



UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE
FACULTAD DE CIENCIAS
Departamento de Matemáticas

Espectro de Matrices g -Circulantes y Aplicaciones en el NIEP

Tesis para optar al grado de Magister en Ciencias Mención Matemáticas

LUIS ERNESTO ARRIETA VILCHEZ

Profesor Tutor: Dr. María Rosario Robbiano Bustamante

ANTOFAGASTA, CHILE
2019

Dedicatoria

A mi madre Erolida Vilchez, y
a mi hijo Luis Eduardo Arrieta.

Agradecimientos.

Al dador de la vida y sabiduría, Dios.

A toda mi familia, en especial a mi madre Erolida Vilchez, que con su dedicación, apoyo y enseñanza, hizo de mi un hombre de bien.

A mis profesores, que en sus enseñanzas, influyen en mi formación académica.

Finalmente a mis amigos, por su ayuda y apoyo en este hermoso recorrido.

Índice general

Dedicatoria	I
Agradecimientos	II
Resumen	IV
Introducción	V
Notación y Terminología	VIII
1. Preliminares	1
1.1. El conjunto $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ y su estructura algebraica.	1
1.2. Matrices de permutación.	2
1.3. Matrices No Negativas	4
1.4. Matrices Circulantes	5
1.4.1. Una segunda representación para matrices circulantes	7
1.5. Espectro de matrices circulantes	8
2. Matrices g-circulantes	10
2.1. Caracterización de los autovalores de ciertas matrices g -circulantes	17
2.2. Reconstruyendo ciertas matrices g -circulantes a través de sus elementos diagonales	22
3. Un problema inverso para matrices g-circulantes	24
3.1. Matrices particionadas en bloques circulantes	25
3.2. Construyendo matrices g -circulantes no negativas dado su espectro	27
3.3. Matrices g -circulantes por bloques	29
Conclusiones	
Bibliografía	

Resumen.

Una matriz permutativa es una matriz cuadrada tal que cada fila es una permutación de su primera fila. Una matriz circulante es una matriz donde cada fila es una traslación cíclica, en un lugar hacia la derecha, de la fila anterior. Una matriz g -circulante es una matriz donde cada fila es una traslación cíclica en g lugares, hacia la derecha, de la fila anterior. Las matrices circulantes y las matrices g -circulantes son matrices permutativas. Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ es no negativa ($A \geq 0$) si y solo si $a_{ij} \geq 0$ ($1 \leq i, j \leq n$). Este trabajo utiliza herramientas de Teoría de Números para construir matrices g -circulantes, no negativas, cuyos espectros tienen conexión con los espectros de las matrices circulantes. De hecho se muestra que el espectro de las matrices g -circulantes no es necesariamente el espectro de las matrices circulantes, por lo tanto son una nueva clase de espectro. Los resultados son particularizados a matrices de tamaño $p \times p$, donde p es un entero primo impar, positivo y g debe ser tomado coprimo con p . Esta falta de generalidad es aliviada cuando se estudia el caso de matrices g -circulantes por bloques donde se pueden considerar matrices de orden múltiplos de un primo. Para n y g cumpliendo las hipótesis antes mencionadas, permite dar condiciones necesarias y suficientes para construir listas, tal que, sean el espectro de matrices g -circulantes, no negativas. Además de construir matrices g -circulantes por bloques, no negativas con espectro dado. Se caracterizan además las matrices de permutación cuya permutación asociada en el grupo de permutación S_n es una permutación que se descompone en producto de dos ciclos disjuntos.

Introducción

Una matriz permutativa es una matriz cuadrada tal que cada fila es una permutación de su primera fila. Una matriz circulante es una matriz donde cada fila es una traslación cíclica, en un lugar hacia la derecha, de la fila anterior. Una matriz g -circulante es una matriz donde cada fila es una traslación cíclica en g lugares, hacia la derecha, de la fila anterior. Las matrices circulantes y matrices g -circulantes son matrices permutativas. Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ es no negativa ($A \geq 0$) si y solo si $a_{ij} \geq 0$ ($1 \leq i, j \leq n$). Una lista

$$\Sigma = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \tag{1}$$

de números complejos y es realizada por una matriz de $n \times n$ no negativa A si sus componentes son los autovalores de A . El NIEP es el problema de determinar condiciones necesarias y suficientes para que una lista de n números complejos sea realizada por una matriz no negativa A de $n \times n$. Si una lista Σ es realizada por una matriz no negativa A , entonces decimos que Σ es realizable y que la matriz A realiza Σ o es realizadora de Σ . Algunos resultados pueden ser vistos en [29, 28, 27, 33, 37, 36]. Este problema ha atraído la atención de muchos autores en los últimos 80 años y fue considerado primeramente por Suleîmanova en 1949. Aunque varios resultados parciales han sido obtenidos, el NIEP es un problema abierto para $n \geq 5$. En [25] este problema fue resuelto para $n = 3$ y para matrices de orden $n = 4$ el problema fue resuelto en [19]. Este ha sido estudiado en su forma general en [28, 27, 18, 32, 2, 34, 25, 35]. Cuando a la matriz realizadora de una lista se le pide ser simétrica (por supuesto, con autovalores reales) el problema es designado como el problema inverso, no negativo, simétrico (SNIEP). Este también ha sido un tema con considerable atención, ver por ejemplo en [28, 27, 20, 2, 26, 10]. Una variante del problema original es la pregunta sobre que listas de n números reales pueden ser listas de autovalores de matrices no negativas de $n \times n$ y este es llamado el problema real inverso no negativo (RNIEP). Algunos resultados pueden ser vistos en [29, 30, 2].

Dentro de este texto, $\Sigma(A)$ denota el conjunto de autovalores de una matriz cuadrada A . Como es lo usual, la matriz identidad de orden n es denotada por I_n y si el orden de esta matriz es fácilmente deducido, lo denotaremos por I .

Como una matriz no negativa es real, su polinomio característico debe poseer coeficientes reales y luego $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) = \Sigma = \bar{\Sigma} = (\bar{\lambda}_0, \dots, \bar{\lambda}_{n-1})$, donde $\bar{\lambda}$ representa el conjugado complejo de $\lambda \in \mathbb{C}$. A seguir son enumeradas algunas condiciones necesarias sobre una lista de números complejos $\Sigma = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ para que esta sea el espectro de una matriz no negativa.

1. El autovalor de Perron $\max\{|\lambda| : \lambda \in \Sigma(A)\}$ pertenece a Σ .
2. La lista Σ es cerrada bajo conjugación compleja.
3. $s_k(\Sigma) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \geq 0$.
4. $s_k^m(\Sigma) \leq n^{m-1} s_{km}(\Sigma)$ for $k, m = 1, 2, \dots$

La primera condición en la lista anterior se sigue del teorema de Perron-Frobenius, el cual es un teorema importante en la teoría de las matrices no negativas [9, 12]. Para la segunda condición

ver [9], para la tercera condición ver [25] La última condición fue demostrada por Johnson en [5] e independientemente por Loewy y London [25]. Las condiciones necesarias fueron presentadas para el NIEP como condiciones suficientes solo cuando la lista Σ tiene a lo mas tres elementos. La solución para el NIEP fue también encontrada para listas con 4 elementos, mientras que el problema para 5 o mas elementos todavía sigue abierto.

Definición 1 [25] La lista Σ en (1) es denominada del tipo Suleïmanova si λ 's son números reales, $\lambda_1 > 0 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ y $s_1(\Sigma) \geq 0$.

Suleïmanova, [14] estableció que cada uno de tales espectros es realizable. Fiedler [20] probó que cada espectro Suleïmanova es simétricamente realizable (es decir es realizado por una matriz simétrica no negativa).

Friedland en [31] y Perfect en [13] probaron resultados sobre espectros Suleïmanova via matrices compañeras de ciertos polinomios. Recientemente, Paparella [23] dió una demostración constructiva para la realizabilidad de un espectro Suleïmanova. Además el definió matriz permutativa como sigue.

Definición 2 [23] Sea $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n$. Sean P_2, \dots, P_n matrices de permutación. Una matriz permutativa P es una matriz que tiene la forma:

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^T \\ (P_2\mathbf{x})^T \\ \vdots \\ (P_{n-1}\mathbf{x})^T \\ (P_n\mathbf{x})^T \end{pmatrix}.$$

Unas pocas observaciones con respecto a la historia de las matrices permutativas se ordenan como:

1. Rangos de las matrices permutativas fueron estudiados en Hu et al. [39]
2. El autor en [23] propuso el problema si todos los espectros realizables pueden ser realizados por una matriz permutativa o por sumas directas de matrices permutativas. Un problema equivalente comunicado por el autor R. Loewy es encontrar una matriz no negativa cuyo espectro no es realizado por una matriz permutativa, no negativa o por sumas directas de matrices permutativas. Loewy [24] resolvió este problema mostrando que la lista $\Sigma = \left(1, \frac{8}{25} + \frac{\sqrt{51}}{50}, \frac{8}{25} + \frac{\sqrt{51}}{50}, -\frac{4}{5}, -\frac{21}{25}\right)$ es realizable pero no puede ser realizado por una matriz permutativa o por suma directa de matrices permutativas.

El índice de Guo λ_0 de una lista, es el radio espectral (raíz de Perron para $A \geq 0$) mínimo tal que la lista (excepto por su radio espectral) unida a λ_0 es realizable.

El siguiente Teorema fue probado en [38], y la noción de índice de Guo index fue introducida formalmente.

Teorema 3 [38, Theorem 2.1] Sea $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ una lista de $n - 1$ números complejos cerrados bajo conjugación compleja, Entonces existe un número real λ_0 (llamado índice de Guo) donde

$$\max_{1 \leq j \leq n-1} |\lambda_j| \leq \lambda_0.$$

tal que la lista $(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ es realizable por una matriz no negativa de $n \times n$ A si y solo si $\lambda \geq \lambda_0$. Más aún, $\lambda_0 \leq 2n \max_{1 \leq j \leq n-1} |\lambda_j|$.

En este trabajo nos concentramos en determinar condiciones necesarias y suficientes para que ciertas listas sean el espectro de matrices g -circulantes específicas. Para ello, pedimos primeramente que n y g sean coprimos, donde n determina el tamaño de la matriz. Bajo estas condiciones encontramos listas que son el espectro de matrices g -circulantes y estas listas no son el espectro de su matriz circulante asociada, es decir, tienen la primera fila en común. Estos resultados se obtienen usando nociones básicas de Teoría de Números y Teoría de Grupos. En el tercer capítulo definimos formalmente las matrices g -circulantes y caracterizamos los autovalores de ciertas matrices en este conjunto. Se estudian ciertos casos en que las matrices g -circulantes pueden ser reconstruidas conociendo sus elementos diagonales. También se estudia el caso en que la matriz g -circulante no negativa se reconstruye a través de su raíz de Perron y de $n - 1$ elementos diagonales. En el capítulo 4 se obtienen condiciones suficientes para que una lista dada sea el espectro de una matriz g -circulante no negativa. Matrices g -circulantes, no negativas, con espectros dados son obtenidas. También se definen matrices g circulantes por bloques, se estudian sus espectros y se obtienen condiciones suficientes para que un conjunto dado sea el espectro de ciertas clases de matrices g -circulantes por bloques. Matrices g -circulantes por bloque, no negativas, con espectros dados son obtenidas.

