UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE
FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Matemáticas

PROBLEMA DE CONTROL DISTRIBUIDO PARA LAS ECUACIONES DE FLUIDOS MICROPOLARES

Tesis para optar al grado de Magister en Ciencias Mención Matemática

PAOLA ANDREA ESPINOZA DELGADO

Profesor Tutor: Dra. Elva Eliana Ortega Torres

Antofagasta, Chile
2019

Tesis parcialmente financiada por CONICYT-PFCHA/MagísterNacional/2018-22180542, Chile.

A mi Madre Susana Delgado y
mi Amado Carlos Yañez

Agradecimientos

Carpe Diem, Quam Minimum Credula Postero.
-Horacio, Odas I.

Al finalizar esta etapa, quisiera agradecer a todas las personas que han sido fundamental en todo este proceso, tanto de aprendizaje como emocional.

A la Universidad Católica del Norte, por haber permitido formame en ella. En general, al Departamento de Matemáticas de la Universidad Católica del Norte, tanto profesores como secretarias, por su dedicación.

A la profesora Dra. Elva Ortega, quien ha sido unos de los pilares fundamentales durante todo mi desarrollo académico, por todo su apoyo tanto como directora del programa de postgrado como mi profesora guía, gracias por su paciencia, dedicación, comprensión y motivación para seguir con mis estudios.

Agradezco a CONICYT-PFCHA/MagísterNacional/2018-22180542 y al programa de magíster por ayudar a financiar este trabajo.

A mi mamita Susana Delgado, la mujer que ha sido el pilar fundamental en mi vida, le agradezco su constante apoyo en esta decisión de seguir estudiando, por su amor incondicional, por siempre confiar en mis capacidades y alentarme en los momentos más difíciles, espero se sientas orgullosa de la hija que tiene.

Al amor de mi vida Carlos Yañez, gracias por acompañarme y apoyarme en este largo camino, por ser testigo de todo mi esfuerzo y dedicación, se que no ha sido fácil para nosotros por la distancia, pero aún así siempre has estado conmigo en todo.

A mi hermano Cristián Espinoza, a pesar de su condición se que en el fondo de su corazón me ama, siempre te protegeré y espero poder ser un ejemplo para el.

A mis tíos Marcela Delgado, Juan Guerrero y primos Juan Sebastián, Fernanda, mi princesa Karen, por estar en todos los momentos importantes de mi vida, mis alegrias y tristezas.

A todos mis amigos, sin ustedes este largo proceso hubiera sido aún más difícil, gracias por alentarme y estar conmigo cuando los he necesitado, en especial a mi mejor amigo Pablo Valderrama, por alegrarme la vida y hacer que valore cada momento de ella, a mi amiguita Jennifer Mena por siempre estar para mi incluso cuando no estaba, a todos y cada uno de ellos les agradezco por aportar luz y alegría en mi vida.

Paola Andrea Espinoza Delgado, Marzo 2019.

Índice general

Introducción

Los problemas de control para el movimiento de un fluido viscoso tiene muchas aplicaciones en ingeniería y ciencias, ya que la capacidad de manipular un campo de flujo para lograr un cambio deseado es de importancia tecnológica. Problemas de control que tienen como restricciones las ecuaciones de Navier-Stokes han sido bastante estudiados, sin embargo existe muy pocos resultados relacionados a problemas de control restringidos a las ecuaciones de fluidos micropolares. Los fluidos micropolares son fluidos con microestructura y físicamente pueden representar fluidos que contienen partículas rígidas orientadas al azar suspendidas en un medio viscoso, donde se ignora la deformación de las partículas. Las ecuaciones de fluidos micropolares fueron obtenidos ante la necesidad de modelar fluidos con microestructura y debido a que las ecuaciones de Navier-Stokes no logran modelar éste tipo de fluidos, así, las ecuaciones de fluidos micropolares involucran a las ecuaciones de Navier-Stokes y describen el movimiento de un fluido viscoso e incompresible.

Los fluidos micropolares fueron descubierto por Eringen en 1964 ([7]) y planteó el modelo matemático que describe el movimiento de estos fluidos en 1966 en su trabajo [8].

La teoría de los fluidos micropolares muestra los efectos de la inercia rotatoria local y se puede utilizar para analizar el comportamiento de lubricantes exóticos, fluidos coloidales, fluidos poliméricos, cristales líquidos, diversos flujos biológicos, flujo con suspensiones de baja concentración, etc.

Considerando que el flujo ocurre en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ con borde Γ regular, durante un intervalo de tiempo $[0,T], T > 0$, las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido micropolar, con condiciones de borde homogéneas, son dadas por el siguiente sistema no lineal (ver [13]):

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u}_t - (\mu+\chi)\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \nabla p - \chi \operatorname{rot} w &= \boldsymbol{f} \text{ en } \Omega\times(0,T),\\ j w_t + \gamma\Delta w + j\boldsymbol{u}\cdot\nabla w + 2\chi w - \chi\operatorname{rot}\boldsymbol{u} &= g \text{ en } \Omega\times(0,T),\\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} &= 0 \text{ en } \Omega\times(0,T),\\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0},\ w &= 0 \text{ sobre } \Gamma\times(0,T). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

En el sistema (1), $\boldsymbol{u}$ es la velocidad del fluido, w es la velocidad microrotacional, p es la presión hidrostática, $\boldsymbol{f}$ y g son fuerzas externas. La condición div $= 0$ representa la incompresibilidad del fluido. La constantes $\mu > 0$ y $\chi > 0$ representan la viscosidad cinemática y viscosidad cinemática de microrotación respectivamente. Las constantes positivas j, γ caracterizan propiedades del fluido.

Al sistema (1) se le asocia las siguientes condiciones iniciales

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{0},\ w(0) = 0 \text{ en } \Omega. \tag{2}$$

Cuando $\chi = 0$ y $w = 0$ el sistema (1)-(2) se reduce a las ecuaciones de Navier-Stokes. Un caso especial, en la teoría de fluidos micropolares, se presenta cuando la velocidad microrotacional w

est'a restringida por $w = \operatorname{rot} \boldsymbol{u}$, desde que cuando se reemplaza w por $\operatorname{rot} \boldsymbol{u}$ en el sistema (1)-(2), éste se transforma en las clásicas ecuaciones de Navier-Stokes.

Sobre el estudio de los modelos de fluidos micropolares existe poca literatura, se pueden mencionar los siguientes trabajos [18], [19], [14], [15], [16].

En este trabajo se estudia un problema de control asociado a las soluciones débiles del sistema (1)-(2). Se considera como función de control una fuerza externa y el problema consiste en determinar un control cuya acción transforme un fluido micropolar en un fluido de Navier-Stokes, esto es, que la velocidad microrotacional w sea lo más cercana posible al rotacional de la velocidad lineal $\boldsymbol{u}$. El estudio que se desarrolla es basado en los resultados presentados en [17].

Para la formulación matemática del problema, se considera los espacios de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ y $\mathbf{V} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)\,;\, \text{div } = 0 \text{ sobre } \Gamma\}$, y se define el conjunto $B_r = \{g \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) : \|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq r\}$ para todo $r > 0$. Entonces, dada la fuerza externa $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}')$ y considerando como control la fuerza externa g del sistema (1), se formula el problema de control:

Problema 1. Hallar un control $g \in B_r$ tal que minimice el funcional

$$J(g) = \frac{1}{2}\int_0^T \|w_g(t) - \operatorname{rot} \boldsymbol{u}_g(t)\|^2 dt, \tag{3}$$

sujeto a que $(\boldsymbol{u}_g, w_g) \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ satisfaga el sistema

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{u}_g(t),\boldsymbol{v}) + (\mu+\chi)(\nabla \boldsymbol{u}_g(t),\nabla \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}_g(t)\cdot\nabla \boldsymbol{u}_g(t),\boldsymbol{v}) - \chi(\operatorname{rot} w_g(t),\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}\rangle, \\
j\dfrac{d}{dt}(w_g(t),z) + \gamma(\nabla w_g(t),\nabla z) + j(\boldsymbol{u}_g(t)\cdot\nabla w_g(t),z) + 2\chi(w_g(t),z) - \chi(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_g(t),z) \\
\qquad = (g(t),z), \\
\boldsymbol{u}_g(0) \;=\; \mathbf{0},\; w_g(0) \;=\; 0,
\end{array}\right\} \tag{4}$$

para todo $(\boldsymbol{v},z) \in \mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)$ y en el sentido de distribuciones sobre $(0,T)$.

El sistema (4) es una formulación débil del sistema (1)-(2), y una solución de (4) es llamada una solución débil del sistema (1)-(2). El resultado de este trabajo se puede extender al caso tridimensional.

El desarrollo del trabajo está organizado de la siguiente manera:

En el Capítulo 1, se definen los espacios de funciones y se presentan algunos resultados que son necesarios para el estudio del problema 1.

En el Capítulo 2, formalmente se deduce una formulación débil del sistema (1)-(2), la cual es dada por el sistema (4), y usando el método de Galerkin, se demuestra la existencia y unicidad de una solución del sistema (4).

En el Capítulo 3, Sección 3.1, se establece la formulación del problema de control. En Sección 3.2, se demuestra la existencia de una solución para el problema de control (3)-(4). En Sección 3.3, se demuestra que el funcional J es Gateaux diferenciable y se determina su derivada y se deduce una condición necesaria para el problema de control. Finalmente, en Sección 3.4, se demuestra la existencia y unicidad de solución de las ecuaciones adjuntas y se deduce una condición de optimalidad, obteniendo así un sistema de optimalidad para el problema de control. Las técnicas empleadas para la obtención del sistema de optimalidad se basan en [5].

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se introducen algunos espacios de funciones y resultados de análisis que serán utilizados para el adecuado desarrollo del trabajo.

1.1. Definiciones y notaciones

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ un dominio acotado con borde Γ.

Definición 1.1 *(Espacio $\boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty(\Omega)$)*
Se denota por $\boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty(\Omega)$ el espacio de todas las funciones vectoriales definidas sobre Ω que tienen derivadas continuas de todos los ordenes.

Definición 1.2 *(Soporte de una función)*
Se define soporte de $\boldsymbol{f}$, denotado por $Sop\,\boldsymbol{f}$, al conjunto

$$Sop\,\boldsymbol{f} = \overline{\{x \in \Omega : \boldsymbol{f}(x) \neq 0\}},$$

así el soporte de $\boldsymbol{f}$ es el menor conjunto cerrado relativo en cuyo exterior $\boldsymbol{f}$ es identicamente cero.

Definición 1.3 *(Espacio $\boldsymbol{\mathcal{C}}_0^\infty(\Omega)$ y función test)*
El espacio $\boldsymbol{\mathcal{C}}_0^\infty(\Omega)$ se define como el conjunto de todas las funciones vectoriales que pertenecen a $\boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty(\Omega)$ que tienen soporte compacto contenido en Ω, esto es,

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_0^\infty(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty(\Omega) : \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \text{ sobre el borde de } \Omega\}.$$

Una función $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{C}}_0^\infty(\Omega)$ es llamada función test.

Definición 1.4 *(Distribución y espacio de distribuciones)*
Una distribución en Ω es un funcional lineal continuo definido en $\boldsymbol{\mathcal{C}}_0^\infty(\Omega)$. Al espacio vectorial de todas las distribuciones en Ω se denomina espacio de distribuciones y se denota por $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega) = (\boldsymbol{\mathcal{C}}_0^\infty(\Omega))'$, es decir, el espacio de distribuciones es el espacio dual de $\boldsymbol{\mathcal{C}}_0^\infty(\Omega)$.

Definición 1.5 *(Densidad)*
Sea $\mathbf{X}$ un espacio topológico. Se dice que un conjunto $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$ es denso en $\mathbf{X}$ si $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{X}$, es decir, la clausura topológica del conjunto $\mathbf{A}$ es todo el espacio $\mathbf{X}$.

Definición 1.6 *(Espacio normado)*
Se dice que $\mathbf{X}$ *es un espacio normado si* $\mathbf{X}$ *es un espacio vectorial con una norma* $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$ *definida en* $\mathbf{X}$.

Definición 1.7 *(Sucesiones de Cauchy)*
Sea $\mathbf{X}$ *un espacio normado con norma* $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$. *Se dice que una sucesión* $\{\boldsymbol{v}_m\}_{m\geq 1}$ *en* $\mathbf{X}$ *es de Cauchy si verifica lo siguiente: Dado* $\epsilon > 0$, *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\forall\ m,\ n > N,\ \ \|\boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{v}_n\|_{\mathbf{X}} < \epsilon.$$

Definición 1.8 *(Espacio de Banach)*
Se dice que un espacio vectorial $\mathbf{B}$ *es de Banach, si* $\mathbf{B}$ *es un espacio normado completo en la norma* $\|\cdot\|_{\mathbf{B}}$, *es decir, toda sucesión de Cauchy en* $\mathbf{B}$ *converge en la métrica inducida por la norma* $\|\cdot\|_{\mathbf{B}}$.

Definición 1.9 *(Espacio de Hilbert)*
Un espacio vectorial $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ *es de Hilbert, si* $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ *es un espacio de Banach con norma inducida por un producto interno.*

Observación 1.1 *Todo espacio de Hilbert es reflexivo, esto es,* $\boldsymbol{\mathcal{H}}'' = \boldsymbol{\mathcal{H}}$ *donde* $\boldsymbol{\mathcal{H}}''$ *es el espacio bidual de* $\boldsymbol{\mathcal{H}}$.

Notación 1.1 *La dualidad entre un espacio* $\mathbf{X}$ *y su espacio dual* $\mathbf{X}'$ *se denota por* $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{X}'}$ *o simplemente por* $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Definición 1.10 *(Espacio separable)*
Un espacio de Hilbert $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ *es separable si admite una base Hilbertiana, es decir, admite una base ortonormal numerable.*

1.2. Espacios de funciones

1.2.1. Espacios $\mathbf{L}^p(\Omega)$

Definición 1.11 *(Espacio* $\mathbf{L}^p(\Omega)$*)*
Sea p *un número real tal que* $1 \leq p < \infty$. *Se denota por* $\mathbf{L}^p(\Omega)$ *el espacio de funciones vectoriales definido por*

$$\mathbf{L}^p(\Omega) = \{\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^n;\ \boldsymbol{u} \text{ es medible y } \int_\Omega |\boldsymbol{u}(x)|^p dx < \infty\}, \tag{1.1}$$

con norma definida por

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^p} = \left(\int_\Omega |\boldsymbol{u}(x)|^p dx\right)^{1/p}. \tag{1.2}$$

Observación 1.2 *En particular, cuando* $p = 2$ *el espacio* $\mathbf{L}^2(\Omega)$ *es un espacio de Hilbert con producto interno*

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{u}(x)\,\boldsymbol{v}(x)\,dx \quad \text{y norma dada por} \quad \|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^2} = \left(\int_\Omega |\boldsymbol{u}(x)|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{1.3}$$

Observación 1.3 *Si $1 < p < \infty$ el espacio $\mathbf{L}^p(\Omega)$ es reflexivo, esto es, $(\mathbf{L}^p(\Omega))'' = \mathbf{L}^p(\Omega)$.*

Definición 1.12 *(Espacio $\mathbf{L}^\infty(\Omega)$)*
El espacio $\mathbf{L}^\infty(\Omega)$ se define por

$$\mathbf{L}^\infty(\Omega) = \{\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^n;\ \boldsymbol{u} \text{ es medible y } |\boldsymbol{u}(x)| \leq C \text{ c.t.p en } \Omega\}, \tag{1.4}$$

con norma

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^\infty} = \sup_{x\in\Omega} \text{ess}\, |\boldsymbol{u}(x)| = inf\{C; |\boldsymbol{u}(x)| \leq C \text{ c.t.p en } \Omega\}. \tag{1.5}$$

Definición 1.13 *Sea $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$. Se dice que q es el exponente conjugado de p si $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Si $p = 1$ entonces $q = \infty$.*

Definición 1.14 *(Espacio dual de $\mathbf{L}^p(\Omega)$)*
Para $1 < p < \infty$, el espacio dual de $\mathbf{L}^p(\Omega)$ denotado por $(\mathbf{L}^p(\Omega))'$ es definido por

$$(\mathbf{L}^p(\Omega))' = \{\boldsymbol{\phi} : \mathbf{L}^p(\Omega) \to \mathbb{R}^n;\ \boldsymbol{\phi} \text{ es lineal y continuo}\},$$

con norma dada por

$$\|\boldsymbol{\phi}\|_{(\mathbf{L}^p)'} = \sup_{\boldsymbol{u}\in\mathbf{L}^p(\Omega), \boldsymbol{u}\neq 0} \frac{|\langle \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}\rangle|}{\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^p}}.$$

Identificación:
Sea $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$ y q el exponente conjugado de p, entonces $(\mathbf{L}^p(\Omega))' = \mathbf{L}^q(\Omega)$. En particular, $(\mathbf{L}^2(\Omega))' = \mathbf{L}^2(\Omega)$ y $(\mathbf{L}^1(\Omega))' = \mathbf{L}^\infty(\Omega)$.

1.2.2. Espacios de Sobolev

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$ y la función $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x))$.

Definición 1.15 *Sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \cup \{\mathbf{0}\}$ y $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$. El operador diferencial D^α se define como*

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} D_3^{\alpha_3} ... D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3} ... \partial x_n^{\alpha_n}},$$

donde $D_i^{\alpha_i} = \dfrac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}$. Si $\alpha_i = 0 \Rightarrow D_i^{\alpha_i} = Id$.

Definición 1.16 *(Espacio $\mathbf{H}^m(\Omega)$)*
Sea $m \in \mathbb{N}$, el espacio de Sobolev de orden m se define como

$$\mathbf{H}^m(\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega); D^\alpha \boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}, \tag{1.6}$$

con producto interno

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{\mathbf{H}^m}=\sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega D^\alpha\boldsymbol{u}(x)D^\alpha\boldsymbol{v}(x)dx, \tag{1.7}$$

y norma asociada

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{H}^m}=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})_{\mathbf{H}^m}^{1/2}=\left(\sum_{|\alpha|\leq m}\|D^\alpha\boldsymbol{u}\|^2\right)^{1/2}. \tag{1.8}$$

Observación 1.4 *(Ver [1])*
i) *Los espacios $\mathbf{H}^m(\Omega)$ son espacios de Hilbert, por lo tanto son reflexivos.*
ii) *El espacio $\mathbf{H}^m(\Omega)$ es denso en $\mathbf{L}^2(\Omega)$, ya que $\boldsymbol{\mathcal{C}}_0^\infty(\Omega)$ es denso en $\mathbf{L}^2(\Omega)$ y $\boldsymbol{\mathcal{C}}_0^\infty(\Omega)\subset\mathbf{H}^m(\Omega)$.*

En particular, cuando $m=1$ se tiene la siguiente definición:

Definición 1.17 *(Espacio $\mathbf{H}^1(\Omega)$)*
El espacio de Sobolev de orden 1, se define como

$$\mathbf{H}^1(\Omega)=\{\boldsymbol{u}\in\mathbf{L}^2(\Omega)\ ;\nabla\boldsymbol{u}\in\mathbf{L}^2(\Omega)\}, \tag{1.9}$$

con producto interno

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{\mathbf{H}^1}=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v})=\int_\Omega\boldsymbol{u}(x)\boldsymbol{v}(x)dx+\int_\Omega\nabla\boldsymbol{u}(x):\nabla\boldsymbol{v}(x)dx, \tag{1.10}$$

y norma asociada

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{H}^1}=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})_{\mathbf{H}^1}^{1/2}=\left(\int_\Omega|\boldsymbol{u}(x)|^2dx+\int_\Omega|\nabla\boldsymbol{u}(x)|^2dx\right)^{1/2}=(\|\boldsymbol{u}\|^2+\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2)^{1/2}. \tag{1.11}$$

Definición 1.18 *(Espacio $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$)*
El espacio $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ es la clausura de $\boldsymbol{\mathcal{C}}_0^\infty(\Omega)$ en la norma $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1}$ y es caracterizado como

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega)=\{\boldsymbol{u}\in\mathbf{H}^1(\Omega)\ ;\ \boldsymbol{u}=0\ \textit{sobre}\ \Gamma\},$$

donde Γ es el borde de Ω.

Observación 1.5 *El espacio $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable.*

Definición 1.19 *(Espacio dual de $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$)*
El espacio dual de $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, denotado por $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, es definido como

$$\mathbf{H}^{-1}(\Omega)=\left\{\boldsymbol{v}\in(\mathbf{C}_0^\infty(\Omega))'\ ;\ \boldsymbol{v}=v_0+\sum_{i=1}^n\frac{\partial v_i}{\partial x_i},\ v_0,\ v_i\in\mathbf{L}^2(\Omega)\right\},$$

con norma dada por

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{H}^{-1}}=\sup_{\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}_0^1,\boldsymbol{v}\neq 0}\frac{|\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}}|}{\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{H}_0^1}}=\sup_{\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{H}_0^1}\leq 1}|\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}}|. \tag{1.12}$$

Además, se tiene la siguiente regla de inclusión $\mathbf{H}_0^1(\Omega)\subset\mathbf{L}^2(\Omega)\subset\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$.

1.2.3. Espacios $\mathbf{L}^p(0,T;\mathbf{X})$

Definición 1.20 *(Espacios $\mathbf{L}^p(0,T;\mathbf{X})$)*
Sean $\mathbf{X}$ es un espacio de Banach, T un número real $(0 < T < \infty)$, $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Banach $\mathbf{L}^p(0,T;X)$ se define por

$$\mathbf{L}^p(0,T;\mathbf{X}) = \{\boldsymbol{u} : (0,T) \to \mathbf{X} \ ; \quad \boldsymbol{u} \textit{ es medible }, t \mapsto \|\boldsymbol{u}(t)\|_{\mathbf{X}} \in L^p(0,T)\}, \tag{1.13}$$

dotado con la norma

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^p(0,T;\mathbf{X})} = \left(\int_0^T \|\boldsymbol{u}(t)\|_{\mathbf{X}}^p dt\right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty, \tag{1.14}$$

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{X})} = \sup_{0<t<T} \|\boldsymbol{u}(t)\|_{\mathbf{X}}. \tag{1.15}$$

Ver [9], pág. 148.

Observación 1.6 *En particular, si $p = 2$ y $\mathbf{X}$ es un espacio de Hilbert, entonces $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{X})$ es un espacio de Hilbert.*

Los siguientes resultados pueden ser vistos en [12].

Observación 1.7 *Sea $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$, q el exponente conjugado de p y $\mathbf{X}$ un espacio de Hilbert. Entonces, el espacio dual de $\mathbf{L}^p(0,T;\mathbf{X})$ es dado por*

$$(\mathbf{L}^p(0,T;\mathbf{X}))' = \mathbf{L}^q(0,T;\mathbf{X}')$$

donde $\mathbf{X}'$ es el espacio dual de $\mathbf{X}$.

1.3. Desigualdades, operadores diferenciales y propiedades

Lema 1.1 *(Desigualdad de Young)*
Sean a y b números reales no negativos. Si p y q son números reales positivos tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces se tiene la desigualdad

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{1.16}$$

Ver en [3], pág. 56.

Teorema 1.1 *(Desigualdad de Hölder) Sea $1 \leq p \leq \infty$. Si $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ y $\boldsymbol{g} \in \mathbf{L}^q(\Omega)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces, $\boldsymbol{fg} \in L^1(\Omega)$ y*

$$\|\boldsymbol{fg}\|_{L^1} \leq \|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{L}^p} \|\boldsymbol{g}\|_{\mathbf{L}^q}. \tag{1.17}$$

La demostración puede ser vista en [3], pág. 56.

Observación 1.8 *En particular, si $p = q = 2$ la desigualdad (1.17) es llamada desigualdad de Cauchy-Schwartz.*

Corolario 1.1 *(Desigualdad de Poincaré)*
Sea $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto acotado. Entonces, existe una constante $C > 0$ dependiendo de Ω tal que

$$\|\boldsymbol{u}\| \leq C\|\nabla \boldsymbol{u}\|, \ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \tag{1.18}$$

Ver en [3], pág. 174.

Observación 1.9 *Para que la desigualdad de Poincaré sea válida es suficiente que la función $\boldsymbol{u}$ se anule solo en una región de medida positiva del borde de Ω.*

Usando la desigualdad de Poincaré, en el espacio de Hilbert $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ se verifica la siguiente equivalencia de normas

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{H}_0^1} = \|\nabla \boldsymbol{u}\|, \tag{1.19}$$

y el producto interno es dado por

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\mathbf{H}_0^1} = (\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} (\nabla u_i, \nabla v_i). \tag{1.20}$$

Debido a las inclusiones en espacios de Sobolev, se tiene la siguiente desigualdad, la cual será usada en el desarrollo de los capítulos posteriores.

Lema 1.2 *Si $n = 2$, para cualquier conjunto abierto Ω,*

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{L}^4} \leq 2^{1/4}\|\boldsymbol{v}\|^{1/2}\|\nabla \boldsymbol{v}\|^{1/2}, \ \forall\, \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \tag{1.21}$$

La demostración puede ser vista en [20], pág. 291.

A continuación, se definen algunos operadores diferenciales que serán utilizados en el análisis de las ecuaciones de fluidos micropolares.

Sea Ω dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ y $\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ tal que $\boldsymbol{u}(x) = (u_1(x), u_2(x))$ con $x = (x_1, x_2)$.

El operador gradiente se denota por ∇ y el gradiente de $\boldsymbol{u}$ es definido como la matriz

$$\nabla \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla u_1 \\ \nabla u_2 \end{pmatrix}.$$

El operador Laplaciano se denota por Δ y el Laplaciano de $\boldsymbol{u}$ se define como el vector

$$\Delta \boldsymbol{u} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_2^2} = \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) = (\Delta u_1, \Delta u_2).$$

El operador divergente se denota por div y el divergente de $\boldsymbol{u}$ se define por

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}. \tag{1.22}$$

Observación 1.10 *El producto interno* $(\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v})$ *se define por*

$$(\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}(x) : \nabla \boldsymbol{v}(x)\, dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x)\, dx = \sum_{i=1}^{2} (\nabla u_i, \nabla v_i).$$

El operador rotacional es denotado por rot y se tiene:

- Si $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, el $\operatorname{rot}\phi$ es definido por el vector

$$\operatorname{rot}\phi(x) = \left(\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_2}, -\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_1} \right). \tag{1.23}$$

- Si $\boldsymbol{u} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, el $\operatorname{rot}\boldsymbol{u}$ es definido por

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{u}(x) = \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}. \tag{1.24}$$

Considerando un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ con borde Γ de clase $\mathcal{C}^2$ y $\boldsymbol{n}$ el vector normal unitario exterior al borde de Ω, se tienen los siguientes resultados.

Lema 1.3 *(Lema de Gauss)*
Sean las funciones $u, v \in H^1(\Omega)$, *entonces*

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) dx + \int_\Gamma u(x) v(x) n_i dx, \tag{1.25}$$

donde n_i *es la i-ésima componente del vector normal* $\boldsymbol{n}$.

Ver [9], pág. 5.

Lema 1.4 *(Fórmula de Green para funciones vectoriales)*
Para $\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$, $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, *por integración por partes, se obtiene la fórmula de Green:*

$$(\Delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}(x) : \nabla \boldsymbol{v}(x) dx + \int_\Gamma \frac{\partial \boldsymbol{u}(x)}{\partial \boldsymbol{n}} \boldsymbol{v}(x) dx, \tag{1.26}$$

donde por definición $\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}} = \nabla \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = (\nabla u_1 \cdot \boldsymbol{n}, \nabla u_2 \cdot \boldsymbol{n}, ..., \nabla u_n \cdot \boldsymbol{n})$.

