t \tau(s)\|\nabla e_m(s)\|^2 ds \leq C \int_0^t \|e_m(s)\|^2 ds + C \int_0^t \|q_m(s)\|^2 ds,$$

y entonces observando (3.6) y (3.64) se sigue

$$\tau(t)\|e_m(t)\|^2 + \nu \int_0^t \tau(s)\|\nabla e_m(s)\|^2 ds \leq C\lambda_m^{-2}. \quad (3.68)$$

Finalmente, (3.64) y (3.68) implican (3.52). $\square$

Con los resultados del Teorema 3.1 y el Teorema 3.4 en la norma $L^2(0, T^*; L^2(\Omega))$ se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.5. *Con las condiciones del Teorema 3.1 y Teorema 3.4, si el m -ésimo valor propio λ_m del operador de Stokes A es tal que $\lambda_m \geq \hat{c}$ para algún $\hat{c} > 1$, entonces el error $u(t) - u_m(t)$ satisface la siguiente estimación:*

$$\tau(t)\|u(t) - u_m(t)\|^2 + \int_0^t \|u(s) - u_m(s)\|^2 ds \leq C\lambda_m^{-2}, \quad (3.69)$$

para todo $t \in (0, T^*]$.

Demostración. Teniendo en cuenta (3.28) se obtiene

$$\begin{aligned} \tau(t)\|u(t) - u_m(t)\|^2 + \int_0^t \|u(s) - u_m(s)\|^2 ds \\ \leq 2\tau(t)\|q_m(t)\|^2 + 2 \int_0^t \|q_m(s)\|^2 ds + 2\tau(t)\|e_m(t)\|^2 + 2 \int_0^t \|e_m(s)\|^2 ds, \end{aligned} \quad (3.70)$$

para $t \in (0, T^*]$.

Por lo tanto, observando las estimaciones (3.6) y (3.52), desde (3.70) se sigue (3.69). $\square$

3.2. Estimaciones de error para las aproximaciones de Galerkin de k-nivel

Para las aproximaciones u_k de Galerkin de k-nivel y la solución u del Problema 2 dada en Teorema 2.1 y en Teorema 2.2, se define

$$q_k(x, t) = u(x, t) - P_{m_k} u(x, t), \quad e_k(x, t) = P_{m_k} u(x, t) - u_k(x, t), \quad (3.71)$$

con P_{m_k} dado en (1.12), esto es

$$P_{m_k} u(x, t) = \sum_{i=1}^{m_k} (u(x, t), w_i(x)) w_i(x).$$

Entonces,

$$u(x, t) - u_k(x, t) = q_k(x, t) + e_k(x, t). \quad (3.72)$$

Observando (2.127),

$$e_k(0) = P_{m_k} u(0) - u_k(0) = P_{m_k} u_0 - u_k(0) = 0. \quad (3.73)$$

Para obtener las estimaciones para el error $u(t) - u_k(t)$, se demuestran resultados previos que son válidos para el caso bidimensional y tridimensional.

Teorema 3.6. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) un dominio acotado y u la única solución del Problema 2 dado por el Teorema 2.1 o el Teorema 2.2. Para $0 < t \leq T^*$ ($T^* = T$ si $n = 2$, $T^* = T_*$ si $n = 3$), la función $q_k(t)$ definido en (3.71) satisface las siguientes estimaciones:*

$$\|q_k(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla q_k(s)\|^2 ds \leq C \lambda_{m_k}^{-1}, \quad (3.74)$$

$$\tau(t)\|\nabla q_k(t)\|^2 + \int_0^t \tau(s)\|\partial_t q_k(s)\|^2 ds \leq C \lambda_{m_k}^{-1}, \quad (3.75)$$

$$\tau(t)\|q_k(t)\|^2 + \int_0^t \|q_k(s)\|^2 ds \leq C \lambda_{m_k}^{-2}, \quad (3.76)$$

donde λ_{m_k} es el m_k -ésimo valor propio del operador de Stokes A y $\tau(t) = \min\{1, t\}$.

Demostración. Para la demostración se razona de manera similar a la demostración del Teorema 3.1. $\square$

Teorema 3.7. *Si el m_k -ésimo valor propio λ_{m_k} del operador de Stokes A satisface*

$$a) \quad \text{Si } k = 1, \lambda_{m_k} \geq \hat{c} \text{ para alguna constante } \hat{c} > 1. \quad (3.77)$$

$$b) \quad \text{Si } k = 2, 3, \dots, K, \lambda_{m_{k-1}} \leq \lambda_{m_k} \leq \bar{c}\lambda_{m_{k-1}} \text{ para alguna constante } \bar{c} > 0. \quad (3.78)$$

Entonces, bajo las condiciones del Teorema 3.6, la función $e_k(t)$ definida en (3.71) satisface las siguientes estimaciones:

$$\|e_k(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla e_k(s)\|^2 ds \leq C\lambda_{m_k}^{-3/2}, \quad (3.79)$$

$$\nu\tau(t)\|\nabla e_k(t)\|^2 + \int_0^t \tau(s)\|\partial_t e_k(s)\|^2 ds \leq C\lambda_{m_k}^{-1}, \quad (3.80)$$

$$\tau(t)\|e_k(t)\|^2 + \int_0^t \|e_k(s)\|^2 ds \leq C\lambda_{m_k}^{-2}, \quad (3.81)$$

para $t \in (0, T^*]$ y para todo $k = 1, 2, 3, \dots, K$.