Destacamos además que en 1.963 J. L. Branner en [16] estudia el espectro de matrices g -circulante, donde dichas matrices tienen entradas en un cuerpo K de característica un número primo p . Algunos resultados de Branner son similares a los nuestros. Sin embargo resultados posteriores son independiente a los de Branner, pues trabajamos sobre el cuerpo \mathbb{C} de los números complejos, que es de característica 0.

Notación y Terminología.

A^*	Transpuesta conjugada de la matriz A
A^k	k – ésima potencia de A
A_σ	Matriz asociada a σ , donde $\sigma \in S_n$.
S_n	Grupo de permutaciones de n elementos.
$\langle g \rangle$	Conjunto generado por g , i. e., $\langle g \rangle = \{g^n n \in \mathbb{Z}\}$.
$[x]$	Mayor entero que no excede a x , donde $x \in \mathbb{R}$
$a b$	a divide a b , siendo a, b números enteros.
$a \nmid b$	a no divide a b , siendo a, b números enteros.
$\bar{\lambda}$	Denota el conjugado complejo de λ , para todo $\lambda \in \Lambda$ y $\Lambda \subset \mathbb{C}$.
\bar{a}	Denota la clase residual módulo n si a es un número entero.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se introducen algunas estructuras algebraicas y resultados de álgebra que serán utilizados para el adecuado desarrollo del trabajo.

1.1. El conjunto $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ y su estructura algebraica.

Definición 4 Si $a, b, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$, decimos que a es congruente con b módulo n , si n divide $b - a$, si esto se tiene escribimos: $a \equiv b \pmod{n}$.

La siguiente proposición demuestra que la relación de congruencia módulo m es una relación de equivalencia y caracteriza a las clases de equivalencia

Proposición 5 [15]

1. $a \equiv a \pmod{n}$.
2. $a \equiv b \pmod{n}$ entonces $b \equiv a \pmod{n}$.
3. Si $a \equiv b \pmod{n}$ y $b \equiv c \pmod{n}$, entonces $a \equiv c \pmod{n}$.
4. Si $a \in \mathbb{Z}$, \bar{a} denota el conjunto de los enteros congruentes con a módulo n , $\bar{a} = \{m \in \mathbb{Z} : m \equiv a \pmod{n}\}$. En otras palabras \bar{a} es el conjunto de los enteros de la forma $a + kn$, donde $k \in \mathbb{Z}$. En algunos casos omitiremos la barra para a .

Definición 6 El conjunto \bar{a} es llamado la clase de congruencia módulo n de a .

Proposición 7 [15]

1. $\bar{a} = \bar{b}$ si y solo si $a \equiv b \pmod{n}$.
2. $\bar{a} \neq \bar{b}$ si y solo si $\bar{a} \cap \bar{b}$ es vacío.
3. Hay exactamente n clases de congruencia distintas módulo n .

A continuación definiremos la función ϕ de Euler, la cual jugará un importante papel en el desarrollo de la presente tesis.

Definición 8 [15] Sea G un grupo cualquiera. Se dice que G es un grupo cíclico si existe $g \in G$ tal que g es un generador del grupo, esto es $G = \langle g \rangle$.

Definición 9 [15] La función ϕ de Euler es definida para un entero positivo n por $\phi(n) = s$ si n posee s números enteros positivos menores o iguales a n que son primos relativos con n .

Definición 10 [15]

1. El conjunto de clases de congruencia módulo n es denotado por $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. El conjunto $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ es un conjunto completo con las n clases de congruencia módulo n , esto es $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$, donde $\bar{a}_i \neq \bar{a}_j$, con $i \neq j$. Entonces el conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ es llamado un conjunto completo de residuos módulo n .
3. Denotamos por $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \{a \in \mathbb{Z} : ax \equiv 1 \pmod{n}, \text{ tiene solución en } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$. Se deduce que, $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ es un grupo con la multiplicación de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ el cual posee $\phi(n)$ elementos.

Definición 11 [15] Un entero a es llamado una raíz primitiva módulo n , si \bar{a} genera el grupo $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Equivalentemente, a es una raíz primitiva módulo n si $\phi(n)$ es el entero positivo más pequeño tal que $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Teorema 12 [15] Sea $p \in \mathbb{Z}^+$, entero primo, entonces, $U(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ posee raíces primitivas, es decir, es un grupo cíclico que tiene $\phi(p) = p - 1$ elementos.

Teorema 13 [15] Si p es un primo impar y $l \in \mathbb{Z}^+$, entonces $U(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})$ es un grupo cíclico de orden $\phi(p^l) = (p - 1)p^{l-1}$.

1.2. Matrices de permutación.

Definición 14 Una permutación σ del conjunto $N = \{1, 2, \dots, n\}$, es una correspondencia biyectiva de N en si mismo. Incluyendo la correspondencia que asocia un elemento con si mismo (permutación identidad), hay $n!$ permutaciones, y se designa por S_n al conjunto de todas las permutaciones de N . Uno puede indicar una permutación por

$$\begin{aligned} \sigma(1) &= i_1 \\ \sigma(2) &= i_2 \\ &\vdots \\ \sigma(n) &= i_n \end{aligned}$$

que a menudo se escribe como

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

La permutación inversa para σ es designada por σ^{-1} . Así $\sigma^{-1}(i_k) = k$.

Definición 15 Sea E_j , designado como el vector (fila) unitario de n componentes que tiene un 1 en la j -ésima componente y 0's en las demás posiciones. Esto es:

$$E_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

Definición 16 Una matriz de permutación de orden n , se entiende como una matriz de la forma

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} E_{\sigma(1)} \\ E_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ E_{\sigma(n)} \end{pmatrix}.$$

asociada a la permutación σ , es decir,

$$P_\sigma = (p_{ij}) = \begin{cases} 1, & \text{si } j = \sigma(i), \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Notar que la i -ésima fila de P_σ tiene un 1 en la $\sigma(i)$ -ésima columna y 0's en las otras posiciones. La j -ésima columna de P_σ tiene un 1 en la $\sigma^{-1}(j)$ -ésima fila y 0's en las otras posiciones. Así cada fila y cada columna posee exactamente un 1.

Ejemplo 17 Sea σ dado por

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ luego}$$

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definición 18 [15] Una matriz de permutación P es una matriz de permutación primaria si la permutación asociada a esta no puede ser descompuesta en producto de ciclos disjuntos.

Teorema 19 [6]

1. Sea P_σ una matriz de permutación, de tamaño n , asociada a la permutación $\sigma \in S_n$. Sea además $A \in M_{n \times r}(\mathbb{C})$. Entonces

$$P_\sigma A = P_\sigma(a_{ij}) = (a_{\sigma(i),j}) \quad \text{con } 1 \leq i \leq n, \quad \text{y } 1 \leq j \leq r.$$

2. Si $B \in M_{rn}(\mathbb{C})$, entonces

$$BP_\sigma = (b_{ij})P_\sigma = (b_{i,\sigma^{-1}(j)}) \quad \text{con } 1 \leq i \leq n, \quad \text{y } 1 \leq j \leq r.$$

3. Sea $\sigma, \tau \in S_n$, y sea P_σ, P_τ sus matrices de permutaciones asociadas respectivamente. Entonces

$$P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\tau}$$

Donde el producto de las permutaciones σ, τ es aplicada de izquierda a derecha.

4. $(P_\sigma)^* = P_{\sigma^{-1}} = (P_\sigma)^{-1} = (P_\sigma)^T$.

5. Si $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, entonces

$$P_\sigma A P_\sigma^T = (a_{\sigma(i)\sigma(j)}),$$

en particular si $A = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, entonces

$$P_\sigma A P_\sigma^T = \text{diag}(d_{\sigma(1)}, \dots, d_{\sigma(n)}).$$

6. Sea $\nu \in S_n$ y P_ν su matriz de permutación asociada. Sea $\nu = \tilde{p}_1 \cdots \tilde{p}_m$, la descomposición de ν en ciclos disjuntos de longitudes $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$, respectivamente, donde $\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_m = n$. Entonces existe una matriz de permutación R tal que, $R P_\nu R^T = P_{\ell_1} \oplus \dots \oplus P_{\ell_m}$, donde P_{ℓ_j} , es una matriz de permutación primaria de orden $\ell_j \times \ell_j$, para $j = 1, 2, \dots, m$.

1.3. Matrices No Negativas

Una matriz $X = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ es llamada no negativa si $x_{ij} \geq 0$, $\forall 1 \leq i, j \leq n$ y ha de ser cogrediente con una matriz Y si existe una matriz de permutación Q tal que $X = Q^T Y Q$.

Definición 20 [12] Diremos que $X = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ es reducible (descomponible) si es no negativa y si además es cogrediente a una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

donde B y D son submatrices cuadradas. De otra forma A es llamada irreducible (indescomponible).

Teorema 21 [12] Una matriz de permutación de tamaño n , asociada a una permutación $\nu \in S_n$, donde ν tiene un solo ciclo, es irreducible.

Demostración. Sea $\nu = (i_1, \dots, i_n)$ un ciclo de longitud n asociado a Q y suponga que existe una matriz de permutación H tal que $H Q H^T$ sea de la forma en la Definición 20. Sea τ la permutación asociada a H y sea κ la permutación asociada con $H Q H^T$, luego se cumple que

$$\kappa = \tau \nu \tau^{-1}$$

además existe ℓ tal que $\kappa(i) \geq \ell \forall i \geq \ell$, pero esto último subdivide κ en dos ciclos. Lo que contradice el hecho que el número de ciclos en el que se subdivide una permutación se mantiene por una permutación conjugada de esta, [15]. ■

Definición 22 [12] El mayor autovalor de una matriz no negativa A es llamado autovalor maximal o raíz de Perron de A .

El autovalor maximal y el autovector asociado a este, de una matriz no negativa es identificado con el siguiente resultado.

Teorema 23 (Perron–Frobenius)[12] Si A es una matriz no negativa de $n \times n$, entonces A tiene un autovalor no negativo r que es al menos tan grande como el valor absoluto de cualquier autovalor de A y un autovector no negativo (es decir con coordenadas no negativas) correspondiendo a r .

Teorema 24 [12] El autovalor maximal de una matriz no negativa irreducible es una raíz simple de su polinomio característico.

Definición 25 [12] Sea A una matriz no negativa irreducible de $n \times n$ con autovalor maximal r y suponga que A tiene h autovalores de módulo r . El número h es llamado el índice de imprimitividad de A , o simplemente llamado el índice de A . Si $h = 1$, entonces A es llamada matriz primitiva; de otra forma es llamada imprimitiva (o cíclica como algunos autores la llaman).

Frobenius descubrió una sobresaliente conexión entre las propiedades espectrales de una matriz irreducible y su patron de ceros, esto es la distribución de sus entradas nulas.

