



UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Matemáticas

DEDALES REALES EN FIBRACIONES DE LEFSCHETZ

Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias Mención Matemática

ALFREDO JOSÉ NISPERUZA MEZA

Profesor Tutor: Dra. Elizabeth Terezinha Gasparim

Antofagasta, Chile

2018

A Dios, por su gracia e infinita misericordia para conmigo.

Agradecimientos.

A Dios en primer lugar, ya que sin Él nada de esto sería posible; la vida y salud concedida por Él han permitido culminar este trabajo en forma satisfactoria. A mis padres y hermanos por haberme apoyado en todo momento; su constante motivación tienen eco hoy en mí, pero más que nada por su amor. A mi orientadora por su apoyo y paciencia en todo momento. A Jhessica por su apoyo en esta etapa. Finalmente a la Universidad Católica del Norte por el financiamiento durante mi permanencia en el programa de magister, especialmente gracias al departamento de matemáticas.

Tabla de contenido

Dedicatoria	II
Agradecimientos.	III
Resumen	VI
Introducción	1
1. Preliminares	4
1.1. Grupo de Lie y Álgebra de Lie.	4
1.2. Álgebras de Lie solubles, nilpotentes, simples y subálgebra de Cartan	8
1.3. El álgebra de Lie de un grupo de Lie.	12
1.4. Función Exponencial.	15
1.5. Representaciones de Grupos de Lie y de Álgebras de Lie.	17
1.5.1. Representación adjunta de álgebras de Lie.	20
1.5.2. Pesos de una representación.	22
1.6. Subálgebra de Cartan y forma de Cartan-Killing.	26
2. Variedades Simpléticas y Fibraciones de Lefschetz.	30
2.1. Variedades Simpléticas.	30
2.2. Fibraciones de Lefschetz Topológicas.	37
2.3. Fibraciones de Lefschetz Simpléticas.	45
2.4. Fibraciones de Lefschetz y orbitas adjuntas.	47

3. Métricas en grupos de Lie.	52
3.1. Estructura compleja.	53
3.2. Métrica Hermitiana y variedad de Kähler.	55
4. Dedales Lagrangeanos reales en fibraciones de Lefschetz.	59
4.0.1. Dedales Lagrangeanos reales.	59
Conclusiones	67
Bibliografía	68

Resumen

Encontrar subvariedades Lagrangeanas en variedades simplécticas es un tema de investigación de mucho interés y de carácter riguroso, de hecho, este tema encaja en la llamada teoría de cuantización geométrica.

En el siguiente trabajo empezamos mostrando conceptos generales de teoría de Lie y nos centramos de manera más precisa en el álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie de dimensión finita. Seguido a esto, definimos el concepto de variedad simpléctica y fibración de Lefschetz simpléctica; el primero es un concepto fundamental en nuestro trabajo, ya que nuestros objetos de estudio viven en variedades de este tipo. En un tercer momento, definimos algunas métricas en grupos de Lie. Es así como definimos la métrica Riemanniana, la métrica Hermitiana y el concepto de variedad de Kähler. Por último, utilizamos conceptos de la teoría de Lie para mostrar ejemplos concretos de fibraciones de Lefschetz simpléctica, bajo la escogencia de una forma Hermitiana adecuada y más importante aún, mostramos la existencia de subvariedades Lagrangeanas (dedales) en una variedad simpléctica general; los bordes de estos dedales resultan ser subvariedades Lagrangeanas de las fibras regulares (de una fibración de Lefschetz simpléctica) y estas subvariedades Lagrangeanas, vistas como subvariedades de las fibras regulares resultan ser homeomorfas a esferas. Para terminar, como aplicación de nuestro resultado, logramos describir dedales reales y ciclos evanescentes reales de las órbitas adjuntas de un álgebra de Lie semisimple compleja de dimensión finita.

Introducción

Una variedad n -dimensional es un objeto que se asemeja localmente al espacio euclidiano n -dimensional. Las diferentes categorías de variedades se pueden considerar simplemente requiriendo diferentes tipos de mapas para realizar estas identificaciones locales: una variedad puede ser suave (si se requiere que los mapas sean infinitamente diferenciables), o compleja (si n es par y los mapas son necesariamente holomorfos), o topológica (si los mapas son simplemente continuos).