Demostración. La demostración del teorema se hace por inducción sobre k .

i) Cuando $k = 1$ se tiene que $e_1 = e_{m_1}$ donde $m_1 = m$, entonces el resultado (3.79)-(3.81) es garantizado por el Teorema 3.2 y el Teorema 3.4.

ii) Se asume que (3.79)-(3.81) es satisfecho para $k = r - 1$ con $3 \leq r \leq K$.

iii) Por demostrar que (3.79)-(3.81) es válido para $k = r$:

Aplicando la proyección P_{m_k} en (2.5), observando (1.13) y haciendo el producto interno con $v \in H_{m_k}$, se tiene

$$(P_{m_k} \partial_t u(t), v) + \nu(AP_{m_k} u(t), v) + (u(t) \cdot \nabla u(t), v) = (f(t), v). \quad (3.82)$$

Luego, reemplazando $w_i = v \in H_{m_k}$ en (2.126), se tiene

$$\begin{aligned} (\partial_t u_k(t), v) + \nu(Au_k(t), v) + (u_k(t) \cdot \nabla u_{k-1}(t), v) + (u_{k-1}(t) \cdot \nabla u_k(t), v) \\ = (f(t), v) + (u_{k-1}(t) \cdot \nabla u_{k-1}(t), v). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Usando la definición dada en (3.71) y restando (3.83) desde (3.82), se obtiene

$$\begin{aligned} (\partial_t e_k, v) + \nu(Ae_k, v) &= -(u \cdot \nabla u, v) + (u_k \cdot \nabla u_{k-1}, v) \\ &\quad + (u_{k-1} \cdot \nabla u_k, v) - (u_{k-1} \cdot \nabla u_{k-1}, v) \\ &= -(u \cdot \nabla(u - u_{k-1}), v) - ((u - u_k) \cdot \nabla u_{k-1}, v) \\ &\quad - (u_{k-1} \cdot \nabla(u - u_k), v) + (u_{k-1} \cdot \nabla(u - u_{k-1}), v) \\ &= -((u - u_{k-1}) \cdot \nabla(u - u_{k-1}), v) - ((u - u_k) \cdot \nabla u_{k-1}, v) \\ &\quad - (u_{k-1} \cdot \nabla(u - u_k), v), \end{aligned} \quad (3.84)$$

y observando que $u - u_k = q_k + e_k$, se obtiene

$$\begin{aligned} (\partial_t e_k, v) + \nu(Ae_k, v) &= -((q_{k-1} + e_{k-1}) \cdot \nabla(q_{k-1} + e_{k-1}), v) - ((q_k + e_k) \cdot \nabla u_{k-1}, v) \\ &\quad - (u_{k-1} \cdot \nabla(q_k + e_k), v). \end{aligned} \quad (3.85)$$

Considerando la ecuación (3.85) se demuestran las estimaciones (3.79)-(3.81).

Estimación (3.79).

Reemplazando $v = e_k(t) \in H_{m_k}$ en (3.85) y usando (1.5), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e_k\|^2 + \nu \|\nabla e_k\|^2 &\leq |((q_{k-1} + e_{k-1}) \cdot \nabla(q_{k-1} + e_{k-1}), e_k)| + |(q_k \cdot \nabla u_{k-1}, e_k)| \\ &\quad + |(e_k \cdot \nabla u_{k-1}, e_k)| + |(u_{k-1} \cdot \nabla q_k, e_k)|. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Para los términos del lado derecho de (3.86), usando las desigualdades de Hölder y Young, así como también las desigualdades (1.23), (1.27) y (2.129), se tiene