Teorema 26 [12] Sea A una matriz irreducible con índice $h \geq 2$. Entonces A es cogrediente a una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & & \ddots & & \vdots \\ & & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & & A_{h-1,h} & \\ A_{h,1} & 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

donde los bloques nulos en la diagonal principal son submatrices cuadradas.

1.4. Matrices Circulantes

Definición 27 [6] Una matriz circulante de orden n o, abreviadamente, circulante, es una matriz cuadrada de la forma

$$C = \text{circ}(c_1, c_2, \dots, c_n) \tag{1.1}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_n & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_1 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Los elementos en cada fila de C son los mismos de la fila previa, pero se presentan trasladados cíclicamente en una posición hacia la derecha. Toda matriz circulante es, obviamente, determinada, por su primera fila.

Observación 28 Sea $C = \text{circ}(c_1, \dots, c_n) = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, entonces $c_{ij} = c_{j-i+1}$, tomando los subíndices módulo n .

Observación 29 Si $A = \text{circ}(a_1, \dots, a_n)$ y $B = \text{circ}(b_1, \dots, b_n)$, entonces

$$A + B = \text{circ}(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

y

$$\alpha A = \text{circ}(\alpha a_1, \dots, \alpha a_n),$$

para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Así, las matrices circulantes conforman un subespacio en el espacio vectorial sobre \mathbb{C} de las matrices de $n \times n$ con entradas complejas.

Sea $n \geq 3$ y consideremos matriz

$$P = \text{circ}(0, 1, 0, \dots, 0). \quad (1.3)$$

A continuación presentamos un importante resultado relacionado con las matrices circulantes y la matriz P .

Teorema 30 [6] Sea $C = \text{circ}(c_1, \dots, c_n)$ entonces

$$CP = PC. \quad (1.4)$$

Recíprocamente, si C es una matriz de $n \times n$ tal que la propiedad en (1.4) se tiene, entonces C es circulante.

Demostración. Sea $C = (c_{ij})$ una matriz con entradas complejas arbitrarias. Considerar el ciclo $\sigma = (1, 2, \dots, n)$. Luego

$$P_\sigma C P_\sigma^* = (c_{\sigma(i), \sigma(j)}) = (c_{i+1, j+1}). \quad (1.5)$$

El resultado se obtiene de observar que $P_\sigma = P$ y que evidentemente, se cumple que A es circulante si y solo si $a_{ij} = a_{i+1, j+1}$ donde todos los subíndices son considerados módulo n . Luego C es circulante si y solo si $PCP^* = C$ lo que equivale a (1.4). ■

Observación 31 Lo anterior, lo podemos expresar como sigue: las matrices circulantes son todas las matrices cuadradas que conmutan con P o equivalentemente son las matrices que son invariantes por la conjugación $A \rightarrow PAP^{-1}$.

Tomando la transconjugada (o conjugada transpuesta) en (1.4), vemos que se cumple lo siguiente.

Corolario 32 [6] C es circulante si y solo si C^* es circulante.

1.4.1. Una segunda representación para matrices circulantes

Sea P la matriz definida en (1.3). Observemos que para $k = 1, 2, \dots, n-1$

$$P^k = \text{circ}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

donde en la primera fila de P^k hay k ceros previos al 1, es decir el 1 ocupa la posición $k+1$. Así $P^1 = P$ y $P^n = I$, donde I es la matriz identidad de $n \times n$. Si consideramos las potencias de P también módulo n entonces $P^0 = P^n = I$. Notemos que P^0, P^1, \dots, P^{n-1} es un conjunto de n matrices linealmente independiente pues

$$c_1 P^0 + c_2 P + c_3 P^2 + \dots + c_n P^{n-1} = \text{circ}(c_1, c_2, \dots, c_n).$$

Sea

$$q(z) = c_1 + c_2 z + c_3 z^2 + \dots + c_n z^{n-1} \quad (1.6)$$

Teorema 33 [6] Una matriz C de $n \times n$ es circulante si y solo si $C = q(P)$, donde q es un polinomio como el definido en (1.6) y P es la matriz en (1.3).

Puesto que todos los polinomios en una misma matriz conmutan, de lo anterior se sigue que todas las matrices circulantes conmutan entre ellas. Más aún si C es circulante, entonces C^* también lo será, lo que unido a lo anterior, dice que si C es circulante entonces C es matriz normal.

Definición 34 [6] Diremos que una matriz L es izquierda circulante o (-1) -circulante si sus filas son obtenidas de la primera a través de traslaciones sucesivas a la izquierda en una posición.

Teorema 35 Una matriz L es (-1) -circulante si y solo si $L = PLP$.

Demostración. Sea $L = (l_{ij})$ una matriz con entradas complejas arbitrarias. Considerar el ciclo $\sigma = (1, 2, \dots, n)$. Luego $\sigma^{-1} = (1, n, n-1, \dots, 2)$ y

$$P_\sigma L P_\sigma = (c_{\sigma(i), \sigma^{-1}(j)}) = (l_{i+1, j-1}).$$

El resultado se obtiene de observar que $P_\sigma = P$ y que evidentemente, se cumple que L es (-1) -circulante si y solo si $l_{ij} = l_{i+1, j-1}$ donde todos los subíndices son considerados módulo n . Luego L es (-1) -circulante si y solo si $PLP = L$. ■

Proposición 36 Sean P , la matriz de permutación en (1.3) y $C = \text{circ}(c_1, c_2, \dots, c_n)$, entonces para cualquier entero m se cumple

$$P^m C = \text{circ}(c_{1-m}, c_{2-m}, \dots, c_{n-m}) \quad (1.7)$$

donde los subíndices son considerados módulo n .

Demostración. Sea P la matriz en (1.3), no es difícil ver que

$$\begin{aligned} PC &= \text{circ}(a_n, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \\ P^2 C &= \text{circ}(a_{n-1}, a_n, a_1, \dots, a_{n-2}) \\ &\vdots \\ P^m C &= \text{circ}(a_{n-m+1}, a_{n-m+2}, \dots, a_{n-m}). \end{aligned}$$

pasando los subíndices a sus clases de equivalencia módulo n , obtenemos la igualdad en (1.7). ■

Notación 37 Sea $g > 0$ y sea (n, g) el máximo común divisor entre n y g .

Proposición 38 Sea $(n, d) = 1$. C es una matriz circulante si y solo si conmuta con P^d . En particular si y solo si, conmuta con P^* .

Demostración. Si C es circulante por Teorema 30, C conmuta con P luego conmuta con cualquier potencia de esta, en particular, conmuta con P^d . Solo resta probar que si $P^d C = C P^d$, entonces C es circulante. Sea m un entero arbitrario, es claro que $(P^d)^m C = C (P^d)^m$. Por otro lado existen enteros m y k tales que $md + kn = 1$, de esto se deduce

$$\begin{aligned} PC &= P^{(md+kn)}C \\ &= (P^d)^m C \\ &= C (P^d)^m \\ &= C P^{(md+kn)} \\ &= CP. \end{aligned}$$

Así C conmuta con P , ahora usamos el Teorema en 30 para obtener que C es circulante. Por otro lado observemos que $P^* = P^{n-1}$ y claramente $(n-1, n) = 1$ por lo que el resultado se tiene considerando $d = n-1$. ■

1.5. Espectro de matrices circulantes

Notemos que la matriz $C = \text{circ}(c_1, c_2, \dots, c_n)$ en (1.1) está claramente determinada por su primera fila. Los siguientes conceptos pueden ser encontrados en [11]. Las entradas de la matriz unitaria llamada Transformada de Fourier Discreta (DFT) $F = (f_{pq})$ son dadas por

$$f_{pq} := \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{(p-1)(q-1)}, \quad p = 1, \dots, n, \quad q = 1, \dots, n, \quad (1.8)$$

donde

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}. \quad (1.9)$$

Los siguientes resultados caracterizan los espectros de matrices circulantes.

Teorema 39 [11, 22] Sea $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{C}^n$ y $C(\mathbf{c}) = \text{circ}(c_1, \dots, c_n)$. Entonces

$$C(\mathbf{c}) = F \Lambda(\mathbf{c}) F^*,$$

con

$$\Lambda(\mathbf{c}) = \text{diag}(\lambda_1(\mathbf{c}), \lambda_2(\mathbf{c}), \dots, \lambda_n(\mathbf{c}))$$

y

$$\lambda_k(\mathbf{c}) = \sum_{\ell=1}^n c_\ell \omega^{(k-1)(\ell-1)}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.10)$$

Corolario 40 Sea \mathbf{c} definido como en el Teorema 39 y considere

$$\eta := \eta(\mathbf{c}) = (\lambda_1(\mathbf{c}), \lambda_2(\mathbf{c}), \dots, \lambda_n(\mathbf{c}))^T.$$

Entonces,

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n \lambda_\ell \omega^{-(k-1)(\ell-1)}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.11)$$

Observación 41 Sea $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{C}^n$. Por el Corolario 40

$$\mathbf{c} = \frac{1}{\sqrt{n}} F^* \eta(\mathbf{c}) \quad \text{con} \quad \eta(\mathbf{c}) = \sqrt{n} F \mathbf{c}.$$

Observación 42 [22] Si $C(\mathbf{c})$ es una matriz circulante real, entonces $\lambda_1 \in \mathbb{R}$

$$\lambda_{n+1-k} = \bar{\lambda}_k \quad \text{para} \quad k = 1, \dots, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor,$$

donde $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ es el mayor entero que no excede a $\frac{n+1}{2}$.

Definición 43 [22] Un vector $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{C}^n$ es llamado vector par conjugado si $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ y

$$\lambda_{n+2-k} = \bar{\lambda}_k \quad j = 2, \dots, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor.$$

Observación 44 Si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{C}^n$ es el vector de autovalores de una matriz circulante real, entonces este es par conjugado.

Capítulo 2

Matrices g -circulantes

En este capítulo discutiremos una generalización de la noción de matriz circulante.

Definición 45 Una matriz g -circulante de orden n o simplemente un g -circulante es una matriz de la forma

$$A = g - \text{circ}(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (2.1)$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_{n-g+1} & a_{n-g+2} & a_{n-g+3} & \cdots & a_{n-g} \\ a_{n-2g+1} & a_{n-2g+2} & a_{n-2g+3} & \cdots & a_{n-2g} \\ \vdots & & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{g+1} & a_{g+2} & & \cdots & a_g \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Como es lo usual en matrices circulantes todos los subíndices son considerados módulo n .

Observación 46 [6] Si $0 < g < n$, cada fila de A es la fila previa desplazada g lugares cíclicamente hacia la derecha, o desplazada $n-g$ lugares cíclicamente hacia la izquierda. Si $g > n$ una traslación cíclica en g lugares es la misma que una traslación en g módulo n lugares. Por convención, si g es negativo, una traslación cíclica a la derecha en g lugares será equivalente a una traslación cíclica hacia la izquierda en $(-g)$ lugares. En consecuencia, si g y g' son equivalentes módulo n entonces una matriz g -circulante y otra g' -circulante con la misma primera fila, son iguales.

Ejemplo 47 Una matriz 2-circulante de orden 6 es de la forma.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 48 Una matriz 1-circulante es una matriz circulante de las ya estudiadas en la sección previa. Una matriz $(n-1)$ -circulante es una matriz (-1) -circulante.