Demostración: Sea $\boldsymbol{u} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y sean $\Delta \boldsymbol{u} = (\Delta u_1, \Delta u_2) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ y $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, entonces tomando el producto interno, se tiene

$$\begin{aligned}
(\Delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &= \int_\Omega \Delta \boldsymbol{u}(x) \cdot \boldsymbol{v}(x)\, dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_i^2} v_1(x)\, dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_i^2} v_2(x)\, dx \\
&= \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_i^2} v_1(x)\, dx + \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_i^2} v_2(x)\, dx.
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Usando el Lema 1.3 para los términos del lado derecho de (1.27), se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial^2 u_j(x)}{\partial x_i^2}v_j(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{2}\left(-\int_{\Omega}\frac{\partial u_j(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v_j(x)}{\partial x_i}\,dx+\int_{\Gamma}\frac{\partial u_j(x)}{\partial x_i}v_j(x)n_i\,dx\right)\\ &= -\int_{\Omega}\nabla u_j(x)\nabla v_j(x)dx+\int_{\Gamma}\frac{\partial u_j(x)}{\partial \boldsymbol{n}}v_j(x)dx. \qquad (1.28)\end{aligned}$$

Reemplazando (1.28) en (1.27), se obtiene

$$\begin{aligned}(\Delta\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) &= -\int_{\Omega}(\nabla u_1(x)\nabla v_1(x)+\nabla u_2(x)\nabla v_2(x))dx+\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial u_1(x)}{\partial\boldsymbol{n}}v_1(x)+\frac{\partial u_2(x)}{\partial\boldsymbol{n}}v_2(x)\right)dx\\ &= -\int_{\Omega}\nabla\boldsymbol{u}(x):\nabla\boldsymbol{v}(x)\,dx+\int_{\Gamma}\frac{\partial\boldsymbol{u}(x)}{\partial\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v}(x)\,dx.\end{aligned}$$

■

Lema 1.5 *Si la función $p\in H^1(\Omega)$ y $\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}^1(\Omega)$, se tiene*

$$(\nabla p,\boldsymbol{v})=-\int_{\Omega}p(x)\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}(x)dx+\int_{\Gamma}p(x)\boldsymbol{v}(x)\cdot\boldsymbol{n}\,dx. \qquad (1.29)$$

Demostración: Sean $\nabla p=\left(\dfrac{\partial p}{\partial x_1},\dfrac{\partial p}{\partial x_2}\right)\in\mathbf{L}^2(\Omega)$ y $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)\in\mathbf{L}^2(\Omega)$, entonces tomando el producto interno, se tiene

$$(\nabla p,\boldsymbol{v})=\int_{\Omega}\nabla p(x)\cdot\boldsymbol{v}(x)\,dx=\int_{\Omega}\frac{\partial p(x)}{\partial x_1}v_1(x)\,dx+\int_{\Omega}\frac{\partial p(x)}{\partial x_2}v_2(x)\,dx. \qquad (1.30)$$

Usando el Lema 1.3 para los términos del lado derecho de (1.30), se obtiene

$$\int_{\Omega}\frac{\partial p(x)}{\partial x_i}v_i(x)\,dx=-\int_{\Omega}\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}p(x)\,dx+\int_{\Gamma}v_i(x)p(x)\,n_i\,dx. \qquad (1.31)$$

Reemplazando (1.31) en (1.30), se tiene

$$\begin{aligned}(\nabla p,\boldsymbol{v}) &= -\int_{\Omega}\left(\frac{\partial v_1(x)}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2(x)}{\partial x_2}\right)p(x)\,dx+\int_{\Gamma}p(x)(v_1(x)n_1+v_2(x)n_2)\,dx\\ &= -\int_{\Omega}p(x)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}(x)\,dx+\int_{\Gamma}p(x)\boldsymbol{v}(x)\cdot\boldsymbol{n}\,dx.\end{aligned}$$

■

Lema 1.6 *Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ un dominio acotado. Sean $\boldsymbol{u}:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ un campo vectorial y $w:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función tales que $\boldsymbol{u}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ y $w\in H_0^1(\Omega)$, entonces se verifica que*

$$(\mathrm{rot}\,w,\boldsymbol{u})=(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u},w). \qquad (1.32)$$

Demostración: Para $\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ y $w \in H_0^1(\Omega)$, se tiene

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot} w, \boldsymbol{u}) &= \int_\Omega \operatorname{rot} w(x) \cdot \boldsymbol{u}(x)\, dx = \int_\Omega \left(\frac{\partial w(x)}{\partial x_2}, -\frac{\partial w(x)}{\partial x_1} \right) \cdot (u_1(x), u_2(x))\, dx \\ &= \int_\Omega \frac{\partial w(x)}{\partial x_2} u_1(x)\, dx - \int_\Omega \frac{\partial w(x)}{\partial x_1} u_2(x)\, dx \end{aligned} \tag{1.33}$$

Usando el Lema 1.3 para los términos del lado derecho de (1.33), se obtiene

$$\int_\Omega \frac{\partial w(x)}{\partial x_j} u_i(x)\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} w(x)\, dx + \int_\Gamma u_i(x)\, w(x)\, n_j\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} w(x)\, dx$$

y reemplazando en (1.33), se obtiene

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot} w, \boldsymbol{u}) &= -\int_\Omega \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2} w(x)\, dx + \int_\Omega \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_1} w(x)\, dx \\ &= \int_\Omega \left(\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2} \right) w(x)\, dx = (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}, w).\end{aligned}$$

■

Lema 1.7 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado y $\boldsymbol{u} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial. Si $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$, entonces se verifica que*

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}) = -\Delta \boldsymbol{u}. \tag{1.34}$$

Demostración: Por definición de rotacional dado en (1.24), tenemos que

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}) = \operatorname{rot}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right), -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}, -\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \right).\end{aligned}$$

Como $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$, de la definición dada en (1.22), se tiene que $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0$, luego de la última igualdad se sigue que

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}) = &= \left(-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}, -\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right) \\ &= \left(-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}, -\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) \\ &= (-\Delta u_1, -\Delta u_2) = -\Delta \boldsymbol{u}.\end{aligned}$$

■

Lema 1.8 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ un dominio acotado. Si el campo vectorial $\boldsymbol{u} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pertenece a $\mathbf{H}^1(\Omega)$, entonces se verifica la desigualdad*

$$\|\operatorname{rot} \boldsymbol{u}\| \leq \sqrt{2} \|\nabla \boldsymbol{u}\|. \tag{1.35}$$

Si la función $w : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pertenece a $H^1(\Omega)$, entonces satisface la igualdad

$$\|\operatorname{rot} w\| = \|\nabla w\|. \tag{1.36}$$

La demostración de (1.35)-(1.36) puede ser vista en [16], pág. 15.

Se introducen las formas trilineales,

$$b : \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad \tilde{b} : \mathbf{H}^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R},$$

definidas por

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \quad \tilde{b}(\boldsymbol{u}, r, s) = (\boldsymbol{u} \cdot \nabla r, s). \tag{1.37}$$

Propiedades de las formas trilineales b y $\tilde{b}$ son dadas en el siguiente lema.

Lema 1.9 *Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$. Entonces, la forma trilineal b satisface*

$$\begin{aligned} b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &= -b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}), \ \forall\, \boldsymbol{u} \in \mathbf{V}, \forall\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), && (1.38) \\ b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) &= 0, \ \forall\, \boldsymbol{u} \in \mathbf{V}, \forall\, \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), && (1.39) \\ b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &= -((\nabla \boldsymbol{w})^T \cdot \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}), \ \forall\, \boldsymbol{u} \in \mathbf{V}, \forall\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), && (1.40) \end{aligned}$$

y la forma trilineal $\tilde{b}$ satisface

$$\begin{aligned} \tilde{b}(\boldsymbol{u}, r, s) &= -\tilde{b}(\boldsymbol{u}, s, r), \ \forall\, \boldsymbol{u} \in \mathbf{V}, \forall\, r, s \in H_0^1(\Omega), && (1.41) \\ \tilde{b}(\boldsymbol{u}, r, r) &= 0, \ \forall\, \boldsymbol{u} \in \mathbf{V}, \forall\, r \in H_0^1(\Omega), && (1.42) \\ \tilde{b}(\boldsymbol{u}, r, s) &= -((\nabla s)^T \cdot r, \boldsymbol{u}), \ \forall\, \boldsymbol{u} \in \mathbf{V}, \forall\, r, s \in H_0^1(\Omega). && (1.43) \end{aligned}$$

La demostración puede ser vista en [20] ó en [16] pág. 15.

Lema 1.10 *(Desigualdad de Gronwall genralizado)*
Sean $h, \psi : [0, T] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y $\phi : [0, T] \to \mathbb{R}$ funciones continuas.

1. *Si ϕ satisface*

$$\phi(t) + \psi(t) \leq C + \int_0^t h(s)\, \phi(s) ds, \ \forall t \in [0, T], \tag{1.44}$$

entonces, se cumple la siguiente desigualdad

$$\phi(t) + \psi(t) \leq C + C \int_0^t h(s) \exp\left(\int_s^t h(x) dx \right) ds, \ \forall t \in [0, T]. \tag{1.45}$$

2. *Si ϕ satisface*

$$\phi(t) + \psi(t) \leq C + \int_t^T h(s)\, \phi(s) ds, \ \forall t \in [0, T],$$

entonces, se cumple la siguiente desigualdad

$$\phi(t) + \psi(t) \leq C + C \int_t^T h(s) \exp\left(\int_t^s h(x) dx \right) ds, \ \forall t \in [0, T]. \tag{1.46}$$

Demostración:

1. Sea $r(t) = \displaystyle\int_0^t h(s)\,\phi(s)ds$, entonces $r'(t) = h(t)\,\phi(t)$. Luego

$$r'(t) - h(t)r(t) = h(t)(\phi(t) - r(t)). \tag{1.47}$$

Como $\psi(t) \geq 0$, entonces de (1.44) y la definición de $r(t)$, se tiene $\phi(t) \leq \varphi(t) + r(t)$, lo cual implica

$$\phi(t) - r(t) \leq \varphi(t),$$

y entonces multiplicando ambos lados la desigualdad anterior por $h(t) \geq 0$, se obtiene

$$h(t)(\phi(t) - r(t)) \leq h(t)\varphi(t). \tag{1.48}$$

De (1.47) y (1.48), se deduce

$$r'(t) - h(t)r(t) \leq h(t)\varphi(t).$$

Multiplicando por el factor integrante $exp(-\int_0^t h(x)dx)$ ambos lados de la última desigualdad, se sigue que

$$\frac{d}{dt}\left(exp(-\int_0^t h(x)dx)r(t)\right) \leq h(t)\varphi(t)exp(-\int_0^t h(x)dx),$$

e integrando de 0 a t, se obtiene

$$exp(-\int_0^t h(x)dx)r(t) \leq \int_0^t h(s)\varphi(s)exp(-\int_0^s h(x)dx)ds,$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} r(t) &\leq exp(\int_0^t h(x)dx)\int_0^t h(s)\varphi(s)exp(-\int_0^s h(x)dx)ds \\ &\leq \int_0^t h(s)\varphi(s)exp(\int_0^t h(x)dx - \int_0^s h(x)dx)ds \\ &\leq \int_0^t h(s)\varphi(s)exp(\int_s^t h(x)dx)ds, \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta la definición de $r(t)$ se tiene la desigualdad

$$\int_0^t h(s)\,\phi(s)ds \leq \int_0^t h(s)\varphi(s)exp(\int_s^t h(x)dx)ds. \tag{1.49}$$

Finalmente, reemplazando (1.49) en (1.44) se obtiene (1.45).

2. La desigualdad (1.46) se demuestra de manera análoga a la desigualdad (1.45).

1.4. Resultados de Análisis funcional

Definición 1.21 *(Convergencia débil y fuerte)*
Sea $\mathbf{X}$ un espacio de Banach y $\{\boldsymbol{v}_m\}_{m\geq 1}$ una sucesión en $\mathbf{X}$.

1. *Se dice que $\{\boldsymbol{v}_m\}_{m\geq 1}$ converge débilmente a $\boldsymbol{v}\in\mathbf{X}$ cuando $m\to\infty$, si*

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_m\rangle_{\mathbf{X}'} \to \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathbf{X}'},\ \forall \boldsymbol{f}\in\mathbf{X}'.$$

2. *Se dice que $\{\boldsymbol{v}_m\}_{m\geq 1}$ converge fuertemente (o en norma) a $\boldsymbol{v}\in\mathbf{X}$ cuando $m\to\infty$, si*

$$\|\boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{v}\|_{\mathbf{X}} \to 0.$$

En particular, se tiene

i) Para $p\in\mathbb{R}$, $1\leq p<\infty$ y $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, que $\boldsymbol{u}_m\to\boldsymbol{u}$ débil en $\mathbf{L}^p(\Omega)$ cuando $m\to\infty$, significa que

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_m\rangle \to \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle,\quad \forall \boldsymbol{v}\in\mathbf{L}^q(\Omega). \tag{1.50}$$

ii) Teniendo en cuenta Observación 1.7, si $\mathbf{X}$ es un espacio de Hilbert, $\boldsymbol{u}_m\to\boldsymbol{u}$ débil en $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{X})$ cuando $m\to\infty$, significa que

$$\int_0^T \langle \boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{u}_m(t)\rangle_{\mathbf{X}'} dt \to \int_0^T \langle \boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{u}(t)\rangle_{\mathbf{X}'} dt,\quad \forall \boldsymbol{v}\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{X}'). \tag{1.51}$$

Definición 1.22 *(Convergencia débil-$\star$)*
Sea $\{\boldsymbol{f}_m\}_{m\geq 1}$ una sucesión en $\mathbf{X}'$, se dice que $\{\boldsymbol{f}_m\}_{m\geq 1}$ converge débil-$\star$ a $\boldsymbol{f}$ en $\mathbf{X}'$ cuando $m\to\infty$, si

$$\langle \boldsymbol{f}_m, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathbf{X}'} \to \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathbf{X}'},\ \forall\, \boldsymbol{v}\in\mathbf{X}.$$

En particular, se tiene que

Si $\mathbf{X}$ es un espacio de Hilbert, $\boldsymbol{u}_m\to\boldsymbol{u}$ débil-$\star$ en $\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{X})$ cuando $m\to\infty$, significa que

$$\int_0^T \langle \boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{v}(t)\rangle dt \to \int_0^T \langle \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)\rangle dt\quad \forall \boldsymbol{v}\in\mathbf{L}^1(0,T;\mathbf{X}'). \tag{1.52}$$

Para la forma trilinear b definida en (1.37) se tiene el siguiente resultado.

Lema 1.11 *([20], pág. 289) Si $\boldsymbol{u}_\mu$ converge a $\boldsymbol{u}$ débilmente en $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})$ y fuertemente en $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H})$, entonces para cualquier función vectorial $\boldsymbol{w}$ con componentes en $\boldsymbol{\mathcal{C}}^1(\overline{\Omega}\times[0,T])$,*

$$\int_0^T b(\boldsymbol{u}_\mu(t), \boldsymbol{u}_\mu(t), \boldsymbol{w}(t))dt \to \int_0^T b(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{w}(t))dt. \tag{1.53}$$

Proposición 1.1 *Sea $\mathbf{X}$ un espacio de Banach y $\{\boldsymbol{v}_m\}_{m\geq 1}$ una sucesión débilmente convergente a $\boldsymbol{v}\in\mathbf{X}$. Entonces, $\|\boldsymbol{v}_m\|_{\mathbf{X}}$ es acotada en $\mathbf{X}$ y*

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{X}} \leq \liminf_{m\to\infty} \|\boldsymbol{v}_m\|_{\mathbf{X}}. \tag{1.54}$$

La demostracion puede ser vista en [3].

Lema 1.12 *Sea* $\{x_m\}_{m\geq 1}$ *una sucesión en* $\mathbb{R}$ *tal que* $x_m \geq 0$ *para todo* m*. Entonces, se verifica la siguiente igualdad*

$$\big(\lim_{m\to\infty} \inf x_m\big)^2 = \lim_{m\to\infty} \inf x_m^2. \tag{1.55}$$

La demostracion puede ser vista en [16], pág. 9.

Definición 1.23 *Sean* $\mathbf{X}$ *e* $\mathbf{Y}$ *dos espacios de Banach,* $\mathbf{U}$ *un subconjunto abierto no vacío de* $\mathbf{X}$ *y una aplicación* $F : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$*. Se define el diferencial de Gateaux* $F'(\boldsymbol{u})\boldsymbol{h}$ *de* F *en* $\boldsymbol{u} \in \mathbf{U}$ *en la dirección* $\boldsymbol{h} \in \mathbf{X}$ *como*

$$F'(\boldsymbol{u})\boldsymbol{h} = \lim_{\tau\to 0} \frac{F(\boldsymbol{u} + \tau\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{u})}{\tau}. \tag{1.56}$$

Si el límite existe para todo $\boldsymbol{h} \in \mathbf{X}$*, entonces se dice que* F *es Gateaux diferenciable en* $\boldsymbol{u}$*.*

En las siguientes definiciones y teoremas se dan algunos resultados de inmersión de los espacio de Sobolev.

Definición 1.24 *(Operador inclusión o inmersión)*
Sean $\mathbf{B}_1$ *y* $\mathbf{B}_2$ *dos espacios de Banach sobre* $\mathbb{R}^n$ *con* $\mathbf{B}_1 \subset \mathbf{B}_2$*. El operador inclusión (inmersión)* $i : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ *es definido por* $i(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$ *para todo* $\boldsymbol{u} \in \mathbf{B}_1$*.*

Definición 1.25 *(Inmersión continua)*
Sean $\mathbf{B}_1$ *y* $\mathbf{B}_2$ *dos espacios de Banach tal que* $\mathbf{B}_1 \subset \mathbf{B}_2$*. Se dice que el espacio* $\mathbf{B}_1$ *está inmerso continuamente en el espacio* $\mathbf{B}_2$ *si el operador inclusión* $i : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ *es continuo, es decir, existe* $C > 0$ *tal que* $\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{B}_2} \leq C\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{B}_1}$*.*

Definición 1.26 *(Inmersión compacta)*
Sean $\mathbf{B}_1$ *y* $\mathbf{B}_1$ *dos espacios de Banach tal que* $\mathbf{B}_1 \subset \mathbf{B}_2$*. Se dice que el espacio* $\mathbf{B}_1$ *está inmerso compactamente en el espacio* $\mathbf{B}_2$*, si el operador inclusión* $i : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ *es compacto, es decir, cada sucesión acotada* $\{\boldsymbol{u}_m\}_{m\geq 1} \in \mathbf{B}_1$ *posee una subsucesión* $\{\boldsymbol{u}_{m_k}\}_{m_k\geq 1}$ *la cual es convergente en* $\mathbf{B}_2$*.*

Proposición 1.2 *Sea* Ω *un dominio acotado de* $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$*. Si* $1 \leq q < p \leq \infty$ *entonces* $\mathbf{L}^p(\Omega) \subset \mathbf{L}^q(\Omega)$ *con inmersión continua.*

Teorema 1.2 *Sea* $\mathbf{X}$ *un espacio de Hilbert, entonces la bola unitaria cerrada*

$$\mathbf{B}_{\mathbf{X}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{X} : \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\}$$

es débilmente compacta.

La demostración puede ser vista en [3], pág. 44.

Observación 1.11 *Del Teorema 1.2 se deduce que toda sucesión acotada es débilmente convergente.*

Proposición 1.3 *Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$, de clase $\boldsymbol{\mathcal{C}}^1$. Para $m \geq 1$ un entero se tienen las siguientes inmersiones continuas:*

a. *Si $n > 2m \Rightarrow \mathbf{H}^m(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^q(\Omega)\ \forall\, q \in [1, p^*]$, donde $p^* = \dfrac{2n}{n-2m}$.*

b. *Si $n = 2m \Rightarrow \mathbf{H}^m(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, \infty]$.*

c. *Si $n < 2m \Rightarrow \mathbf{H}^m(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^\infty(\Omega)$.*

La demostración puede ser vista en [1], pág. 97.

Observación 1.12 *En particular, para $m = 1$ se tiene:*

i). *Si $n > 2 \Rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^q(\Omega)\ \forall\, q \in [1, p^*]$, donde $p^* = \dfrac{2n}{n-2}$.*

ii). *Si $n = 2 \Rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^q(\Omega)\ \forall\, q \in [1, \infty]$.*

iii). *Si $n < 2 \Rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^\infty(\Omega)$.*

Ver en [3], pág. 168.

Observación 1.13 *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ es un dominio acotado, entonces $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^2(\Omega) \subset \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ con inmersiones continuas y densas.*

Teorema 1.3 *Sean $\mathbf{X}_0$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}_1$, espacios de Banach tal que $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X} \subset \mathbf{X}_1$, donde las inmersiones son continuas, $\mathbf{X}_0$, $\mathbf{X}_1$ reflexivos y la inmersión $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$ es compacta. Sea $T > 0$ un número finito fijado, y sean α_0, α_1 dos números finitos tales que $\alpha_0, \alpha_1 > 1$.*
Consideremos el espacio

$$\mathscr{Y} = \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^{\alpha_0}(0, T; \mathbf{X}_0)\ ;\ \boldsymbol{u}_t = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \in \mathbf{L}^{\alpha_1}(0, T; \mathbf{X}_1) \right\},$$

con la norma definida por

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathscr{Y}} = \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{L}^{\alpha_0}(0,T;\mathbf{X}_0)} + \|\boldsymbol{u}_t\|_{\mathbf{L}^{\alpha_1}(0,T;\mathbf{X}_1)}.$$

Entonces, la inmersión $\mathscr{Y} \hookrightarrow \mathbf{L}^{\alpha_0}(0, T; \mathbf{X})$ es compacta.

La demostración puede ser vista en [20], pág. 271.

Teorema 1.4 *(Representación de Riesz).*
Sea $\mathbf{X}$ un espacio de Hilbert con producto interno $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{X}}$, $\mathbf{X}'$ su espacio dual y $T \in \mathbf{X}'$. Entonces, existe una única $\boldsymbol{u} \in \mathbf{X}$ tal que

$$\langle T, \boldsymbol{v} \rangle_{\mathbf{X}'} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\mathbf{X}},\ \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{X},$$

y $\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{X}} = \|T\|_{\mathbf{X}'}$.

La demostración del Teorema 1.4 puede ser vista en [3], pág. 81.

Teorema 1.5 *Sea $\mathbf{X}$ un espacio métrico separable e $\mathbf{Y}$ un subespacio de $\mathbf{X}$. Entonces, $\mathbf{Y}$ es un espacio separable.*

La demostración puede ser vista en [3], pág. 47.

1.5. Caracterización de algunos espacios

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n = 2,3)$ un dominio acotado, se definen los espacios

$$\boldsymbol{\mathcal{V}} = \{\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{C}}_0^\infty(\Omega)\,;\,\mathrm{div}\ \boldsymbol{w} = 0 \ en\ \Omega\}, \quad \mathbf{H} = \overline{\boldsymbol{\mathcal{V}}}^{\mathbf{L}^2}, \quad \mathbf{V} = \overline{\boldsymbol{\mathcal{V}}}^{\mathbf{H}_0^1}, \tag{1.57}$$

los cuales son espacios básicos en el estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes y en particular, en el estudio de las ecuaciones de Stokes.

Caracterización de los espacios H y V

La caracterización de los espacios $\mathbf{H}$ y $\mathbf{H}^\perp$ (el complemento ortogonal de $\mathbf{H}$ en el espacio $\mathbf{L}^2(\Omega)$), es dada en el siguiente teorema.

Teorema 1.6 *Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ con borde Γ. Entonces*

$$\mathbf{H} = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\,;\,\mathrm{div}\ \boldsymbol{u} = 0 \ en\ \Omega, \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \ sobre\ \Gamma\}, \tag{1.58}$$

$$\mathbf{H}^\perp = \{\boldsymbol{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\,;\,\boldsymbol{w} = \nabla p \ para\ algún\ p \in \mathbf{H}^1(\Omega)\}. \tag{1.59}$$

La demostración de este teorema puede ser vista en [20], pág. 11.

La caracterización del espacio $\mathbf{V}$ es dada en el siguiente teorema.

Teorema 1.7 *Sea $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un dominio acotado de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces,*

$$\mathbf{V} = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)\,;\,\mathrm{div}\ \boldsymbol{u} = 0 \ en\ \Omega\}, \tag{1.60}$$

con norma $\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}} = \|\nabla \boldsymbol{u}\|$.

La demostración puede ser vista en [20], pág. 13.

Observación 1.14 *De* (1.57) *y* (1.60)*, se tiene que el espacio de Hilbert* $\mathbf{V}$ *es un subespacio cerrado de* $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$*. Además, por el Teorema 1.5, el espacio* $\mathbf{V}$ *es separable como un subespacio cerrado del espacio separable* $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$*.*

Observación 1.15 *El espacio* $\mathbf{V}$ *está contenido en el espacio* $\mathbf{H}$*,* $\mathbf{V}$ *es denso en* $\mathbf{H}$*, la inmersión de* $\mathbf{V}$ *en* $\mathbf{H}$ *es continua.*

El siguiente resultado es importante en el desarrollo de los capítulos posteriores.

Lema 1.13 *Sean* $\mathbf{V}$*,* $\mathbf{H}$ *espacios de Hilbert,* $\mathbf{V} \subset \mathbf{H} \equiv \mathbf{H}' \subset \mathbf{V}'$ *con inclusiones continuas y densas, siendo* $\mathbf{V}'$ *y* $\mathbf{H}'$ *el espacio dual de* $\mathbf{V}$ *y* $\mathbf{H}$ *respectivamente. Si una función* $\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})$ *y su derivada* $\boldsymbol{u}_t = \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}')$*, entonces* $\boldsymbol{u}$ *es igual en casi todo punto a una función continua de* $[0,T]$ *en* $\mathbf{H}$ $(\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{C}}([0,T];\mathbf{H}))$ *y se tiene la siguiente igualdad*

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2 = 2\langle \boldsymbol{u}_t(t), \boldsymbol{u}(t)\rangle_{\mathbf{V}'}, \tag{1.61}$$

en el sentido de distribuciones sobre $(0,T)$*.*

La demostración puede ser vista en [20], pág. 261.

1.6. Fluidos micropolares

Fluidos micropolares son fluidos con microestructura, físicamente pueden representar fluidos que contienen pequeñas partículas rígidas orientadas al azar y suspendidas en un medio viscoso, donde se ignora la deformación de las partículas. Las ecuaciones de fluidos micropolares fueron obtenidas debido a que las ecuaciones de Navier-Stokes no logran modelar fluidos con partículas que pueden rotar independientemente de la rotación y del movimiento del fluido. Así, el modelo de fluidos micropolares es una generalización de las clásicas ecuaciones de Navier-Stokes, solamente es introducido el campo vectorial de la velocidad angular de rotación de partículas.

La teoría de los fluidos micropolares muestra los efectos de la inercia rotatoria local y se puede utilizar para analizar el comportamiento de lubricantes exóticos, fluidos coloidales, fluidos poliméricos, cristales líquidos, diversos flujos biológicos, flujo con suspensiones de baja concentración, etc. En general, como parte del momento angular se pierde en la rotación de partículas, el flujo es menos propenso a la inestabilidad que un fluido clásico.

Considerando que el flujo ocurre en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ con borde Γ regular, durante un intervalo de tiempo $[0,T](T > 0)$, las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido micropolar con condiciones de borde homogéneas son dadas por:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_t - (\mu+\chi)\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \nabla p &= \chi \operatorname{rot} w + \boldsymbol{f} \text{ en } \Omega\times(0,T), && (1.62)\\
j w_t - \gamma\Delta w + j\boldsymbol{u}\cdot\nabla w + 2\chi w &= \chi \operatorname{rot}\boldsymbol{u} + g \text{ en } \Omega\times(0,T), && (1.63)\\
\operatorname{div}\boldsymbol{u} &= 0 \text{ en } \Omega\times(0,T), && (1.64)\\
\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0},\ w &= 0 \text{ sobre } \Gamma\times(0,T), && (1.65)\\
\boldsymbol{u}(\cdot,0) = \boldsymbol{0},\ w(\cdot,0) &= 0 \text{ en } \Omega, && (1.66)
\end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{u}$ es la velocidad del fluido, w es la velocidad microrotacional, p es la prsión hidrostática del fluido, $\boldsymbol{f}$ y g son fuerzas externas actuando sobre el fluido. Las constantes positivas μ, χ, j, γ caracterizan propiedades isotrópicas del fluido, μ es la viscosidad cinemática, χ es la viscosidad cinemática de microrotación. La ecuación (1.64) es la condición de incompresibilidad del fluido. Los operadores $\Delta, \nabla, \operatorname{div}$ y rot son los definidos en Sección 1.3.
La deducción del modelo (1.62)-(1.66) y algunos resultados conocidos pueden ser vistos en [13].
Considerando los espacios definidos en Sección 1.2 y Sección 1.5, una formulación variacional (o débil) del sistema (1.62)-(1.62) es: Hallar $(\boldsymbol{u}, w) \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ tal que

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{u}_t(t),\boldsymbol{v}) + (\mu+\chi)(\nabla\boldsymbol{u}(t),\nabla\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}) &= \chi(\operatorname{rot} w(t),\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}), && (1.67)\\
j(w_t(t),z) + \gamma(\nabla w(t),\nabla z) + j(\boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla w(t),z) + 2\chi(w(t),z) &= \chi(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}(t),z) + (g(t),z), && (1.68)\\
\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{0},\ w(0) &= 0 \text{ en } \Omega, && (1.69)
\end{aligned}$$

para todo $(\boldsymbol{v}, z) \in \mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)$ y en el sentido de distribuciones sobre $(0,T)$.

Una solución del sistema (1.67)-(1.69) es llamada *solución débil* del sistema (1.62)-(1.66).

Capítulo 2

Fluidos micropolares: existencia y unicidad de soluciones débiles

En este capítulo estudiamos la existencia y unicidad de soluciones débiles de las ecuaciones de fluidos micropolares con condiciones de borde homogéneas.
Considerando $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado con borde Γ de clase $\mathcal{C}^2$, reescribimos los espacios de funciones que serán utilizados en este capítulo:

$$
\begin{aligned}
L^2(\Omega) &= \{g : \Omega \to \mathbb{R};\ g \text{ es medible y } \int_\Omega |g(x)|^2 dx < \infty\}, \\
H_0^1(\Omega) &= \{z \in H^1(\Omega)\,;\ z = 0 \text{ sobre } \Gamma\}, \\
\mathbf{H} &= \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\,;\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \ \text{ en } \Omega,\ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma\}, \\
\mathbf{V} &= \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)\,;\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \ \ en\ \Omega\}, \\
\boldsymbol{\mathcal{W}} &= \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})\,;\ \boldsymbol{u}_t \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}')\}, \\
\mathcal{W} &= \{w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\,;\ w_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\}.
\end{aligned}
$$

El espacio $H_0^1(\Omega)$ es equipado con el producto interno $(u,v)_{H_0^1} = (\nabla u, \nabla v)$ y norma $\|u\|_{H_0^1} = \|\nabla u\|$.
El espacio de Hilbert $\mathbf{H}$ es equipado con el producto interno $(\cdot,\cdot)$ inducido por $\mathbf{L}^2(\Omega)$ y norma $\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{H}} = \|\boldsymbol{u}\|$. El espacio $\mathbf{V}$ es un espacio de Hilbert con producto interno $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{\mathbf{V}} = (\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v})$ y norma $\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}} = \|\nabla \boldsymbol{u}\|$. La dualidad entre un espacio X y su dual X' será denotado por $\langle \cdot,\cdot\rangle_{X'}$ o simplemente $\langle \cdot,\cdot\rangle$.
También, se tienen las siguientes inmersiones continuas y densas

$$
H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \equiv (L^2(\Omega))' \subset H^{-1}(\Omega), \qquad \mathbf{V} \subset \mathbf{H} \equiv \mathbf{H}' \subset \mathbf{V}'. \tag{2.1}
$$

Como consecuencia de las inmersiones anteriores, se tiene

$$
\langle g, z\rangle_{H^{-1}} = (g,z),\ \forall g \in L^2(\Omega),\ \forall z \in H_0^1(\Omega), \tag{2.2}
$$

$$
\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}\rangle_{\mathbf{V}'} = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{u}),\ \forall \boldsymbol{f} \in \mathbf{H},\ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{V}. \tag{2.3}
$$

Para $T > 0$ fijo, se utilizarán los espacios $\mathbf{L}^p(0,T;\mathbf{X})$, con $\mathbf{X} = \mathbf{H}, \mathbf{V}, \mathbf{V}'$, y los espacios $L^p(0,T;Y)$ con $Y = L^2(\Omega), H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)$.
Mayor detalles sobre las notaciones anteriores ver Capítulo 1. De aquí en adelante, la constante $C > 0$ representará una constante genérica que podrá tomar diferentes valores.