$$\begin{aligned} |((q_{k-1} + e_{k-1}) \cdot \nabla(q_{k-1} + e_{k-1}), e_k)| &= |((u - u_{k-1}) \cdot \nabla e_k, q_{k-1} + e_{k-1})| \\ &\leq \|u - u_{k-1}\|_\infty \|\nabla e_k\| \|q_{k-1} + e_{k-1}\| \\ &\leq C \|\nabla(u - u_{k-1})\|^{1/2} \|A(u - u_{k-1})\|^{1/2} \\ &\quad \times \|\nabla e_k\| \|q_{k-1} + e_{k-1}\| \\ &\leq C(\|\nabla u\| + \|\nabla u_{k-1}\|)^{1/2} (\|Au\| + \|Au_{k-1}\|)^{1/2} \\ &\quad \times \|\nabla e_k\| (\|q_{k-1}\| + \|e_{k-1}\|) \\ &\leq C(\|Au\| + \|Au_{k-1}\|)^{1/2} \|\nabla e_k\| (\|q_{k-1}\| + \|e_{k-1}\|) \\ &\leq C_\nu (\|Au\| + \|Au_{k-1}\|) (\|q_{k-1}\|^2 + \|e_{k-1}\|^2) \\ &\quad + \frac{\nu}{8} \|\nabla e_k\|^2, \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} |(e_k \cdot \nabla u_{k-1}, e_k)| &= |(e_k \cdot \nabla e_k, u_{k-1})| \\ &\leq \|e_k\| \|\nabla e_k\| \|u_{k-1}\|_\infty \\ &\leq C \|e_k\| \|\nabla e_k\| \|Au_{k-1}\| \\ &\leq C_\nu \|e_k\|^2 \|Au_{k-1}\|^2 + \frac{\nu}{8} \|\nabla e_k\|^2, \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} |(q_k \cdot \nabla u_{k-1}, e_k)| + |(u_{k-1} \cdot \nabla q_k, e_k)| &= |(q_k \cdot \nabla e_k, u_{k-1})| + |(u_{k-1} \cdot \nabla e_k, q_k)| \\ &\leq 2 \|q_k\| \|\nabla e_k\| \|u_{k-1}\|_\infty \\ &\leq C \|q_k\| \|\nabla e_k\| \|\nabla u_{k-1}\|^{1/2} \|Au_{k-1}\|^{1/2} \\ &\leq C_\nu \|q_k\|^2 \|Au_{k-1}\| + \frac{\nu}{4} \|\nabla e_k\|^2. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Reemplazando (3.87)-(3.89) en (3.86), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|e_k\|^2 + \nu \|\nabla e_k\|^2 &\leq c(\|Au\| + \|Au_{k-1}\|) (\|q_{k-1}\|^2 + \|e_{k-1}\|^2) \\ &\quad + c\|e_k\|^2 \|Au_{k-1}\|^2 + c\|q_k\|^2 \|Au_{k-1}\|. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Aplicando el Lema 1.18 en (3.90) y recordando que $e_k(0) = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} \|e_k(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla e_k(s)\|^2 ds &\leq (C \int_0^t (\|Au(s)\| + \|Au_{k-1}(s)\|)(\|q_{k-1}(s)\|^2 + \|e_{k-1}(s)\|^2) ds \\ &\quad + C \int_0^t \|q_k(s)\|^2 \|Au_{k-1}(s)\| ds) \exp \left(C \int_0^t \|Au_{k-1}(s)\|^2 ds \right), \end{aligned}$$

y usando (2.129), resulta

$$\begin{aligned} \|e_k(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla e_k(s)\|^2 ds &\leq C \int_0^t (\|Au(s)\| + \|Au_{k-1}(s)\|)(\|q_{k-1}(s)\|^2 + \|e_{k-1}(s)\|^2) ds \\ &\quad + C \int_0^t \|q_k(s)\|^2 \|Au_{k-1}(s)\| ds. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Usando la desigualdad de Hölder, la desigualdad de Young y (2.129), se tiene

$$\begin{aligned} &\int_0^t (\|Au(s)\| + \|Au_{k-1}(s)\|)(\|q_{k-1}(s)\|^2 + \|e_{k-1}(s)\|^2) ds \\ &= \int_0^t (\|Au(s)\| + \|Au_{k-1}(s)\|) \|q_{k-1}(s)\|^2 ds + \int_0^t (\|Au(s)\| + \|Au_{k-1}(s)\|) \|e_{k-1}(s)\|^2 ds \\ &\leq \left(2 \int_0^t (\|Au(s)\|^2 + \|Au_{k-1}(s)\|^2) ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|q_{k-1}(s)\|^4 ds \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(2 \int_0^t (\|Au(s)\|^2 + \|Au_{k-1}(s)\|^2) ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|e_{k-1}(s)\|^4 ds \right)^{1/2} \\ &\leq C \left(\int_0^t \|q_{k-1}(s)\|^4 ds \right)^{1/2} + C \left(\int_0^t \|e_{k-1}(s)\|^4 ds \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \|q_k(s)\|^2 \|Au_{k-1}(s)\| ds &\leq \left(\int_0^t \|q_k(s)\|^4 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|Au_{k-1}(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq C \left(\int_0^t \|q_k(s)\|^4 ds \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Reemplazando (3.92) y (3.93) en (3.91), se obtiene

$$\begin{aligned} \|e_k(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla e_k(s)\|^2 ds &\leq C \left(\int_0^t \|q_{k-1}(s)\|^4 ds \right)^{1/2} + C \left(\int_0^t \|e_{k-1}(s)\|^4 ds \right)^{1/2} \\ &\quad + C \left(\int_0^t \|q_k(s)\|^4 ds \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Usando (3.74) y la inducción sobre (3.79) para $k = r - 1$, desde (3.94) se obtiene

$$\begin{aligned} \|e_k(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla e_k(s)\|^2 ds &\leq C \left(\lambda_{m_{k-1}}^{-1} \int_0^t \|q_{k-1}(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\quad + C \left(\lambda_{m_{k-1}}^{-3/2} \int_0^t \|e_{k-1}(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\quad + C \left(\lambda_{m_k}^{-1} \int_0^t \|q_k(s)\|^2 ds \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

y entonces aplicando (3.76), y la inducción sobre (3.81) para $k = r - 1$, resulta

$$\begin{aligned} \|e_k(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla e_k(s)\|^2 ds &\leq C(\lambda_{m_{k-1}}^{-1} \lambda_{m_{k-1}}^{-2})^{1/2} + C(\lambda_{m_{k-1}}^{-3/2} \lambda_{m_{k-1}}^{-2})^{1/2} + C(\lambda_{m_k}^{-1} \lambda_{m_k}^{-2})^{1/2} \\ &\leq C(\lambda_{m_{k-1}}^{-3/2} + \lambda_{m_{k-1}}^{-7/4} + \lambda_{m_k}^{-3/2}). \end{aligned} \quad (3.95)$$