Ejemplo 49 Una matriz 0-circulante es una matriz que tiene todas sus filas iguales a su primera fila.

Ejemplo 50 La matriz $J = \text{circ}(1, 1, \dots, 1)$ es una matriz g -circulante, para todo $g \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 51 La matriz $K = (-1)\text{-circ}(0, 0, \dots, 0, 1)$ es la matriz anti-identidad también llamada contra-identidad.

Observación 52 Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Entonces, evidentemente, A es g -circulante si y solo si

$$a_{ij} = a_{i+1, j+g}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Equivalentemente, si $A = (a_{ij}) = g\text{-circ}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ entonces

$$a_{ij} = a_{j-(i-1)g}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Lema 53 Sean n primo y $1 < g \leq n$. Una matriz de $n \times n$, g -circulante A es simétrica si y solo si $g = n - 1$.

Demostración. Si $A = (a_{ij}) = g\text{-circ}(a_1, \dots, a_n)$. Por observación previa $a_{ij} = a_{j-(i-1)g}, \forall i, j$ luego A es simétrica si y solo si $\forall 1 \leq i, j \leq n$,

$$\begin{aligned} a_{j-(i-1)g} &= a_{i-(j-1)g}, & \text{si y solo si} \\ j - (i-1)g &\equiv i - (j-1)g \pmod{n} & \text{si y solo si} \\ (j-i)(g+1) &\equiv 0 \pmod{n} & \text{si y solo si} \\ g &= n - 1. \end{aligned}$$

■

Sea $g > 0$ recordemos que (n, g) es el máximo común divisor entre n y g . Las matrices g -circulantes de orden n se particionan en dos tipos dependiendo de si $(n, g) = 1$ o de si $(n, g) > 1$. Los múltiplos $kg, k = 1, 2, \dots, n$, conforman un sistema completo residual si y solo si $(n, g) = 1$, luego todas las filas de una matriz g -circulantes son distintas si y solo si $(n, g) = 1$. En este caso las filas de las g -circulante pueden ser permutadas de forma de reobtener una matriz circulante clásica. Similarmente, para columnas. Luego si A es g -circulante, $(n, g) = 1$, entonces para matrices de permutación apropiadas, digamos P_1 y P_2

$$\begin{aligned} A &= P_1 C \\ A &= C P_2, \end{aligned}$$

en que en ambos casos C es matriz circulante. En el primer caso C posee la misma primera fila que A y en el segundo caso C posee la misma primera columna que A . Esto dice que una g -circulante de orden n con $(n, g) = 1$ es una circulante con una reordenación. Sin embargo, los detalles de la diagonalización y otros son considerables. Si $(n, g) > 1$, estamos frente a un caso degenerado donde naturalmente existen mas complicaciones.

Teorema 54 [6] Una matriz de $n \times n$, $A = (a_{ij})$ es g -circulante si y solo si

$$PA = AP^g,$$

donde P es la matriz definida en (1.3).

Demostración. Considerar el ciclo $\sigma = (1, 2, \dots, n)$, asociado a P por repetidas aplicaciones de la igualdad en (1.5) vemos que si

$$PA(P^g)^* = (\theta_{ij})$$

entonces

$$\begin{aligned}\theta_{ij} &= a_{\sigma(i), \sigma^g(j)} \\ &= a_{i+1, j+g}.\end{aligned}$$

Luego si A es g -circulante, por comparación de la entrada ij , obtenemos que $PA(P^g)^* = A$. Recíprocamente, si $PA(P^g)^* = A$, resultará que A es g -circulante. ■

Corolario 55 [6] Sea A y B matrices g -circulantes. Entonces AB^* es 1-circulante. En particular, si A es g -circulante, AA^* es 1-circulante.

Demostración. Por Teorema previo $A = P^*AP^g$ y $B = P^*BP^g$. Luego

$$\begin{aligned}AB^* &= (P^*AP^g)(P^*BP^g)^* \\ &= P^*AP^g(P^g)^*B^*P \\ &= P^*AB^*P.\end{aligned}$$

La conclusión se obtiene del Teorema 30. ■

Teorema 56 [6] Si A es g -circulante y B es h -circulante entonces AB es gh -circulante.

Demostración. Por la hipótesis se tiene que $PA = AP^g$ y $PB = BP^h$. Luego

$$\begin{aligned}PAB &= AP^gB \\ &= AP^{g-1}PB \\ &= AP^{g-1}BP^h \\ &= AP^{g-2}BP^{2h} \\ &= \dots = APBP^{(g-1)h} \\ &= ABP^{gh}\end{aligned}$$

La conclusión se obtiene del Teorema 54. ■

Lema 57 [15] Sean n y g enteros positivos entonces la ecuación $gx \equiv 1 \pmod{n}$ tiene solución si y solo si $(n, g) = 1$.

Notación 58 Si $(n, g) = 1$ designaremos la única solución de la ecuación $gx \equiv 1 \pmod{n}$ como g^{-1} .

Teorema 59 [6] Sea A no singular g -circulante. Entonces A^{-1} es g^{-1} -circulante.

Demostración. Puesto que A es no singular, se deduce que $(n, g) = 1$ (la matriz A no repite ninguna fila), luego por Lema 57 existe g^{-1} con $gx = 1 \pmod{n}$. Se tiene que $PA = AP^g$. Luego

$$A^{-1}P^{-1} = P^{-g}A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = P^{-g}A^{-1}P.$$

Luego

$$\begin{aligned} PA^{-1} &= P^{1-g}A^{-1}P \\ &= P^{1-g}(A^{-1}P^{-1})P^2 \\ &= P^{1-g}(PA)^{-1}P^2 \\ &= P^{1-g}(AP^g)^{-1}P^2 \\ &= P^{1-2g}A^{-1}P^2 \end{aligned}$$

Realizando esto s veces obtenemos

$$PA^{-1} = P^{1-sg}A^{-1}P^s$$

tomando $s = g^{-1}$, obtenemos

$$PA^{-1} = A^{-1}P^{g^{-1}}$$

lo que nos dice que A^{-1} es g^{-1} -circulante. ■

Ahora presentaremos una generalización de la representación en la Proposición 33. Para esto consideremos la matriz

$$Q_g = g - \text{cir}(1, 0, \dots, 0).$$

Note que Q_g es una matriz de permutación si y solo si $(n, g) = 1$.

Teorema 60 [6] Si $A = g - \text{cir}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, entonces

$$A = \sum_{k=1}^n a_k Q_g P^{k-1}. \quad (2.3)$$

Demostración. Consideremos la matriz circulante $C = \sum_{k=1}^n a_k P^{k-1}$. Al multiplicarla por la izquierda por Q_g las posiciones en C se trasladan cíclicamente g posiciones a la derecha formándose la matriz g -circulante cuya primera fila coincide con la primera fila de A , de lo que concluimos la igualdad en (2.3). ■

La demostración del siguiente corolario es clara.

Corolario 61 [6] A es g -circulante si y solo si A es de la forma $Q_g C$ donde C es una matriz circulante cuya primera fila coincide con la primera fila de A .

Definición 62 [6] Una matriz monomial es una matriz de la forma

$$M = P_\nu D \quad (2.4)$$

donde P_ν es una matriz de permutación asociada a $\nu \in S_n$ y D es una matriz diagonal

$$D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n).$$

Como

$$P_\nu D = (P_\nu D P_\nu^T) P = \tilde{D} P_\nu$$

donde $\tilde{D} = P_\nu D P_\nu^T$ y además

$$\tilde{D} = \text{diag}(d_{\nu(1)}, \dots, d_{\nu(n)}),$$

de lo que inmediatamente se sigue que una matriz $P_\nu D$ es una matriz DP_ν .

Proposición 63 Si M es como en (2.4), es posible calcular el polinomio característico asociado a M .

Demostración. Sea $\nu = \tilde{p}_1 \cdots \tilde{p}_m$ la descomposición de ν en ciclos disjuntos de longitud $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ y $\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_m = n$, entonces existe una matriz de permutación R tal que

$$P_\nu = R^* \text{diag}(P_{\ell_1}, P_{\ell_2}, \dots, P_{\ell_m}) R \quad (2.5)$$

donde P_{ℓ_i} es la matriz de permutación primaria de $\ell_i \times \ell_i$ con $i = 1, 2, \dots, m$.

Así

$$P_\nu D = R^* \text{diag}(P_{\ell_1}, P_{\ell_2}, \dots, P_{\ell_m}) (RDR^*) R \quad (2.6)$$

en consecuencia, el polinomio característico de $P_\nu D$ es también el de

$$S = \text{diag}(P_{\ell_1}, P_{\ell_2}, \dots, P_{\ell_m}) (RDR^*). \quad (2.7)$$

Sea $RDR^* = \text{diag}(\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots, \tilde{d}_n) = \text{diag}(\tilde{D}_{\ell_1}, \dots, \tilde{D}_{\ell_m})$, así que

$$S = \text{diag}(P_{\ell_1} \tilde{D}_{\ell_1}, \dots, P_{\ell_m} \tilde{D}_{\ell_m}).$$

Denotando

$$\tilde{D}_{\ell_k} = \text{diag}(\tilde{d}_{k,1}, \tilde{d}_{k,2}, \dots, \tilde{d}_{k,\ell_k}),$$

obtenemos que

$$S = \text{diag}(P_{\ell_1} \tilde{D}_{\ell_1}, \dots, P_{\ell_m} \tilde{D}_{\ell_m}),$$

esto nos dice que el polinomio característico de S es el producto de los polinomios asociados a $P_{\ell_1} \tilde{D}_{\ell_1}, \dots, P_{\ell_m} \tilde{D}_{\ell_m}$. Pero el polinomio característico de

$$P_{\ell_j} \tilde{D}_{\ell_j},$$

es

$$(-1)^{\ell_j} (\lambda^{\ell_j} - \tilde{d}_{j1} \tilde{d}_{j2} \cdots \tilde{d}_{j\ell_j}).$$

Por lo tanto, las raíces de $P_\nu D$, son las ℓ_j -ésimas raíces complejas.

$$(\tilde{d}_{j1} \cdots \tilde{d}_{j\ell_j})^{1/\ell_j}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

■

Observación 64 De la expresión de P_ν en (2.5) y la Observación 21 y el Teorema 24 es posible ver que ν tiene una descomposición en m ciclos disjuntos si y solo si la multiplicidad de 1 como autovalor de P_ν es igual a m .

Proposición 65 Sea $(n, g) = 1$. Entonces A es una matriz g -circulante si y solo si $A = F^* P_\tau^* D F$ donde D es matriz diagonal y P_τ es la matriz de permutación correspondiente a la permutación

$$\tau(j) = (1 + (j - 1)g) \pmod{n}$$

y F es la matriz de Fourier.