2.1. Ecuaciones de fluidos micropolares

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un un dominio acotado con borde Γ de clase $\mathcal{C}^2$, y un intervalo de tiempo $[0,T]$ con $T>0$ fijo. Denotando por $\mathcal{Q}$ el cilindro $\Omega \times (0,T)$, las ecuaciones de fluidos micropolares con condiciones de borde homogéneas son dadas por el siguiente sistema acoplado (ver Sección 1.6):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_t - (\mu+\chi)\Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \nabla p - \chi \operatorname{rot} w &= \boldsymbol{f} \quad \text{en } \mathcal{Q}, && (2.4)\\
j\, w_t + j\,\boldsymbol{u}\cdot\nabla w - \gamma\Delta w + 2\chi\, w - \chi \operatorname{rot}\boldsymbol{u} &= g \quad \text{en } \mathcal{Q}, && (2.5)\\
\operatorname{div}\boldsymbol{u} &= 0 \quad \text{en } \mathcal{Q}, && (2.6)\\
\boldsymbol{u} = \mathbf{0},\ w &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma\times(0,T), && (2.7)\\
\boldsymbol{u}(\cdot,0) = \mathbf{0},\ w(\cdot,0) &= 0 \quad \text{en } \Omega, && (2.8)
\end{aligned}$$

donde μ,χ,j,γ son constantes positivas dadas asociadas a las propiedades del material, $\boldsymbol{f}$ y g son campos externos dados actuando sobre el fluido; $\boldsymbol{u}$, w y p son las variables desconocidas del problema las cuales representan la velocidad, la microrotación y la presión del fluido respectivamente. Las ecuaciones (2.7) y (2.8) son las condiciones de borde e inicial respectivamente.

Para estudiar la existencia de soluciones débiles del problema de valor de borde-inicial (2.4)-(2.8), es necesario obtener una formulación variacional (o débil) del problema.

2.2. Formulación variacional del problema

Si $\boldsymbol{u}, w, p$, son funciones que satisfacen (2.4)-(2.8) con $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}')$ y $g \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, tomando el producto interno de (2.4) y de (2.5) con funciones test $\boldsymbol{v}\in\mathbf{V}$ y $z \in H_0^1(\Omega)$ respectivamente, se tiene

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{u}_t(t),\boldsymbol{v}\rangle - (\mu+\chi)\langle\Delta\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}\rangle + (\boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}) + \langle\nabla p(t),\boldsymbol{v}\rangle - \chi(\operatorname{rot} w(t),\boldsymbol{v}) &= \langle \boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}\rangle, && (2.9)\\
j\langle w_t(t),z\rangle - \gamma\langle\Delta w(t),z\rangle + j(\boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla w(t),z) + 2\chi(w(t),z) - \chi(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}(t),z) &= \langle g(t),z\rangle. && (2.10)
\end{aligned}$$

Para el segundo término de (2.9) y (2.10), usando la fórmula de Green dada en Lema 1.4 y observando que $\boldsymbol{v}\in\mathbf{V}$ y $z\in H_0^1(\Omega)$, se obtiene

$$\begin{aligned}
-(\mu+\chi)\langle\Delta\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}\rangle &= (\mu+\chi)(\nabla\boldsymbol{u}(t),\nabla\boldsymbol{v}) - \int_\Gamma \frac{\partial\boldsymbol{u}(t)}{\partial\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v}dx = (\mu+\chi)(\nabla\boldsymbol{u}(t),\nabla\boldsymbol{v}), && (2.11)\\
-\gamma\langle\Delta w(t),z\rangle &= \gamma(\nabla w(t),\nabla z) - \int_\Gamma \frac{\partial w(t)}{\partial\boldsymbol{n}} z dx = \gamma(\nabla w(t),\nabla z). && (2.12)
\end{aligned}$$

Aplicando el Lema 1.5 y observando que $\boldsymbol{v}\in\mathbf{V}$, se obtiene

$$\langle\nabla p(t),\boldsymbol{v}\rangle = -(p(t),\operatorname{div}\boldsymbol{v}) + \int_\Gamma p(t)\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}dx = 0. \qquad (2.13)$$

También, observar que

$$\langle \boldsymbol{u}_t(t),\boldsymbol{v}\rangle \;=\; = \int_\Omega \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}(x,t)\boldsymbol{v}(x)\,dx = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{u}(x,t)\boldsymbol{v}(x))dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega \boldsymbol{u}(x,t)\boldsymbol{v}(x)dx,$$

por lo tanto,

$$\langle \boldsymbol{u}_t(t), \boldsymbol{v} \rangle = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}). \tag{2.14}$$

De manera análoga, se obtiene que

$$\langle w_t(t), z \rangle = \frac{d}{dt}(w(t), z). \tag{2.15}$$

Así, reemplazando (2.11), (2.13)-(2.14) en (2.9) y (2.12), (2.15) en (2.10), se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) + (\mu + \chi)(\nabla \boldsymbol{u}(t), \nabla \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}(t) \cdot \nabla \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) - \chi(\operatorname{rot} w(t), \boldsymbol{v}) &= \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v} \rangle, \\
j\frac{d}{dt}(w(t), z) + \gamma(\nabla w(t), \nabla z) + j(\boldsymbol{u}(t) \cdot \nabla w(t), z) + 2\chi(w(t), z) - \chi(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}(t), z) &= \langle g(t), z \rangle,
\end{aligned}$$

para todo $(\boldsymbol{v}, z) \in \mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)$.

Luego, una ***formulación variacional*** (formulación débil) del problema (2.4)-(2.8) es: Dado $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V}')$ y $g \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, hallar $\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V})$, $w \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ satisfaciendo

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) + (\mu + \chi)(\nabla \boldsymbol{u}(t), \nabla \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}(t) \cdot \nabla \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) - \chi(\operatorname{rot} w(t), \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v} \rangle, \tag{2.16}$$

$$j\frac{d}{dt}(w(t), z) + \gamma(\nabla w(t), \nabla z) + j(\boldsymbol{u}(t) \cdot \nabla w(t), z) + 2\chi(w(t), z) - \chi(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}(t), z) = \langle g(t), z \rangle, \tag{2.17}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \mathbf{0}, \ w(0) = 0, \tag{2.18}$$

para todo $(\boldsymbol{v}, z) \in \mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)$ y en el sentido de distribuciones sobre $(0, T)$.

Observación 2.1 *Se dice que* (2.16)-(2.17) *es satisfecho en el sentido de distribuciones sobre* $(0, T)$ *si para todo* $\psi \in C_0^\infty((0, T))$ *se verifica*

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle \boldsymbol{u}_t(t), \boldsymbol{v} \rangle \psi(t) dt + (\mu + \chi) \int_0^T (\nabla \boldsymbol{u}(t), \nabla \boldsymbol{v}) \psi(t) dt + \int_0^T (\boldsymbol{u}(t) \cdot \nabla \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) \psi(t) dt \\
&\quad -\chi \int_0^T (\operatorname{rot} w(t), \boldsymbol{v}) \psi(t) dt = \int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v} \rangle \psi(t) dt, \\
&j \int_0^T \langle w_t(t), z \rangle \psi(t) dt + \gamma \int_0^T (\nabla w(t), \nabla z) \psi(t) dt + j \int_0^T (\boldsymbol{u}(t) \cdot \nabla w(t), z) \psi(t) dt \\
&\quad +2\chi \int_0^T (w(t), z) \psi(t) dt - \chi \int_0^T (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}(t), z) \psi(t) dt = \int_0^T \langle g(t), z \rangle \psi(t) dt.
\end{aligned}$$

A continuación es dada la definición de solución débil.

Definición 2.1 *(Solución débil)*
Dadas $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V}')$ *y* $g \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, *una solución débil del problema* (2.4)-(2.8) *es un par de funciones* $(\boldsymbol{u}, w) \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V}) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ *satisfaciendo la formulación variacional* (2.16)-(2.18).

2.2.1. Existencia y unicidad de soluciones débiles

A continuación se enuncia el resultado de existencia y unicidad de soluciones débiles del problema (2.4)-(2.8).

Teorema 2.1 *(Existencia y unicidad de soluciones débiles)*
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado con borde Γ de clase $\mathcal{C}^2$ y sean las funciones $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}')$ y $g \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Entonces, existe una única solución débil $(\boldsymbol{u}, w) \in \boldsymbol{\mathcal{W}} \times \mathcal{W}$ del problema (2.4)-(2.8).

Demostración: Demostrar la existencia de una única solución débil del problema (2.4)-(2.8), por la Definición 2.1, es equivalente a demostrar que el problema variacional (2.16)-(2.18) tiene una única solución, para lo cual se usará el método de Faedo-Galerkin.

Existencia:

Por Observación 1.14, los espacios $\mathbf{V}$ y $H_0^1(\Omega)$ son espacios de Hilbert separables, entonces existen sucesiones de elementos linealmente independientes $\{\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_m, \ldots\}$ de $\mathbf{V}$ y $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m, \ldots\}$ de $H_0^1(\Omega)$ que forman una base hilbertiana para $\mathbf{V}$ y $H_0^1(\Omega)$ respectivamente.

Sean $\mathbf{V}_m \subset \mathbf{V}$ y $W_m \subset H_0^1(\Omega)$ los espacios finitos dimensionales generados por $\{\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_m\}$ y $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m\}$ respectivamente. Para cada número entero m fijo, se definen funciones $\boldsymbol{u}^m \in \mathbf{V}_m$ y $w^m \in W_m$ como

$$\boldsymbol{u}^m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im}(t)\boldsymbol{\varphi}_i(x), \qquad w^m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} \beta_{im}(t)\phi_i(x), \tag{2.19}$$

donde $\alpha_{im}(t)$, $\beta_{im}(t)$ son funciones diferenciables, tales que $(\boldsymbol{u}^m, w^m)$ sean soluciones aproximadas del sistema (2.16)-(2.18), esto es, $(\boldsymbol{u}^m, w^m)$ satisfacen el siguiente sistema

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}^m(t), \boldsymbol{v}) + (\mu+\chi)(\nabla \boldsymbol{u}^m(t), \nabla \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}^m(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^m(t), \boldsymbol{v}) - \chi(\operatorname{rot} w^m(t), \boldsymbol{v}) \\
&\qquad\qquad = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}\rangle, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_m, && (2.20)\\
&j\frac{d}{dt}(w^m(t), z) + \gamma(\nabla w^m(t), \nabla z) + j(\boldsymbol{u}^m(t)\cdot\nabla w^m(t), z) + 2\chi(w^m(t), z) \\
&\qquad\qquad -\chi(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}^m(t), z) = \langle g(t), z\rangle, \ \forall z \in W_m, && (2.21)\\
&\boldsymbol{u}^m(0) = \mathbf{0}, \ w^m(0) = 0. && (2.22)
\end{aligned}$$

Se demostrará que existe una solución $(\boldsymbol{u}^m, w^m)$ de (2.20)-(2.21).

Las ecuaciones (2.20)-(2.21) son equivalentes al conjunto de $2m$ ecuaciones

$$\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{u}_t^m(t), \boldsymbol{\varphi}_j\rangle + (\mu+\chi)(\nabla \boldsymbol{u}^m(t), \nabla \boldsymbol{\varphi}_j) + (\boldsymbol{u}^m(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^m(t), \boldsymbol{\varphi}_j) - \chi(\operatorname{rot} w^m(t), \boldsymbol{\varphi}_j) \\
&\qquad = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{\varphi}_j\rangle, \ j = 1, ..., m, && (2.23)\\
&j\langle w_t^m(t), \phi_j\rangle + \gamma(\nabla w^m(t), \nabla \phi_j) + j(\boldsymbol{u}^m(t)\cdot\nabla w^m(t), \phi_j) + 2\chi(w^m(t), \phi_j) \\
&\qquad -\chi(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}^m(t), \phi_j) = \langle g(t), \phi_j\rangle, \ j = 1, ..., m. && (2.24)
\end{aligned}$$

Reemplazando (2.19) en (2.23)-(2.24), se obtiene

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{\varphi}_i,\boldsymbol{\varphi}_j)\alpha'_{im}(t)+(\mu+\chi)\sum_{i=1}^{m}(\nabla\boldsymbol{\varphi}_i,\nabla\boldsymbol{\varphi}_j)\alpha_{im}(t)+\sum_{i,k=1}^{m}(\boldsymbol{\varphi}_i\cdot\nabla\boldsymbol{\varphi}_k,\boldsymbol{\varphi}_j)\alpha_{im}(t)\alpha_{km}(t)\\
&\quad-\chi\sum_{i=1}^{m}(\operatorname{rot}\phi_i,\boldsymbol{\varphi}_j)\beta_{im}(t)=\langle\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{\varphi}_j\rangle,\ \ j=1,...,m, \qquad (2.25)\\
&j\sum_{i=1}^{m}(\phi_i,\phi_j)\beta'_{im}(t)+\gamma\sum_{i=1}^{m}(\nabla\phi_i,\nabla\phi_j)\beta_{im}(t)+j\sum_{i,k=1}^{m}(\boldsymbol{\varphi}_i\cdot\nabla\phi_k,\phi_j)\alpha_{im}(t)\beta_{km}(t)\\
&\quad+2\chi\sum_{i=1}^{m}(\phi_i,\phi_j)\beta_{im}(t)-\chi\sum_{i=1}^{m}(\operatorname{rot}\boldsymbol{\varphi}_i,\phi_j)\alpha_{im}(t)=\langle g(t),\phi_j\rangle,\ \ j=1,...,m, \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

los cuales forman un sistema de ecuaciones no lineales de primer orden para las m componentes $\alpha_{im}(t)$ de $\boldsymbol{u}^m(x,t)$ y las m componentes $\beta_{im}(t)$ de $w^m(x,t)$ con $1\leq i\leq m$ y $t\in[0,T]$.

Como los elementos $\{\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_2,\ldots,\boldsymbol{\varphi}_m\}$, $\{\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_m\}$, son linealmente independientes, entonces las matrices con entradas $a_{ji}=(\boldsymbol{\varphi}_i,\boldsymbol{\varphi}_j)$ y $b_{ji}=(\phi_i,\phi_j)$ son no singulares, entonces invirtiendo las matrices (a_{ji}) y (b_{ji}), el sistema (2.25)-(2.26) puede ser reescrito en la forma

$$\alpha'_{im}(t)+\sum_{j=1}^{m}c_{ij}\alpha_{jm}(t)+\sum_{j,\ell=1}^{m}d_{ij\ell}\,\alpha_{jm}(t)\alpha_{\ell m}(t)+\sum_{j=1}^{m}e_{ij}\beta_{jm}(t)=\sum_{j=1}^{m}h_{ij}\langle\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{\varphi}_j\rangle, \qquad (2.27)$$

$$\beta'_{im}(t)+\sum_{j=1}^{m}\hat{c}_{ij}\beta_{jm}(t)+\sum_{j,\ell=1}^{m}\hat{d}_{ij\ell}\,\alpha_{jm}(t)\beta_{\ell m}(t)+\sum_{j=1}^{m}\hat{e}_{ij}\alpha_{jm}(t)=\sum_{j=1}^{m}\hat{h}_{ij}\langle g(t),\phi_j\rangle, \qquad (2.28)$$

para $i=1,\ldots,m$, donde c_{ij}, $d_{ij\ell}$, e_{ij}, h_{ij}, $\hat{c}_{ij}$, $\hat{d}_{ij\ell}$, $\hat{e}_{ij}$, $\hat{h}_{ij}\in\mathbb{R}$.

Teniendo en cuenta (2.19), la condición (2.22) es equivalente a $2m$ ecuaciones

$$\alpha_{im}(0)=(\boldsymbol{u}^m(0),\boldsymbol{\varphi}_i)=0,\quad \beta_{im}(0)=(w^m(0),\phi_i)=0,\ \forall\ i=1,\ldots,m. \qquad (2.29)$$

Por lo tanto, el sistema diferencial no lineal (2.27)-(2.29) tiene una solución maximal definida sobre algún intervalo $[0,t_m]$. Si $t_m<T$, entonces $\|\boldsymbol{u}^m(t)\|$ debería a tender a $+\infty$ cuando $t\to t_m$, pero más adelante será probado que $\{\boldsymbol{u}^m\}$ es una sucesión acotada en $\mathbf{L}^\infty(0.T;\mathbf{H})$, por lo tanto, $t_m=T$. Así, las soluciones $(\alpha_{1m},\ldots,\alpha_{mm})$ y $(\beta_{1m},\ldots,\beta_{mm})$ existe sobre $[0,T]$, lo cual implica que existe $(\boldsymbol{u}^m,w^m)$ satisfaciendo el sistema (2.20)-(2.22).

La solución débil de (2.4)-(2.8) será determinada como el límite de la sucesión de soluciones aproximadas $\{(\boldsymbol{u}^m,w^m)\}$ del sistema (2.20)-(2.22).

Para poder pasar al límite en (2.23)-(2.24), para las funciones $\boldsymbol{u}^m$, w^m hallaremos estimaciones a priori independientes de m.

Estimaciones a priori:

Multiplicando la ecuación (2.23) por la función $\alpha_{jm}(t)$ y la ecuación (2.24) por la función $\beta_{jm}(t)$ y luego sumando estas ecuaciones para $j = 1, \cdots, m$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{u}_t^m(t), \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jm}(t)\boldsymbol{\varphi}_j\rangle + (\mu+\chi)(\nabla \boldsymbol{u}^m(t), \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jm}(t)\nabla\boldsymbol{\varphi}_j) + (\boldsymbol{u}^m(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^m(t), \sum_{j=1}^{m}\alpha_{jm}(t)\boldsymbol{\varphi}_j)\\
&\quad -\chi(\operatorname{rot} w^m(t), \sum_{j=1}^{m}\alpha_{jm}(t)\boldsymbol{\varphi}_j) = \langle \boldsymbol{f}(t), \sum_{j=1}^{m}\alpha_{jm}(t)\boldsymbol{\varphi}_j\rangle,\\
&j\langle w_t^m(t), \sum_{j=1}^{m}\beta_{jm}(t)\phi_j\rangle + \gamma(\nabla w^m(t), \sum_{j=1}^{m}\beta_{jm}(t)\nabla\phi_j) + j(\boldsymbol{u}^m(t)\cdot\nabla w^m(t), \sum_{j=1}^{m}\beta_{jm}(t)\phi_j)\\
&\quad +2\chi(w^m(t), \sum_{j=1}^{m}\beta_{jm}(t)\phi_j) - (\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^m(t), \sum_{j=1}^{m}\beta_{jm}(t)\phi_j) = \langle g(t), \sum_{j=1}^{m}\beta_{jm}(t)\phi_j\rangle,
\end{aligned}
$$

y teniendo en cuenta la definición dada en (2.19), se obtiene

$$
\langle \boldsymbol{u}_t^m(t), \boldsymbol{u}^m(t)\rangle + (\mu+\chi)(\nabla\boldsymbol{u}^m(t), \nabla\boldsymbol{u}^m(t)) - \chi(\operatorname{rot} w^m(t), \boldsymbol{u}^m(t)) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}^m(t)\rangle, \tag{2.30}
$$

$$
\begin{aligned}
j\langle w_t^m(t), w^m(t)\rangle + \gamma(\nabla w^m(t), \nabla w^m(t)) + 2\chi(w^m(t), w^m(t)) - \chi(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^m(t), w^m(t))&\\
= \langle g(t), w^m(t)\rangle.&
\end{aligned} \tag{2.31}
$$

Debido a (1.61), de (2.30) y (2.31), se deduce que

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}^m(t)\|^2 + (\mu+\chi)\|\boldsymbol{u}^m(t)\|_{\mathbf{V}}^2 = \chi(\operatorname{rot} w^m(t), \boldsymbol{u}^m(t)) + \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}^m(t)\rangle, \tag{2.32}
$$

$$
\frac{j}{2}\frac{d}{dt}\|w^m(t)\|^2 + \gamma\|w^m(t)\|_{H_0^1}^2 + 2\chi\|w^m(t)\|^2 = \chi(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^m(t), w^m(t)) + \langle g(t), w^m(t)\rangle. \tag{2.33}
$$

Sumando (2.32)-(2.33) y observando (1.32), esto es, $(\operatorname{rot} w^m, \boldsymbol{u}^m) = (\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^m, w^m)$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\boldsymbol{u}^m(t)\|^2 + j\|w^m(t)\|^2) + (\mu+\chi)\|\boldsymbol{u}^m(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \gamma\|w^m(t)\|_{H_0^1}^2 + 2\chi\|w^m(t)\|^2\\
&\quad = 2\chi(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^m(t), w^m(t)) + \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}^m(t)\rangle + \langle g(t), w^m(t)\rangle,
\end{aligned}
$$

lo cual implica

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|\boldsymbol{u}^m(t)\|^2 + j\|w^m(t)\|^2) + 2(\mu+\chi)\|\boldsymbol{u}^m(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + 2\gamma\|w^m(t)\|_{H_0^1}^2 + 4\chi\|w^m(t)\|^2\\
&\quad \leq 4\chi|(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^m(t), w^m(t))| + 2|\langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}^m(t)\rangle + \langle g(t), w^m(t)\rangle|.
\end{aligned} \tag{2.34}
$$

A seguir se acotan los términos del lado derecho de (2.34). Teniendo en cuenta (1.35), aplicando la desigualdad de Hölder (1.17) y la desigualdad de Young (1.16), se tiene

$$
\begin{aligned}
4\chi|(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^m(t), w^m(t))| &\leq 4\chi\|\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^m(t)\|\|w^m(t)\| \leq 4\chi\sqrt{2}\|\nabla\boldsymbol{u}^m(t)\|\|w^m(t)\|\\
&\leq 4\chi\|\boldsymbol{u}^m(t)\|_{\mathbf{V}}\sqrt{2}\|w^m(t)\| \leq 2\chi\|\boldsymbol{u}^m(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + 4\chi\|w^m(t)\|^2.
\end{aligned} \tag{2.35}
$$

Por otro lado, usando la desigualdad de Hölder y Young, se obtiene

$$\begin{aligned}2|\langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}^m(t)\rangle + \langle g(t), w^m(t)\rangle| &\leq 2(\|\boldsymbol{f}(t)\|_{\mathbf{V}'}\|\boldsymbol{u}^m(t)\|_{\mathbf{V}} + \|g(t)\|_{H^{-1}}\|w^m(t)\|_{H_0^1}) \\ &\leq \frac{1}{\mu}\|\boldsymbol{f}(t)\|^2_{\mathbf{V}'} + \mu\|\boldsymbol{u}^m(t)\|^2_{\mathbf{V}} + \frac{1}{\gamma}\|g(t)\|^2_{H^{-1}} \\ &\quad +\gamma\|w^m(t)\|^2_{H_0^1}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Por lo tanto, reemplazando (2.35)-(2.36) en (2.34), se tiene

$$\frac{d}{dt}(\|\boldsymbol{u}^m(t)\|^2 + j\|w^m(t)\|^2) + \mu\|\boldsymbol{u}^m(t)\|^2_{\mathbf{V}} + \gamma\|w^m(t)\|^2_{H_0^1} \leq \frac{1}{\mu}\|\boldsymbol{f}(t)\|^2_{\mathbf{V}'} + \frac{1}{\gamma}\|g(t)\|^2_{H^{-1}}. \tag{2.37}$$

Integrando (2.37) con respecto a $t \in (0, T)$ y observando (2.22), se obtiene

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{u}^m(t)\|^2 + j\|w^m(t)\|^2 + \mu\int_0^t \|\boldsymbol{u}^m(s)\|^2_{\mathbf{V}}ds + \gamma\int_0^t \|w^m(s)\|^2_{H_0^1}ds \\ &\leq \frac{1}{\mu}\int_0^t \|\boldsymbol{f}(s)\|^2_{\mathbf{V}'}ds + \frac{1}{\gamma}\int_0^t \|g(s)\|^2_{H^{-1}}ds. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Como $\|\boldsymbol{f}(t)\|^2_{\mathbf{V}'} \geq 0$ y $\|g(t)\|^2_{H^{-1}} \geq 0$, se tiene que

$$\frac{1}{\mu}\int_0^t \|\boldsymbol{f}(s)\|^2_{\mathbf{V}'}ds + \frac{1}{\gamma}\int_0^t \|g(s)\|^2_{H^{-1}}ds \leq \frac{1}{\mu}\int_0^T \|\boldsymbol{f}(s)\|^2_{\mathbf{V}'}ds + \frac{1}{\gamma}\int_0^T \|g(s)\|^2_{H^{-1}}ds \leq C,$$

luego, (2.38) implica

$$\|\boldsymbol{u}^m(t)\|^2 + j\|w^m(t)\|^2 + \mu\int_0^t \|\boldsymbol{u}^m(s)\|^2_{\mathbf{V}}ds + \gamma\int_0^t \|w^m(s)\|^2_{H_0^1}ds \leq C. \tag{2.39}$$

Así, de (2.39), se deduce que $\sup\limits_{t\in[0,T]} \|\boldsymbol{u}^m(t)\|^2 \leq C$, $\sup\limits_{t\in[0,T]} \|w^m(t)\|^2 \leq C$, esto es,

$$\|\boldsymbol{u}^m\|_{\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H})} \leq C, \qquad \|w^m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C.$$

Por lo tanto,

$$\text{la sucesión } \{\boldsymbol{u}^m\}_{m\geq 1} \text{ es acotada en el espacio } \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H}), \tag{2.40}$$

$$\text{la sucesión } \{w^m\}_{m\geq 1} \text{ es acotada en el espacio } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.41}$$

Ahora, integrando (2.37) con respecto a t de 0 a T, se obtiene

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{u}^m(T)\|^2 + j\|w^m(T)\|^2 + \mu\int_0^T \|\boldsymbol{u}^m(s)\|^2_{\mathbf{V}}ds + \gamma\int_0^T \|w^m(s)\|^2_{H_0^1}ds \\ &\leq \frac{1}{\mu}\int_0^T \|\boldsymbol{f}(s)\|^2_{\mathbf{V}'}ds + \frac{1}{\gamma}\int_0^T \|g(s)\|^2_{H^{-1}}ds \leq C, \end{aligned} \tag{2.42}$$

de donde se deduce que

$$\mu \int_0^T \|\boldsymbol{u}^m(s)\|^2_{\mathbf{V}} ds + \gamma \int_0^T \|w^m(s)\|^2_{H_0^1} ds \leq C,$$

lo que demuestra que

$$\text{la sucesión } \{\boldsymbol{u}^m\}_{m\geq 1} \text{ es acotada en el espacio } \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}), \tag{2.43}$$

$$\text{la sucesión } \{w^m\}_{m\geq 1} \text{ es acotada en el espacio } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{2.44}$$

En lo que sigue se demostrará que:

$\{\boldsymbol{u}_t^m\}_{m\geq 1}$ es acotada en $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}')$ y $\{w_t^m\}_{m\geq 1}$ es acotada en $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, para lo cual se procede como sigue.