Por (3.77) y (3.78), se tiene que $\lambda_{m_{k-1}}^{-7/4} \leq \lambda_{m_{k-1}}^{-3/2} \leq (\bar{c})^{3/2} \lambda_{m_k}^{-3/2}$. Así, (3.95) implica

$$\|e_k(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla e_k(s)\|^2 ds \leq C(2(\bar{c})^{3/2} \lambda_{m_k}^{-3/2} + \lambda_{m_k}^{-3/2}) \leq C \lambda_{m_k}^{-3/2},$$

para $t \in (0, T^*]$, lo que demuestra (3.79).

Estimación (3.80).

Reemplazando $v = \partial_t e_k(t)$ en (3.85), se tiene

$$\begin{aligned} (\partial_t e_k, \partial_t e_k) + \nu(Ae_k, \partial_t e_k) &= -((q_{k-1} + e_{k-1}) \cdot \nabla(q_{k-1} + e_{k-1}), \partial_t e_k) - ((q_k + e_k) \cdot \nabla u_{k-1}, \partial_t e_k) \\ &\quad - (u_{k-1} \cdot \nabla(q_k + e_k), \partial_t e_k), \end{aligned}$$

de donde queda

$$\begin{aligned} \|\partial_t e_k\|^2 + \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla e_k\|^2 &\leq |((q_{k-1} + e_{k-1}) \cdot \nabla(q_{k-1} + e_{k-1}), \partial_t e_k)| + |((q_k + e_k) \cdot \nabla u_{k-1}, \partial_t e_k)| \\ &\quad + |(u_{k-1} \cdot \nabla(q_k + e_k), \partial_t e_k)|. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Para los términos del lado derecho de (3.96), usando (1.21), (1.23) y (1.24), se tiene

$$\begin{aligned}
|((q_{k-1} + e_{k-1}) \cdot \nabla(q_{k-1} + e_{k-1}), \partial_t e_k)| &= |((u - u_{k-1}) \cdot \nabla(q_{k-1} + e_{k-1}), \partial_t e_k)| \\
&\leq \|u - u_{k-1}\|_\infty \|\nabla(q_{k-1} + e_{k-1})\| \|\partial_t e_k\| \\
&\leq C \|A(u - u_{k-1})\| \|\nabla(q_{k-1} + e_{k-1})\| \|\partial_t e_k\| \\
&\leq C \|Au - Au_{k-1}\|^2 \|\nabla q_{k-1} + \nabla e_{k-1}\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{6} \|\partial_t e_k\|^2, \tag{3.97}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|((q_k + e_k) \cdot \nabla u_{k-1}, \partial_t e_k)| &= \|q_k + e_k\|_3 \|\nabla u_{k-1}\|_6 \|\partial_t e_k\| \\
&\leq C \|\nabla(q_k + e_k)\| \|Au_{k-1}\| \|\partial_t e_k\| \\
&\leq C \|\nabla q_k + \nabla e_k\|^2 \|Au_{k-1}\|^2 + \frac{1}{6} \|\partial_t e_k\|^2, \tag{3.98}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(u_{k-1} \cdot \nabla(q_k + e_k), \partial_t e_k)| &\leq \|u_{k-1}\|_\infty \|\nabla(q_k + e_k)\| \|\partial_t e_k\| \\
&\leq C \|Au_{k-1}\| \|\nabla(q_k + e_k)\| \|\partial_t e_k\| \\
&\leq C \|Au_{k-1}\|^2 \|\nabla q_k + \nabla e_k\|^2 + \frac{1}{6} \|\partial_t e_k\|^2. \tag{3.99}
\end{aligned}$$

Reemplazando (3.97)-(3.99) en (3.96), se obtiene

$$\begin{aligned}
\|\partial_t e_k\|^2 + \nu \frac{d}{dt} \|\nabla e_k\|^2 &\leq C(\|Au\|^2 + \|Au_{k-1}\|^2)(\|\nabla q_{k-1}\|^2 + \|\nabla e_{k-1}\|^2) \\
&\quad + C\|Au_{k-1}\|^2(\|\nabla q_k\|^2 + \|\nabla e_k\|^2). \tag{3.100}
\end{aligned}$$