Demostración. Observar que $P_\tau = Q_g$. Recordemos que $F = \frac{1}{\sqrt{n}} (\omega^{(i-1)(j-1)})_{1 \leq i, j \leq n}$ es la matriz de Fourier, la cual es una matriz unitaria. Luego es suficiente probar que

$$F A = Q_{g^{-1}} D F.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} (Q_g)_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{si } j = (1 + (i - 1)g) \pmod{n} \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } i = (1 + (j - 1)g^{-1}) \pmod{n} \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \end{aligned}$$

Si A es g -circulante por Corolario 61, $A = Q_g C$ con C matriz circulante. Por Teorema $C = F^* D F$, así $A = Q_g F^* D F$. Si es posible probar que $F Q_g = Q_{g^{-1}} F$, deduciríamos que

$$A = F^* Q_{g^{-1}} D F$$

lo que probaría el resultado. Demostraremos que $F Q_g = Q_{g^{-1}} F$. La entrada ij del lado izquierdo es

$$\begin{aligned} (F Q_g)_{ij} &= \sum_{k=1}^n F_{ik} (Q_g)_{kj} \\ &= F_{i((1+(j-1)g^{-1}))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\omega^{(i-1)(j-1)g^{-1}} \right). \end{aligned}$$

Por otro lado la entrada ij del lado derecho es

$$\begin{aligned} (Q_{g^{-1}} F)_{ij} &= \sum_{k=1}^n (Q_{g^{-1}})_{ik} F_{kj} \\ &= F_{(1+(i-1)g^{-1})j} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\omega^{(i-1)(j-1)g^{-1}} \right). \end{aligned}$$

Lo que demuestra el resultado. ■

Ejemplo 66 Considerar matrices 2-circulantes, A y Q_2 y circulante C . Con

$$A = 2 - \text{circ}(1, 2, 3, 4, 5), \quad Q_2 = 2 - \text{circ}(1, 0, 0, 0, 0)$$

y $C = \text{circ}(1, 2, 3, 4, 5)$. Las siguientes computaciones son obtenidas utilizando MATLAB y los resultados son con una aproximación de 4 decimales. Por Corolario 61 se tiene que

$$A = Q_2 C.$$

El espectro de A es dado por

$$\Sigma(A) = \{15, \pm 3,3437, \pm 3,3437i\}$$

El espectro de C es

$$\Sigma(C) = \{15, -2,5 \pm 3,441i, -2,5 \pm 0,8123i\}.$$

Puesto que en $U(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ el inverso multiplicativo de 2 es 3 tenemos que

$$Q_2^{-1} = Q_3.$$

Entonces por Proposición 65 la matriz PD ,

$$S = Q_3 \text{diag}(15, -2,5 + 3,441i, -2,5 - 3,441i, -2,5 + 0,8123i, -2,5 - 0,8123i)$$

tendrá los mismos autovalores de A . Efectivamente, los autovalores de S , son

$$\Sigma(S) = \{-3,3437i, 3,3437, -3,3437, 3,3437i, 15\}.$$

Ejemplo 67 Consideremos matrices 3-circulantes A y Q_3 y circulante C . Con

$$A = 3 - \text{circ}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8),$$

$$Q_3 = 3 - \text{circ}(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \text{ y } C = \text{circ}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8).$$

Por Corolario 61

$$A = Q_3 C$$

Además sabemos que

$$C = F^* \Lambda F$$

donde F es la matriz de Fourier y

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \bar{\lambda}_4, \bar{\lambda}_3, \bar{\lambda}_2).$$

Sean matrices de permutaciones

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es fácil verificar que

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W \end{pmatrix}$$

y que

$$S = HWH^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Consideremos ahora matrices diagonales

$$\Upsilon = \text{diag}(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \bar{\lambda}_4, \bar{\lambda}_3, \bar{\lambda}_2)$$

y

$$\Phi = H\Upsilon H^* = \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda}_3 \end{pmatrix}.$$

Por lo que los autovalores de A son de la forma

$$\left\{ \lambda_1, \pm (\lambda_2 \lambda_4)^{\frac{1}{2}}, \lambda_5, \pm (\lambda_3 \bar{\lambda}_3)^{\frac{1}{2}}, \pm (\bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_4)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

2.1. Caracterización de los autovalores de ciertas matrices g -circulantes

En esta sección queremos determinar en forma precisa el espectro de ciertas matrices g -circulantes. Antes de proseguir es necesario dar la siguiente definición.

Definición 68 Decimos que una matriz de permutación de $n \times n$ es matriz de permutación primaria si y solo si la permutación asociada a dicha matriz es compuesta de solo un ciclo de longitud n .

Teorema 69 Sean n y g tales que $(n, g) = 1$. Sea \mathbf{W} una submatriz de orden $n - 1$ tal que

$$Q_g = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{pmatrix}.$$

Entonces \mathbf{W} es una matriz de permutación primaria si y solo si

$$n \nmid (g^{\ell_2} - g^{\ell_1}) \text{ con } 0 \leq \ell_1 < \ell_2 \leq n - 2, \quad (2.8)$$

Demostración. Primero es fácil observar que la permutación ν que define a Q_g es dada por

$$\nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 1+g & 1+2g & 1+3g & 1+4g & \dots & 1+(n-2)g & 1+(n-1)g \end{pmatrix}$$

Es decir, si $k \neq 1$,

$$k \rightarrow 1 + (k - 1)g \text{ con } 2 \leq k \leq n,$$

luego la submatriz \mathbf{W} es la matriz de una permutación tal que

$$2 = 1 + g^0 \rightarrow 1 + g \rightarrow 1 + g^2 \rightarrow 1 + g^3 \rightarrow \dots \rightarrow 1 + g^{n-2}.$$

Luego ν es una permutación con solo un ciclo si y solo si para $\ell_1 \neq \ell_2$:

$$1 + g^{\ell_1} \not\equiv 1 + g^{\ell_2} \pmod{n} \text{ con } 0 \leq \ell_1 < \ell_2 \leq n - 2$$

o equivalentemente, la condición en (2.8). ■

Teorema 70 Sean n y g tales que n es primo y $(n, g) = 1$. Sea \mathbf{W} una submatriz de orden $n - 1$ tal que

$$Q_g = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{pmatrix}.$$

Entonces \mathbf{W} es una matriz de permutación primaria si y solo si

$$n \nmid (g^\ell - 1) \text{ con } 1 \leq \ell \leq n - 2, \quad (2.9)$$

Demostración. De la condición en (2.8) \mathbf{W} es una matriz de permutación primaria si y solo si $n \nmid g^{\ell_1} (g^{\ell_2 - \ell_1} - 1)$ con $0 \leq \ell_1 < \ell_2 \leq n - 2$. Puesto que n es primo, $n \nmid g^{\ell_1}$ y $n \nmid (g^{\ell_2 - \ell_1} - 1)$. Del hecho que $n \nmid (g^{\ell_2 - \ell_1} - 1)$, la condición (2.8) es equivalente a la condición (2.9). ■

Corolario 71 Sean n y g tales que $(n, g) = 1$. Sea \mathbf{W} una submatriz de orden $n - 1$ tal que

$$Q_g = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{pmatrix}.$$

entonces \mathbf{W} es una matriz de permutación primaria si y solo si

$$g^\ell \not\equiv 1 \pmod{n} \text{ con } 1 \leq \ell \leq n - 2. \quad (2.10)$$

Demostración. De (2.8) tenemos que

$$g^{\ell_1} \not\equiv g^{\ell_2} \pmod{n} \text{ con } 0 \leq \ell_1 < \ell_2 \leq n-2$$

Puesto que g es invertible en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tenemos que g^{ℓ_1} también lo es, por lo tanto al multiplicar por el inverso de este último, obtenemos

$$g^{\ell_2 - \ell_1} \not\equiv 1 \pmod{n} \text{ con } 0 \leq \ell_1 < \ell_2 \leq n-2$$

la cual es claramente equivalente a la condición en (2.10) . ■

Ejemplo 72 Consideremos $(n, g) = (11, 7)$ entonces las congruencias módulo 11 de las potencias entre 1 y 9 ($= n-2$) de 7 son:

7	7 ²	7 ³	7 ⁴	7 ⁵	7 ⁶	7 ⁷	7 ⁸	7 ⁹
7	5	2	3	10	4	6	9	8

Luego la condición (2.10) para caso n primo se cumple, lo que nos dice que \mathbf{W} es primitiva. En efecto, acá

$$Q_7 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{pmatrix}.$$

donde

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de \mathbf{W} obtenidos con MATLAB con 4 decimales de aproximación son:

$$\Sigma(\mathbf{W}) = \{\pm 1,0000, -0,8090 \pm 0,5878i, -0,3090 \pm 0,9511i, 0,3090 \pm 0,9511i, 0,8090 \pm 0,5878i\}$$

La multiplicidad del autovalor 1 es 1 en \mathbf{W} por lo tanto \mathbf{W} es primaria.

Ejemplo 73 Consideremos $(n, g) = (7, 2)$ entonces las congruencias módulo 7 de las potencias entre 1 y 5 ($= n-2$) de 2 son:

2	2 ²	2 ³	2 ⁴	2 ⁵
1	4	1	2	4

Luego la condición (2.10) para caso n primo no se cumple lo que nos dice que \mathbf{W} no es primitiva. En efecto, acá

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de \mathbf{W} obtenidos con MATLAB con 4 decimales de aproximación son:

$$\Sigma(\mathbf{W}) = \{1,0000, 1,0000, -0,500 \pm 0,8660i, -0,500 \pm 0,8660i\}$$

La multiplicidad del autovalor 1 es 2 en \mathbf{W} por lo tanto \mathbf{W} no es definida por una permutación primaria.

Corolario 74 Sean n y g enteros tales que, n es primo y $(n, g) = 1$. Sea \mathbf{W} una submatriz de orden $n - 1$ tal que

$$Q_g = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{pmatrix}.$$

entonces \mathbf{W} es una matriz de permutación primaria si y solo si el subgrupo cíclico generado por g en $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ posee cardinalidad $n - 1$, es decir, si y solo si g es un generador cíclico de $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Demostración. Tenemos que \mathbf{W} es una matriz de permutación primaria si y solo si la condición en (2.10) se tiene si y solo si las potencias en $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

$$g^\ell, \quad \text{con } 0 \leq \ell \leq n - 2. \quad (2.11)$$

son distintas dos a dos y esto es si y solo si la condición en el enunciado, se tiene. ■

Corolario 75 Sean n y g enteros tales que, n es primo, $g < n$ y $(n, g) = 1$. Sea \mathbf{W} una submatriz de orden $n - 1$ tal que

$$Q_g = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{pmatrix}.$$

entonces \mathbf{W} es una matriz de permutación primaria si y solo si

$$\forall 1 \leq d < n - 1, \quad \text{tal que } d|(n - 1) \text{ se cumple, } g^d \neq 1 \pmod{n} \quad (2.12)$$

Demostración. Puesto que la cardinalidad de $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ es $n-1$, y la cardinalidad del subgrupo cíclico generado por $y \in U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ es un divisor d de $n-1$, si se cumple (2.12), la única posibilidad para el orden subgrupo cíclico generado por g es $n-1$ y por Corolario 74 la matriz \mathbf{W} es una matriz de permutación primaria. Recíprocamente si \mathbf{W} es una matriz de permutación primaria, por Corolario 75 se cumple que el subgrupo cíclico generado por $g \in U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ de orden $n-1$, probando así lo deseado. ■

Ejemplo 76 En el Ejemplo 72 se tiene que $n-1 = 10$ los divisores positivos de 10, estrictamente menores que 10 son 1, 2, 5, recordemos que $g = 7$ y ahora vemos que

$$\begin{aligned} 7^1 &= 7 \not\equiv 1 \pmod{11}, \\ 7^2 &= 5 \not\equiv 1 \pmod{11}, \\ 7^5 &= 10 \not\equiv 1 \pmod{11}. \end{aligned}$$

De esto se concluye que 7 es un generador cíclico de $U(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$.