De las ecuaciones (2.20)-(2.21), se tiene

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{u}_t^m(t), \boldsymbol{v}\rangle &= -(\mu+\chi)(\nabla \boldsymbol{u}^m(t), \nabla \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{u}^m(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^m(t), \boldsymbol{v}) + \chi(\operatorname{rot} w^m(t), \boldsymbol{v}) \\
&\quad + \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}\rangle, \qquad (2.45) \\
j\langle w_t^m(t), z\rangle &= -\gamma(\nabla w^m(t), \nabla z) - j(\boldsymbol{u}^m(t)\cdot\nabla w^m(t), z) - 2\chi(w^m(t), z) \\
&\quad + \chi(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}^m(t), z) + \langle g(t), z\rangle, \qquad (2.46)
\end{aligned}$$

Observando (1.38) y aplicando la desigualdad triangular, (2.45)-(2.46) implican

$$\begin{aligned}
|\langle \boldsymbol{u}_t^m(t), \boldsymbol{v}\rangle| &\leq (\mu+\chi)|(\nabla \boldsymbol{u}^m(t), \nabla \boldsymbol{v})| + |(\boldsymbol{u}^m(t)\cdot\nabla\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}^m(t))| + \chi|(\operatorname{rot} w^m(t), \boldsymbol{v})| \\
&\quad + |\langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}\rangle|, \qquad (2.47) \\
j|\langle w_t^m(t), z\rangle| &\leq \gamma|(\nabla w^m(t), \nabla z)| + j|(\boldsymbol{u}^m(t)\cdot\nabla z, w^m(t))| + 2\chi|(w^m(t), z)| \\
&\quad + \chi|(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}^m(t), z)| + |\langle g(t), z\rangle|. \qquad (2.48)
\end{aligned}$$

A continuación se acotan los términos del lado derecho de (2.47). Aplicando la desigualdad de Hölder (1.17), (1.36) y la desigualdad de Poincaré (1.18), se tiene

$$\begin{aligned}
|\langle \boldsymbol{u}_t^m(t), \boldsymbol{v}\rangle| &\leq (\mu+\chi)\|\boldsymbol{u}^m(t)\|_{\mathbf{V}}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}} + \|\boldsymbol{u}^m(t)\|^2_{\mathbf{L}^4}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}} + C\|w^m(t)\|_{H_0^1}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}} \\
&\quad + \|\boldsymbol{f}(t)\|_{\mathbf{V}'}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}}. \qquad (2.49)
\end{aligned}$$

Considerando (1.21) de Lema 1.2, la desigualdad de Young (1.16) y (2.40), observar que

$$\|\boldsymbol{u}^m(t)\|^2_{\mathbf{L}^4}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}} \leq \sqrt{2}\|\boldsymbol{u}^m(t)\|\|\boldsymbol{u}^m(t)\|_{\mathbf{V}}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}} \leq C\|\boldsymbol{u}^m(t)\|_{\mathbf{V}}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}}. \tag{2.50}$$

Reemplazando (2.50) en (2.49), se tiene

$$|\langle \boldsymbol{u}_t^m(t), \boldsymbol{v}\rangle| \leq C\|\boldsymbol{u}^m(t)\|_{\mathbf{V}}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}} + C\|w^m(t)\|_{H_0^1}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}} + \|\boldsymbol{f}(t)\|_{\mathbf{V}'}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}}. \tag{2.51}$$

Aplicando la definición de norma en $\mathbf{V}'$, de (2.51) se obtiene

$$\|\boldsymbol{u}_t^m(t)\|_{\mathbf{V}'} = \sup_{\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}}\leq 1} |\langle \boldsymbol{u}_t^m(t), \boldsymbol{v}\rangle| \leq C\|\boldsymbol{u}^m(t)\|_{\mathbf{V}} + C\|w^m(t)\|_{H_0^1} + \|\boldsymbol{f}(t)\|_{\mathbf{V}'}. \tag{2.52}$$

Luego, aplicando la desigualdad de Young (1.16) al lado derecho de (2.52), se tiene

$$\|\boldsymbol{u}_t^m(t)\|_{\mathbf{V}'}^2 \;\; \leq \;\; C(\|\boldsymbol{u}^m(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|w^m(t)\|_{H_0^1}^2 + \|\boldsymbol{f}(t)\|_{\mathbf{V}'}^2). \tag{2.53}$$

Integrando (2.53) con respecto a t de 0 a T y teniendo en cuenta (2.43)-(2.44), se obtiene

$$\int_0^T \|\boldsymbol{u}_t^m(s)\|_{\mathbf{V}'}^2 ds \;\; \leq \;\; C\bigg(\int_0^T \|\boldsymbol{u}^m(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds + \int_0^T \|w^m(s)\|_{H_0^1}^2 ds + \int_0^T \|\boldsymbol{f}(s)\|_{\mathbf{V}'}^2 ds\bigg) \leq C,$$

lo que demuestra que

$$\text{la sucesión } \{\boldsymbol{u}_t^m\}_{m\geq 1} \text{ es acotada en el espacio } \; \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}'). \tag{2.54}$$

Análogamente, se acotan los términos del lado derecho de (2.48). Aplicando la desigualdad de Hölder (1.17), (1.21), (1.35) y la desigualdad de Poincaré (1.18), se tiene

$$\begin{aligned}
|\langle w_t^m(t), z\rangle| \;\; &\leq \;\; C\|w^m(t)\|_{H_0^1}\|z\|_{H_0^1} + \|\boldsymbol{u}^m(t)\|_{\mathbf{L}^4}\|z\|_{H_0^1}\|w^m(t)\|_{L^4} + C\|w^m(t)\|_{H_0^1}\|z\|_{H_0^1} \\
&\quad\;\; +C\|\boldsymbol{u}^m(t)\|_{\mathbf{V}}\|z\|_{H_0^1} + C\|g(t)\|_{H^{-1}}\|z\|_{H_0^1} \\
&\leq \;\; C(\|w^m(t)\|_{H_0^1} + \|\boldsymbol{u}^m(t)\|_{\mathbf{V}})\|z\|_{H_0^1} + \|\boldsymbol{u}^m(t)\|_{\mathbf{L}^4}\|z\|_{H_0^1}\|w^m(t)\|_{L^4} \\
&\quad\;\; +C\|g(t)\|_{H^{-1}}\|z\|_{H_0^1}.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Considerando (1.21), la desigualdad de Young (1.16), (2.40) y (2.41), observar que

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}^m(t)\|_{\mathbf{L}^4}\|z\|_{H_0^1}\|w^m(t)\|_{L^4} \;\; &\leq \;\; \sqrt{2}\|\boldsymbol{u}^m(t)\|^{1/2}\|\nabla\boldsymbol{u}^m(t)\|^{1/2}\|z\|_{H_0^1}\|w^m(t)\|^{1/2}\|\nabla w^m(t)\|^{1/2} \\
&\leq \;\; \sqrt{2}C\|\boldsymbol{u}^m(t)\|_{\mathbf{V}}^{1/2}\|z\|_{H_0^1}\|w^m(t)\|_{H_0^1}^{1/2} \\
&\leq \;\; C(\|\boldsymbol{u}^m(t)\|_{\mathbf{V}} + \|w^m(t)\|_{H_0^1})\|z\|_{H_0^1}.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Reemplazando (2.56) en (2.55), se tiene

$$|\langle w_t^m(t), z\rangle| \;\; \leq \;\; C(\|w^m(t)\|_{H_0^1} + \|\boldsymbol{u}^m(t)\|_{\mathbf{V}})\|z\|_{H_0^1} + C\|g(t)\|_{H^{-1}}\|z\|_{H_0^1}. \tag{2.57}$$

Aplicando la definición de norma en $H^{-1}(\Omega)$, de (2.57) se obtiene

$$\|w_t^m(t)\|_{H^{-1}} = \sup_{\|z\|_{H_0^1}\leq 1} |\langle w_t^m(t), z\rangle| \leq C(\|w^m(t)\|_{H_0^1} + \|\boldsymbol{u}^m(t)\|_{\mathbf{V}} + \|g(t)\|_{H^{-1}}),$$

y aplicando la desigualdad de Young (1.16), se tiene

$$\|w_t^m(t)\|_{H^{-1}}^2 \leq C(\|w^m(t)\|_{H_0^1}^2 + \|\boldsymbol{u}^m(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|g(t)\|_{H^{-1}}^2). \tag{2.58}$$

Integrando (2.58) con respecto a t de 0 a T y teniendo en cuenta (2.43)-(2.44), se obtiene

$$\int_0^T \|w_t^m(t)\|_{H^{-1}}^2 \leq C\bigg(\int_0^T \|w^m(s)\|_{H_0^1}^2 ds + \int_0^T \|\boldsymbol{u}^m(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds + \int_0^T \|g(s)\|_{H^{-1}}^2 ds\bigg) \leq C,$$

lo que demuestra que

$$\text{la sucesión } \{w_t^m\}_{m\geq 1} \text{ es acotada en el espacio } \; L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.59}$$

Por lo tanto, de (2.43)-(2.44) y (2.54), (2.59), se tiene que

$$\text{la sucesión } \{\boldsymbol{u}^m\}_{m\geq 1} \text{ es acotada en el espacio } \boldsymbol{\mathcal{W}}, \tag{2.60}$$
$$\text{la sucesión } \{w^m\}_{m\geq 1} \text{ es acotada en el espacio } \mathcal{W}. \tag{2.61}$$

Paso al límite:

De (2.40)-(2.41), (2.43)-(2.44) y teniendo en cuenta Observación 1.11, se deduce la existencia de un elemento $\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H}) \cap \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})$, un elemento $w \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ y subsucesiones $\{\boldsymbol{u}^{m'}\}_{m'\geq 1}$ de $\{\boldsymbol{u}^m\}_{m\geq 1}$, $\{w^{m'}\}_{m'\geq 1}$ de $\{w^m\}_{m\geq 1}$ tales que cuando $m' \to \infty$,

$$\boldsymbol{u}^{m'} \to \boldsymbol{u} \text{ débil-}\star \text{ en } \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H}), \tag{2.62}$$
$$w^{m'} \to w \text{ débil-}\star \text{ en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.63}$$
$$\boldsymbol{u}^{m'} \to \boldsymbol{u} \text{ débil en } \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}), \tag{2.64}$$
$$w^{m'} \to w \text{ débil en } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{2.65}$$

Por el Teorema 1.3 se tiene que las inmersiones $\boldsymbol{\mathcal{W}} \hookrightarrow \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H})$, $\mathcal{W} \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega))$ son campactas, entonces observando (2.61)-(2.61), cuando $m' \to \infty$, se tiene las siguientes convergencias

$$\boldsymbol{u}^{m'} \to \boldsymbol{u} \text{ fuerte en } \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}), \tag{2.66}$$
$$w^{m'} \to w \text{ fuerte en } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.67}$$

También, de (2.54) y (2.59), cuando $m' \to \infty$ se obtiene que

$$\boldsymbol{u}_t^{m'} \to \boldsymbol{u}_t \text{ débil en } \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}'), \tag{2.68}$$
$$w_t^{m'} \to w_t \text{ débil en } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.69}$$

Para poder pasar al límite en las ecuaciones (2.23)-(2.24), se consideran las funciones escalares $\psi \in \mathcal{C}^\infty([0,T])$. Entonces, multiplicando (2.23)-(2.24) por $\psi(t)$ e integrando con respecto a $t \in [0,T]$, se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle \boldsymbol{u}_t^m(t), \boldsymbol{\varphi}_j\rangle \psi(t)dt &+ (\mu+\chi)\int_0^T (\nabla \boldsymbol{u}^m(t), \nabla \boldsymbol{\varphi}_j)\psi(t)dt + \int_0^T (\boldsymbol{u}^m(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^m(t), \boldsymbol{\varphi}_j)\psi(t)dt \\ &-\chi\int_0^T (\operatorname{rot} w^m(t), \boldsymbol{\varphi}_j)\psi(t)dt = \int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{\varphi}_j\rangle\psi(t)dt,\end{aligned} \tag{2.70}$$

$$\begin{aligned} j\int_0^T \langle w_t^m(t), \phi_j\rangle\psi(t)dt &+ \gamma\int_0^T (\nabla w^m(t), \nabla\phi_j)\psi(t)dt + j\int_0^T (\boldsymbol{u}^m(t)\cdot\nabla w^m(t), \phi_j)\psi(t)dt \\ &+2\chi\int_0^T (w^m(t), \phi_j)\psi(t)dt - \chi\int_0^T (\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^m(t), \phi_j)\psi(t)dt = \int_0^T \langle g(t), \phi_j\rangle\psi(t)dt.\end{aligned} \tag{2.71}$$

Las convergencias (2.68) y (2.69), significan que

$$\int_0^T \langle \boldsymbol{u}_t^{m'}(t), \boldsymbol{v}(t)\rangle dt \to \int_0^T \langle \boldsymbol{u}_t(t), \boldsymbol{v}(t)\rangle dt, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}), \tag{2.72}$$
$$\int_0^T \langle w_t^{m'}(t), z(t)\rangle dt \to \int_0^T \langle w_t(t), z(t)\rangle dt, \ \forall z \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{2.73}$$

Como $\boldsymbol{\varphi}_j \in \mathbf{V}$, $\phi_j \in H_0^1(\Omega)$ y $\psi \in \mathcal{C}^\infty([0,T])$ se tiene que $\boldsymbol{\varphi}_j\psi(t) \in \mathbf{V} \subset \mathbf{H}$ y $\phi_j\psi(t) \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Entonces, reemplazando $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\varphi}_j\psi$ y $z = \phi_j\psi$ en (2.72) y (2.73) respectivamente, para $m = m' \to \infty$, se obtiene

$$\int_0^T \langle \boldsymbol{u}_t^m(t), \boldsymbol{\varphi}_j\rangle\psi(t)dt \quad\to\quad \int_0^T \langle \boldsymbol{u}_t(t), \boldsymbol{\varphi}_j\rangle\psi(t)dt, \tag{2.74}$$

$$\int_0^T \langle w_t^m(t), \phi_j\rangle\psi(t)dt \quad\to\quad \int_0^T \langle w_t(t), \phi_j\rangle\psi(t)dt. \tag{2.75}$$

De (2.64)-(2.65), se deduce que $\nabla\boldsymbol{u}^{m'} \to \nabla\boldsymbol{u}$ y $\nabla w^{m'} \to \nabla w$ en la topología débil de $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H})$ y $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ respectivamente, lo cual por (1.51), para $m = m' \to \infty$ implican que

$$\int_0^T (\nabla\boldsymbol{u}^{m'}(t), \boldsymbol{v}(t))dt \quad\to\quad \int_0^T (\nabla\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t))dt,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}), \tag{2.76}$$

$$\int_0^T (\nabla w^{m'}(t), \boldsymbol{z}(t))dt \quad\to\quad \int_0^T (\nabla w(t), \boldsymbol{z}(t))dt,\ \forall \boldsymbol{z} \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)). \tag{2.77}$$

Como $\nabla\boldsymbol{\varphi}_j \in \mathbf{H}$, $\nabla\phi_j \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ y $\psi \in \mathcal{C}^\infty([0,T])$ se tiene que $\nabla\boldsymbol{\varphi}_j\psi(t) \in \mathbf{H}$ y $\nabla\phi_j\psi(t) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. Entonces, reemplazando $\boldsymbol{v} = \nabla\boldsymbol{\varphi}_j\psi$ y $\boldsymbol{z} = \nabla\phi_j\psi$ en (2.76)-(2.77), para $m = m' \to \infty$ se deduce que

$$\int_0^T (\nabla\boldsymbol{u}^m(t), \nabla\boldsymbol{\varphi}_j)\psi(t)dt \quad\to\quad \int_0^T (\nabla\boldsymbol{u}(t), \nabla\boldsymbol{\varphi}_j)\psi(t)dt, \tag{2.78}$$

$$\int_0^T (\nabla w^m(t), \nabla\phi_j)\psi(t)dt \quad\to\quad \int_0^T (\nabla w(t), \nabla\phi_j)\psi(t)dt. \tag{2.79}$$

Por Lema 1.11 y las convergencias (2.64)-(2.67), para $m = m' \to \infty$ se obtiene

$$\int_0^T \langle \boldsymbol{u}^{m'}(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^{m'}(t), \boldsymbol{v}(t)\rangle dt \quad\to\quad \int_0^T \langle \boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)\rangle dt,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}), \tag{2.80}$$

$$j\int_0^T \langle \boldsymbol{u}^{m'}(t)\cdot\nabla w^{m'}(t), z(t)\rangle dt \quad\to\quad j\int_0^T \langle \boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla w(t), z(t)\rangle dt,\ \forall z \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{2.81}$$

Como $\boldsymbol{\varphi}_j \in \mathbf{V}$, $\phi_j \in H_0^1(\Omega)$ y $\psi \in \mathcal{C}^\infty([0,T])$ se tiene que $\boldsymbol{\varphi}_j\psi(t) \in \mathbf{V} \subset \mathbf{H}$ y $\phi_j\psi(t) \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Entonces, reemplazando $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\varphi}_j\psi$ y $z = \phi_j\psi$ en (2.80) y (2.81) respectivamente, para $m = m' \to \infty$, se obtiene

$$\int_0^T (\boldsymbol{u}^m(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^m(t), \boldsymbol{\varphi}_j)\psi(t)dt \quad\to\quad \int_0^T (\boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\varphi}_j)\psi(t)dt, \tag{2.82}$$

$$j\int_0^T (\boldsymbol{u}^m(t)\cdot\nabla w^m(t), \phi_j)\psi(t)dt \quad\to\quad j\int_0^T (\boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla w(t), \phi_j)\psi(t)dt. \tag{2.83}$$

De (2.64)-(2.65), se deduce que $\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^{m'} \to \operatorname{rot}\boldsymbol{u}$ y $\operatorname{rot} w^{m'} \to \operatorname{rot} w$ en la topología débil de $L^2(0,T;H)$ y $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$, lo cual por (1.51), para $m = m' \to \infty$ implica que

$$\int_0^T (\operatorname{rot} w^{m'}(t), \boldsymbol{v}(t))dt \quad\to\quad \int_0^T (\operatorname{rot} w(t), \boldsymbol{v}(t))dt,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}). \tag{2.84}$$

$$\int_0^T (\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^{m'}(t), z(t))dt \quad\to\quad \int_0^T (\operatorname{rot}\boldsymbol{u}(t), z(t))dt,\ \forall z \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.85}$$

Como $\boldsymbol{\varphi}_j \in \mathbf{V}$, $\phi_j \in H_0^1(\Omega)$ y $\psi \in \mathcal{C}^\infty([0,T])$ se tiene que $\boldsymbol{\varphi}_j\psi(t) \in \mathbf{V} \subset \mathbf{H}$ y $\phi_j\psi(t) \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Entonces, reemplazando $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\varphi}_j\psi$ y $z = \phi_j\psi$ en (2.84) y (2.85) respectivamente, para $m = m' \to \infty$, se obtiene

$$\int_0^T (\operatorname{rot} w^m(t), \boldsymbol{\varphi}_j)\psi(t)dt \quad \to \quad \int_0^T (\operatorname{rot} w(t), \boldsymbol{\varphi}_j)\psi(t)dt, \tag{2.86}$$

$$\int_0^T (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}^m(t), \phi_j)\psi(t)dt \quad \to \quad \int_0^T (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}(t), \phi_j)\psi(t)dt. \tag{2.87}$$

Por la convergencia (2.67) para $m = m' \to \infty$, se sigue inmediatamente que

$$\int_0^T (w^m(t), \phi_j)\psi(t)dt \quad \to \quad \int_0^T (w(t), \phi_j)\psi(t)dt. \tag{2.88}$$

Teniendo en cuenta las convergencias (2.74)-(2.75), (2.78)-(2.79), (2.82)-(2.83) y (2.86)-(2.88), el paso al límite en (2.70)-(2.71) cuando $m \to \infty$, proporcionan las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle \boldsymbol{u}_t(t), \boldsymbol{\varphi}_j\rangle\psi(t)dt + (\mu+\chi)\int_0^T (\nabla \boldsymbol{u}(t), \nabla\boldsymbol{\varphi}_j)\psi(t)dt + \int_0^T (\boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\varphi}_j)\psi(t)dt \\
&\quad -\chi\int_0^T (\operatorname{rot} w(t), \boldsymbol{\varphi}_j)\psi(t)dt = \int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{\varphi}_j\rangle\psi(t)dt, \qquad (2.89)\\
&j\int_0^T \langle w_t(t), \phi_j\rangle\psi(t)dt + \gamma\int_0^T (\nabla w(t), \nabla\phi_j)\psi(t)dt + j\int_0^T (\boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla w(t), \phi_j)\psi(t)dt \\
&\quad +2\chi\int_0^T (w(t), \phi_j)\psi(t)dt - \chi\int_0^T (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}(t), \phi_j)\psi(t)dt = \int_0^T \langle g(t), \phi_j\rangle\psi(t)dt. \qquad (2.90)
\end{aligned}$$

Las igualdades (2.89)-(2.90) se mantienen para cada j, lo cual permite escribir por un argumento de linealidad:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle \boldsymbol{u}_t(t), \boldsymbol{v}\rangle\psi(t)dt + (\mu+\chi)\int_0^T (\nabla \boldsymbol{u}(t), \nabla\boldsymbol{v})\psi(t)dt + \int_0^T (\boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v})\psi(t)dt \\
&\quad -\chi\int_0^T (\operatorname{rot} w(t), \boldsymbol{v})\psi(t)dt = \int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}\rangle\psi(t)\,dt, \qquad (2.91)\\
&j\int_0^T \langle w_t(t), z\rangle\psi(t)dt + \gamma\int_0^T (\nabla w(t), \nabla z)\psi(t)dt + j\int_0^T (\boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla w(t), z)\psi(t)dt \\
&\quad +2\chi\int_0^T (w(t), z)\psi(t)dt - \chi\int_0^T (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}(t), z)\psi(t)dt = \int_0^T \langle g(t), z\rangle\psi(t)dt, \qquad (2.92)
\end{aligned}$$

para cada $\boldsymbol{v}$ y z que son combinaciones lineales finitas de los $\boldsymbol{\varphi}_j$, ϕ_j respectivamente (esto es, $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_k$ y $z \in W_k$ para algún k). Además, como cada término de (2.91)-(2.92) dependen lineal y continuamente de $\boldsymbol{v}$ y z para la norma de $\mathbf{V}$ y $H_0^1(\Omega)$ respectivamente, por continuidad se sigue que (2.91)-(2.92) son válidas para todo $(\boldsymbol{v}, z) \in \mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)$.

En particular, considerando $\psi = \Psi \in \mathcal{C}_0^\infty((0,T))$, de (2.91)-(2.92) se deduce que

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) + (\mu+\chi)(\nabla\boldsymbol{u}(t), \nabla\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) - \chi(\operatorname{rot} w(t), \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}\rangle, \tag{2.93}$$

$$j\frac{d}{dt}(w(t), z) + \gamma(\nabla w(t), \nabla z) + j(\boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla w(t), z) + 2\chi(w(t), z) - \chi(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}(t), z) = \langle g(t), z\rangle, \tag{2.94}$$

para todo $(\boldsymbol{v}, z) \in \mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)$, válidas en el sentido de distribuciones sobre $(0,T)$, lo que demuestra (2.16)-(2.17).

Finalmente, como $\mathbf{0} = \boldsymbol{u}^m(0) \to \boldsymbol{u}(0)$ y $0 = w^m(0) \to w(0)$, cuando $m \to \infty$, entonces $\boldsymbol{u}(0) = \mathbf{0}$ y $w(0) = 0$.

Unicidad:

Sean $(\boldsymbol{u}^1(t), w^1(t))$ y $(\boldsymbol{u}^2(t), w^2(t))$ dos soluciones de (2.16)-(2.18), entonces se tiene

$$\langle \boldsymbol{u}_t^1(t), \boldsymbol{v}\rangle + (\mu+\chi)(\nabla \boldsymbol{u}^1(t), \nabla \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}^1(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^1(t), \boldsymbol{v}) - \chi(\operatorname{rot} w^1(t), \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}\rangle, \tag{2.95}$$

$$\langle \boldsymbol{u}_t^2(t), \boldsymbol{v}\rangle + (\mu+\chi)(\nabla \boldsymbol{u}^2(t), \nabla \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}^2(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^2(t), \boldsymbol{v}) - \chi(\operatorname{rot} w^2(t), \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}\rangle, \tag{2.96}$$

para todo $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$, $\boldsymbol{u}^1(0) = \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{u}^2(0) = \mathbf{0}$.

$$j\langle w_t^1(t), z\rangle + \gamma(\nabla w^1(t), \nabla z) + j(\boldsymbol{u}^1(t)\cdot\nabla w^1(t), z) + 2\chi(w^1(t), z) - \chi(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^1(t), z) = \langle g(t), z\rangle, \tag{2.97}$$

$$j\langle w_t^2(t), z\rangle + \gamma(\nabla w^2(t), \nabla z) + j(\boldsymbol{u}^2(t)\cdot\nabla w^2(t), z) + 2\chi(w^2(t), z) - \chi(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^2(t), z) = \langle g(t), z\rangle, \tag{2.98}$$

para todo $z \in H_0^1(\Omega)$, $w^1(0) = 0$ y $w^2(0) = 0$.

Denotando $\bar{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{u}^1(t) - \boldsymbol{u}^2(t)$ y $\bar{w}(t) = w^1(t) - w^2(t)$ y haciendo la diferencia de (2.95)-(2.96) y la diferencia de (2.97)-(2.98), se obtiene

$$\begin{aligned} &\langle \bar{\boldsymbol{u}}_t(t), \boldsymbol{v}\rangle + (\mu+\chi)(\nabla\bar{\boldsymbol{u}}(t), \nabla\boldsymbol{v}) - \chi(\operatorname{rot}\bar{w}(t), \boldsymbol{v}) \\ &\quad = (\boldsymbol{u}^2(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^2(t), \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{u}^1(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^1(t), \boldsymbol{v}), \end{aligned} \tag{2.99}$$

$$\begin{aligned} &j\langle \bar{w}_t(t), z\rangle + \gamma(\nabla\bar{w}(t), \nabla z) + 2\chi(\bar{w}(t), z) - \chi(\operatorname{rot}\bar{\boldsymbol{u}}(t), z) \\ &\quad = j(\boldsymbol{u}^2(t)\cdot\nabla w^2(t), z) - j(\boldsymbol{u}^1(t)\cdot\nabla w^1(t), z), \end{aligned} \tag{2.100}$$

para todo $(\boldsymbol{v}, z) \in \mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)$.
Observar que

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{u}^2(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^2(t), \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{u}^1(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^1(t), \boldsymbol{v}) &= -(\boldsymbol{u}^1(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^2(t), \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}^2(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^2(t), \boldsymbol{v}) \\ &\quad + (\boldsymbol{u}^1(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^2(t), \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{u}^1(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^1(t), \boldsymbol{v}) \\ &= -((\boldsymbol{u}^1(t) - \boldsymbol{u}^2(t))\cdot\nabla\boldsymbol{u}^2(t), \boldsymbol{v}) \\ &\quad - (\boldsymbol{u}^1(t)\cdot\nabla(\boldsymbol{u}^1(t) - \boldsymbol{u}^2(t)), \boldsymbol{v}) \\ &= -(\bar{\boldsymbol{u}}(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^2(t), \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{u}^1(t)\cdot\nabla\bar{\boldsymbol{u}}(t), \boldsymbol{v}), \end{aligned} \tag{2.101}$$

$$\begin{aligned} j(\boldsymbol{u}^2(t)\cdot\nabla w^2(t), z) - j(\boldsymbol{u}^1(t)\cdot\nabla w^1(t), z) &= -j((\boldsymbol{u}^1(t) - \boldsymbol{u}^2(t))\cdot\nabla w^2(t), z) \\ &\quad - j(\boldsymbol{u}^1(t)\cdot\nabla(w^1(t) - w^2(t)), z) \\ &= -j(\bar{\boldsymbol{u}}(t)\cdot\nabla w^2(t), z) - j(\boldsymbol{u}^1(t)\cdot\nabla W(t), z). \end{aligned} \tag{2.102}$$

Reemplazando (2.101) en (2.99) y (2.102) en (2.100), se tiene

$$\begin{aligned} &\langle \bar{\boldsymbol{u}}_t(t), \boldsymbol{v}\rangle + (\mu+\chi)(\nabla\bar{\boldsymbol{u}}(t), \nabla\boldsymbol{v}) - \chi(\operatorname{rot}\bar{w}(t), \boldsymbol{v}) = -(\bar{\boldsymbol{u}}(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^2(t), \boldsymbol{v}) \\ &\quad - (\boldsymbol{u}^1(t)\cdot\nabla\bar{\boldsymbol{u}}(t), \boldsymbol{v}), \end{aligned} \tag{2.103}$$

$$\begin{aligned} &j\langle \bar{w}_t(t), z\rangle + \gamma(\nabla\bar{w}(t), \nabla z) + 2\chi(\bar{w}(t), z) - \chi(\operatorname{rot}\bar{\boldsymbol{u}}(t), z) = -j(\bar{\boldsymbol{u}}(t)\cdot\nabla w^2(t), z) \\ &\quad - j(\boldsymbol{u}^1(t)\cdot\nabla\bar{w}(t), z), \end{aligned} \tag{2.104}$$

para todo $(\boldsymbol{v}, z) \in \mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)$.
Haciendo $\boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{u}}(t)$ y $z = \bar{w}(t)$ en (2.103) y (2.104) respectivamente, observando (1.39) y (1.61), se obtiene

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|^2 + (\mu+\chi)\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 - \chi(\operatorname{rot}\bar{w}(t), \bar{\boldsymbol{u}}(t)) = -(\bar{\boldsymbol{u}}(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^2(t), \bar{\boldsymbol{u}}(t)), \quad (2.105)$$

$$\frac{j}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{w}(t)\|^2 + \gamma\|\bar{w}(t)\|_{H_0^1}^2 + 2\chi\|\bar{w}(t)\|^2 - \chi(\operatorname{rot}\bar{\boldsymbol{u}}(t), \bar{w}(t)) = -j(\bar{\boldsymbol{u}}(t)\cdot\nabla w^2(t), \bar{w}(t)). \quad (2.106)$$

Sumando (2.105)-(2.106) y observando (1.32), esto es, $(\operatorname{rot}\bar{w}(t), \bar{\boldsymbol{u}}(t)) = (\operatorname{rot}\bar{\boldsymbol{u}}(t), \bar{w}(t))$, se obtiene

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|^2 + j\|\bar{w}(t)\|^2) + (\mu+\chi)\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \gamma\|\bar{w}(t)\|_{H_0^1}^2 + 2\chi\|\bar{w}(t)\|^2 \\
&\quad = 2\chi(\operatorname{rot}\bar{\boldsymbol{u}}(t), \bar{w}(t)) - (\bar{\boldsymbol{u}}(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^2(t), \bar{\boldsymbol{u}}(t)) - j(\bar{\boldsymbol{u}}(t)\cdot\nabla w^2(t), \bar{w}(t)),
\end{aligned}$$

y aplicando la desigualdad triangular, se sigue

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|^2 + j\|\bar{w}(t)\|^2) + 2(\mu+\chi)\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + 2\gamma\|\bar{w}(t)\|_{H_0^1}^2 + 4\chi\|\bar{w}(t)\|^2 \\
&\quad \leq 4\chi|(\operatorname{rot}\bar{\boldsymbol{u}}(t), \bar{w}(t))| + 2|(\bar{\boldsymbol{u}}(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^2(t), \bar{\boldsymbol{u}}(t))| + 2j|(\bar{\boldsymbol{u}}(t)\cdot\nabla w^2(t), \bar{w}(t))|. \quad (2.107)
\end{aligned}$$

A seguir se acotan los términos del lado derecho de (2.107). Teniendo en cuenta (1.35), aplicando la desigualdad de Hölder (1.17) y la desigualdad de Young (1.16), se tiene

$$\begin{aligned}
4\chi|(\operatorname{rot}\bar{\boldsymbol{u}}(t), \bar{w}(t))| &\leq 4\chi\|\operatorname{rot}\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|\|\bar{w}(t)\| \leq 4\chi\sqrt{2}\|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|\|\bar{w}(t)\| \\
&\leq 4\chi\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|_{\mathbf{V}}\sqrt{2}\|\bar{w}(t)\| \leq 2\chi\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + 4\chi\|\bar{w}(t)\|^2. \quad (2.108)
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder (1.17), (1.21) y la desigualdad de Young (1.16), se tiene

$$\begin{aligned}
2|(\bar{\boldsymbol{u}}(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^2(t), \bar{\boldsymbol{u}}(t))| &\leq 2\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|_{\mathbf{L}^4}^2\|\boldsymbol{u}^2(t)\|_{\mathbf{V}} \leq 2\sqrt{2}\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|_{\mathbf{V}}\|\boldsymbol{u}^2(t)\|_{\mathbf{V}} \\
&\leq \mu\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + C_\mu\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|^2\|\boldsymbol{u}^2(t)\|_{\mathbf{V}}^2, \quad (2.109)
\end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}
2j|(\bar{\boldsymbol{u}}(t)\cdot\nabla w^2(t), \bar{w}(t))| &\leq 2j\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|_{\mathbf{L}^4}\|w^2(t)\|_{H_0^1}\|\bar{w}(t)\|_{L^4} \\
&\leq 2\sqrt{2}j\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|^{1/2}\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|_{\mathbf{V}}^{1/2}\|w^2(t)\|_{H_0^1}\|\bar{w}(t)\|^{1/2}\|\bar{w}(t)\|_{H_0^1}^{1/2} \\
&\leq \sqrt{2}j\|w^2(t)\|_{H_0^1}(\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|_{\mathbf{V}} + \|\bar{w}(t)\|\|\bar{w}(t)\|_{H_0^1}) \\
&\leq \mu\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + C_\mu\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|^2\|w^2(t)\|_{H_0^1}^2 + 2\gamma\|\bar{w}(t)\|_{H_0^1}^2 \\
&\quad + jC_\gamma\|\bar{w}(t)\|^2\|w^2(t)\|_{H_0^1}^2. \quad (2.110)
\end{aligned}$$

Reemplazando (2.108)-(2.110) en (2.107), se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|^2 + j\|\bar{w}(t)\|^2) &\leq C_\mu\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|^2(\|\boldsymbol{u}^2(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|w^2(t)\|_{H_0^1}^2) + jC_\gamma\|\bar{w}(t)\|^2\|w^2(t)\|_{H_0^1}^2 \\
&\leq C_{\mu,\gamma}(\|\boldsymbol{u}^2(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|w^2(t)\|_{H_0^1}^2)(\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|^2 + j\|\bar{w}(t)\|^2),
\end{aligned}$$

y denotando $\Phi(t) = C_{\mu,\gamma}(\|\boldsymbol{u}^2(t)\|^2_{\mathbf{V}} + \|w^2(t)\|^2_{H_0^1})$, se obtiene

$$\frac{d}{dt}(\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|^2 + j\|\bar{w}(t)\|^2) \quad \leq \quad \Phi(t)(\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|^2 + j\|\bar{w}(t)\|^2),$$

y entonces,

$$\frac{d}{dt}(\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|^2 + j\|\bar{w}(t)\|^2) - \Phi(t)(\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|^2 + j\|\bar{w}(t)\|^2) \quad \leq \quad 0. \tag{2.111}$$

Un factor integrante para el lado izquierdo de (2.111) es $h(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t \Phi(s)ds}$, así, multiplicando ambos lados de (2.111) por $h(t)$, se obtiene que

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{e}^{-\int_0^t \Phi(s)ds}\,(\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|^2 + j\|\bar{w}\|^2)\right) \leq 0. \tag{2.112}$$

Integrando la desigualdad (2.112) con respecto a t, para $t \in (0, T)$ y observando que $\bar{\boldsymbol{u}}(0) = \mathbf{0}$ y $\bar{w}(0) = 0$, resulta

$$\mathrm{e}^{-\int_0^t \Phi(s)ds}\,(\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|^2 + j\,\|\bar{w}(t)\|^2) \leq 0. \tag{2.113}$$

Puesto que la función exponencial siempre es positiva, de (2.113) se deduce

$$\|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|^2 + j\,\|\bar{w}(t)\|^2 \leq 0 \;\Rightarrow\; \|\bar{\boldsymbol{u}}(t)\| = 0 \text{ y } \|\bar{w}(t)\| = 0,$$

lo cual implica $\bar{\boldsymbol{u}}(t) = \mathbf{0}$ y $\bar{w}(t) = 0$, esto es, $\boldsymbol{u}^1(t) = \boldsymbol{u}^2(t)$ y $w^1(t) = w^2(t)$ para todo $t \in (0, T)$, lo que demuestra la unicidad de soluciones.