Multiplicando (3.100) por $\tau(t)$, resulta

$$\begin{aligned}
\tau(t) \|\partial_t e_k\|^2 + \nu \frac{d}{dt} (\tau(t) \|\nabla e_k\|^2) &\leq \nu \tau'(t) \|\nabla e_k\|^2 + C \tau(t) \|Au_{k-1}\|^2 (\|\nabla q_k\|^2 + \|\nabla e_k\|^2) \\
&\quad + C \tau(t) (\|Au\|^2 + \|Au_{k-1}\|^2) (\|\nabla q_{k-1}\|^2 + \|\nabla e_{k-1}\|^2),
\end{aligned}$$

y por (2.130) y el hecho que $\tau'(t) \leq 1$, se deduce

$$\tau(t) \|\partial_t e_k\|^2 + \nu \frac{d}{dt} (\tau(t) \|\nabla e_k\|^2) \leq C \|\nabla e_k\|^2 + C \|\nabla q_k\|^2 + C \|\nabla q_{k-1}\|^2 + C \|\nabla e_{k-1}\|^2. \tag{3.101}$$

Integrando (3.101) entre 0 y $t \in (0, T^*]$, se tiene

$$\begin{aligned}
\nu \tau(t) \|\nabla e_k(t)\|^2 + \int_0^t \tau(s) \|\partial_t e_k(s)\|^2 ds &\leq C \int_0^t \|\nabla e_k(s)\|^2 ds + C \int_0^t \|\nabla q_k(s)\|^2 ds \\
&\quad + C \int_0^t \|\nabla q_{k-1}(s)\|^2 ds + C \int_0^t \|\nabla e_{k-1}(s)\|^2 ds,
\end{aligned}$$

luego, por (3.74) y (3.79), se obtiene

$$\nu \tau(t) \|\nabla e_k\|^2 + \int_0^t \tau(s) \|\partial_t e_k(s)\|^2 ds \leq C(\lambda_{m_k}^{-3/2} + \lambda_{m_k}^{-1} + \lambda_{m_{k-1}}^{-1} + \lambda_{m_{k-1}}^{-3/2}). \tag{3.102}$$

Por (3.77) y (3.78), se tiene

$$\nu\tau(t)\|\nabla e_k\|^2 + \int_0^t \tau(s)\|\partial_t e_k(s)\|^2 ds \leq C(\lambda_{m_k}^{-1} + \lambda_{m_{k-1}}^{-1}) \leq C(\lambda_{m_k}^{-1} + \bar{c}\lambda_{m_k}^{-1}) \leq C\lambda_{m_k}^{-1},$$

para $t \in (0, T^*]$, lo que demuestra (3.80).

Estimación (3.81).

Reemplazando $v = e_k(t)$ y $g(t) = e_k(t)$ en (3.31), se tiene

$$(e_k, e_k) = (e_k, \partial_t \phi) - \nu(e_k, A\phi) - (e_k \cdot \nabla u, \phi) - (u \cdot \nabla e_k, \phi). \quad (3.103)$$

Además, reemplazando $v = \phi(t)$ en (3.85), queda

$$\begin{aligned} &(\partial_t e_k, \phi) + \nu(e_k, A\phi) - ((q_{k-1} + e_{k-1}) \cdot \nabla(q_k + e_k), \phi) - ((q_k + e_k) \cdot \nabla(q_{k-1} + e_{k-1}), \phi) \\ &+ ((q_k + e_k) \cdot \nabla u, \phi) + (u \cdot \nabla(q_k + e_k), \phi) + ((q_{k-1} + e_{k-1}) \cdot \nabla(q_{k-1} + e_{k-1}), \phi) = 0. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Sumando (3.103) y (3.104), se obtiene

$$\begin{aligned} \|e_k\|^2 &= \frac{d}{dt}(e_k, \phi) - ((q_{k-1} + e_{k-1}) \cdot \nabla(q_k + e_k), \phi) - ((q_k + e_k) \cdot \nabla(q_{k-1} + e_{k-1}), \phi) \\ &\quad + (q_k \cdot \nabla u, \phi) + (u \cdot \nabla q_k, \phi) + ((q_{k-1} + e_{k-1}) \cdot \nabla(q_{k-1} + e_{k-1}), \phi) \\ &\leq \left| \frac{d}{dt}(e_k, \phi) \right| + |((q_{k-1} + e_{k-1}) \cdot \nabla(q_k + e_k), \phi)| + |((q_k + e_k) \cdot \nabla(q_{k-1} + e_{k-1}), \phi)| \\ &\quad + |(q_k \cdot \nabla u, \phi)| + |(u \cdot \nabla q_k, \phi)| + |((q_{k-1} + e_{k-1}) \cdot \nabla(q_{k-1} + e_{k-1}), \phi)|. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Para los términos del lado derecho de (3.105), usando (1.23) y la desigualdad de Hölder, se tiene