Teorema 77 Sean n y g enteros, n es primo, $g < n$ y $(n, g) = 1$.

$$Q_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{W} \end{pmatrix},$$

siendo \mathbf{W} una submatriz de Q_g , primaria de $(n-1) \times (n-1)$. Sean A y C matrices de $n \times n$, g -circulante y circulante con entradas reales, respectivamente tales que

$$A = Q_g C,$$

entonces los autovalores de A son de la forma $\left\{ \lambda_1, \beta^{\frac{1}{n-1}} \lambda_1, \beta^{\frac{2}{n-1}} \lambda_1, \dots, \beta^{\frac{n-2}{n-1}} \lambda_1 \right\}$, donde $\varphi = \cos \frac{2\pi}{n-1} + i \sin \frac{2\pi}{n-1}$, donde $\beta = \left(|\lambda_2| |\lambda_3| \dots |\lambda_{\frac{n-1}{2}}| \right)^2$ con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\frac{n-1}{2}}$ siendo autovalores de C

Demostración. Puesto que \mathbf{W} es matriz primaria, es invertible con inversa \mathbf{W}^{-1} , además la matriz $(Q_g)^{-1}$ es dada por

$$(Q_g)^{-1} = Q_{g^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{W}^{-1} \end{pmatrix},$$

Luego por Proposiciones 63 y 65 los autovalores son las raíces $n-1$ del producto de los últimos $n-1$ autovalores de C . Luego, tomando en cuenta la Observación 42 para el caso A y C reales, caso n impar, los autovalores se presentan en pares conjugados y luego el producto de los $n-1$ autovalores es como el presentado en el enunciado. ■

Corolario 78 Sea n un entero primo y sean g_1 y g_2 dos generadores cíclicos de $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Sea C una matriz circulante de orden n y considere las siguientes dos matrices, A y B , g_1 -circulante y g_2 -circulante de orden n , respectivamente, $A = Q_{g_1} C$ y $B = Q_{g_2} C$. Entonces A y B poseen los mismos autovalores. En particular, si $g_2 = (g_1)^{-1}$, las matrices $Q_{g_1} C$ y $Q_{g_1^{-1}} C$ poseen los mismos autovalores.

2.2. Reconstruyendo ciertas matrices g -circulantes a través de sus elementos diagonales

En esta sección observamos que para ciertos n y g una matriz g -circulante es determinada completamente por sus elementos diagonales.

Observación 79 Observemos que el vector de los elementos diagonales de la matriz en (2.1) es el vector

$$\Upsilon(A) = (a_1, a_{n-g+2}, a_{n-2g+3}, \dots, a_{n-(\ell-1)g+\ell}, \dots, a_g)^T. \quad (2.13)$$

Notemos además que

$$a_1 = a_{n-0g+1} \text{ y } a_g = a_{n-(n-1)g+n}$$

Teorema 80 Sea n primo y sea $1 < g < n$ tal que $(n, g) = 1$, definamos

$$\Phi(A) = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \quad (2.14)$$

el vector primera fila de una matriz g -circulante A . Entonces

$$\Upsilon(A) = Q_{(n-g+1)} \Phi(A) \quad (2.15)$$

Demostración. Para los subíndices de los elementos diagonales de A , observemos que

$$(n - (k - 1)g + k) \equiv (n - (\ell - 1)g + \ell) \pmod{n} \text{ con } 1 \leq k < \ell \leq n$$

si y solo si

$$n \mid \ell - k \text{ o } n \mid g - 1$$

Lo primero no ocurre pues

$$\ell - k \leq n - 1 < n$$

y lo segundo no ocurre pues g es estrictamente menor que n . Así los elementos en la diagonal de la matriz g -circulante A en (2.1) son una permutación de la primera fila de A . Puesto que la diferencia módulo n entre dos subíndices consecutivos del vector en (2.13) es $1 - g$, obtenemos (2.15). ■

Observación 81 El teorema previo en esta sección nos dice que dados n primo y g tal que $(n, g) = 1$ y con las condición del Teorema 77 y n números $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ podemos construir una matriz g -circulante A cuya diagonal sean los elementos de \mathbf{b} . Más aún si en $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, una de las coordenadas no es conocida pero si lo es el mayor autovalor de A , digamos β_1 , todavía podemos construir una matriz g -circulante A cuya primera fila sean los elementos de \mathbf{b} y cuyo mayor autovalor sea β_1 , y esto es solo considerando que si n y g tienen las condiciones descritas, la traza de A coincide con β_1 lo que permite conocer el término desconocido de \mathbf{b} .

Ejemplo 82 Consideremos la matriz $A = 3 - \text{circ}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$. Se tiene entonces que la diagonal,

$$\Upsilon(A) = (1, 6, 4, 2, 7, 5, 3)^T,$$

además

$$Q_{1+(7-3)} = Q_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora vemos que

$$Q_5 \Phi(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \Upsilon(A).$$

Lo que comprueba la igualdad en (2.15). Concluimos, en este caso, que dados los elementos diagonales, la primera fila de la matriz g -circulante (y luego toda la matriz g -circulante) puede ser obtenida vía la relación en (2.15), pues la relación en (2.15) significa que

$$\Phi(A) = (Q_5)^{-1} \Upsilon(A).$$

Capítulo 3

Un problema inverso para matrices g -circulantes

En este capítulo nos centramos en encontrar condiciones suficientes para que una lista Λ sea el espectro de una matriz g -circulante con entradas no negativas.

Definición 83 [23] Una matriz cuadrada de orden n con $n \geq 2$ es llamada permutativa si todas sus filas son permutaciones de la primera fila.

Definición 84 [7] Sea $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ una n -upla cuyos elementos son permutaciones en el grupo simétrico S_n , con $\gamma_1 = id$. Sea $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Definir el vector fila,

$$\gamma_j(\mathbf{a}) = (a_{\gamma_j(1)}, \dots, a_{\gamma_j(n)})$$

y considerar la matriz

$$\gamma(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \gamma_1(\mathbf{a}) \\ \gamma_2(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \gamma_{n-1}(\mathbf{a}) \\ \gamma_n(\mathbf{a}) \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Una matriz de $n \times n$, A , es llamada γ -permutativa si $A = \gamma(\mathbf{a})$ para alguna n -upla \mathbf{a} .

Definición 85 [4, Definición 8] Si A y B son matrices γ -permutativas, donde γ es un vector común entonces ellas son llamadas permutativamente equivalentes.

Los espectros de ciertas clases de matrices permutativas fueron estudiados en [3, 4, 21]. En particular, resultados espectrales para matrices particionadas en bloques simétricos de 2×2 fueron presentados, usando estos resultados. Condiciones suficientes para que una lista dada sea la lista los autovalores de una matriz permutativa fueron obtenidas y las correspondientes matrices permutativas fueron construidas.

Este capítulo está estructurado en 4 secciones. En la primera sección se introducen los resultados principales para matrices en bloques circulantes. En la segunda sección obtendremos condiciones

suficientes para que una lista Λ sea el espectro de un clase de matrices g -circulantes las cuales son una clase de matrices permutativas. En la tercera sección resultados sobre matrices circulantes, g -circulantes y matrices en bloques son presentados. En la cuarta sección condiciones suficientes para que algunas listas sean realizadas por una clase de matrices permutativas son mostradas.

3.1. Matrices particionadas en bloques circulantes

La clase de matrices circulantes y sus propiedades fueron descritas en [6, 11].

Sea $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_p)^T \in \mathbb{C}^p$. Recordemos aquí la definición.

Definición 86 [6, 11] Una matriz circulante real es una matriz de la forma

$$\text{circ}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_p \\ a_p & a_1 & a_2 & \dots & a_{p-1} \\ a_{p-1} & a_p & a_1 & \dots & a_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$$

El espectro de matrices circulantes reales está también caracterizado en [6, 11]. En efecto, para $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_p)^T \in \mathbb{C}^n$ and $C(\mathbf{c}) = \text{circ}(c_1, \dots, c_p)$ entonces, $C(\mathbf{c}) = FD(\mathbf{c})F^*$, con

$$D(\mathbf{c}) = \text{diag}(\lambda_1(\mathbf{c}), \lambda_2(\mathbf{c}), \dots, \lambda_p(\mathbf{c})),$$

y

$$\lambda_k(\mathbf{c}) = \sum_{\ell=1}^p c_\ell \tau^{(k-1)(\ell-1)}, \quad 1 \leq k \leq p, \quad (3.2)$$

donde las entradas de la Transformada Discreta de Fourier, $F = (f_{k\ell})$ are:

$$f_{k\ell} = \frac{1}{\sqrt{p}} \tau^{(k-1)(\ell-1)}, \quad 1 \leq k, \ell \leq p, \quad (3.3)$$

con

$$\tau = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}. \quad (3.4)$$

Observación 87 Note que c_1, \dots, c_p son números reales si y solo si $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ y $\lambda_{n+2-k} = \bar{\lambda}_k$, $2 \leq k \leq p$.

Además si, \mathbf{c} es definida como anteriormente $\Lambda = \Lambda(\mathbf{c}) = (\lambda_1(\mathbf{c}), \lambda_2(\mathbf{c}), \dots, \lambda_p(\mathbf{c}))$ entonces,

$$c_k = \frac{1}{p} \sum_{\ell=1}^p \lambda_\ell \tau^{-(k-1)(\ell-1)}, \quad 1 \leq k \leq p-1. \quad (3.5)$$

En[7], utilizando un resultado de [17] para matrices particionadas en bloques y en bloques circulantes, fue presentado el siguiente resultado espectral.

Teorema 88 [7] Sea \mathbf{K} un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0 y suponga que $C = (C(i, j))$ es una matriz de $np \times np$ particionada en p^2 bloques circulantes de orde n , donde para $1 \leq i, j \leq p$,

$$C = (C(i, j))_{1 \leq i, j \leq p}, \quad C(i, j) = \text{circ}(\mathbf{c}(i, j)), \quad (3.6)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(i, j) &= (c_1(i, j), \dots, c_n(i, j)), \\ c_k(i, j) &\in \mathbf{K}, \quad 1 \leq i, j \leq p, \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\Sigma(C) = \bigcup_{k=1}^n \Sigma(S_k), \quad (3.7)$$

donde, si ω es como en (1.9), entonces $\forall 1 \leq k \leq n$,

$$S_k = (s_k(i, j))_{1 \leq i, j \leq p}, \quad s_k(i, j) = \sum_{\ell=1}^n c_\ell(i, j) \omega^{(k-1)(\ell-1)}. \quad (3.8)$$

El siguiente resultado es una consecuencia directa de (3.5).