■

Capítulo 3

Problema de control para ecuaciones de fluidos micropolares

En este capítulo se estudia un problema de control asociado a las ecuaciones de fluidos micropolares no estacionarias con condiciones de borde Dirichlet homogéneas.
En la teoría de fluidos micropolares, un caso especial se presenta cuando la microrotación w está restringida por $w = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}$. Si en el sistema (2.4)-(2.8) se reemplaza w por $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}$, el sistema se reduce a las ecuaciones de Navier-Stokes.
Considerando un control de tipo distribuido representado por un campo externo, el objetivo del problema a estudiar, es controlar un campo externo cuya acción transforme el fluido micropolar en un fluido de Navier-Stokes.
Como en Capítulo 2, se consideran los espacios de funciones

$$\begin{aligned}
L^2(\Omega) &= \{g : \Omega \to \mathbb{R}\,;\ g \text{ es medible y } \int_\Omega |g(x)|^2 dx < \infty\},\\
H_0^1(\Omega) &= \{z \in H^1(\Omega)\,;\, z = 0 \text{ sobre } \Gamma\},\\
\mathbf{H} &= \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\,;\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{u} = 0 \ \text{ en } \Omega \ y\ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma\},\\
\mathbf{V} &= \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)\,;\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{u} = 0 \ \ en\ \Omega\},\\
\boldsymbol{\mathcal{W}} &= \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})\,;\, \boldsymbol{u}_t \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}')\},\\
\mathcal{W} &= \{w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\,;\, w_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\}.
\end{aligned}$$

De aquí en adelante, la constante $C > 0$ representará una constante genérica que podrá tomar diferentes valores.

3.1. Formulación del problema de control

Con el propósito de estudiar un problema de control, para el caso especial cuando la velocidad microrotacional w sea lo más próxima posible al $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}$, se define el funcional $J : L^2(0,T;L^2(\Omega)) \to \mathbb{R}$ como

$$J(g) = \frac{1}{2}\int_0^T \|w_g(t) - \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}_g(t)\|^2 dt,$$

donde $(\boldsymbol{u}_g, w_g)$ es una solución débil del sistema (2.4)-(2.8).

Además, se considera

(i) Los campos externos $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}')$ y $g \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, donde g es un control de tipo distribuido.

(ii) El conjunto $\mathrm{B_r} = \{g \in L^2(0,T;L^2(\Omega))\,;\, \|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq r\}$, para todo $r > 0$.

Entonces, con las consideraciones $(i) - (ii)$, se formula el siguiente problema de control óptimo.

Problema 1. Hallar un campo externo $g \in \mathrm{B_r}$ tal que minimice el funcional

$$J(g) = \frac{1}{2}\int_0^T \|w_g(t) - \operatorname{rot} \boldsymbol{u}_g(t)\|^2 dt, \tag{3.1}$$

sujeto a que $(\boldsymbol{u}_g, w_g) \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ sea una solución del sistema (2.16)-(2.18) correspondiente a g, esto es, $(\boldsymbol{u}_g, w_g)$ satisface

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}_g(t), \boldsymbol{v}) + (\mu+\chi)(\nabla \boldsymbol{u}_g(t), \nabla \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}_g(t)\cdot\nabla \boldsymbol{u}_g(t), \boldsymbol{v}) - \chi(\operatorname{rot} w_g(t), \boldsymbol{v}) \\ &\qquad = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}\rangle, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}, \qquad (3.2) \\ &j\frac{d}{dt}(w_g(t), z) + \gamma(\nabla w_g(t), \nabla z) + j(\boldsymbol{u}_g(t)\cdot\nabla w_g(t), z) + 2\chi(w_g(t), z) - \chi(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_g(t), z) \\ &\qquad = (g(t), z), \ \forall z \in H_0^1(\Omega), \qquad (3.3) \\ &\boldsymbol{u}_g(0) = \mathbf{0}, \ w_g(0) = 0, \qquad (3.4) \end{aligned}$$

en el sentido de distribuciones sobre $(0,T)$.

3.2. Existencia de una solución óptima

Para el *Problema 1*, se define el conjunto de soluciones admisibles como sigue:

$$\mathcal{S}_{ad} = \{g \in \mathrm{B_r}\,;\, J(g) < \infty \text{ y } (\boldsymbol{u}_g, w_g, g) \text{ satisface el sistema (3.2)-(3.4)}\}.$$

Definición 3.1 *Se dice que $g^* \in \mathcal{S}_{ad}$ es una solución óptima del sistema* (3.1)-(3.4) *si*

$$J(g^*) = \min_{g\in\mathcal{S}_{ad}} J(g). \tag{3.5}$$

El siguiente resultado establece que el problema de control (3.1)-(3.4) tiene al menos una solución.

Teorema 3.1 *Bajo las hipótesis del Teorema 2.1 el problema de control* (3.1)-(3.4) *tiene al menos una solución $g^* \in \mathcal{S}_{ad}$.*

Demostración:
Por el Teorema 2.1, para $g \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ existe $(\boldsymbol{u}_g, w_g) \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ satisfaciendo (3.2)-(3.4), lo cual implica que el conjunto $\mathcal{S}_{ad}$ es no vacío. Además, dado que el

funcional J es acotado inferiormente, entonces existe una sucesión minimizante $\{g^m\}_{m\geq 1} \subset \mathcal{S}_{ad}$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} J(g^m) = \inf_{g\in\mathcal{S}_{ad}} J(g), \tag{3.6}$$

y $(\boldsymbol{u}_g^m, w_g^m, g^m) \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^2(0,T;L^2(\Omega))$ satisface (3.2)-(3.4), esto es,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}_g^m(t),\boldsymbol{v}) + (\mu+\chi)(\nabla \boldsymbol{u}_g^m(t),\nabla \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}_g^m(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}_g^m(t),\boldsymbol{v}) - \chi(\operatorname{rot} w_g^m(t),\boldsymbol{v})\\
&\qquad = \langle \boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}\rangle,\ \forall \boldsymbol{v}\in\mathbf{V}, && (3.7)\\
&j\frac{d}{dt}(w_g^m(t),z) + \gamma(\nabla w_g^m(t),\nabla z) + j(\boldsymbol{u}_g^m(t)\cdot\nabla w_g^m(t),z) + 2\chi(w_g^m(t),z) - \chi(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}_g^m(t),z)\\
&\qquad = (g^m(t),z),\ \forall z\in H_0^1(\Omega), && (3.8)\\
&\boldsymbol{u}_g^m(0) = \mathbf{0},\ w_g^m(0) = 0, && (3.9)
\end{aligned}$$

en el sentido de distribuciones sobre $(0,T)$.

Observando (3.7)-(3.9), análogamente como en la demostración del Teorema 2.1 (ver (2.20)-(2.22), (2.64)-(2.69)), se puede demostrar que existe $(\boldsymbol{u}^*, w^*) \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ tal que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_g^m &\to \boldsymbol{u}^* \text{ débil en } \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}), && (3.10)\\
w_g^m &\to w^* \text{ débil en } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), && (3.11)\\
\boldsymbol{u}_g^m &\to \boldsymbol{u}^* \text{ fuerte en } \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}), && (3.12)\\
w_g^m &\to w^* \text{ fuerte en } L^2(0,T;L^2(\Omega)), && (3.13)\\
\boldsymbol{u}_{gt}^m &\to \boldsymbol{u}_t^* \text{ débil en } \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}'), && (3.14)\\
w_{gt}^m &\to w_t^* \text{ débil en } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). && (3.15)
\end{aligned}$$

Además, como $\{g^m\}_{m\geq 1} \subset \mathrm{B_r}$, entonces $\{g^m\}_{m\geq 1}$ es acotada, luego existe una función $g^* \in \mathrm{B_r} \subset L^2(0,T;L^2(\Omega))$ tal que cuando $m\to\infty$, se tiene

$$g^m \to g^* \text{ débil en } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.16}$$

Usando las convergencias (3.10)-(3.16) y pasando al límite en (3.7)-(3.9), como en el Teorema 2.1, cuando $m\to\infty$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}^*(t),\boldsymbol{v}) + (\mu+\chi)(\nabla\boldsymbol{u}^*(t),\nabla\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*(t),\boldsymbol{v}) - \chi(\operatorname{rot} w^*(t),\boldsymbol{v}) = \langle\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}\rangle,\\
&j\frac{d}{dt}(w^*(t),z) + \gamma(\nabla w^*(t),\nabla z) + j(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla w^*(t),z) + 2\chi(w^*(t),z) - \chi(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t),z) = (g^*(t),z),\\
&\boldsymbol{u}^*(0) = \mathbf{0},\ w^*(0) = 0,
\end{aligned}$$

para todo $(\boldsymbol{v},z) \in \mathbf{V}\times H_0^1(\Omega)$ y en el sentido de distribuciones sobre $(0,T)$. Así, $(\boldsymbol{u}^*, w^*, g^*)$ satisface el sistema (3.2)-(3.4).

Por la definición del funcional J,

$$J(g^*) = \frac{1}{2}\int_0^T \|w^*(t) - \operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t)\|^2 dt \;\leq\; \frac{1}{2}\int_0^T (\|w^*(t)\| + \|\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t)\|)^2 dt,$$

usando la desigualdad de Young y que $(\boldsymbol{u}^*, w^*) \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, se sigue que

$$J(g^*) \quad \leq \quad \int_0^T (\|w^*(t)\|^2 + \|\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}^*(t)\|^2)dt \leq C.$$

Por lo tanto, se ha demostrado que existe $g^* \in \mathrm{B_r}$ tal que $(\boldsymbol{u}^*, w^*, g^*)$ satisface (3.2)-(3.4) y $J(g^*) < \infty$, lo cual implica que $g^* \in \mathcal{S}_{ad}$ y se concluye

$$\inf_{g\in\mathcal{S}_{ad}} J(g) \leq J(g^*). \tag{3.17}$$

De (3.10) se tiene que

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_g^m \quad \to \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}^* \text{ débil en } L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

lo cual junto con (3.13), implican

$$w_g^m - \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_g^m \quad \to \quad w^* - \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}^* \text{ débil en } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Así, de Proposición 1.1, se tiene

$$\|w^* - \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}^*\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \quad \leq \quad \liminf_{m\to\infty} \|w_g^m - \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_g^m\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{3.18}$$

Luego, elevando al cuadrado (3.18) y aplicando (1.55), se obtiene

$$\begin{aligned}\|w^* - \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}^*\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \quad &\leq \quad \big(\liminf_{m\to\infty} \|w_g^m - \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_g^m\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\big)^2 \\ &\leq \quad \liminf_{m\to\infty} \|w_g^m - \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_g^m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))},\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta la definición del funcional J, resulta

$$J(g^*) \quad \leq \quad \liminf_{m\to\infty} J(g^m). \tag{3.19}$$

De (3.19) y (3.6), se obtiene

$$J(g^*) \quad \leq \quad \liminf_{m\to\infty} J(g^m) \leq \lim_{m\to\infty} J(g^m) = \inf_{g\in\mathcal{S}_{ad}} J(g), \tag{3.20}$$

y se concluye que

$$J(g^*) \leq \inf_{g\in\mathcal{S}_{ad}} J(g). \tag{3.21}$$

Así, de (3.17) y (3.21) se sigue que

$$J(g^*) = \inf_{g\in\mathcal{S}_{ad}} J(g).$$

Por lo tanto, $g^* \in \mathcal{S}_{ad}$ es una solución óptima para el problema de control (3.1)-(3.4).

■

3.3. Condición necesaria de optimalidad de primer orden

En esta sección se procede a derivar la condición necesaria de primer orden para el problema de control (3.1)-(3.4). Previamente, se demostrará el siguiente resultado.

Proposición 3.1 *Sean* $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}')$, $g^* \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ *y* $(\boldsymbol{u}^*, w^*)$ *la única solución del sistema* (2.16)-(2.18) *correspondiente a* g^*. *Dado* $g \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, *existe una única* $(\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{w}) \in \boldsymbol{\mathcal{W}} \times \mathcal{W}$ *satisfaciendo el sistema*

$$\begin{aligned}
&\langle \bar{\boldsymbol{u}}_t(t), \boldsymbol{v}\rangle + (\mu+\chi)(\nabla\bar{\boldsymbol{u}}(t), \nabla\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla(\bar{\boldsymbol{u}}(t)-\boldsymbol{u}^*(t)), \boldsymbol{v}) + (\bar{\boldsymbol{u}}(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{v}) \\
&\qquad -\chi(\operatorname{rot}\bar{w}(t), \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}\rangle, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}, && (3.22)\\
&j\langle \bar{w}_t(t), z\rangle + \gamma(\nabla\bar{w}(t), \nabla z) + j(\bar{\boldsymbol{u}}(t)\cdot\nabla w^*(t), z) + j(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla(\bar{w}(t)-w^*(t)), z) \\
&\qquad +2\chi(\bar{w}(t), z) - \chi(\operatorname{rot}\bar{\boldsymbol{u}}(t), z) = (g(t), z), \ \forall z \in H_0^1(\Omega), && (3.23)\\
&\bar{\boldsymbol{u}}(0) = \mathbf{0}, \ \bar{w}(0) = 0, && (3.24)
\end{aligned}$$

en el sentido de distribuciones sobre $(0,T)$.

Demostración:
Sea $(\boldsymbol{u}^*, w^*) \in \boldsymbol{\mathcal{W}} \times \mathcal{W}$ la única solución del sistema (2.16)-(2.18) cuando $g = g^*$, esto es, $(\boldsymbol{u}^*, w^*)$ satisface el sistema

$$\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{u}_t^*(t), \boldsymbol{v}\rangle + (\mu+\chi)(\nabla\boldsymbol{u}^*(t), \nabla\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{v}) \\
&\qquad -\chi(\operatorname{rot} w^*(t), \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}\rangle, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}, && (3.25)\\
&j\langle w_t^*(t), z\rangle + \gamma(\nabla w^*(t), \nabla z) + j(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla w^*(t), z) + 2\chi(w^*(t), z) \\
&\qquad -\chi(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t), z) = (g^*(t), z), \ \forall z \in H_0^1(\Omega), && (3.26)\\
&\boldsymbol{u}^*(0) \ = \ \mathbf{0}, \ w^*(0) = 0. && (3.27)
\end{aligned}$$

Se denota por $(\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha, \hat{w}^\alpha) \in \boldsymbol{\mathcal{W}} \times \mathcal{W}$ la única solución del sistema (2.16)-(2.18) cuando $g = g^* + \alpha(g - g^*)$, esto es,

$$\begin{aligned}
&\langle \hat{\boldsymbol{u}}_t^\alpha(t), \boldsymbol{v}\rangle + (\mu+\chi)(\nabla\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha(t), \nabla\boldsymbol{v}) + (\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha(t)\cdot\nabla\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha(t), \boldsymbol{v}) - \chi(\operatorname{rot}\hat{w}^\alpha(t), \boldsymbol{v}) \\
&\qquad = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}\rangle, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}, && (3.28)\\
&j\langle \hat{w}_t^\alpha(t), z\rangle + \gamma(\nabla\hat{w}^\alpha(t), \nabla z) + j(\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha(t)\cdot\nabla\hat{w}^\alpha(t), z) + 2\chi(\hat{w}^\alpha(t), z) - \chi(\operatorname{rot}\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha(t), z) \\
&\qquad = (g^*(t) + \alpha(g(t) - g^*(t)), z), \ \forall z \in H_0^1(\Omega), && (3.29)\\
&\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha(0) = \mathbf{0}, \ \hat{w}^\alpha(0) = 0. && (3.30)
\end{aligned}$$

Haciendo la diferencia entre los sistemas (3.28)-(3.30) y (3.25)-(3.27), se obtiene

$$\begin{aligned}
&\langle \hat{\boldsymbol{u}}_t^\alpha(t) - \boldsymbol{u}_t^*(t), \boldsymbol{v}\rangle + (\mu+\chi)(\nabla(\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha(t) - \boldsymbol{u}^*(t)), \nabla\boldsymbol{v}) + (\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha(t)\cdot\nabla\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha(t) - \boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{v}) \\
&\qquad -\chi(\operatorname{rot}(\hat{w}^\alpha(t) - w^*(t)), \boldsymbol{v}) = 0, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}, && (3.31)\\
&j\langle \hat{w}_t^\alpha(t) - w_t^*(t), z\rangle + \gamma(\nabla(\hat{w}^\alpha(t) - w^*(t)), \nabla z) + j(\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha(t)\cdot\nabla\hat{w}^\alpha(t) - \boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla w^*(t), z) \\
&\qquad +2\chi(\hat{w}^\alpha(t) - w^*(t), z) - \chi(\operatorname{rot}(\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha(t) - \boldsymbol{u}^*(t)), z) = \alpha(g(t) - g^*(t), z), \ \forall z \in H_0^1(\Omega), && (3.32)\\
&\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha(0) - \boldsymbol{u}^*(0) = \mathbf{0}, \ \hat{w}^\alpha(0) - w^*(0) = 0. && (3.33)
\end{aligned}$$

Para cualquier $\alpha \in (0,1)$, se definen las funciones

$$\boldsymbol{u}^\alpha = \frac{\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha - \boldsymbol{u}^*}{\alpha} + \boldsymbol{u}^*, \quad w^\alpha = \frac{\hat{w}^\alpha - w^*}{\alpha} + w^*, \tag{3.34}$$

las cuales implican

$$\alpha(\boldsymbol{u}^\alpha - \boldsymbol{u}^*) = \hat{\boldsymbol{u}}^\alpha - \boldsymbol{u}^*, \quad \alpha(w^\alpha - w^*) = \hat{w}^\alpha - w^*. \tag{3.35}$$

Observar que

$$\begin{aligned}
(\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha \cdot \nabla \hat{\boldsymbol{u}}^\alpha - \boldsymbol{u}^* \cdot \nabla \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}) &= \big(((\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha - \boldsymbol{u}^*) + \boldsymbol{u}^*) \cdot \nabla \big((\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha - \boldsymbol{u}^*) + \boldsymbol{u}^*\big) - \boldsymbol{u}^* \cdot \nabla \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}\big) \\
&= \big((\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha - \boldsymbol{u}^*) \cdot \nabla (\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha - \boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{v}\big) + \big((\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha - \boldsymbol{u}^*) \cdot \nabla \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}\big) \\
&\quad + \big(\boldsymbol{u}^* \cdot \nabla (\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha - \boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{v}\big) \\
&= \alpha^2 \big((\boldsymbol{u}^\alpha - \boldsymbol{u}^*) \cdot \nabla (\boldsymbol{u}^\alpha - \boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{v}\big) + \alpha\big((\boldsymbol{u}^\alpha - \boldsymbol{u}^*) \cdot \nabla \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}\big) \\
&\quad + \alpha\big(\boldsymbol{u}^* \cdot \nabla (\boldsymbol{u}^\alpha - \boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{v}\big) \\
&= \alpha^2 \big((\boldsymbol{u}^\alpha - \boldsymbol{u}^*) \cdot \nabla (\boldsymbol{u}^\alpha - \boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{v}\big) + \alpha\big(\boldsymbol{u}^\alpha \cdot \nabla \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}\big) \\
&\quad - \alpha(\boldsymbol{u}^* \cdot \nabla \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}) + \alpha(\boldsymbol{u}^* \cdot \nabla (\boldsymbol{u}^\alpha - \boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{v}),
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
j(\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha \cdot \nabla \hat{w}^\alpha - \boldsymbol{u}^* \cdot \nabla w^*, z) &= j\big(((\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha - \boldsymbol{u}^*) + \boldsymbol{u}^*) \cdot \nabla ((\hat{w}^\alpha - w^*) + w^*) - \boldsymbol{u}^* \cdot \nabla w^*, z\big) \\
&= j\big((\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha - \boldsymbol{u}^*) \cdot \nabla (\hat{w}^\alpha - w^*), z\big) + j\big((\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha - \boldsymbol{u}^*) \cdot \nabla w^*, z\big) \\
&\quad + j\big(\boldsymbol{u}^* \cdot \nabla (\hat{w}^\alpha - w^*), z\big) \\
&= \alpha^2 j\big((\boldsymbol{u}^\alpha - \boldsymbol{u}^*) \cdot \nabla (w^\alpha - w^*), z\big) + \alpha j\big((\boldsymbol{u}^\alpha - \boldsymbol{u}^*) \cdot \nabla w^*, z\big) \\
&\quad + \alpha j\big(\boldsymbol{u}^* \cdot \nabla (w^\alpha - w^*), z\big) \\
&= \alpha^2 j\big((\boldsymbol{u}^\alpha - \boldsymbol{u}^*) \cdot \nabla (w^\alpha - w^*), z\big) + \alpha j\big(\boldsymbol{u}^\alpha \cdot \nabla w^*, z\big) \\
&\quad - \alpha j(\boldsymbol{u}^* \cdot \nabla w^*, z) + \alpha j(\boldsymbol{u}^* \cdot \nabla (w^\alpha - w^*), z)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Reemplazando (3.35)-(3.37) en el sistema (3.31)-(3.33) y teniendo en cuenta que $(\boldsymbol{u}^*, w^*)$ satisface el sistema (3.25)-(3.27), se obtiene que $(\boldsymbol{u}^\alpha, w^\alpha) \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ satisface el siguiente sistema

$$\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{u}_t^\alpha(t), \boldsymbol{v}\rangle + (\mu+\chi)(\nabla \boldsymbol{u}^\alpha(t), \nabla \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}^\alpha(t) \cdot \nabla \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{v}) + \big(\boldsymbol{u}^*(t) \cdot \nabla (\boldsymbol{u}^\alpha(t) - \boldsymbol{u}^*(t)), \boldsymbol{v}\big) \\
&\quad + \alpha\big((\boldsymbol{u}^\alpha(t) - \boldsymbol{u}^*(t)) \cdot \nabla (\boldsymbol{u}^\alpha(t) - \boldsymbol{u}^*(t)), \boldsymbol{v}\big) - \chi(\operatorname{rot} w^\alpha(t), \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}\rangle, && (3.38) \\
&j\langle w_t^\alpha(t), z\rangle + \gamma(\nabla w^\alpha(t), \nabla z) + j(\boldsymbol{u}^\alpha(t) \cdot \nabla w^*(t), z) + j\big(\boldsymbol{u}^*(t) \cdot \nabla (w^\alpha(t) - w^*(t)), z\big) \\
&\quad + \alpha j\big((\boldsymbol{u}^\alpha(t) - \boldsymbol{u}^*(t)) \cdot \nabla (w^\alpha(t) - w^*(t)), z\big) + 2\chi(w^\alpha(t), z) - \chi(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}^\alpha(t), z) = (g(t), z), && (3.39) \\
&\boldsymbol{u}^\alpha(0) = \mathbf{0},\ w^\alpha(0) = 0, && (3.40)
\end{aligned}$$

para todo $(\boldsymbol{v}, z) \in \mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)$.