$$\begin{aligned} |((q_{k-1} + e_{k-1}) \cdot \nabla(q_k + e_k), \phi)| &= |((q_{k-1} + e_{k-1}) \cdot \nabla \phi, u - u_k)| \\ &\leq \|q_{k-1} + e_{k-1}\| \|\nabla \phi\| \|u - u_k\|_\infty \\ &\leq C\|q_{k-1} + e_{k-1}\| \|\nabla \phi\| \|A(u - u_k)\|, \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} |((q_k + e_k) \cdot \nabla(q_{k-1} + e_{k-1}), \phi)| &= |((u - u_k) \cdot \nabla \phi, q_{k-1} + e_{k-1})| \\ &\leq \|u - u_k\|_\infty \|\nabla \phi\| \|q_{k-1} + e_{k-1}\| \\ &\leq C\|A(u - u_k)\| \|\nabla \phi\| \|q_{k-1} + e_{k-1}\|, \end{aligned} \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} |(q_k \cdot \nabla u, \phi)| + |(u \cdot \nabla q_k, \phi)| &= |(q_k \cdot \nabla \phi, u)| + |(u \cdot \nabla \phi, q_k)| \\ &\leq 2\|q_k\| \|\nabla \phi\| \|u\|_\infty \\ &\leq C\|q_k\| \|\nabla \phi\| \|Au\|, \end{aligned} \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned} |((q_{k-1} + e_{k-1}) \cdot \nabla(q_{k-1} + e_{k-1}), \phi)| &= |((q_{k-1} + e_{k-1}) \cdot \nabla \phi, u - u_{k-1})| \\ &\leq \|q_{k-1} + e_{k-1}\| \|\nabla \phi\| \|u - u_{k-1}\|_\infty \\ &\leq C\|q_{k-1} + e_{k-1}\| \|\nabla \phi\| \|A(u - u_{k-1})\|. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Reemplazando (3.106)-(3.109) en (3.105), se obtiene

$$\begin{aligned} \|e_k\|^2 &\leq \frac{d}{dt}(e_k, \phi) + C(\|Au\| + \|Au_k\|) \|\nabla \phi\| (\|q_{k-1}\| + \|e_{k-1}\|) \\ &\quad + C\|q_k\| \|\nabla \phi\| \|Au\| + C(\|q_{k-1}\| + \|e_{k-1}\|) \|\nabla \phi\| (\|Au\| + \|Au_{k-1}\|). \end{aligned} \quad (3.110)$$

Integrando (3.110) entre 0 y $s = t$, también recordando que $e_k(0) = 0$ y $\phi(s) = 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|e_k(s)\|^2 ds &\leq C \int_0^t (\|Au(s)\| + \|Au_k(s)\|) \|\nabla\phi(s)\| (\|q_{k-1}(s)\| + \|e_{k-1}(s)\|) ds \\
&\quad + C \int_0^t (\|q_{k-1}(s)\| + \|e_{k-1}(s)\|) \|\nabla\phi(s)\| (\|Au(s)\| + \|Au_{k-1}(s)\|) ds \\
&\quad + C \int_0^t \|q_k(s)\| \|\nabla\phi(s)\| \|Au(s)\| ds.
\end{aligned} \tag{3.111}$$

Para los términos del lado derecho de (3.111), usando la desigualdad de Hölder y las desigualdades (2.129) y (3.40) con $g = e_k$, se tiene

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (\|Au(s)\| + \|Au_k(s)\|) \|\nabla\phi(s)\| (\|q_{k-1}(s)\| + \|e_{k-1}(s)\|) ds \\
&\leq C \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \|\nabla\phi(s)\|^2 \int_0^t (\|Au(s)\|^2 + \|Au_k(s)\|^2) ds \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left(\int_0^t (\|q_{k-1}(s)\|^2 + \|e_{k-1}(s)\|^2) ds \right)^{1/2} \\
&\leq C \left(\int_0^t \|e_k(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t (\|q_{k-1}(s)\|^2 + \|e_{k-1}(s)\|^2) ds \right)^{1/2},
\end{aligned} \tag{3.112}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (\|q_{k-1}(s)\| + \|e_{k-1}(s)\|) \|\nabla\phi(s)\| (\|Au(s)\| + \|Au_{k-1}(s)\|) ds \\
&\leq C \left(\int_0^t (\|q_{k-1}(s)\|^2 + \|e_{k-1}(s)\|^2) ds \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \|\nabla\phi(s)\|^2 \int_0^t (\|Au(s)\|^2 + \|Au_{k-1}(s)\|^2) ds \right)^{1/2} \\
&\leq C \left(\int_0^t (\|q_{k-1}(s)\|^2 + \|e_{k-1}(s)\|^2) ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|e_k(s)\|^2 ds \right)^{1/2},
\end{aligned} \tag{3.113}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \|q_k(s)\| \|\nabla\phi(s)\| \|Au(s)\| ds \\
&\leq \left(\int_0^t \|q_k(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \|\nabla\phi(s)\|^2 \int_0^t \|Au(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \\
&\leq C \left(\int_0^t \|q_k(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|e_k(s)\|^2 ds \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{3.114}$$