Otra categoría dentro de este mundo de las variedades, es la categoría de las variedades simplécticas; a grandes rasgos, una variedad simpléctica es una dupla (M, ω) donde M es una variedad suave y ω es una 2-forma cerrada y no degenerada. Este tipo de variedades son muy interesantes entre otras cosas ya que estas se presentan naturalmente en la formulación hamiltoniana de la mecánica clásica, que proporciona una de las motivaciones principales para el estudio de ellas. Los ejemplos fundamentales de variedades simplécticas vienen dados por los fibrados cotangentes de variedades suaves; estos los encontramos en la mecánica clásica, donde el conjunto de todas las configuraciones posibles de un sistema se modela como variedad, y el fibrado cotangente de esta variedad describe el espacio de fase del sistema. Las variedades de Kähler son también variedades simplécticas. Ya en los años 70, los simplécticos no estaban seguros de si existía alguna variedad simpléctica compacta no kähleriana, pero muchos ejemplos se han construido desde entonces; en particular, Robert Gompf ha demostrado que cada grupo finitamente presentado aparece como el grupo fundamental de alguna 4-variedad simpléctica, en contraste marcado con el caso kähleriano.

Las variedades simplécticas (M, ω) tienen unas subvariedades distinguidas, V , llamadas subvariedades Lagrangeanas, que se caracterizan por tener la mitad de la dimensión total y porque la 2-forma ω se anula en V . Las subvariedades Lagrangeanas se han convertido en una herramienta indispensable para generalizar y comprender

geoméricamente resultados y procedimientos en el área de física matemática.

Describir subvariedades Lagrangeanas de variedades simplécticas, en general no es un trabajo sencillo y dada su complejidad, lograr describir alguno de estos objetos es de por sí un gran reto y se convierte en este sentido, en un trabajo novedoso en el área de la geometría simpléctica.

La idea de considerar una fibración de Lefschetz definida sobre una variedad suave M , de dimensión compleja n , sobre \mathbb{C} o \mathbb{P}^1 , obedece a que nos gustaría describir la variedad total, como una familia de subvariedades de dimensión $n - 1$. Entre otras cosas, este tipo de fibración resulta ser muy útil para nuestro propósito, debido a que los puntos críticos de una fibración de Lefschetz tienen una forma especial (son de tipo Morse). En nuestro caso consideraremos una fibración de Lefschetz simpléctica ya que deseamos describir subvariedades Lagrangeanas de variedades simplécticas. Lograremos describir Lagrangeanas en las fibras regulares de una fibración de Lefschetz simpléctica y Lagrangeanas en el espacio total de la fibración.

Como una aplicación de lo descrito anteriormente, podremos conocer parte de la geometría de las órbitas adjuntas de un álgebra de Lie de dimensión finita; de manera más precisa uno de los resultados principales de este trabajo es el hecho de que dada una fibración de Lefschetz definida sobre la órbita adjunta de un álgebra de Lie, con valores en \mathbb{C} y haciendo constante la parte imaginaria de la función que define la fibración, para cada punto crítico existen ciclos evanescentes reales y correspondientes reales. Esto, usando un resultado de la Dra. Elizabeth Gasparim en conjunto con el Dr. Luis San Martín y el Dr. Lino Grama, en el que logran dar a las órbitas adjuntas de un álgebra de Lie de dimensión finita estructura de variedad simpléctica y logran describir las órbitas por medio de una fibración de Lefschetz simpléctica. Lograr esto es lo novedoso de este trabajo.

En cuanto a antecedentes sobre resultados parecidos poco se tiene, entre otras cosas, el Teorema fundamental de la teoría de Picard-Lefschetz, dice que para una fibración

de Lefschetz sobre una variedad compacta, a cada singularidad corresponde un ciclo evanescente (topológico), pero el teorema no garantiza existencia de ciclos en el caso no compacto. Y las aplicaciones de nuestro trabajo estan en el caso no compacto.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se definirá el concepto de Grupo de Lie y álgebra de Lie, a su vez, se establecerá un hecho importante y es el que a cada grupo de Lie de dimensión finita se le asocia un álgebra de Lie que también resulta ser de dimensión finita. Para tal objetivo usaremos como referencia [SM99] y [War13].