Corolario 89 [7] Sea $\ell = 1, \dots, n$, y la matriz S_ℓ como la definida en (3.8). Sea ω la n -ésima raíz primitiva de la unidad. Considerar $c(u, v) := (c_1(u, v), \dots, c_n(u, v))^T$ y $C(u, v) = \text{circ}(c(u, v))$. Entonces,

$$\begin{pmatrix} c_k(1, 1) & c_k(1, 2) & \dots & c_k(1, p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_k(p, 1) & c_k(p, 2) & \dots & c_k(p, p) \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n S_\ell \omega^{-(k-1)(\ell-1)},$$

for $k = 1, \dots, n$.

Observación 90 [7] Como consecuencia de lo anterior, la matriz C en (3.6) es no negativa si y solo si para $k = 1, \dots, n$, la matriz

$$L_k := \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n S_\ell \omega^{-(k-1)(\ell-1)}, \quad (3.9)$$

donde ω es definido como en (1.9) es no negativa y en este caso la matriz S_1 es no negativa.

3.2. Construyendo matrices g -circulantes no negativas dado su espectro

En esta sección el siguiente problema es considerado

Problema 91 Sea $\beta_1 \in \mathbb{R}$ y $\beta_2 > 0$ números reales. Sea p un primo impar y sea g un generador cíclico de $U(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Sea

$$\varphi = \cos \frac{2\pi}{p-1} + i \sin \frac{2\pi}{p-1}. \quad (3.10)$$

Considerar la lista

$$\Sigma = (\beta_1, \beta_2, \beta_2\varphi, \beta_2\varphi^2, \dots, \beta_2\varphi^{p-2}). \quad (3.11)$$

Encontrar una matriz real, g -circulante A , cuyo conjunto de autovalores sean las componentes de Σ o de $\bar{\Sigma}$.

La respuesta a este problema es constructiva y es dada en el siguiente resultado.

Teorema 92 Sea $p > 2$ un entero primor. Suponga que g es un generador cíclico de $U(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Sea φ la raíz $p-1$ primitiva de la unidad definida en (3.10). Considerar la lista dada en (3.11) y definamos la lista auxiliar

$$\Sigma' = (\beta_1, \beta_2\tau, \beta_2\tau^2, \beta_2\tau^3, \dots, \beta_2\tau^{p-1})$$

donde $\tau = \exp \frac{2\pi i}{p}$, entonces si C es una matriz real circulante cuyos autovalores son las componentes de Σ' entonces $A = Q_g C$ es una matriz real g -circulante cuyos autovalores pueden ser ordenados como las componentes de Σ o de $\bar{\Sigma}$ en (3.11).

Demostración. Observemos primero que si

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) := (\beta_1, \beta_2\tau, \beta_2\tau^2, \beta_2\tau^3, \dots, \beta_2\tau^{p-1}), \quad (3.12)$$

entonces

$$|\lambda_1| |\lambda_2| \dots |\lambda_p| = \beta_1 \beta_2^{p-1} \Rightarrow |\lambda_2| \dots |\lambda_p| = \beta_2^{p-1}$$

implica

$$(|\lambda_2| \dots |\lambda_p|)^{\frac{1}{p-1}} = \beta_2.$$

Sean

$$C = \text{circ}(a_1, a_2, \dots, a_p),$$

y

$$A = Q_g C,$$

Luego por Teorema 77, la lista de autovalores de A es la dada en (3.11). ■

Observación 93 Observemos que la lista que se usa para definir la matriz circulante C en (3.12) es lista par conjugada [22] por lo que la matriz C es matriz con entradas reales. Ahora veremos como construir matrices g -circulantes no negativas.

Teorema 94 Sea p un entero primo y considere g como un generador cíclico de $U(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Si

$$\beta_1 \geq \beta_2 \geq 0. \quad (3.13)$$

entonces existe una matriz no negativa, g -circulante A de orden p tal que sus autovalores son los de la lista en (3.11).

Demostración. De acuerdo al teorema previo y utilizando las expresiones en (3.5), las entradas de la primera fila de la matriz circulante C son

$$c_j = \frac{1}{p} \left(\beta_1 + \sum_{u=2}^p \beta_2 \tau^{(u-1)\overline{\tau}^{(u-1)(j-1)}} \right) \quad \forall 1 \leq j \leq p, j \neq 2.$$

Puesto que para $j \neq 2$, $\sum_{u=2}^p \beta_2 \tau^{(u-1)\overline{\tau}^{(u-1)(j-1)}} = -\beta_2$, se sigue la primera parte del resultado. Para la segunda parte necesitamos observar que

$$pc_2 = \beta_1 + (p-1)\beta_2.$$

Luego, la condición (3.13) se cumple para la matriz C y luego A es no negativa. En consecuencia, A es una matriz g -circulante no negativa cuyo espectro está en (3.11). ■

Observación 95 Considerando $\beta_1 = \beta_2$ en el Teorema 3.13 la matriz g -circulante mencionada, no negativa, A es la matriz $g - \text{circ}(0, \frac{\beta_1 + (p-1)\beta_2}{p}, 0, \dots, 0)$.

Ejemplo 96 Considerar la lista con 7 elementos, $(6, 5, 5\varphi, 5\varphi^2, 5\varphi^3, 5\overline{\varphi}^2, 5\overline{\varphi})$, donde

$$\varphi = \cos \frac{2\pi}{6} + i \sin \frac{2\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}.$$

Queremos determinar una matriz 3-circulante, no negativa A cuyo espectro sea la lista dada. Para esto debemos considerar la lista

$$(6, 5\tau, 5\tau^2, 5\tau^3, 5\overline{\tau}^3, 5\overline{\tau}^2, 5\overline{\tau})$$

como la lista de autovalores de una matriz circulante C . Con $\tau = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$. Obtenemos con MATLAB que

$$C = \text{circ}(0,1429, 0,1429, 0,1429, 0,1429, 0,1429, 0,1429, 0,1429, 5,1429).$$

Sean $a = 0,1429$, y $b = 5,1429$. Nuevamente, usando MATLAB obtenemos la matriz 3-circulante

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a & a & a & b \\ a & a & b & a & a & a & a \\ a & a & a & a & a & b & a \\ a & b & a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & b & a & a \\ b & a & a & a & a & a & a \\ a & a & a & b & a & a & a \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores son

$$\Sigma(A) = \{6, \pm 5, 2, 5 \pm 4,33i, -2, 5 \pm 4,33i\}.$$

Observamos que solo el mayor autovalor no tiene módulo 5 y el -5 corresponde al elemento $5\varphi^3$ de la lista dada.

3.3. Matrices g -ciculantes por bloques

Definición 97 [7] Una matriz particionada en bloques es llamada matriz permutativa por bloques cuando sus bloques filas son permutaciones de la primera fila de bloques.

Teorema 98 [7] Sea C la matriz particionada en bloques definida en (3.6). Para $0 \leq k \leq n$ sea S_k la clase de matrices relacionadas a C definida en (3.8). La matriz C es permutativa por bloques si y solo si las matrices S_k son dos a dos permutativamente equivalentes.

Definición 99 Diremos que la matriz por bloques $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$ donde cada bloque A_{ij} es de $n \times n$ donde p número primo impar, es una matriz g -ciculante por bloques si $\forall 1 \leq i, j \leq p$, se cumple

$$A_{ij} = A_{i+1, j+g},$$

donde los doble-sub-índices son todos considerados módulo p . En este caso todos los bloques de A dependen de la primera fila de bloques, de modo de que si llamamos a estos bloques por A_1, A_2, \dots, A_p tendremos que

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_p \\ A_{p-g+1} & A_{p-g+2} & A_{p-g+3} & \dots & A_{p-g} \\ A_{p-2g+1} & A_{p-2g+2} & A_{p-2g+3} & \dots & A_{p-2g} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{g+1} & A_{g+2} & A_{g+3} & \dots & A_g \end{pmatrix}.$$

Denotaremos a A como

$$A = g - \text{circ}(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p).$$

Supondremos que la primera fila de bloques de A son p matrices ciculantes de $n \times n$ y escribimos

$$A_k = \text{circ}(a_1(k), a_2(k), \dots, a_n(k)), \quad 1 \leq k \leq p.$$

En [21] es mostrado que

$$\Sigma(A) = \bigcup_{k=1}^n \Sigma(S_k)$$

donde

$$S_k = g - \text{circ}(\lambda_k(A_1), \lambda_k(A_2), \dots, \lambda_k(A_p)), \quad \text{para } 1 \leq k \leq n.$$

Problema 100 Sea p un entero primo e impar y considere a g como un generador cíclico de $U(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Dado el conjunto

$$E = \bigcup_{k=1}^n \{\beta_{1k}, \beta_{2k}, \beta_{2k}\varphi, \beta_{2k}\varphi^2, \dots, \beta_{2k}\varphi^{p-2}\} \quad (3.14)$$

donde $\forall 1 \leq k \leq n, \beta_{1k} \in \mathbb{R}$ y $\beta_{2k} \geq 0$ con $\beta_{11} \geq \beta_{21} \geq 0$, esto es la unión de n espectros de matrices, g -ciculantes reales, S_k de orden p , siendo la matriz S_1 no negativa, encontrar una matriz real g -ciculante por bloques A tal que

$$\Sigma(A) = E.$$

El siguiente resultado presentará condiciones suficientes para obtener una matriz g -circulante por bloques, no negativa teniendo al conjunto E como su espectro.

Teorema 101 Sea p un entero primo impar y consider g como un generador cíclico de $U(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Para $1 \leq k \leq n$, considerar

$$\mathcal{B}_k = \{\beta_{1k}, \beta_{2k}, \beta_{2k}\varphi, \dots, \beta_{2k}\varphi^{p-2},\}$$

where $\forall 1 \leq k \leq n, \beta_{1k} \in \mathbb{R}$ y $\beta_{2k} \geq 0$ con $\beta_{11} \geq \beta_{21} \geq 0$. Let $\mathcal{B} = \cup \mathcal{B}_k$. Sean las matrices S_1, S_2, \dots, S_n , g -circulantes, reales, de orden p , tales que $\Sigma(S_k) = \mathcal{B}_k, \forall 1 \leq k \leq n$. Además suponga que

$$\forall 2 \leq k \leq n, \quad \mathcal{B}_{n+2-k} = \overline{\mathcal{B}_k}, \quad (3.15)$$

se cumple y que \mathcal{B}_1 verifica las condiciones del Teorema 94, y que

$$L_k = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n S_\ell \omega^{-(k-1)(\ell-1)} \geq 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n, \quad (3.16)$$

se cumple.

Entonces la unión en \mathcal{B} es el espectro de una matriz g -circulante por bloques, no negativa.