Reemplazando (3.112)-(3.114) en (3.111), se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^t \|e_k(s)\|^2 ds &\leq C \left(\int_0^t (\|q_{k-1}(s)\|^2 + \|e_{k-1}(s)\|^2) ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|e_k(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\quad + C \left(\int_0^t \|q_k(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|e_k(s)\|^2 ds \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

y luego, se deduce

$$\begin{aligned} \left(\int_0^t \|e_k(s)\|^2 ds \right)^{1/2} &\leq C \left(\int_0^t (\|q_{k-1}(s)\|^2 + \|e_{k-1}(s)\|^2) ds \right)^{1/2} \\ &\quad + C \left(\int_0^t \|q_k(s)\|^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Elevando al cuadrado (3.115) y aplicando desigualdad de Young, se obtiene

$$\int_0^t \|e_k(s)\|^2 ds \leq C \int_0^t \|q_{k-1}(s)\|^2 ds + C \int_0^t \|e_{k-1}(s)\|^2 ds + C \int_0^t \|q_k(s)\|^2 ds,$$

entonces aplicando (3.76) e inducción sobre (3.81) para $k = r - 1$, se tiene

$$\int_0^t \|e_k(s)\|^2 ds \leq C\lambda_{m_{k-1}}^{-2} + C\lambda_{m_k}^{-2},$$

y finalmente por (3.78), resulta

$$\int_0^t \|e_k(s)\|^2 ds \leq C\lambda_{m_k}^{-2}, \quad (3.116)$$

para $t \in (0, T^*]$.

Por otro lado, multiplicando (3.90) por $\tau(t)$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\tau(t)\|e_k\|^2) + \nu\tau(t)\|\nabla e_k\|^2 &\leq \tau'(t)\|e_k\|^2 + C\tau(t)(\|Au\| + \|Au_{k-1}\|)(\|q_{k-1}\|^2 + \|e_{k-1}\|^2) \\ &\quad + C\tau(t)\|e_k\|^2\|Au_{k-1}\|^2 + C\tau(t)\|q_k\|^2\|Au_{k-1}\|, \end{aligned}$$

luego, como $\tau(t)^2\|Au\|^2 \leq \tau(t)\|Au\|^2 \leq C$ y $\tau'(t) \leq 1$, se deduce

$$\frac{d}{dt}(\tau(t)\|e_k\|^2) + \nu\tau(t)\|\nabla e_k\|^2 \leq C\|e_k\|^2 + C(\|q_{k-1}\|^2 + \|e_{k-1}\|^2) + C\|q_k\|^2. \quad (3.117)$$

Integrando (3.117) entre 0 y $t \in (0, T^*]$ y recordando que $e_k(0) = 0$, se tiene

$$\tau(t)\|e_k(t)\|^2 \leq C \int_0^t \|e_k(s)\|^2 ds + C \int_0^t \|q_{k-1}(s)\|^2 ds + C \int_0^t \|e_{k-1}(s)\|^2 ds + C \int_0^t \|q_k(s)\|^2 ds,$$

y entonces, por (3.76), (3.78) y (3.116), de la última desigualdad se concluye

$$\tau(t)\|e_k(t)\|^2 \leq c\lambda_{m_k}^{-2} + c\lambda_{m_{k-1}}^{-2} \leq C\lambda_{m_k}^{-2}. \quad (3.118)$$

Finalmente, combinando (3.116) y (3.118), se obtiene (3.81). $\square$

Resultados para el error de las aproximaciones u_k de Galerkin de k-nivel en las normas $L^\infty(0, T^*; L^2(\Omega))$, $L^2(0, T^*; H^1(\Omega))$ y $L^2(0, T^*; L^2(\Omega))$ son dadas en el siguiente teorema.

Teorema 3.8. *Con las condiciones del Teorema 3.6 y el Teorema 3.7, el error $u(t) - u_k(t)$ satisface las siguientes estimaciones*

$$\|u(t) - u_k(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u(s) - \nabla u_k(s)\|^2 ds \leq C\lambda_{m_k}^{-1}, \quad (3.119)$$

$$\nu\tau(t)\|\nabla u(t) - \nabla u_k(t)\|^2 + \nu \int_0^t \tau(s)\|\partial_t u(s) - \partial_t u_k(s)\|^2 ds \leq C\lambda_{m_k}^{-1}, \quad (3.120)$$

$$\tau(t)\|u(t) - u_k(t)\|^2 + \int_0^t \|u(s) - u_k(s)\|^2 ds \leq C\lambda_{m_k}^{-2}, \quad (3.121)$$

para todo $0 \leq t \leq T^*$.

Demostración. Por la definición dada en (3.72) se tiene que $u(t) - u_k(t) = q_k(t) + e_k(t)$, luego usando la desigualdad triangular y la desigualdad de Young, se obtiene

$$\|u(t) - u_k(t)\|^2 \leq (\|q_k(t)\| + \|e_k(t)\|)^2 \leq 2\|q_k(t)\|^2 + 2\|e_k(t)\|^2. \quad (3.122)$$

Luego, observando (3.122) se sigue

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_k(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u(s) - \nabla u_k(s)\|^2 ds &\leq 2\|q_k(t)\|^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla q_k(s)\|^2 ds \\ &\quad + 2\|e_k(t)\|^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla e_k(s)\|^2 ds, \end{aligned}$$

y entonces usando las estimaciones (3.74) y (3.79), se obtiene

$$\|u(t) - u_k(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u(s) - \nabla u_k(s)\|^2 ds \leq C\lambda_{m_k}^{-1} + C\lambda_{m_k}^{-3/2}. \quad (3.123)$$

Como por hipótesis $\lambda_{m_k}^{-1} \leq \hat{c}^{-1} < 1$ entonces se tiene $\lambda_{m_k}^{-3/2} \leq \lambda_{m_k}^{-1}$, por lo tanto de (3.123) se sigue el resultado (3.119).