Estimaciones a priori:

Tomando $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^\alpha(t)$ y $z = w^\alpha(t)$ en (3.38)-(3.39), y teniendo en cuenta (1.61), se obtiene

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^2 + (\mu+\chi)\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^2_{\mathbf{V}} + (1-\alpha)((\boldsymbol{u}^\alpha(t) - \boldsymbol{u}^*(t))\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{u}^\alpha(t))\\
&\quad -\chi(\operatorname{rot} w^\alpha(t), \boldsymbol{u}^\alpha(t)) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}^\alpha(t)\rangle, \qquad (3.41)\\
&\frac{j}{2}\frac{d}{dt}\|w^\alpha(t)\|^2 + \gamma\|w^\alpha(t)\|^2_{H_0^1} + 2\chi\|w^\alpha(t)\|^2 + j(1-\alpha)((\boldsymbol{u}^\alpha(t) - \boldsymbol{u}^*(t))\cdot\nabla w^*(t), w^\alpha(t))\\
&\quad -\chi(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^\alpha(t), w^\alpha(t)) = (g(t), w^\alpha(t)). \qquad (3.42)
\end{aligned}$$

Sumando (3.41)-(3.42) y observando (1.32), se obtiene

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^2 + j\|w^\alpha(t)\|^2) + (\mu+\chi)\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^2_{\mathbf{V}} + \gamma\|w^\alpha(t)\|^2_{H_0^1} + 2\chi\|w^\alpha(t)\|^2\\
&\quad = -(1-\alpha)((\boldsymbol{u}^\alpha(t) - \boldsymbol{u}^*(t))\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{u}^\alpha(t)) - j(1-\alpha)((\boldsymbol{u}^\alpha(t) - \boldsymbol{u}^*(t))\cdot\nabla w^*(t), w^\alpha(t))\\
&\qquad +2\chi(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^\alpha(t), w^\alpha(t)) + \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}^\alpha(t)\rangle + (g(t), w^\alpha(t)). \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

Observando que $(1-\alpha) < 1$ para $\alpha \in (0,1)$ y aplicando la desigualdad triangular, (3.43) implica

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^2 + j\|w^\alpha(t)\|^2) + 2(\mu+\chi)\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^2_{\mathbf{V}} + 2\gamma\|w^\alpha(t)\|^2_{H_0^1} + 4\chi\|w^\alpha(t)\|^2\\
&\quad \le 2|(\boldsymbol{u}^\alpha(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{u}^\alpha(t))| + 2|(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{u}^\alpha(t))| + 2j|(\boldsymbol{u}^\alpha(t)\cdot\nabla w^*(t), w^\alpha(t))|\\
&\qquad +2j|(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla w^*(t), w^\alpha(t))| + 4\chi|(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^\alpha(t), w^\alpha(t))| + 2|\langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}^\alpha(t)\rangle + (g(t), w^\alpha(t))|. \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

A continuación, se acotan los términos del lado derecho de (3.44). Teniendo en cuenta (1.38) y aplicando la desigualdad de Hölder (1.17), se tiene

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^2 + j\|w^\alpha(t)\|^2) + 2(\mu+\chi)\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^2_{\mathbf{V}} + 2\gamma\|w^\alpha(t)\|^2_{H_0^1} + 4\chi\|w^\alpha(t)\|^2\\
&\quad \le 2\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^2_{\mathbf{L}^4}\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}} + 2\|\boldsymbol{u}^*(t)\|^2_{\mathbf{L}^4}\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}} + 2j\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{L}^4}\|w^*(t)\|_{H_0^1}\|w^\alpha(t)\|_{L^4}\\
&\qquad +2j\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{L}^4}\|w^\alpha(t)\|_{H_0^1}\|w^*(t)\|_{L^4} + 4\chi\|\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|\|w^\alpha(t)\|\\
&\qquad\quad +2(\|\boldsymbol{f}(t)\|_{\mathbf{V}'}\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}} + \|g(t)\|\|w^\alpha(t)\|_{H_0^1}). \qquad (3.45)
\end{aligned}$$

Aplicando (1.21) y la desigualdad de Young (1.16), se tiene

$$\begin{aligned}
2\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^2_{\mathbf{L}^4}\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}} &\le 2\sqrt{2}\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}}\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}}\\
&\le \frac{\mu}{4}\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^2_{\mathbf{V}} + C_\mu\|\boldsymbol{u}^*(t)\|^2_{\mathbf{V}}\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^2. \qquad (3.46)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{u}^* \in \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H})$ y aplicando la desigualdad de Young (1.16), se tiene

$$\begin{aligned}
2\|\boldsymbol{u}^*(t)\|^2_{\mathbf{L}^4}\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}} &\le 2\sqrt{2}\|\boldsymbol{u}^*(t)\|\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}}\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}} \le 2\sqrt{2}\,C\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}}\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}}\\
&\le \frac{\mu}{4}\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^2_{\mathbf{V}} + C_\mu\|\boldsymbol{u}^*(t)\|^2_{\mathbf{V}}. \qquad (3.47)
\end{aligned}$$

Considerando que $\boldsymbol{u}^* \in \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H})$, $w^* \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ y aplicando la desigualdad de Young

(1.16), se tiene

$$\begin{aligned}
2j\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{L}^4}\|w^\alpha(t)\|_{H_0^1}\|w^*(t)\|_{L^4} &\leq 2\sqrt{2}j\|\boldsymbol{u}^*(t)\|^{1/2}\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}}^{1/2}\|w^\alpha(t)\|_{H_0^1}\|w^*(t)\|^{1/2}\|w^*(t)\|_{H_0^1}^{1/2} \\
&\leq \frac{\gamma}{4}\|w^\alpha(t)\|_{H_0^1}^2 + C_\gamma\|\boldsymbol{u}^*(t)\|\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}}\|w^*(t)\|\|w^*(t)\|_{H_0^1} \\
&\leq \frac{\gamma}{4}\|w^\alpha(t)\|_{H_0^1}^2 + C_\gamma\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}}\|w^*(t)\|_{H_0^1} \\
&\leq \frac{\gamma}{4}\|w^\alpha(t)\|_{H_0^1}^2 + C_\gamma\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + C_\gamma\|w^*(t)\|_{H_0^1}^2. \qquad (3.48)
\end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando la desigualdad de Young (1.16), se tiene

$$\begin{aligned}
2j\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{L}^4}\|w^*(t)\|_{H_0^1}\|w^\alpha(t)\|_{L^4} &\leq 2\sqrt{2}j\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^{1/2}\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}}^{1/2}\|w^*(t)\|_{H_0^1}\|w^\alpha(t)\|^{1/2}\|w^\alpha(t)\|_{H_0^1}^{1/2} \\
&\leq \sqrt{2}j\|w^*(t)\|_{H_0^1}(\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}} + \|w^\alpha(t)\|\|w^\alpha(t)\|_{H_0^1}) \\
&\leq \frac{\mu}{4}\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + C_{\mu,j}\|w^*(t)\|_{H_0^1}^2\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^2 + \frac{\gamma}{4}\|w^\alpha(t)\|_{H_0^1}^2 \\
&\quad + j\,C_{\gamma,j}\|w^*(t)\|_{H_0^1}^2\|w^\alpha(t)\|^2. \qquad (3.49)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (1.35) y aplicando la desigualdad de Young (1.16), se tiene

$$\begin{aligned}
4\chi\|\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|\|w^\alpha(t)\| &\leq 4\chi\sqrt{2}\|\nabla\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|\|w^\alpha(t)\| \leq 4\chi\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}}\sqrt{2}\|w^\alpha(t)\| \\
&\leq 2\chi\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + 4\chi\|w^\alpha(t)\|^2. \qquad (3.50)
\end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando la desigualdad de Young (1.16), se tiene

$$\begin{aligned}
2(\|\boldsymbol{f}(t)\|_{\mathbf{V}'}\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}} + \|g(t)\|\|w^\alpha(t)\|_{H_0^1}) &\leq \frac{1}{\mu}\|\boldsymbol{f}(t)\|_{\mathbf{V}'}^2 + \mu\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \\
&\quad + \frac{1}{\gamma}\|g(t)\|^2 + \gamma\|w^\alpha(t)\|_{H_0^1}^2. \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, reemplazando (3.46)-(3.51) en (3.45), se tiene

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^2 + j\|w^\alpha(t)\|^2) + \frac{\mu}{4}\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{\gamma}{2}\|w^\alpha(t)\|_{H_0^1}^2 \\
&\quad \leq C(\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|w^*(t)\|_{H_0^1}^2)\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^2 + j\,C\|w^*(t)\|_{H_0^1}^2\|w^\alpha(t)\|^2 \\
&\qquad + C(\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|w^*(t)\|_{H_0^1}^2 + \|\boldsymbol{f}(t)\|_{\mathbf{V}'}^2 + \|g(t)\|^2). \qquad (3.52)
\end{aligned}$$

Usando la desigualdad $(ab + cd) \leq (a + c)(b + d)$ en (3.52), se obtiene

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^2 + j\|w^\alpha(t)\|^2) + \frac{\mu}{4}\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{\gamma}{2}\|w^\alpha(t)\|_{H_0^1}^2 \\
&\quad \leq C(\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|w^*(t)\|_{H_0^1}^2)(\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^2 + j\|w^\alpha(t)\|^2) \\
&\qquad + C(\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|w^*(t)\|_{H_0^1}^2 + \|\boldsymbol{f}(t)\|_{\mathbf{V}'}^2 + \|g(t)\|^2). \qquad (3.53)
\end{aligned}$$

Integrando (3.53) de 0 a t y teniendo en cuenta (3.40), se tiene

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^2 + j\|w^\alpha(t)\|^2 + \frac{\mu}{4}\int_0^t \|\boldsymbol{u}^\alpha(s)\|^2_{\mathbf{V}} ds + \frac{\gamma}{2}\int_0^t \|w^\alpha(s)\|^2_{H_0^1} ds \\
&\leq C\int_0^t (\|\boldsymbol{u}^*(s)\|^2_{\mathbf{V}} + \|w^*(s)\|^2_{H_0^1})(\|\boldsymbol{u}^\alpha(s)\|^2 + j\|w^\alpha(s)\|^2_{H_0^1}) ds \\
&\quad + C\int_0^t (\|\boldsymbol{u}^*(s)\|^2_{\mathbf{V}} + \|w^*(s)\|^2_{H_0^1} + \|\boldsymbol{f}(s)\|^2_{\mathbf{V}'} ds + \|g(s)\|^2) ds \\
&\leq C\int_0^t (\|\boldsymbol{u}^*(s)\|^2_{\mathbf{V}} + \|w^*(s)\|^2_{H_0^1})(\|\boldsymbol{u}^\alpha(s)\|^2 + j\|w^\alpha(s)\|^2_{H_0^1}) ds + C,
\end{aligned} \tag{3.54}$$

y denotando $h(t) = C(\|\boldsymbol{u}^*(t)\|^2_{\mathbf{V}} + \|w^*(t)\|^2_{H_0^1})$, se deduce

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^2 + j\|w^\alpha(t)\|^2 + \frac{\mu}{4}\int_0^t \|\boldsymbol{u}^\alpha(s)\|^2_{\mathbf{V}} ds + \frac{\gamma}{2}\int_0^t \|w^\alpha(s)\|^2_{H_0^1} ds \\
&\leq \int_0^t h(s)(\|\boldsymbol{u}^\alpha(s)\|^2 + j\|w^\alpha(s)\|^2_{H_0^1}) ds + C.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Luego, aplicando la desigualdad de Gronwall (1.45) en (3.55), se tiene

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^2 + j\|w^\alpha(t)\|^2 + \frac{\mu}{4}\int_0^t \|\boldsymbol{u}^\alpha(s)\|^2_{\mathbf{V}} ds + \frac{\gamma}{2}\int_0^t \|w^\alpha(s)\|^2_{H_0^1} ds \\
&\leq C + C\int_0^t h(s) \mathrm{e}^{\int_s^t h(x)dx} ds.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Puesto que $\boldsymbol{u}^* \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})$ y $w^* \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, se tiene

$$\mathrm{e}^{\int_s^t h(x)dx} \leq \mathrm{e}^{C\int_0^T (\|\boldsymbol{u}^*(x)\|^2_{\mathbf{V}} + \|w^*(x)\|^2_{H_0^1}) dx} \leq \mathrm{e}^C \leq C. \tag{3.57}$$

Luego de (3.56) y (3.57), se tiene que

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^2 + j\|w^\alpha(t)\|^2 + \frac{\mu}{4}\int_0^t \|\boldsymbol{u}^\alpha(s)\|^2_{\mathbf{V}} ds + \frac{\gamma}{2}\int_0^t \|w^\alpha(s)\|^2_{H_0^1} ds \\
&\leq C + C\int_0^t h(s) ds \leq C + C\int_0^T h(s) ds \leq C.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Por lo tanto, de (3.58) se deduce que $\sup\limits_{t\in[0,T]} \|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^2 \leq C$, $\sup\limits_{t\in[0,T]} \|w^\alpha(t)\|^2 \leq C$, esto es,

$$\{\boldsymbol{u}^\alpha\}_{0<\alpha<1} \text{ es acotada en el espacio } \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H}), \tag{3.59}$$

$$\{w^\alpha\}_{0<\alpha<1} \text{ es acotada en el espacio } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.60}$$

Tomando $t = T$ en (3.58), se tiene que

$$\frac{\mu}{4}\int_0^T \|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^2_{\mathbf{V}} dt + \frac{\gamma}{2}\int_0^T \|w^\alpha(t)\|^2_{H_0^1} dt \leq C, \tag{3.61}$$

lo cual implica

$$\{\boldsymbol{u}^\alpha\}_{0<\alpha<1} \text{ es acotada en el espacio } \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}), \tag{3.62}$$
$$\{w^\alpha\}_{0<\alpha<1} \text{ es acotada en el espacio } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{3.63}$$

En lo que sigue se demostrará que:

$\{\boldsymbol{u}_t^\alpha\}_{0<\alpha<1}$ es acotada en $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}')$ y $\{w_t^\alpha\}_{0<\alpha<1}$ es acotada en $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, para lo cual se procede como sigue.

De las ecuaciones (3.38)-(3.39), se tiene

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{u}_t^\alpha(t),\boldsymbol{v}\rangle &= -(\mu+\chi)(\nabla\boldsymbol{u}^\alpha(t),\nabla\boldsymbol{v}) - \alpha\big(\boldsymbol{u}^\alpha(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^\alpha(t),\boldsymbol{v}\big) - (1-\alpha)(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^\alpha(t),\boldsymbol{v})\\
&\quad -(1-\alpha)\big(\boldsymbol{u}^\alpha(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*(t),\boldsymbol{v}\big) + (1-\alpha)\big(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*(t),\boldsymbol{v}\big)\\
&\quad +\chi(\operatorname{rot} w^\alpha(t),\boldsymbol{v}) + \langle \boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}\rangle, \qquad (3.64)\\
j\langle w_t^\alpha(t),z\rangle &= -\gamma(\nabla w^\alpha(t),\nabla z) - j\alpha\big(\boldsymbol{u}^\alpha(t)\cdot\nabla w^\alpha(t),z\big) - j(1-\alpha)\big(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla w^\alpha(t),z\big)\\
&\quad -j(1-\alpha)\big(\boldsymbol{u}^\alpha(t)\cdot\nabla w^*(t),z\big) + j(1-\alpha)\big(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla w^*(t),z\big)\\
&\quad -2\chi(w^\alpha(t),z) + \chi(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^\alpha(t),z) + (g(t),z), \qquad (3.65)
\end{aligned}$$

Observando que $(1-\alpha)<1$ para $\alpha\in(0,1)$, aplicando (1.38) y la desigualdad triangular, de (3.64)-(3.65) se obtiene

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{u}_t^\alpha(t),\boldsymbol{v}\rangle &\le (\mu+\chi)|(\nabla\boldsymbol{u}^\alpha(t),\nabla\boldsymbol{v})| + |\big(\boldsymbol{u}^\alpha(t)\cdot\nabla\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}^\alpha(t)\big)| + |(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}^\alpha(t))|\\
&\quad +|\big(\boldsymbol{u}^\alpha(t)\cdot\nabla\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}^*(t)\big)| + |\big(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}^*(t)\big)|\\
&\quad +\chi|(\operatorname{rot} w^\alpha(t),\boldsymbol{v})| + |\langle \boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}\rangle|, \qquad (3.66)\\
j\langle w_t^\alpha(t),z\rangle &= \gamma|(\nabla w^\alpha(t),\nabla z)| + j|\big(\boldsymbol{u}^\alpha(t)\cdot\nabla z,w^\alpha(t)\big)| + j|\big(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla z,w^\alpha(t)\big)|\\
&\quad +j|\big(\boldsymbol{u}^\alpha(t)\cdot\nabla z,w^*(t)\big)| + j|\big(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla z,w^*(t)\big)|\\
&\quad +2\chi|(w^\alpha(t),z)| + \chi|(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^\alpha(t),z)| + |(g(t),z)|, \qquad (3.67)
\end{aligned}$$

A seguir se acotan los términos del lado derecho de (3.66). Teniendo en cuenta la desigualdad de Hölder (1.17), (1.36) y la desigualdad de Poincaré (1.18), se tiene

$$\begin{aligned}
|\langle \boldsymbol{u}_t^\alpha(t),\boldsymbol{v}\rangle| &\le (\mu+\chi)\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}} + \|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{L}^4}^2\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}} + 2\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{L}^4}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}}\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{L}^4}\\
&\quad +\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{L}^4}^2\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}} + C\|w^\alpha(t)\|_{H_0^1}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}} + \|\boldsymbol{f}(t)\|_{\mathbf{V}'}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}}. \qquad (3.68)
\end{aligned}$$

Considerando (1.21), la desigualdad de Young (1.16), $\boldsymbol{u}^*\in\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H})$ y (3.59), observar que

$$\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{L}^4}^2\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}} \le \sqrt{2}\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}} \le C\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}}, \tag{3.69}$$

$$\begin{aligned}
2\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{L}^4}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}}\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{L}^4} &\le 2\sqrt{2}\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^{1/2}\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}}^{1/2}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}}\|\boldsymbol{u}^*(t)\|^{1/2}\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}}^{1/2}\\
&\le C\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}}(\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}} + \|\boldsymbol{u}^*(t)\|\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}})\\
&\le C\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}} + C\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}}, \qquad (3.70)
\end{aligned}$$

$$\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{L}^4}^2\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}} \le \sqrt{2}\|\boldsymbol{u}^*(t)\|\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}} \le C\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}}. \tag{3.71}$$

Reemplazando (3.69)-(3.71) en (3.68), se tiene

$$|\langle \boldsymbol{u}_t^\alpha(t), \boldsymbol{v}\rangle| \leq C(\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}} + \|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}} + \|w^\alpha(t)\|_{H_0^1})\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}} + \|\boldsymbol{f}(t)\|_{\mathbf{V}'}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}}. \quad (3.72)$$

Aplicando la definición de norma en $\mathbf{V}'$, de (3.72) se obtiene

$$\|\boldsymbol{u}_t^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}'} = \sup_{\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}}\leq 1} |\langle \boldsymbol{u}_t^\alpha(t), \boldsymbol{v}\rangle| \leq C(\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}} + \|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}} + \|w^\alpha(t)\|_{H_0^1}) + \|\boldsymbol{f}(t)\|_{\mathbf{V}'}. \quad (3.73)$$

Luego, aplicando la desigualdad de Young (1.16) al lado derecho de (3.73), se tiene

$$\|\boldsymbol{u}_t^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}'}^2 \leq C(\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|w^\alpha(t)\|_{H_0^1}^2 + \|\boldsymbol{f}(t)\|_{\mathbf{V}'}^2). \quad (3.74)$$

Integrando (3.74) con respecto a t de 0 a T y teniendo en cuenta (3.62)-(3.63), $\boldsymbol{u}^* \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})$ y $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$, se obtiene

$$\int_0^T \|\boldsymbol{u}_t^\alpha(s)\|_{\mathbf{V}'}^2 ds \leq C\int_0^T (\|\boldsymbol{u}^\alpha(s)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\boldsymbol{u}^*(s)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|w^\alpha(s)\|_{H_0^1}^2 + \|\boldsymbol{f}(s)\|_{\mathbf{V}'}^2) ds \leq C,$$

lo que demuestra que

$$\{\boldsymbol{u}_t^\alpha\}_{0<\alpha<1} \text{ es acotada en el espacio } \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}'). \quad (3.75)$$

Análogamente, se acotan los términos del lado derecho de (3.67). Aplicando la desigualdad de Hölder (1.17), (1.35) y la desigualdad de Poincaré (1.18), se tiene

$$\begin{aligned}|\langle w_t^\alpha(t), z\rangle| \leq\ & C\|w^\alpha(t)\|_{H_0^1}\|z\|_{H_0^1} + \|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{L}^4}\|z\|_{H_0^1}\|w^\alpha(t)\|_{L^4} + \|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{L}^4}\|z\|_{H_0^1}\|w^*(t)\|_{L^4} \\ & + \|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{L}^4}\|z\|_{H_0^1}\|w^\alpha(t)\|_{L^4} + \|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{L}^4}\|z\|_{H_0^1}\|w^*(t)\|_{L^4} + C\|w^\alpha(t)\|_{H_0^1}\|z\|_{H_0^1} \\ & + C\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}}\|z\|_{H_0^1} + C\|g(t)\|\|z\|_{H_0^1}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Considerando (1.21), la desigualdad de Young (1.16) y (3.59)-(3.60), observar que

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{L}^4}\|z\|_{H_0^1}\|w^\alpha(t)\|_{L^4} &\leq \sqrt{2}\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^{1/2}\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}}^{1/2}\|z\|_{H_0^1}\|w^\alpha(t)\|^{1/2}\|w^\alpha(t)\|_{H_0^1}^{1/2} \\ &\leq C\|z\|_{H_0^1}(\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}} + \|w^\alpha(t)\|\|w^\alpha(t)\|_{H_0^1}) \\ &\leq C\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}}\|z\|_{H_0^1} + C\|w^\alpha(t)\|_{H_0^1}\|z\|_{H_0^1}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Similarmente como en (3.77), dado que $\boldsymbol{u}^* \in \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H})$ y $w^* \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, se obtiene

$$\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{L}^4}\|z\|_{H_0^1}\|w^*(t)\|_{L^4} \leq C\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}}\|z\|_{H_0^1} + C\|w^*(t)\|_{H_0^1}\|z\|_{H_0^1}, \quad (3.78)$$

$$\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{L}^4}\|z\|_{H_0^1}\|w^\alpha(t)\|_{L^4} \leq C\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}}\|z\|_{H_0^1} + C\|w^\alpha(t)\|_{H_0^1}\|z\|_{H_0^1}, \quad (3.79)$$

$$\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{L}^4}\|z\|_{H_0^1}\|w^*(t)\|_{L^4} \leq C\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}}\|z\|_{H_0^1} + C\|w^*(t)\|_{H_0^1}\|z\|_{H_0^1}. \quad (3.80)$$

Reemplazando (3.77)-(3.80) en (3.76), se tiene

$$|\langle w_t^\alpha(t), z\rangle| \leq C(\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}} + \|w^\alpha(t)\|_{H_0^1} + \|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}} + \|w^*(t)\|_{H_0^1} + \|g(t)\|)\|z\|_{H_0^1}. \quad (3.81)$$

Aplicando la definición de norma en $H^{-1}(\Omega)$, de (3.81) se obtiene

$$\begin{aligned}
\|w_t^\alpha(t)\|_{H^{-1}} &= \sup_{\|z\|_{H_0^1}\le 1} |\langle w_t^\alpha(t), z\rangle| \\
&\le C(\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}} + \|w^\alpha(t)\|_{H_0^1} + \|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}} + \|w^*(t)\|_{H_0^1} + \|g(t)\|). \qquad (3.82)
\end{aligned}$$

Luego, aplicando la desigualdad de Young (1.16) al lado derecho de (3.82), se tiene

$$\|w_t^\alpha(t)\|_{H^{-1}}^2 \le C(\|\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|w^\alpha(t)\|_{H_0^1}^2 + \|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|w^*(t)\|_{H_0^1}^2 + \|g(t)\|^2). \qquad (3.83)$$

Integrando (3.83) con respecto a t de 0 a T y teniendo en cuenta (3.62)-(3.63), $\boldsymbol{u}^* \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})$, $w* \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ y $g \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|w_t^\alpha(s)\|_{H^{-1}}^2 ds &\le C\int_0^T (\|\boldsymbol{u}^\alpha(s)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|w^\alpha(s)\|_{H_0^1}^2 + \|\boldsymbol{u}^*(s)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|w^*(s)\|_{H_0^1}^2)ds \\
&\quad + C\int_0^T \|g(s)\|^2 ds \le C,
\end{aligned}$$

lo que demuestra que

$$\{w_t^\alpha\}_{0<\alpha<1} \text{ es acotada en el espacio } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \qquad (3.84)$$

Por lo tanto, de (3.62)-(3.63), (3.75) y (3.84), se tiene que

$$\{\boldsymbol{u}^\alpha\}_{0<\alpha<1} \text{ es acotada en el espacio } \boldsymbol{\mathcal{W}}, \qquad (3.85)$$

$$\{w^\alpha\}_{0<\alpha<1} \text{ es acotada en el espacio } \mathcal{W}. \qquad (3.86)$$

Paso al límite:

De (3.59)-(3.60), (3.62)-(3.63), (3.75) y (3.84), se deduce que existe un elemento $\bar{\boldsymbol{u}} \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}) \cap \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H})$, un elemento $\bar{w} \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ y subsucesiones $\{\boldsymbol{u}^{\alpha'}\}$ de $\{\boldsymbol{u}^\alpha\}$, $\{w^{\alpha'}\}$ de $\{w^\alpha\}$ tales que cuando $\alpha' \to 0$,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}^{\alpha'} &\to \bar{\boldsymbol{u}} \text{ débil en } \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}), && (3.87)\\
w^{\alpha'} &\to \bar{w} \text{ débil en } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). && (3.88)\\
\boldsymbol{u}_t^{\alpha'} &\to \bar{\boldsymbol{u}}_t \text{ débil en } \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}'), && (3.89)\\
w_t^{\alpha'} &\to \bar{w}_t \text{ débil en } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). && (3.90)
\end{aligned}$$

Además, las convergencias anteriores implican

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}^{\alpha'} &\to \bar{\boldsymbol{u}} \text{ débil en } \boldsymbol{\mathcal{W}}, && (3.91)\\
w^{\alpha'} &\to \bar{w} \text{ débil en } \mathcal{W}, && (3.92)
\end{aligned}$$

y como las inmersiones $\boldsymbol{\mathcal{W}} \hookrightarrow \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H})$, $\mathcal{W} \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega))$ son campactas, se deduce que cuando $\alpha' \to 0$,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}^{\alpha'} &\to \bar{\boldsymbol{u}} \text{ fuerte en } \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}), && (3.93)\\
w^{\alpha'} &\to \bar{w} \text{ fuerte en } L^2(0,T;L^2(\Omega)). && (3.94)
\end{aligned}$$

Para poder pasar al límite en las ecuaciones (3.38)-(3.40), se consideran las funciones escalares $\psi \in \mathcal{C}^\infty([0,T])$. Entonces, multiplicando (3.38)-(3.39) por $\psi(t)$ e integrando con respecto a $t \in [0,T]$, se tiene

$$\int_0^T \langle \boldsymbol{u}_t^\alpha(t), \boldsymbol{v}\rangle \psi(t)dt + (\mu+\chi)\int_0^T (\nabla \boldsymbol{u}^\alpha(t), \nabla \boldsymbol{v})\psi(t)dt + \int_0^T (\boldsymbol{u}^\alpha(t)\cdot\nabla \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{v})\psi(t)dt$$
$$+\int_0^T \big(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla(\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t)), \boldsymbol{v}\big)\psi(t)dt + \alpha\int_0^T \big((\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t))\cdot\nabla(\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t)), \boldsymbol{v}\big)\psi(t)dt$$
$$-\chi\int_0^T (\operatorname{rot} w^\alpha(t), \boldsymbol{v})\psi(t)dt = \int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}\rangle\psi(t)dt, \tag{3.95}$$

$$j\int_0^T \langle w_t^\alpha(t), z\rangle\psi(t)dt + \gamma\int_0^T (\nabla w^\alpha(t), \nabla z)\psi(t)dt + j\int_0^T (\boldsymbol{u}^\alpha(t)\cdot\nabla w^*(t), z)\psi(t)dt$$
$$+j\int_0^T \big(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla(w^\alpha(t)-w^*(t)), z\big)\psi(t)dt + \alpha j\int_0^T \big((\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t))\cdot\nabla(w^\alpha(t)-w^*(t)), z\big)\psi(t)dt$$
$$+2\chi\int_0^T (w^\alpha(t), z)\psi(t)dt - \chi\int_0^T (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}^\alpha(t), z)\psi(t)dt = \int_0^T (g(t), z)\psi(t)dt. \tag{3.96}$$

La convergencia (3.87), significa que

$$\int_0^T (\boldsymbol{\varphi}(t), \boldsymbol{u}^\alpha(t))dt \to \int_0^T (\boldsymbol{\varphi}(t), \bar{\boldsymbol{u}}(t))dt, \ \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}'). \tag{3.97}$$

Por otro lado, para el tercer término de (3.95), usando (1.40) se tiene

$$(\boldsymbol{u}^\alpha(t)\cdot\nabla \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{v}) \quad = \quad -((\nabla \boldsymbol{v})^T\cdot \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{u}^\alpha(t)). \tag{3.98}$$

Como $(\nabla \boldsymbol{v})^T \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ y $\boldsymbol{u}^*(t) \in \mathbf{V} \subset \mathbf{L}^6(\Omega)$, se tiene que $(\nabla \boldsymbol{v})^T\cdot \boldsymbol{u}^*(t) \in \mathbf{L}^{3/2}(\Omega) = (\mathbf{L}^3(\Omega))' \subset \mathbf{V}'$, y se deduce que $(\nabla \boldsymbol{v})^T\cdot \boldsymbol{u}^*(t))\psi(t) \in \mathbf{V}'$. Entonces, reemplazando $\boldsymbol{\varphi} = ((\nabla \boldsymbol{v})^T\cdot \boldsymbol{u}^*)\psi$ en (3.97), cuando $\alpha \to 0$ se obtiene

$$-\int_0^T ((\nabla \boldsymbol{v})^T\cdot \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{u}^\alpha(t))\psi(t)dt \to -\int_0^T ((\nabla \boldsymbol{v})^T\cdot \boldsymbol{u}^*(t), \bar{\boldsymbol{u}}(t))\psi(t)dt,$$

lo cual junto con (3.98), cuando $\alpha \to 0$ implican

$$\int_0^T (\boldsymbol{u}^\alpha(t)\cdot\nabla \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{v})\psi(t)dt \to \int_0^T (\bar{\boldsymbol{u}}(t)\cdot\nabla \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{v})\psi(t)dt. \tag{3.99}$$

Ahora, para el cuarto término de (3.95), usando (1.38) se tiene que

$$(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla(\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t)), \boldsymbol{v}\big) = -(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t)\big). \tag{3.100}$$

Puesto que $\boldsymbol{u}^*(t) \in \mathbf{L}^6(\Omega)$ y $\nabla \boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, se tiene $\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla \boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^{3/2}(\Omega) = (\mathbf{L}^3(\Omega))' \subset \mathbf{V}'$ y se deduce que $(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla \boldsymbol{v})\psi(t) \in \mathbf{V}'$. Entonces, reemplazando $\boldsymbol{\varphi} = (\boldsymbol{u}^*\cdot\nabla \boldsymbol{v})\psi$ en (3.97), cuando $\alpha \to 0$ se obtiene

$$-\int_0^T (\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t)\big)\psi(t)dt \to -\int_0^T (\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla \boldsymbol{v}, \bar{\boldsymbol{u}}(t)-\boldsymbol{u}^*(t)\big)\psi(t)dt,$$

lo cual junto con (3.100), cuando $\alpha \to 0$ implican

$$\int_0^T (\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla(\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t)),\boldsymbol{v})\psi(t)dt \quad\to\quad \int_0^T (\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla(\bar{\boldsymbol{u}}(t)-\boldsymbol{u}^*(t)),\boldsymbol{v})\psi(t)dt. \tag{3.101}$$

Para el quinto término de (3.95), $\forall\psi\in\mathcal{C}^\infty([0,T])$ y $\boldsymbol{v}\in\mathbf{V}$, se tiene

$$\begin{aligned}|((\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t))\cdot\nabla(\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t)),\boldsymbol{v})\psi(t)| &\leq C|((\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t))\cdot\nabla\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t))|\\ &\leq C\|(\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t)\|^2_{\mathbf{L}^4}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}}\\ &\leq C\|(\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t)\|^2_{\mathbf{V}}\\ &\leq C(\|(\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|_{\mathbf{V}}+\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}})^2,\end{aligned}$$

luego usando la desigualdad de Young y observando (3.62), se obtiene

$$\begin{aligned}&\int_0^T ((\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t))\cdot\nabla(\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t)),\boldsymbol{v})\psi(t)dt\\ &\qquad\leq C\int_0^T (\|(\boldsymbol{u}^\alpha(t)\|^2_{\mathbf{V}}+\|\boldsymbol{u}^*(t)\|^2_{\mathbf{V}})dt\leq C,\end{aligned}$$

por lo tanto, cuando $\alpha\to 0$ se tiene

$$\alpha\int_0^T ((\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t))\cdot\nabla(\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t)),\boldsymbol{v})\psi(t)dt\to 0. \tag{3.102}$$

Similarmente, como en (3.99), (3.101) y (3.102), cuando $\alpha\to 0$ se tiene

$$\int_0^T (\boldsymbol{u}^\alpha(t)\cdot\nabla w^*(t),z)\psi(t)dt \quad\to\quad \int_0^T (\bar{\boldsymbol{u}}(t)\cdot\nabla w^*(t),z)\psi(t)dt, \tag{3.103}$$

$$\int_0^T (\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla(w^\alpha(t)-w^*(t)),z)\psi(t)dt \quad\to\quad \int_0^T (\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla(\bar{w}(t)-w^*(t)),z)\psi(t)dt, \tag{3.104}$$

$$\alpha\int_0^T ((\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t))\cdot\nabla(w^\alpha(t)-w^*(t)),\boldsymbol{v})\psi(t)dt\to 0. \tag{3.105}$$

Por lo tanto, similar como en la demostración del Teorema 2.1, teniendo en cuenta (3.99), (3.101)-(3.105) y las convergencias (3.87)-(3.94), pasando al límite en (3.95)-(3.96) cuando $\alpha\to 0$ y se obtiene que $(\bar{\boldsymbol{u}},\bar{w})$ es la única solución del sistema (3.22)-(3.24).