Demostración. Usando el Teorema 92, con los conjuntos dados \mathcal{B}_k se contruyen matrices g -circulantes, de $p \times p$, $S_k \forall 1 \leq k \leq n$. Siguiendo el Teorema 88, dichos conjuntos son los espectros de matrices g -circulantes $S_k \forall 1 \leq k \leq n$. Entonces construir matrices L_k como en (3.9), observemos que puesto que las matrices S_k son g -circulantes, ellas son equivalentemente permutativas y por lo tanto, también la matriz L_k será g -circulante. Notemos de la Observación 90 que se debe exigir que estas matrices L_k sean reales y para esto, se debe cumplir que

$$S_{n+2-k} = \overline{S_k} \quad \forall 2 \leq k \leq n.$$

Esto último se tiene de la igualdad en (3.15), además para que la matriz S_1 sea no negativa, el espectro \mathcal{B}_1 debe cumplir la condición del Teorema 94, lo que se tiene por hipótesis. En el caso de que todo se cumpla, para que la matriz g -circulante por bloques sea no negativa se debe cumplir que las matrices L_k en (3.9) sean no negativas. Lo que nos llevaría a obtener la condición (3.16).

Observación 102 Tomando en cuenta que $\forall 1 \leq k \leq n$

$$S_k = g - \text{circ}(\beta_{1k} - \beta_{2k}, \beta_{1k} + (p-1)\beta_{2k}, \beta_{1k} - \beta_{2k}, \dots, \beta_{1k} - \beta_{2k}).$$

Si denotamos por

$$L_k = g - \text{circ}(h_{1k}, h_{2k}, \dots, h_{pk}),$$

por la identidad en (3.16) obtenemos

$$\begin{pmatrix} h_{1k} \\ h_{2k} \\ h_{3k} \\ \vdots \\ h_{pk} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{pn} \begin{pmatrix} \beta_{11} - \beta_{21} & \beta_{12} - \beta_{22} & \beta_{13} - \beta_{23} & \cdots & \beta_{1n} - \beta_{2n} \\ \beta_{11} + (p-1)\beta_{21} & \beta_{12} + (p-1)\beta_{22} & \cdots & \cdots & \beta_{1n} + (p-1)\beta_{2n} \\ \beta_{11} - \beta_{21} & \beta_{12} - \beta_{22} & \beta_{13} - \beta_{23} & \cdots & \beta_{1n} - \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{11} - \beta_{21} & \beta_{12} - \beta_{22} & \beta_{13} - \beta_{23} & \cdots & \beta_{1n} - \beta_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{-(k-1)} \\ \omega^{-2(k-1)} \\ \vdots \\ \omega^{-(n-1)(k-1)} \end{pmatrix}$$

Denotemos por

$$M = \begin{pmatrix} \beta_{11} - \beta_{21} & \beta_{12} - \beta_{22} & \beta_{13} - \beta_{23} & \cdots & \beta_{1n} - \beta_{2n} \\ \beta_{11} + (p-1)\beta_{21} & \beta_{12} + (p-1)\beta_{22} & \cdots & \cdots & \beta_{1n} + (p-1)\beta_{2n} \\ \beta_{11} - \beta_{21} & \beta_{12} - \beta_{22} & \beta_{13} - \beta_{23} & \cdots & \beta_{1n} - \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{11} - \beta_{21} & \beta_{12} - \beta_{22} & \beta_{13} - \beta_{23} & \cdots & \beta_{1n} - \beta_{2n} \end{pmatrix}.$$

En consecuencia la condición

$$G = \frac{1}{p\sqrt{n}} MF^* \geq 0$$

es equivalente a la condición (3.16).

■

Conclusiones

1. *Esta tesis utiliza fuertemente la Teoría de Números para construir nuevas matrices reales tipo matrices circulantes reales y por lo tanto nuevos espectros.*
2. *Observemos del Teorema 77 que para n un entero primo y g un generador cíclico de $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, los espectros considerados no se pueden ordenar como listas de autovalores de una matriz circulante real, esto es, disponerlo como un vector par conjugado. Esto responde a la pregunta de si existen listas que son el espectro de matrices g -circulantes más no el espectro de su matriz circulante asociada.*
3. *Observar que para n un entero primo y g un generador cíclico de $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ la especial forma de los espectros g -circulantes permite dar condiciones suficientes a ciertas listas para reconstruir matrices no negativas con espectro dado. Ver por ejemplo, los Teoremas 92 y 101.*
4. *Para n un entero primo y g un generador cíclico de $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, las matrices g -circulantes, contrariamente a las matrices circulantes permiten la reconstrucción de toda la matriz a través de su raíz de Perron y de $n - 1$ elementos diagonales.*
5. *La caracterización en el Corolario 75 de una submatriz de permutación primaria es también un importante aporte de la presente Tesis.*
6. *Los ejemplos con MATLAB ilustran los resultados.*

Bibliografía

- [1] A. Brauer. *Limits for the characteristic roots of a matrix. IV. Applications to stochastic matrices*, *Duke Math. J.*, 19-1 (1952): 75-91.
- [2] C. Johnson, T. Laffey, R. Loewy, *The real and symmetric nonnegative inverse eigenvalue problems are different*, *Proc. Amer. Math Soc.*, 12, 124 (1996): 3647-3651.
- [3] C. Manzaneda, E. Andrade, M. Robbiano, *Realizable lists on a class of nonnegative matrices*, *Lin. Algebra Appl.* 551 (2018): 36-56.
- [4] C. Manzaneda, E. Andrade, M. Robbiano, *Realizable lists via the spectra of structured matrices*, *Lin. Algebra Appl.* 534 (2017): 51-72.
- [5] C. R. Johnson. *Row stochastic matrices similar to doubly stochastic matrices*, *Lin. and Multilin. Algebra* 2 (1981): 113-130.
- [6] Davies, P. J. *Circulant Matrices*. John Wiley Sons, New York, Chichester, Toronto 1979.
- [7] E. Andrade, C. Manzaneda, H. Nina, M. Robbiano. *Block matrices and Guo's Index for block circulant matrices with circulant blocks*, *Lin. Algebra Appl.* 556 (2018): 301-322.
- [8] E. Andrade, L. Arrieta, M. Robbiano, *On the spectra of g -circulant matrices and applications*. [arXiv.org/abs/1904.04172](https://arxiv.org/abs/1904.04172).
- [9] F. Zhang. *Matrix Theory. Basic Results and Techniques. Second Edition*. Springer. 2010.
- [10] G. W. Soules. *Constructing symmetric nonnegative matrices*, *Lin. and Multilin. Algebra* 13 3 (1983): 241-251.
- [11] H. Karner, J. Schneid, C. W. Ueberhuber, *Spectral decomposition of real circulant matrices*. *Lin. Algebra Appl.* 367 (2003): 301-311.
- [12] H. Minc, *Nonnegative Matrices*. Wiley, New York, 1988.
- [13] H. Perfect. *On positive stochastic matrices with real characteristic roots*, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 48 (1952): 271-276.
- [14] H. R. Suléïmanova. *Stochastic matrices with real characteristic numbers*, *Doklady, Akad. Nauk SSSR (N. S.)* 66 (1949): 343-345.

- [15] J. B. Fraleigh, V.J. Katz, *A first course in abstract algebra*. Addison-Wesley 2003.
- [16] J. L. Branner, *g-Circulant matrices over a field of prime characteristic*, *Illinois Journal Mathematics*, Volume 7, Issue 1(1963), 174-179.
- [17] J. Williamson, *The latent roots a matrix of special type*, *Bull. Am. Math. Soc.* 37, (1931): 585-590.
- [18] M. Boyle and D. Handelman, *The spectra of nonnegative matrices via symbolic dynamics*, *Ann.of Math.* 133: 249-316 (1991).
- [19] M.E. Meehan, *Some results on matrix spectra*, Ph.D. thesis, National University of Ireland, Dublin, 1998.
- [20] M. Fiedler, *Eigenvalues of nonnegative symmetric matrices*, *Lin. Algebra Appl.* 9 (1974): 119-142.
- [21] M. Robbiano, *Guo's index for some classes of matrices*. *Lin. Algebra Appl.* 564 (2019): 15-27.
- [22] O. Rojo, R. Soto, *Existence and construction of nonnegative matrices with complex spectrum*. *Lin. Algebra Appl.* 368 (2003): 5369.
- [23] P. Paparella, *Realizing Suleimanova-type spectra via permutative matrices*, *Electron. J. Linear Algebra*, 31 (2016): 306-312.
- [24] R. Loewy. *A note on the real nonnegative inverse eigenvalue problem*. *Electron. J. Linear Algebra*, 31 (2016): 765-773
- [25] R. Loewy, D. London. *A note on an inverse problem for nonnegative matrices*, *Lin. and Multilin. Algebra* 6, 1 (1978/79): 83-90.
- [26] R. Loewy, J. J. Mc Donald, *The symmetric nonnegative inverse eigenvalue problem for 5×5 matrices*, *Linear Algebra Appl.* 393 (2004): 275-298.
- [27] R. Soto. *A family of realizability criteria for the real and symmetric nonnegative inverse eigenvalue problem*. *Numerical Linear Algebra with Applications* 20, pp. 336-348, 2013.
- [28] R. Soto, O. Rojo, J. Moro, A. Barobia. *Symmetric nonnegative realization of spectra*. *Electronic Journal of Linear Algebra (ELA)* 16, pp. 1-18, 2007.
- [29] R. Soto, O. Rojo. *Applications of Brauer theorem in the nonnegative inverse eigenvalue problem*, *Linear Algebra and its Applications* 416, pp. 844-856, 2006.
- [30] R. Soto. *Permutative nonnegative matrices with prescribed spectrum*. *Electronic Journal of Linear Algebra* 32, pp. 380-390, 2017.
- [31] S. Friedland. *On an inverse problem for nonnegative and eventually nonnegative matrices*, *Israel T. Math.* 1 29 (1978): 43-60.

- [32] S. Guo, W. Guo, *Perturbing non-real eigenvalues of nonnegative real matrices*, *Linear Algebra and its Applications* 426 (2007) 199-203.
- [33] T. Laffey, *Extreme nonnegative matrices*, *Lin. Algebra Appl.* 275/276 (1998): 349-357. *Proceedings of the sixth conference of the international Linear Algebra Society (Chemnitz, 1996)*.
- [34] T. J. Laffey, H. vSmigoc, *Construction of nonnegative symmetric matrices with given spectrum*, *Linear Algebra Appl.* 421 (2007) 97-109.
- [35] T. J. Laffey, H. vSmigoc, *Nonnegative realization of spectra having negative real parts*, *Linear Algebra Appl.* 416 (2006) 148-159.
- [36] T. Laffey, H. vSmigoc, *Nonnegative realization of spectra having negative real parts*, *Linear Algebra Appl.*, 384 (2004) 199-206.
- [37] T. Laffey, *Realizing matrices in the nonnegative inverse eigenvalue problem*, *Matrices and group representations (Coimbra, 1998)*, *Textos Mat. Sér. B*, 19, Univ. Coimbra, Coimbra, (1999): 21-31.
- [38] W. Guo, *Eigenvalues of nonnegative matrix*, *Linear Algebra and its Applications* 266 (1997): 261-270.
- [39] X. Hu, C. R. Johnson, C. E. Davis, and Y. Zhang. *Ranks of permutative matrices*. *Spec. Matrices*, 4 (2016): 233-246.