Similarmente, por la definición dada en (3.122), se tiene que

$$\begin{aligned} \nu\tau(t)\|\nabla u(t) - \nabla u_k(t)\|^2 + \int_0^t \tau(s)\|\partial_t u(s) - \partial_t u_k(s)\|^2 ds \\ \leq 2\nu\tau(t)\|\nabla q_k(t)\|^2 + 2 \int_0^t \tau(s)\|\partial_t q_k(s)\|^2 ds \\ + 2\nu\tau(t)\|\nabla e_k(t)\|^2 + 2 \int_0^t \tau(s)\|\partial_t e_k(s)\|^2 ds, \end{aligned}$$

y luego usando las estimaciones (3.75) y (3.80) se sigue (3.120).

Teniendo en cuenta (3.122), se obtiene

$$\begin{aligned} \tau(t)\|u(t) - u_k(t)\|^2 + \int_0^t \|u(s) - u_k(s)\|^2 ds &\leq 2\tau(t)\|q_k(t)\|^2 + 2 \int_0^t \|q_k(s)\|^2 ds \\ &\quad + 2\tau(t)\|e_k(t)\|^2 + 2 \int_0^t \|e_k(s)\|^2 ds, \end{aligned}$$

y entonces observando las estimaciones (3.76) y (3.81), se deduce

$$\tau(t)\|u(t) - u_k(t)\|^2 + \int_0^t \|u(s) - u_k(s)\|^2 ds \leq C\lambda_{m_k}^{-2} + C\lambda_{m_k}^{-2},$$

lo cual implica (3.121). □

Observación 3.1.

Desde el Teorema 3.3, Teorema 3.5 y Teorema 3.8, sobre el espacio H_{m_K} se concluye que los errores

$$\|u - u_{m_K}\|_{L^\infty(0,T^*;L^2(\Omega))}, \quad \|u - u_{m_K}\|_{L^2(0,T^*;H^1(\Omega))} \quad y \quad \|u - u_{m_K}\|_{L^2(0,T^*;L^2(\Omega))}$$

tienen tasa de convergencia del mismo orden que los errores

$$\|u - u_K\|_{L^\infty(0,T^*;L^2(\Omega))}, \quad \|u - u_K\|_{L^2(0,T^*;H^1(\Omega))} \quad y \quad \|u - u_K\|_{L^2(0,T^*;L^2(\Omega))},$$

respectivamente.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Bressan A. *Lecture notes on functional analysis. With applications to linear partial differential equations*. Graduate Studies in Mathematics 143. American Mathematical Society, 2013.
- [2] Brezis H., *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer, 2011.
- [3] Cattani M., *Elementos de Mecânica dos Fluidos*. Segunda Edición. Edgard Blucher, (2005).
- [4] Galdi G.P., *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Steady-state problems*. Second edition. Springer Monographs in Mathematics, 2011.
- [5] He Y., Liu K., Sun W., *Multi-level spectral Galerkin method for the Navier-Stokes problem I: spatial discretization*, Numerische Mathematik, Vol. 101, 501-522 (2005).
- [6] Heywood J., *The Navier-Stokes equations: On the existence, regularity and decay of solutions*, Indiana U. Math. J., **29**, 639-681 (1980).
- [7] Heywood J., Rannacher, R., *Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem I: Regularity of solutions and second-order error estimates for spatial discretization*, SIAM J. Numer. Anal. **19**, 275-311 (1982).
- [8] Heywood, J., *An error estimate uniform in time for spectral Galerkin approximations of the Navier-Stokes problem*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 98, 2, 333-345 (1982).
- [9] Hill A., Süli E., *Approximation of the global attractor for the incompressible Navier-Stokes problem*, IMA Journal of Numerical Analysis **20**, 633-667 (2000).
- [10] Ladyzhenskaya O., *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. Second English edition. Mathematics and its Applications, Vol. 2 Gordon and Breach, Science Publishers, 1969.

- [11] Lages Lima E., *Curso de análise volume 1*. Projeto Euclides, 1976.
- [12] Lions J.L., *Quelques Méhodes de résolution des problemèmes aux limites non linéaires*. Études Mathématiques. 1969.
- [13] Munson B. Young D., Okiishi T. *Fundamentals of Fluis Mechanics*. John Wiley & Sons, Inc., 2004.
- [14] Rautmann R., *On the convergence-rate of nonstationary Navier-Stokes approximations*. Lecture Notes in Mathematics 771: Approximations Methods for Navier-Stokes Problems, 425-449, 1980.
- [15] Taylor, A. E. *Introduction to functional analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York; Chapman & Hall, Ltd., London 1958.
- [16] Temam R., *Navier -Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*. AMS Chelsea Publishing, 2001.
- [17] Temam R. *Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis*. Second edition. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 66. (SIAM), Philadelphia, PA, 1995.

*El éxito se alcanza convirtiendo cada paso
en una meta y cada meta en un paso.
- C. C. Cortez*