■

La siguiente propiedad de J, permitirá obtener una condición necesaria de optimalidad.

Proposición 3.2 *El funcional J es Gateaux diferenciable en $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ y la derivada de J en el punto $g^*\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ en la dirección $(g-g^*)\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ es dada por*

$$J'(g^*)(g-g^*)=\int_0^T \big(\mathrm{rot}\,(\bar{\boldsymbol{u}}(t)-\boldsymbol{u}^*(t))-(\bar{w}(t)-w^*(t)),\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}^*(t)-w^*(t))dt, \tag{3.106}$$

donde $(\boldsymbol{u}^*,w^*)$ es la única solución del sistema (2.16)-(2.18) correspondiente a g^* y $(\bar{\boldsymbol{u}},\bar{w})\in\boldsymbol{\mathcal{W}}\times\mathcal{W}$ es la única solución del sistema (3.22)-(3.24).

Demostración: De la definición del funcional J dada en (3.1), se tiene

$$J\big(g^*+\alpha(g-g^*)\big)-J(g^*)=\frac{1}{2}\int_0^T\big(\|\hat{w}^\alpha(t)-\operatorname{rot}\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha(t)\|^2-\|w^*(t)-\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t)\|^2\big)dt, \qquad (3.107)$$

donde $(\boldsymbol{u}^*,w^*)$ es la única solución del sistema (3.25)-(3.27) y $(\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha,\hat{w}^\alpha)$ es la única solución del sistema (3.28)-(3.30).

Observar que

$$\begin{aligned}\|\hat{w}^\alpha(t)-\operatorname{rot}\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha(t)\|^2 &= (\hat{w}^\alpha(t)-\operatorname{rot}\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha(t),\hat{w}^\alpha(t)-\operatorname{rot}\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha(t))\\ &= \|\hat{w}^\alpha(t)\|^2-2(\hat{w}^\alpha(t),\operatorname{rot}\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha(t))+\|\operatorname{rot}\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha(t)\|^2,\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta (3.35), se tiene

$$\begin{aligned}\|\hat{w}^\alpha(t)-\operatorname{rot}\hat{\boldsymbol{u}}^\alpha(t)\|^2 &= \|w^*(t)+\alpha(w^\alpha(t)-w^*(t))\|^2\\ &\quad -2\big(w^*(t)+\alpha(w^\alpha(t)-w^*(t)),\operatorname{rot}(\boldsymbol{u}^*(t)+\alpha(\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t)))\big)\\ &\quad +\|\operatorname{rot}(\boldsymbol{u}^*(t)+\alpha(\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t)))\|^2\\ &= \|w^*(t)\|^2+2\alpha(w^*(t),w^\alpha(t)-w^*(t))+\alpha^2\|w^\alpha(t)-w^*(t)\|^2\\ &\quad -2(w^*(t),\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t))-2\alpha(w^*(t),\operatorname{rot}(\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t)))\\ &\quad -2\alpha(w^\alpha(t)-w^*(t),\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t))-2\alpha^2(w^\alpha(t)-w^*(t),\operatorname{rot}(\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t)))\\ &\quad +\|\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t)\|^2+2\alpha\big(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t),\operatorname{rot}(\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t))\big)\\ &\quad +\alpha^2\|\operatorname{rot}(\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t))\|^2\\ &= \|w^*(t)\|^2+2\alpha(\operatorname{rot}(\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t))-(w^\alpha(t)-w^*(t)),\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t)-w^*(t))\\ &\quad +\alpha^2\|w^\alpha(t)-w^*(t)\|^2-2(w^*(t),\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t))\\ &\quad -2\alpha^2\big(w^\alpha(t)-w^*(t),\operatorname{rot}(\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t))\big)+\|\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t)\|^2\\ &\quad +\alpha^2\|\operatorname{rot}(\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t))\|^2. \qquad (3.108)\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\|w^*(t)-\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t)\|^2 = \|w^*(t)\|^2-2(w^*(t),\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t))+\|\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t)\|^2. \qquad (3.109)$$

Reemplazando (3.108)-(3.109) en (3.107), se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{J\big(g^*+\alpha(g-g^*)\big)-J(g^*)}{\alpha} &= \int_0^T(\operatorname{rot}(\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t))-(w^\alpha(t)-w^*(t)),\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t)-w^*(t))dt\\ &\quad +\frac{\alpha}{2}\int_0^T\|w^\alpha(t)-w^*(t)\|^2dt+\frac{\alpha}{2}\int_0^T\|\operatorname{rot}(\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t))\|^2dt\\ &\quad -\alpha\int_0^T\big(w^\alpha(t)-w^*(t),\operatorname{rot}(\boldsymbol{u}^\alpha(t)-\boldsymbol{u}^*(t))\big)dt. \qquad (3.110)\end{aligned}$$

De (3.87), se tiene que

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^\alpha\to\operatorname{rot}\bar{\boldsymbol{u}} \text{ débil en } L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

y como rot $\boldsymbol{u}^* \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, se obtiene

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{u}^\alpha - \boldsymbol{u}^*) \to \operatorname{rot}(\bar{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}^*) \text{ débil en } L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

esto es,

$$\int_0^T (\operatorname{rot}(\boldsymbol{u}^\alpha(t) - \boldsymbol{u}^*(t)), \phi(t))dt \to \int_0^T (\operatorname{rot}(\bar{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}^*(t)), \phi(t))dt, \ \forall \phi \in L^2(0,T;L^2(\Omega)). \quad (3.111)$$

Como $(\boldsymbol{u}^*, w^*) \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, entonces $\operatorname{rot} \boldsymbol{u}^* - w^* \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, luego reemplazando $\phi = \operatorname{rot} \boldsymbol{u}^* - w^*$ en (3.111), se obtiene

$$\int_0^T (\operatorname{rot}(\boldsymbol{u}^\alpha(t) - \boldsymbol{u}^*(t)), \operatorname{rot} \boldsymbol{u}^*(t) - w^*(t))dt \to \int_0^T (\operatorname{rot}(\bar{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}^*(t)), \operatorname{rot} \boldsymbol{u}^*(t) - w^*(t))dt. \quad (3.112)$$

Por otro lado, de (3.88) y el hecho que $w^* \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, se tiene

$$w^\alpha - w^* \to \bar{w} - w^* \text{ débil en } L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

esto es,

$$\int_0^T (w^\alpha(t) - w^*(t), \phi(t))dt \to \int_0^T (\bar{w}(t) - w^*(t), \phi(t))dt, \ \forall \phi \in L^2(0,T;L^2(\Omega)). \quad (3.113)$$

Como $\operatorname{rot} \boldsymbol{u}^* - w^* \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, luego reemplazando $\phi = \operatorname{rot} \boldsymbol{u}^* - w^*$ en (3.113), se obtiene

$$\int_0^T (w^\alpha(t) - w^*(t), \operatorname{rot} \boldsymbol{u}^*(t) - w^*(t))dt \to \int_0^T (\bar{w}(t) - w^*(t), \operatorname{rot} \boldsymbol{u}^*(t) - w^*(t))dt. \quad (3.114)$$

Teniendo en cuenta (3.112), (3.114) y tomando el limite en (3.110) cuando $\alpha \to 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \to 0} \frac{J\big(g^* + \alpha(g - g^*)\big) - J(g^*)}{\alpha} &= \lim_{\alpha \to 0} \int_0^T \big(\operatorname{rot}(\boldsymbol{u}^\alpha(t) - \boldsymbol{u}^*(t)) - (w^\alpha(t) - w^*(t)), \operatorname{rot} \boldsymbol{u}^*(t) - w^*(t))dt \\
&= \int_0^T \big(\operatorname{rot}(\bar{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}^*(t)) - (\bar{w}(t) - w^*(t)), \operatorname{rot} \boldsymbol{u}^*(t) - w^*(t)\big)dt. \quad (3.115)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de la definición (1.56) y (3.115) se concluye que el funcional J es Gateaux diferenciable y su derivada viene dada por

$$J'(g^*)(g - g^*) = \int_0^T \big(\operatorname{rot}(\bar{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}^*(t)) - (\bar{w}(t) - w^*(t)), \operatorname{rot} \boldsymbol{u}^*(t) - w^*(t))dt.$$

■

Teniendo en cuenta la Proposición 3.2, se puede derivar una condición necesaria de optimalidad.

Lema 3.1 *Si g^* es solución del problema de control* (3.1)-(3.4)*, entonces la condición necesaria para g^* que minimiza $J(g^*)$ sobre $\mathcal{S}_{ad}$ es dada por*

$$J'(g^*)(g - g^*) \geq 0, \forall g \in \mathrm{B_r},$$

esto es,

$$\int_0^T \big(\operatorname{rot}(\bar{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}^*(t)) - (\bar{w}(t) - w^*(t)), \operatorname{rot} \boldsymbol{u}^*(t) - w^*(t))dt \geq 0. \quad (3.116)$$

Demostración:
Sea g^* solución del problema de control (3.1)-(3.4), entonces

$$J(g^*) \leq J(g), \forall\, g \in \mathrm{B_r}.$$

Puesto que $\mathrm{B_r}$ es un conjunto convexo, para cada $0 < \alpha < 1$, la función $\hat{g} = \alpha g + (1-\alpha)g^* \in \mathrm{B_r}$, para todo $g \in \mathrm{B_r}$. Entonces

$$J(\hat{g}) = J(\alpha g + (1-\alpha)g^*) \geq J(g^*). \tag{3.117}$$

Como $\alpha g + (1-\alpha)g^* = g^* + \alpha(g - g^*)$, (3.117) implica

$$J(g^* + \alpha(g - g^*)) \geq J(g^*),$$

entonces

$$J(g^* + \alpha(g - g^*)) - J(g^*) \geq 0. \tag{3.118}$$

Por lo tanto, dividiendo (3.118) por α y tomando límite cuando $\alpha \to 0$, se obtiene

$$J'(g^*)(g - g^*) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{J(g^* + \alpha(g - g^*)) - J(g^*)}{\alpha} \geq 0,\ \ \forall\, g \in \mathrm{B_r}. \tag{3.119}$$

■

3.4. Sistema de optimalidad

Las técnicas empleadas para la obtención del sistema de optimalidad se basan en [5].
En esta sección, se reemplazará la desigualdad restringida (3.119) por una no restringida dada por el sistema de optimalidad. Con éste propósito, se introducen las variables adjuntas $(\boldsymbol{\xi}^*, \rho^*) \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Entonces, para g^* un punto de mínimo para el funcional J, se considera el siguiente sistema adjunto

$$\begin{aligned}
&-\langle \boldsymbol{\xi}_t^*(t), \boldsymbol{v}\rangle + (\mu+\chi)(\nabla \boldsymbol{\xi}^*(t), \nabla \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla\boldsymbol{\xi}^*(t), \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\xi}^*(t))\\
&\quad + j(\boldsymbol{v}\cdot\nabla w^*(t), \rho^*(t)) - \chi(\mathrm{rot}\,\rho^*(t), \boldsymbol{v}) = (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}^*(t) - w^*(t), \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}), \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}, \qquad (3.120)\\
&-j\langle \rho_t^*(t), z\rangle + \gamma(\nabla\rho^*(t), \nabla z) - j(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla\rho^*(t), z) + 2\chi(\rho^*(t), z)\\
&\quad -\chi(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\xi}^*(t), z) = -(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}^*(t) - w^*(t), z), \forall z \in H_0^1(\Omega), \qquad (3.121)\\
&\quad \boldsymbol{\xi}^*(T) = \mathbf{0},\ \ \rho^*(T) = 0, \qquad (3.122)
\end{aligned}$$

donde $(\boldsymbol{u}^*, w^*)$ es la única solución del sistema (2.16)-(2.18) correspondiente a $g = g^*$.

La existencia y unicidad de soluciones del sistema (3.120)-(3.122) se demuestra en el siguiente lema.

Lema 3.2 *Sea g^* un control óptimo del problema de control* (3.1)-(3.4) *y* $(\boldsymbol{u}^*, w^*)$ *la única solución de* (2.16)-(2.18) *correspondiente a $g = g^*$. Entonces, existe una única $(\boldsymbol{\xi}^*, \rho^*) \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ solución del sistema* (3.120)-(3.122), *en el sentido de distribuciones sobre* $(0,T)$.

Demostración:
La existencia y unicidad de $(\boldsymbol{\xi}^*, \rho^*)$ satisfaciendo (3.120)-(3.122), se demuestra usando el método de Faedo-Galerkin.

Sean las bases hilbertianas $\{\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_m, \ldots\}$ de $\mathbf{V}$ y $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m, \ldots\}$ de $H_0^1(\Omega)$ consideradas en al demostración del Teorema 2.1 y sean $\mathbf{V}_m \subset \mathbf{V}$ y $W_m \subset H_0^1(\Omega)$ los espacios finitos dimensionales generados por $\{\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_m\}$ y $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m\}$ respectivamente. Para cada número entero m fijo, se definen funciones $(\boldsymbol{\xi}^m, \rho^m) \in \mathbf{V}_m \times W_m$ por

$$\boldsymbol{\xi}^m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im}(t)\boldsymbol{\varphi}_i(x), \qquad \rho^m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} \beta_{im}(t)\phi_i(x), \tag{3.123}$$

satisfaciendo el sistema

$$\begin{aligned}
&-\langle \boldsymbol{\xi}_t^m(t), \boldsymbol{v}\rangle + (\mu+\chi)(\nabla\boldsymbol{\xi}^m(t), \nabla\boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla\boldsymbol{\xi}^m(t), \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\xi}^m(t)) \\
&\quad + j(\boldsymbol{v}\cdot\nabla w^*(t), \rho^m(t)) - \chi(\operatorname{rot}\rho^m(t), \boldsymbol{v}) = (\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t) - w^*(t), \operatorname{rot}\boldsymbol{v}),\ \forall \boldsymbol{v}\in\mathbf{V}_m, \quad (3.124)\\
&-j\langle \rho_t^m(t), z\rangle + \gamma(\nabla\rho^m(t), \nabla z) - j(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla\rho^m(t), z) + 2\chi(\rho^m(t), z) \\
&\quad -\chi(\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}^m(t), z) = -(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t) - w^*(t), z),\ \forall z \in W_m, \quad (3.125)\\
&\boldsymbol{\xi}^m(T) = \mathbf{0},\ \rho^m(T) = 0. \quad (3.126)
\end{aligned}$$

Las funciones $(\boldsymbol{\xi}^*, \rho^*)$ serán determinadas como el límite de las sucesiones $\{\boldsymbol{\xi}^m\}_{m\geq 1}$ y $\{\rho^m\}_{m\geq 1}$.

Estimaciones a priori:

Haciendo $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\xi}^m(t)$, $z = \rho^m(t)$ en (3.124)-(3.125), observando (1.61), (1.39) y (1.42), se obtiene

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|^2 + (\mu+\chi)\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|_{\mathbf{V}}^2 = (\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t) - w^*(t), \operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}^m(t)) - (\boldsymbol{\xi}^m(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\xi}^m(t)) \\
&\quad - j(\boldsymbol{\xi}^m(t)\cdot\nabla w^*(t), \rho^m(t)) + \chi(\operatorname{rot}\rho^m(t), \boldsymbol{\xi}^m(t)), \quad (3.127)\\
&-\frac{j}{2}\frac{d}{dt}\|\rho^m(t)\|^2 + \gamma\|\rho^m(t)\|_{H_0^1}^2 + 2\chi\|\rho^m(t)\|^2 = -(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t) - w^*(t), \rho^m(t)) \\
&\quad + \chi(\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}^m(t), \rho^m(t)). \quad (3.128)
\end{aligned}$$

Sumando (3.127)-(3.128) y observando (1.32) ($(\operatorname{rot}\rho^m, \boldsymbol{\xi}^m) = (\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}^m, \rho^m)$), se obtiene

$$\begin{aligned}
&-\frac{d}{dt}(\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|^2 + \|\rho^m(t)\|^2) + 2(\mu+\chi)\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + 2\gamma\|\rho^m(t)\|_{H_0^1}^2 + 4\chi\|\rho^m(t)\|^2 \\
&\leq 2|(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t) - w^*(t), \operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}^m(t))| + 2|(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t) - w^*(t), \rho^m(t))| + 2|(\boldsymbol{\xi}^m(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\xi}^m(t))| \\
&\quad + 2j|(\boldsymbol{\xi}^m(t)\cdot\nabla w^*(t), \rho^m(t))| + 4\chi|(\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}^m(t), \rho^m(t))|. \quad (3.129)
\end{aligned}$$

A seguir se acotan los términos del lado derecho de (3.129).
Aplicando la desigualdad de Hölder (1.17), (1.35) y la desigualdad de Poincaré (1.18), se tiene

$$\begin{aligned}
2|(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t) - w^*(t), \operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}^m(t))| &\leq 2(\|\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t)\| + \|w^*(t)\|)\|\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}^m(t)\| \\
&\leq C\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}} + \|w^*(t)\|_{H_0^1})\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|_{\mathbf{V}} \\
&\leq C_\mu(\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}} + C\|w^*(t)\|_{H_0^1})^2 + \frac{\mu}{2}\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \\
&\leq C_\mu(\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|w^*(t)\|_{H_0^1}^2) + \frac{\mu}{2}\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|_{\mathbf{V}}^2. \quad (3.130)
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
2|(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t)-w^*(t),\rho^m(t))| &\leq 2(\|\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t)\|+\|w^*(t)\|)\|\rho^m(t)\| \\
&\leq 2C(\sqrt{2}\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}}+\|w^*(t)\|_{H_0^1})\|\rho^m(t)\|_{H_0^1} \\
&\leq C(\sqrt{2}\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}}+\|w^*(t)\|_{H_0^1})^2+\frac{\gamma}{2}\|\rho^m(t)\|^2_{H_0^1} \\
&\leq C(\|\boldsymbol{u}^*(t)\|^2_{\mathbf{V}}+\|w^*(t)\|^2_{H_0^1})+\frac{\gamma}{2}\|\rho^m(t)\|^2_{H_0^1}. \qquad (3.131)
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder (1.17), (1.21) y la desigualdad de Young (1.16), se tiene

$$\begin{aligned}
2|(\boldsymbol{\xi}^m(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*(t),\boldsymbol{\xi}^m(t))| &\leq 2\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|^2_{\mathbf{L}^4}\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}}\leq 2\sqrt{2}\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|_{\mathbf{V}}\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}} \\
&\leq C_\mu\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|^2\|\boldsymbol{u}^*(t)\|^2_{\mathbf{V}}+\frac{\mu}{2}\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|^2_{\mathbf{V}}. \qquad (3.132)
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
2j|(\boldsymbol{\xi}^m(t)\cdot\nabla w^*(t),\rho^m(t))| &\leq 2j\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|_{\mathbf{L}^4}\|w^*(t)\|_{H_0^1}\|\rho^m(t)\|_{L^4} \\
&\leq Cj\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|^{1/2}\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|^{1/2}_{\mathbf{V}}\|w^*(t)\|_{H_0^1}\|\rho^m(t)\|^{1/2}\|\rho^m(t)\|^{1/2}_{H_0^1} \\
&\leq Cj\|w^*(t)\|_{H_0^1}(\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|_{\mathbf{V}}+\|\rho^m(t)\|\|\rho^m(t)\|_{H_0^1}) \\
&\leq C_{\mu j}\,\|w^*(t)\|^2_{H_0^1}\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|^2+\frac{\mu}{2}\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|^2_{\mathbf{V}} \\
&\quad +j\,C_{\gamma j}\,\|w^*(t)\|^2_{H_0^1}\|\rho^m\|^2+\frac{\gamma}{2}\|\rho^m(t)\|^2_{H_0^1}. \qquad (3.133)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (1.35) y aplicando la desigualdad de Young (1.16), se tiene

$$\begin{aligned}
4\chi|(\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}^m(t),\rho^m(t))| &\leq 4\chi\|\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}^m(t)\|\|\rho^m(t)\|\leq 4\chi\sqrt{2}\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|_{\mathbf{V}}\|\rho^m(t)\| \\
&\leq 2\chi\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|^2_{\mathbf{V}}+4\chi\|\rho^m(t)\|^2. \qquad (3.134)
\end{aligned}$$

Reemplazando (3.130)-(3.134) en (3.129), se obtiene

$$\begin{aligned}
&-\frac{d}{dt}(\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|^2+j\|\rho^m(t)\|^2)+\frac{\mu}{2}\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|^2_{\mathbf{V}}+\gamma\|\rho^m(t)\|^2_{H_0^1} \\
&\quad\leq C(\|\boldsymbol{u}^*(t)\|^2_{\mathbf{V}}+\|w^*(t)\|^2_{H_0^1})+C\big(\|\boldsymbol{u}^*(t)\|^2_{\mathbf{V}}+\|w^*(t)\|^2_{H_0^1}\big)\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|^2 \\
&\qquad +j\,C\,\|w^*(t)\|^2_{H_0^1}\|\rho^m(t)\|^2. \qquad (3.135)
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad $(ab+cd)\leq(a+c)(b+d)$ en (3.135), se obtiene

$$\begin{aligned}
&-\frac{d}{dt}(\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|^2+j\|\rho^m(t)\|^2)+\frac{\mu}{2}\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|^2_{\mathbf{V}}+\gamma\|\rho^m(t)\|^2_{H_0^1} \\
&\quad\leq C(\|\boldsymbol{u}^*(t)\|^2_{\mathbf{V}}+\|w^*(t)\|^2_{H_0^1})+C\big(\|\boldsymbol{u}^*(t)\|^2_{\mathbf{V}}+\|w^*(t)\|^2_{H_0^1}\big)(\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|^2+j\|\rho^m(t)\|^2).
\end{aligned}$$

y denotando $h(t)=C(\|\boldsymbol{u}^*(t)\|^2_{\mathbf{V}}+\|w^*(t)\|^2_{H_0^1})$, se tiene

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|^2+j\|\rho^m(t)\|^2)+\frac{\mu}{2}\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|^2_{\mathbf{V}}+\gamma\|\rho^m(t)\|^2_{H_0^1} \\
&\quad\leq h(t)+h(t)(\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|^2+j\|\rho^m(t)\|^2). \qquad (3.136)
\end{aligned}$$

Integrando (3.136) con respecto a t de t a T y teniendo en cuenta (3.126), se obtiene

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|^2 + j\|\rho^m(t)\|^2 + \frac{\mu}{2}\int_t^T \|\boldsymbol{\xi}^m(s)\|^2_{\mathbf{V}} ds + \gamma\int_t^T \|\rho^m(s)\|^2_{H_0^1} ds \\
&\leq \int_t^T h(s)ds + \int_t^T h(s)(\|\boldsymbol{\xi}^m(s)\|^2 + j\|\rho^m(s)\|^2)ds \\
&\leq \int_0^T h(s)ds + \int_0^T h(s)(\|\boldsymbol{\xi}^m(s)\|^2 + j\|\rho^m(s)\|^2)ds.
\end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{u}^* \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})$ y $w^* \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, se tiene que $\displaystyle\int_0^T h(s)ds \leq C$, luego la desigualdad anterior implica

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|^2 + j\|\rho^m(t)\|^2 + \frac{\mu}{2}\int_t^T \|\boldsymbol{\xi}^m(s)\|^2_{\mathbf{V}} ds + \gamma\int_t^T \|\rho^m(s)\|^2_{H_0^1} ds \\
&\leq C + \int_0^T h(s)(\|\boldsymbol{\xi}^m(s)\|^2 + j\|\rho^m(s)\|^2)ds
\end{aligned} \tag{3.137}$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall (1.46) en (3.137), se tiene

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{\xi}^m(t)\|^2 + j\|\rho^m(t)\|^2 + \frac{\mu}{2}\int_t^T \|\boldsymbol{\xi}^m(s)\|^2_{\mathbf{V}} ds + \gamma\int_t^T \|\rho^m(s)\|^2_{H_0^1} ds \\
&\leq C + C\int_t^T h(s)\, \mathrm{e}^{\int_t^s h(x)dx} ds \leq C + C\int_t^T h(s)\, \mathrm{e}^{C} ds \leq C.
\end{aligned} \tag{3.138}$$

Así, de (3.138) se deduce que

$$\text{la sucesión } \{\boldsymbol{\xi}^m\}_{m\geq 1} \text{ es acotada en el espacio } \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H}), \tag{3.139}$$

$$\text{la sucesión } \{\rho^m\}_{m\geq 1} \text{ es acotada en el espacio } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.140}$$

Por otro lado, tomando $t=0$ en (3.138), se deduce que

$$\frac{\mu}{2}\int_0^T \|\boldsymbol{\xi}^m(s)\|^2_{\mathbf{V}} ds + \gamma\int_0^T \|\rho^m(s)\|^2_{H_0^1} ds \leq C,$$

lo cual implica

$$\text{la sucesión } \{\boldsymbol{\xi}^m\}_{m\geq 1} \text{ es acotada en el espacio } \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}), \tag{3.141}$$

$$\text{la sucesión } \{\rho^m\}_{m\geq 1} \text{ es acotada en el espacio } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{3.142}$$

Paso al límite:

De (3.139)-(3.142) se deduce la existencia de un elemento $\boldsymbol{\xi}^* \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}) \cap \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H})$, un elemento $\rho^* \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ y subsucesiones $\{\boldsymbol{\xi}^{m'}\}_{m'\geq 1}$ de $\{\boldsymbol{\xi}^m\}_{m\geq 1}$, $\{\rho^{m'}\}_{m'\geq 1}$ de $\{\rho^m\}_{m\geq 1}$ tales que cuando $m' \to \infty$,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi}^{m'} &\to \boldsymbol{\xi}^* \text{ débil en } \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}), &(3.143)\\
\rho^{m'} &\to \rho^* \text{ débil en } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). &(3.144)
\end{aligned}
$$

Para poder pasar al límite en las ecuaciones (3.124)-(3.126), se consideran las funciones escalares $\psi \in \mathcal{C}^\infty([0,T])$ tal que $\psi(0)=0$. Entonces, multiplicando (3.124)-(3.125) por $\psi(t)$ e integrando con respecto a $t \in [0,T]$, se tiene

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T \langle \boldsymbol{\xi}_t^m(t), \boldsymbol{v}\rangle \psi(t)dt + (\mu+\chi)\int_0^T (\nabla \boldsymbol{\xi}^m(t), \nabla \boldsymbol{v})\psi(t)dt - \int_0^T (\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla\boldsymbol{\xi}^m(t), \boldsymbol{v})\psi(t)dt\\
&+\int_0^T (\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\xi}^m(t))\psi(t)dt + j\int_0^T (\boldsymbol{v}\cdot\nabla w^*(t), \rho^m(t))\psi(t)dt - \chi\int_0^T (\operatorname{rot}\rho^m(t), \boldsymbol{v})\psi(t)dt\\
&\quad = \int_0^T (\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t) - w^*(t), \operatorname{rot}\boldsymbol{v})\psi(t)dt, \qquad (3.145)\\
&-j\int_0^T \langle \rho_t^m(t), z\rangle\psi(t)dt + \gamma\int_0^T (\nabla\rho^m(t), \nabla z)\psi(t)dt - j\int_0^T (\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla\rho^m(t), z)\psi(t)dt\\
&\quad +2\chi\int_0^T (\rho^m(t), z)\psi(t)dt - \chi\int_0^T (\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}^m(t), z)\psi(t)dt\\
&\qquad = -\int_0^T (\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t) - w^*(t), z)\psi(t)dt. \qquad (3.146)
\end{aligned}
$$

Para el primer término de (3.145), haciendo integración por partes y observando (3.126), se obtiene

$$
\begin{aligned}
-\int_0^T \langle \boldsymbol{\xi}_t^m(t), \boldsymbol{v}\rangle\psi(t)dt &= -(\boldsymbol{\xi}^m(t), \boldsymbol{v})\psi(t)\Big|_0^T + \int_0^T (\boldsymbol{\xi}^m(t), \boldsymbol{v})\psi'(t)dt\\
&= \int_0^T (\boldsymbol{\xi}^m(t), \boldsymbol{v})\psi'(t)dt. \qquad (3.147)
\end{aligned}
$$

Como $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V} \subset \mathbf{V}'$ y $\psi' \in C^\infty([0,T])$, se tiene que $\boldsymbol{v}\psi'(t) \in \mathbf{V}'$, entonces $\boldsymbol{v}\psi' \in L^2(0,T;\mathbf{V}')$, luego por la convergencia (3.143), cuando $m \to \infty$ se deduce que

$$
\int_0^T (\boldsymbol{\xi}^m(t), \boldsymbol{v})\psi'(t)dt \to \int_0^T (\boldsymbol{\xi}^*(t), \boldsymbol{v})\psi'(t)dt,
$$

lo cual junto con (3.147), cuando $m \to \infty$ implican

$$
-\int_0^T \langle \boldsymbol{\xi}_t^m(t), \boldsymbol{v}\rangle\psi(t)dt \to -\int_0^T \langle \boldsymbol{\xi}_t^*(t), \boldsymbol{v}\rangle\psi(t)dt. \qquad (3.148)
$$

Similarmente, cuando $m \to \infty$ se obtiene

$$
-j\int_0^T \langle \rho_t^m(t), z\rangle\psi(t)dt \to -j\int_0^T \langle \rho_t^*(t), z\rangle\psi(t)dt. \qquad (3.149)
$$

Análogamente como en (3.101), cuando $m \to \infty$ se obtienen las convergencias

$$-\int_0^T (\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla\boldsymbol{\xi}^m(t),\boldsymbol{v})\psi(t)dt \;\;\to\;\; -\int_0^T (\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla\boldsymbol{\xi}^*(t),\boldsymbol{v})\psi(t)dt, \tag{3.150}$$

$$-j\int_0^T (\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla\rho^m(t),z)\psi(t)dt \;\;\to\;\; -j\int_0^T (\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla\rho^*(t),z)\psi(t)dt. \tag{3.151}$$

Como $\boldsymbol{v}\in\mathbf{V}\subset\mathbf{L}^6(\Omega)$ y $\nabla\boldsymbol{u}^*(t)\in\mathbf{L}^2(\Omega)$, se deduce que $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*(t))\psi(t)\in\mathbf{V}'$. Entonces, teniendo en cuenta la convergencia (3.143), para el cuarto término de (3.145), cuando $m\to\infty$ se tiene

$$\int_0^T (\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*(t),\boldsymbol{\xi}^m(t))\psi(t)dt \;\;\to\;\; \int_0^T (\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*(t),\boldsymbol{\xi}^*(t))\psi(t)dt. \tag{3.152}$$

Análogamente a (3.152), para el quinto término de (3.145), cuando $m\to\infty$ se tiene

$$\int_0^T (\boldsymbol{v}\cdot\nabla w^*(t),\rho^m(t))\psi(t)dt \;\;\to\;\; \int_0^T (\boldsymbol{v}\cdot\nabla w^*(t),\rho^*(t))\psi(t)dt. \tag{3.153}$$

Por lo tanto, similar como en la demostración del Teorema 2.1, teniendo en cuenta (3.148)-(3.153) y las convergencias (3.143)-(3.144), pasando al límite en (3.145)-(3.146) cuando $m\to\infty$, se obtiene que $(\boldsymbol{\xi}^*,\rho^*)$ satisface el sistema (3.120)-(3.121) en el sentido de distribuciones sobre $(0,T)$.

Finalmente, se demostrará que $\boldsymbol{\xi}^m(T)=\mathbf{0}$ y $\rho^m(T)=0$.

De las definiciones en (3.123), se tiene que

$$\mathbf{0}=\boldsymbol{\xi}^m(x,T)=\sum_{i=1}^m \alpha_{im}(T)\boldsymbol{\varphi}_i(x),\quad 0=\rho^m(x,T)=\sum_{i=1}^m \beta_{im}(T)\phi_i(x), \tag{3.154}$$

y como las funciones $\{\boldsymbol{\varphi}_i\}_{i\geq 1}$ y $\{\phi_i\}_{i\geq 1}$ son linealmente independientes, entonces para todo $m\geq 1$ se tiene que $\alpha_{im}(T)=0$ y $\beta_{im}(T)=0$.

Tomando el límite en (3.154) cuando $m\to\infty$, se obtiene

$$\mathbf{0}=\boldsymbol{\xi}^m(T)\;\to\;\sum_{i=1}^\infty \alpha_i(T)\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{\xi}^*(T),\qquad 0=\rho^m(T)\;\to\;\sum_{i=1}^\infty \beta_i(T)z_i=\rho^*(T),$$

lo cual implica que

$$\boldsymbol{\xi}^*(T)=\mathbf{0}\text{ y }\rho^*(T)=0.$$

Por lo tanto, se ha demostrado la existencia de soluciones del sistema (3.120)-(3.122) en el sentido de distribuciones sobre $(0,T)$.

Unicidad:

Sean $(\boldsymbol{\xi}^1(t),\boldsymbol{\xi}^2(t))$ y $(\rho^1(t),\rho^2(t))$ dos soluciones del sistema (3.120)-(3.122), entonces haciendo la diferencia entre las ecuaciones y denotando $\boldsymbol{\xi}(t)=\boldsymbol{\xi}^1(t)-\boldsymbol{\xi}^2(t)$ y $\rho(t)=\rho^1(t)-\rho^2(t)$, se obtiene

$$\begin{aligned}&-\langle\boldsymbol{\xi}_t(t),\boldsymbol{v}\rangle+(\mu+\chi)(\nabla\boldsymbol{\xi}(t),\nabla\boldsymbol{v})-(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla\boldsymbol{\xi}(t),\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*(t),\boldsymbol{\xi}(t))\\&\quad+j(\boldsymbol{v}\cdot\nabla w^*(t),\rho(t))-\chi(\operatorname{rot}\rho(t),\boldsymbol{v})=0,\end{aligned} \tag{3.155}$$

$$-j\langle\rho_t(t),z\rangle+\gamma(\nabla\rho(t),\nabla z)-j(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla\rho(t),z)+2\chi(\rho(t),z)-\chi(\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}(t),z)=0, \tag{3.156}$$

Haciendo $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\xi}(t)$ y $z = \rho(t)$ en (3.155) y (3.156) respectivamente, observando (1.39), (1.42) y (1.61), se tiene

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2 + (\mu+\chi)\|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2_{\mathbf{V}} = \chi(\operatorname{rot}\rho(t), \boldsymbol{\xi}(t)) - j(\boldsymbol{\xi}(t)\cdot\nabla w^*(t), \rho(t)) \\
&\quad -(\boldsymbol{\xi}(t)\cdot\nabla \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\xi}(t)), \qquad (3.157) \\
&-\frac{j}{2}\frac{d}{dt}\|\rho(t)\|^2 + \gamma\|\rho(t)\|^2_{H_0^1} + 2\chi\|\rho(t)\|^2 = \chi(\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}(t), \rho(t)). \qquad (3.158)
\end{aligned}
$$

Sumando (3.157)-(3.158) y observando (1.32), esto es, $(\operatorname{rot}\rho(t), \boldsymbol{\xi}(t)) = (\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}(t), \rho(t))$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
&-\frac{d}{dt}(\|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2 + 2j\|\rho(t)\|^2) + 2(\mu+\chi)\|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2_{\mathbf{V}} + 2\gamma\|\rho(t)\|^2_{H_0^1} + 4\chi\|\rho(t)\|^2 \\
&\quad \le 4\chi|(\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}(t), \rho(t))| + 2j|(\boldsymbol{\xi}(t)\cdot\nabla w^*(t), \rho(t))| + 2|(\boldsymbol{\xi}(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\xi}(t))|. \qquad (3.159)
\end{aligned}
$$

A continuación se acotan los términos del lado derecho de (3.159).

Aplicando la desigualdad de Hölder (1.17), la desigualdad de Young (1.16) y teniendo en cuenta (1.35), se obtiene

$$
4\chi|(\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}(t), \rho(t))| \le 4\sqrt{2}\chi\|\boldsymbol{\xi}(t)\|_{\mathbf{V}}\|\rho(t)\| \le 2\chi\|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2_{\mathbf{V}} + 4\chi\|\rho(t)\|^2. \qquad (3.160)
$$

$$
\begin{aligned}
2j|(\boldsymbol{\xi}(t)\cdot\nabla w^*(t), \rho(t))| &\le 2j\|\boldsymbol{\xi}(t)\|_{\mathbf{L}^4}\|w^*(t)\|_{H_0^1}\|\rho(t)\|_{L^4} \\
&\le 2\sqrt{2}j\|\boldsymbol{\xi}(t)\|^{1/2}\|\boldsymbol{\xi}(t)\|^{1/2}_{\mathbf{V}}\|w^*(t)\|_{H_0^1}\|\rho(t)\|^{1/2}\|\rho(t)\|^{1/2}_{H_0^1} \\
&\le \sqrt{2}j\|w^*(t)\|_{H_0^1}(\|\boldsymbol{\xi}(t)\|\|\boldsymbol{\xi}(t)\|_{\mathbf{V}} + \|\rho(t)\|\|\rho(t)\|_{H_0^1}) \\
&\le \mu\|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2_{\mathbf{V}} + C_{\mu j}\,\|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2\|w^*(t)\|^2_{H_0^1} + 2\gamma\|\rho(t)\|^2_{H_0^1} \\
&\quad + j\,C_{\gamma j}\,\|\rho(t)\|^2\|w^*(t)\|^2_{H_0^1}. \qquad (3.161)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2|(\boldsymbol{\xi}(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\xi}(t))| &\le 2\|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2_{\mathbf{L}^4}\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}} \\
&\le 2\sqrt{2}\|\boldsymbol{\xi}(t)\|\|\boldsymbol{\xi}(t)\|_{\mathbf{V}}\|\boldsymbol{u}^*(t)\|_{\mathbf{V}} \\
&\le \mu\|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2_{\mathbf{V}} + C_\mu\|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2\|\boldsymbol{u}^*(t)\|^2_{\mathbf{V}}. \qquad (3.162)
\end{aligned}
$$

Luego, reemplazando (3.160)-(3.162) en (3.159), se obtiene

$$
\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}(\|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2 + j\|\rho(t)\|^2) &\le (C_\mu\|\boldsymbol{u}^*(t)\|^2_{\mathbf{V}} + C_{\mu j}\|w^*(t)\|^2_{H_0^1})\|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2 \\
&\quad + j\,C_{\gamma j}\,\|\rho(t)\|^2\|w^*(t)\|^2_{H_0^1}.
\end{aligned}
$$

y aplicando la desigualdad $(ab + cd) \le (a + c)(b + d)$, se deduce que

$$
-\frac{d}{dt}(\|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2 + j\|\rho(t)\|^2) \le C\,(\|\boldsymbol{u}^*(t)\|^2_{\mathbf{V}} + \|w^*(t)\|^2_{H_0^1})(\|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2 + j\|\rho(t)\|^2),
$$

e integrando de t a T y dado que $\boldsymbol{\xi}(T) = \mathbf{0}$, $\rho(T) = 0$, se obtiene

$$
\|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2 + j\|\rho(t)\|^2 \le C\int_t^T(\|\boldsymbol{u}^*(s)\|^2_{\mathbf{V}} + \|w^*(s\|^2_{H_0^1})(\|\boldsymbol{\xi}(s)\|^2 + j\|\rho(s)\|^2)ds \qquad (3.163)
$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall (1.46) en (3.163), con $C = 0$, se tiene

$$\|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2 + j\|\rho(t)\|^2 \quad \leq \quad 0$$

lo cual implica que $\|\boldsymbol{\xi}(t)\| = \mathbf{0}$ y $\|\rho(t)\| = 0$, de donde se deduce que $\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{0}$ y $\rho(t) = 0$, esto es, $\boldsymbol{\xi}^1(t) = \boldsymbol{\xi}^2(t)$ y $\rho^1(t) = \rho^2(t)$. Por lo tanto, se ha demostrado la unicidad de soluciones.

$\blacksquare$

Teorema 3.2 *(Sistema de optimalidad)*
Sea g^* un control óptimo del problema de control (3.1)-(3.4)*. Entonces, existen únicos elementos* $(\boldsymbol{u}^*, w^*) \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *solución de* (2.16)-(2.18) *correspondiente a* $g = g^*$ *y* $(\boldsymbol{\xi}^*, \rho^*) \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *solución de* (3.120)-(3.122)*, tales que satisfacen el siguiente sistema de optimalidad:*

Ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{u}_t^*(t), \boldsymbol{v}\rangle + (\mu+\chi)(\nabla \boldsymbol{u}^*(t), \nabla \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{v}) - \chi(\operatorname{rot} w^*(t), \boldsymbol{v}) \\
&\quad = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}\rangle, && (3.164)\\
&j\langle w_t^*(t), z\rangle + \gamma(\nabla w^*(t), \nabla z) + j(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla w^*(t), z) + 2\chi(w^*(t), z) \\
&\quad -\chi(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}^*(t), z) = (g^*(t), z), && (3.165)\\
&\quad \boldsymbol{u}^*(0) \;=\; \mathbf{0},\;\; w^*(0) = 0. && (3.166)
\end{aligned}$$

Ecuaciones adjuntas:

$$\begin{aligned}
&-\langle \boldsymbol{\xi}_t^*(t), \boldsymbol{v}\rangle + (\mu+\chi)(\nabla \boldsymbol{\xi}^*(t), \nabla \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\xi}^*(t)) - (\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla \boldsymbol{\xi}^*(t), \boldsymbol{v}) \\
&\quad +j(\boldsymbol{v}\cdot\nabla w^*(t), \rho^*(t)) - \chi(\operatorname{rot}\rho^*(t), \boldsymbol{v}) = (\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t) - w^*(t), \operatorname{rot}\boldsymbol{v}), && (3.167)\\
&-j\langle \rho_t^*(t), z\rangle + \gamma(\nabla \rho^*(t), \nabla z) - j(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla \rho^*(t), z) + 2\chi(\rho^*(t), z) \\
&\quad -\chi(\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}^*(t), z) = -(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t) - w^*(t), z), && (3.168)\\
&\quad \boldsymbol{\xi}^*(T) = \mathbf{0},\;\; \rho^*(T) = 0, && (3.169)
\end{aligned}$$

para todo $(\boldsymbol{v}, z) \in \mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)$*.*

Condición de optimalidad:

$$\int_0^T (\rho^*(t), g(t) - g^*(t))dt \geq 0,\;\; \forall\, g \in \mathrm{B_r}. \tag{3.170}$$

Demostración:
La existencia y unicidad de $(\boldsymbol{u}^*, w^*)$ satisfaciendo (3.164)-(3.166) fue demostrada en Teorema 2.1. La existencia y unicidad de $(\boldsymbol{\xi}^*, \rho^*)$ satisfaciendo (3.167)-(3.169) fue demostrada en Lema 3.2. En lo que sigue, se probará la condición de optimalidad (3.170).

Tomando $(\boldsymbol{v}, z) = (\boldsymbol{\xi}^*, \rho^*)$ en (3.22)-(3.23) y (3.164)-(3.165), y $(\boldsymbol{v}, z) = (\boldsymbol{u}^* - \bar{\boldsymbol{u}}, w^* - \bar{w})$ en (3.167)-(3.168), se tiene

$$\begin{aligned}
&\langle \bar{\boldsymbol{u}}_t(t), \boldsymbol{\xi}^*(t)\rangle + (\mu+\chi)(\nabla \bar{\boldsymbol{u}}(t), \nabla \boldsymbol{\xi}^*(t)) + (\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla(\bar{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}^*(t)), \boldsymbol{\xi}^*(t)) \\
&\quad +(\bar{\boldsymbol{u}}(t)\cdot\nabla \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\xi}^*(t)) - \chi(\operatorname{rot}\bar{w}(t), \boldsymbol{\xi}^*(t)) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{\xi}^*(t)\rangle, && (3.171)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&j\langle \bar{w}_t(t), \rho^*(t)\rangle + \gamma(\nabla \bar{w}(t), \nabla \rho^*(t)) + j(\bar{\boldsymbol{u}}(t)\cdot\nabla w^*(t), \rho^*(t)) + j(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla(\bar{w}(t)-w^*(t)), \rho^*(t))\\
&\quad +2\chi(\bar{w}(t), \rho^*(t)) - \chi(\operatorname{rot}\bar{\boldsymbol{u}}(t), \rho^*(t)) = (g(t), \rho^*(t)),
\end{aligned} \tag{3.172}
$$

$$
\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{u}^*_t(t), \boldsymbol{\xi}^*(t)\rangle + (\mu+\chi)(\nabla \boldsymbol{u}^*(t), \nabla\boldsymbol{\xi}^*(t)) + (\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\xi}^*(t))\\
&\quad -\chi(\operatorname{rot} w^*(t), \boldsymbol{\xi}^*(t)) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{\xi}^*(t)\rangle,
\end{aligned} \tag{3.173}
$$

$$
\begin{aligned}
&j\langle w^*_t(t), \rho^*(t)\rangle + \gamma(\nabla w^*(t), \nabla\rho^*(t)) + j(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla w^*(t), \rho^*(t)) + 2\chi(w^*(t), \rho^*(t))\\
&\quad -\chi(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t), \rho^*(t)) = (g^*(t), \rho^*(t)),
\end{aligned} \tag{3.174}
$$

$$
\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{\xi}^*_t(t), \bar{\boldsymbol{u}}(t)-\boldsymbol{u}^*(t)\rangle - (\mu+\chi)(\nabla\boldsymbol{\xi}^*(t), \nabla(\bar{\boldsymbol{u}}(t)-\boldsymbol{u}^*(t))) - ((\bar{\boldsymbol{u}}(t)-\boldsymbol{u}^*(t))\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\xi}^*(t))\\
&\quad +(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla\boldsymbol{\xi}^*(t), \bar{\boldsymbol{u}}(t)-\boldsymbol{u}^*(t)) - j((\bar{\boldsymbol{u}}(t)-\boldsymbol{u}^*(t))\cdot\nabla w^*(t), \rho^*(t))\\
&\qquad +\chi(\operatorname{rot}\rho^*(t), \bar{\boldsymbol{u}}(t)-\boldsymbol{u}^*(t)) + (\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t)-w^*(t), \operatorname{rot}(\bar{\boldsymbol{u}}(t)-\boldsymbol{u}^*(t))) = 0,
\end{aligned} \tag{3.175}
$$

$$
\begin{aligned}
&j\langle \rho^*_t(t), \bar{w}(t)-w^*(t)\rangle - \gamma(\nabla\rho^*(t), \nabla(\bar{w}(t)-w^*(t))) + j(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla\rho^*(t), \bar{w}(t)-w^*(t))\\
&\quad -2\chi(\rho^*(t), \bar{w}(t)-w^*(t)) + \chi(\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}^*(t), \bar{w}(t)-w^*(t))\\
&\qquad -(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t)-w^*(t), \bar{w}(t)-w^*(t)) = 0.
\end{aligned} \tag{3.176}
$$

Haciendo la diferencia entre (3.171)-(3.172) y (3.173)-(3.174) respectivamente, se obtiene

$$
\begin{aligned}
&\langle \bar{\boldsymbol{u}}_t(t)-\boldsymbol{u}^*(t)_t, \boldsymbol{\xi}^*(t)\rangle + (\mu+\chi)(\nabla(\bar{\boldsymbol{u}}(t)-\boldsymbol{u}^*(t)), \nabla\boldsymbol{\xi}^*(t)) + (\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla(\bar{\boldsymbol{u}}(t)-\boldsymbol{u}^*(t)), \boldsymbol{\xi}^*(t))\\
&\quad +((\bar{\boldsymbol{u}}(t)-\boldsymbol{u}^*(t))\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\xi}^*(t)) - \chi(\operatorname{rot}(\bar{w}(t)-w^*(t)), \boldsymbol{\xi}^*(t)) = 0,
\end{aligned} \tag{3.177}
$$

$$
\begin{aligned}
&j((\bar{w}(t)-w^*(t))_t, \rho^*(t)) + \gamma(\nabla(\bar{w}(t)-w^*(t)), \nabla\rho^*(t)) + j((\bar{\boldsymbol{u}}(t)-\boldsymbol{u}^*(t))\cdot\nabla w^*(t), \rho^*(t))\\
&\quad +j(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla(w\bar{(t)}-w^*(t)), \rho^*(t)) + 2\chi(\bar{w}(t)-w^*(t), \rho^*(t))\\
&\qquad -\chi(\operatorname{rot}(\bar{\boldsymbol{u}}(t)-\boldsymbol{u}^*(t)), \rho^*(t)) = (g(t)-g^*(t), \rho^*(t)).
\end{aligned} \tag{3.178}
$$

Sumando (3.175) con (3.177) y (3.176) con (3.178), y observando que

$$
(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla\boldsymbol{\xi}^*(t), \bar{\boldsymbol{u}}(t)-\boldsymbol{u}^*(t)) = -(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla(\bar{\boldsymbol{u}}(t)-\boldsymbol{u}^*(t)), \boldsymbol{\xi}^*(t)),
$$

$$
(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla\rho^*(t), \bar{w}(t)-w^*(t)) = -(\boldsymbol{u}^*(t)\cdot\nabla(\bar{w}(t)-w^*(t)), \rho^*(t)),
$$

se obtiene

$$
\begin{aligned}
&\langle(\bar{\boldsymbol{u}}_t(t)-\boldsymbol{u}^*_t(t), \boldsymbol{\xi}^*(t)\rangle + (\boldsymbol{\xi}^*_t(t), \bar{\boldsymbol{u}}(t)-\boldsymbol{u}^*(t)) - j((\bar{\boldsymbol{u}}(t)-\boldsymbol{u}^*(t))\cdot\nabla w^*(t), \rho^*(t))\\
&\quad -\chi(\operatorname{rot}(\bar{w}(t)-w^*(t)), \boldsymbol{\xi}^*(t)) + \chi(\operatorname{rot}\rho^*(t), \bar{\boldsymbol{u}}(t)-\boldsymbol{u}^*(t))\\
&\qquad +(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t)-w^*(t), \operatorname{rot}(\bar{\boldsymbol{u}}(t)-\boldsymbol{u}^*(t))) = 0,
\end{aligned} \tag{3.179}
$$

$$
\begin{aligned}
&j\langle \bar{w}_t(t)-w^*_t(t), \rho^*(t)\rangle + j(\rho^*_t(t), \bar{w}(t)-w^*(t)) + j((\bar{\boldsymbol{u}}(t)-\boldsymbol{u}^*(t))\cdot\nabla w^*(t), \rho^*(t))\\
&\quad -\chi(\operatorname{rot}(\bar{\boldsymbol{u}}(t)-\boldsymbol{u}^*(t)), \rho^*(t)) + \chi(\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}^*(t), \bar{w}(t)-w^*(t))\\
&\qquad -(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t)-w^*(t), \bar{w}(t)-w^*(t)) = (g(t)-g^*(t), \rho^*(t)).
\end{aligned} \tag{3.180}
$$

Sumando las ecuaciones (3.179) y (3.180), y observando

$$\chi(\operatorname{rot}\rho^*(t), \bar{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}^*(t)) = \chi(\operatorname{rot}(\bar{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}^*(t)), \rho^*(t)),$$
$$\chi(\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}^*(t), w\bar{(t)} - w^*(t)) = \chi(\operatorname{rot}(\bar{w}(t) - w^*(t)), \boldsymbol{\xi}^*(t)),$$

se obtiene

$$\begin{aligned}&\langle \bar{\boldsymbol{u}}_t(t) - \boldsymbol{u}_t^*(t), \boldsymbol{\xi}^*(t)\rangle + (\boldsymbol{\xi}_t^*(t), \bar{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}^*(t)) + j\langle \bar{w}_t(t) - w_t^*(t), \rho^*\rangle + j\langle \rho_t^*(t), \bar{w}(t) - w^*(t)\rangle \\ &\quad + (\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t) - w^*(t), \operatorname{rot}(\bar{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}^*(t)) - (\bar{w}(t) - w^*(t))) = (g(t) - g^*(t), \rho^*(t)),\end{aligned}$$

lo cual implica

$$\begin{aligned}&(\operatorname{rot}(\bar{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}^*(t)) - (\bar{w}(t) - w^*(t)), \operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t) - w^*(t)) \\ &\quad = (\rho^*(t), g(t) - g^*(t)) - \langle \bar{\boldsymbol{u}}_t(t) - \boldsymbol{u}_t^*(t), \boldsymbol{\xi}^*(t)\rangle \\ &\qquad - (\boldsymbol{\xi}_t^*(t), \bar{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}^*(t)) - j\langle \bar{w}_t(t) - w_t^*(t)), \rho^*(t)\rangle \\ &\qquad - j(\rho_t^*(t), \bar{w}(t) - w^*(t)).\end{aligned} \tag{3.181}$$

Integrando (3.181) con respecto a t de 0 a T, se tiene

$$\begin{aligned}&\int_0^T (\operatorname{rot}(\bar{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}^*(t)) - (\bar{w}(t) - w^*(t)), \operatorname{rot}\boldsymbol{u}^*(t) - w^*(t))dt = \int_0^T (\rho^*(t), g(t) - g^*(t))dt \\ &- \int_0^T ((\bar{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}^*(t))_t, \boldsymbol{\xi}^*(t))dt - \int_0^T (\boldsymbol{\xi}_t^*(t), \bar{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}^*(t))dt - j\int_0^T ((\bar{w}(t) - w^*(t))_t, \rho^*(t))dt \\ &- j\int_0^T (\rho_t^*(t), \bar{w}(t) - w^*(t))dt.\end{aligned} \tag{3.182}$$

Usando el Teorema de Fubini, integración por partes y dado que $\bar{\boldsymbol{u}}(0) = \mathbf{0}$, $\bar{w}(0) = 0$, $\boldsymbol{u}^*(0) = \mathbf{0}$, $w^*(0) = 0$, $\boldsymbol{\xi}^*(T) = \mathbf{0}$ y $\rho^*(T) = 0$, se deduce

$$\begin{aligned}-\int_0^T \langle (\bar{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}^*(t))_t, \boldsymbol{\xi}^*(t)\rangle dt &= -\int_0^T \int_\Omega (\bar{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}^*(t))_t\, \boldsymbol{\xi}^*(t) dx dt \\ &= -\int_\Omega \left(\int_0^T (\bar{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}^*(t))_t\, \boldsymbol{\xi}^*(t) dt \right) dx \\ &= -\int_\Omega \left(\boldsymbol{\xi}^*(t)(\bar{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}^*(t)) \Big|_0^T - \int_0^T \boldsymbol{\xi}_t^*(t)(\bar{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}^*(t)) dt \right) dx \\ &= \int_\Omega \int_0^T \boldsymbol{\xi}_t^*(t)(\bar{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}^*(t)) dt dx \\ &= \int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\xi}_t^*(t)(\bar{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}^*(t)) dx dt \\ &= \int_0^T (\boldsymbol{\xi}_t^*(t), \bar{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}^*(t)) dt.\end{aligned} \tag{3.183}$$

De manera análoga, se sigue que

$$-j\int_0^T \langle (\bar{w}(t) - w^*(t))_t, \rho^*(t)\rangle dt = j\int_0^T (\rho_t^*(t), \bar{w}(t) - w^*(t)) dt. \tag{3.184}$$

Luego, reemplazando (3.183)-(3.184) en (3.182), se obtiene

$$\int_0^T (\mathrm{rot}(\bar{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}^*(t)) - (\bar{w}(t) - w^*(t)), \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}^*(t) - w^*(t))dt = \int_0^T (\rho^*(t), g(t) - g^*(t))dt. \quad (3.185)$$

Teniendo en cuenta (3.116) y (3.106), se tiene que

$$\int_0^T \big(\mathrm{rot}\,(\bar{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{u}^*(t)) - (\bar{w}(t) - w^*(t)), \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}^*(t) - w^*(t))dt \geq 0.$$

lo cual junto con (3.185) implica (3.170). Por lo tanto, el lema ha sido probado.

■

Bibliografía

[1] R. Adams. Sobolev Spaces. Academic Press, New York, 1975.

[2] J. Barros-Neto. An Introduction to the Theory of Distributions. The State University New Brunswick, New Jersey, 1973.

[3] H. Brezis. Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications. Masson Publishing, 1983. Versión española de Juan Ramón Esteban. Alianza Editorial, 1984.

[4] H. Brezis. Functional Analysis, Sobolev Spaces And Partial Differential Equations. Springer, 2011.

[5] V. Barbu. Mathematical Methods in Optimization of Differential Systems. Mathematics and Its Applications Vol. 310. Springer Science + Business Media Dordrecht, B.V., 1994. Original 1989 in romanian.

[6] L.J. Collantes, A. Coronel. Formulación Variacional de Ecuaciones Diferenciales Parciales. Rev. Integr. Temas Mat. 28 No. 2 (2010), 133 152.

[7] A.C.Eringen. Simple Microfluids. Int. J. Eng. Sci,. Vol.2, No 2 (1964), 205-217.

[8] A.C.Eringen. Theory of Micropolar fluids. J. Math. Mech. 16, No 1 (1966), 1-16.

[9] V. Girault, P. Raviart. Finite Element Approximations of the Navier-Stokes Equations. Lecture Notes in Mathematics 749, Springer 1979.

[10] G.P Galdi. An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations. Second Edition, Springer, 2011.

[11] E. Kreyszig. Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley and Sons. Inc., 1978.

[12] J.L. Lions, E. Magenes. Problèmes aux limites non homogènes et applications. Volumen 1, Dunod, 1968.

[13] G. Lukaszewicz. Micropolar fluids, Theory and Applications. Published by Birkhauser, 1999.

[14] E. Mallea-Zepeda, E. Ortega-Torres, E. Villamizar-Roa. An optimal control problem for the steady nonhomogeneous asymmetric fluids. Applied Mathematics and Optimization, https://doi.org/10.1007/s00245-017-9466-5, First online 13 december 2017, Springer (2017).

[15] E. Mallea-Zepeda, E. Ortega-Torres, E. Villamizar-Roa. A boundary Control Problem for Micropolar Fluids. Journal of Optimization Theory and Applications 169, N2 (2016), 349-369.

[16] E. Mallea. Algunos problemas de control óptimo para fluidos micropolares. Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Mención Matemática, Antofagasta, Chile, 2015.

[17] R. Stavre. Optimization and numerical approximations for micropolar fluids. Numerical Functional Analysis and Optimization, Vol. 24, No 3-4 (2003), 223-241.

[18] R. Stavre. The control of the pressure for a micripolar fluid, Vol. 53 (2002), 1-11.

[19] R. Stavre. A distributed control problem for micropolar fluids, Vol. 45 (2000), 353-358.

[20] R. Temam. Navier-Stokes equations: Theory and Numerical analysis. AMS Chelsea Publishing, 2001.