1.1. Grupo de Lie y Álgebra de Lie.

Definición 1.1 *Un grupo de Lie G , es una variedad diferenciable que también está dotada de estructura de grupo, tal que la función $G \times G \mapsto G$ definida por $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ es C^∞ .*

En lo que sigue, G y H denotarán grupos de Lie, mientras que e denotará la identidad del grupo.

Observación 1.1 *De la anterior definición se tiene lo siguiente.*

- Si G es un grupo de Lie, la función $y \mapsto y^{-1}$ es C^∞ ya que es la composición de funciones C^∞ , es decir, $y \mapsto (e, y) \mapsto y^{-1}$. También, la función $(x, y) \mapsto xy$ de $G \times G \mapsto G$ es C^∞ , ya que es la composición de $(x, y) \mapsto (x, y^{-1}) \mapsto xy$.

- *El elemento identidad de un grupo de Lie G , forma el mismo un grupo de Lie; las componentes conexas de un grupo de Lie son mutuamente difeomorfas.*

Ejemplo 1.1 *Los siguientes son algunos ejemplos de grupos de Lie.*

- (a) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ es un grupo de Lie con la multiplicación usual de números complejos.
- (b) El círculo unitario, $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ (pensado como subgrupo cerrado de \mathbb{C}^*) es un grupo de Lie con la multiplicación inducida de \mathbb{C}^* .
- (c) El grupo $GL(n, \mathbb{C})$, de las matrices invertibles de $n \times n$ con el producto usual de matrices sobre \mathbb{C} .
- (d) El grupo $SL(n, \mathbb{C})$, de matrices complejas de $n \times n$ con determinante 1.
- (e) El grupo $O(n, \mathbb{R})$, de matrices de $n \times n$ ortogonales en \mathbb{R} , es decir, $A \in O(n, \mathbb{R})$ si y sólo si $AA^T = I$.
- (f) El grupo $SO(n, \mathbb{C})$, de matrices ortogonales con determinante 1, en \mathbb{C} .
- (g) El grupo $U(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} : \overline{A^T} A = I\}$.
- (h) El grupo $SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}$
- (i) El grupo $SP(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} : A^T J A = J\}$, donde $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$

Definición 1.2 *Sea \mathbb{K} un cuerpo. Un **álgebra de Lie** sobre \mathbb{K} es un \mathbb{K} -espacio vectorial \mathfrak{g} junto con una operación bilineal $[\ , \] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$, llamada corchete de Lie que satisface:*

- a) $[x, y] = -[y, x]$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$. (Antisimetría).
- b) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$. (Identidad de Jacobi).

En adelante consideraremos álgebras de Lie de dimensión finita. La importancia del concepto de álgebra de Lie en el contexto de los grupos de Lie, es que hay un álgebra de Lie de dimensión finita asociada a cada grupo de Lie de dimensión finita, y que las propiedades del grupo de Lie se reflejan en propiedades de su correspondiente álgebra. Si bien es cierto que la estructura global de un grupo de Lie no está totalmente determinada, en general, por su álgebra de Lie (varios grupos de Lie comparten la misma álgebra de Lie), podemos decir sin embargo que un grupo de Lie conexo es simple, semisimple, resoluble, nilpotente, o abeliano si y solamente si su álgebra de Lie tiene la propiedad correspondiente. Si requerimos que el grupo de Lie sea simplemente conexo, entonces la estructura global está determinada por su álgebra de Lie: para cada álgebra de Lie \mathfrak{g} finito dimensional sobre \mathbb{K} hay un único (salvo isomorfismo) grupo de Lie G simplemente conexo cuya álgebra de Lie es \mathfrak{g} (un teorema de Ado).

Definición 1.3 *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie. Una **subálgebra** de \mathfrak{g} es un subespacio vectorial \mathfrak{h} de \mathfrak{g} que es cerrado por el corchete, esto es, $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ si $X, Y \in \mathfrak{h}$.*

Evidentemente, una subálgebra de Lie es un álgebra de Lie con la estructura heredada por la estructura de \mathfrak{g} .

Ejemplo 1.2 *La mayoría de ejemplos que serán presentados aquí son de subálgebras de álgebra de Lie de transformaciones lineales. Por esto, presentamos como primer ejemplo el siguiente:*

a) $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$: *el espacio de todas las transformaciones lineales de un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo \mathbb{K} , que es lo mismo que el espacio de matrices de $n \times n$ con coeficientes en \mathbb{K} . El corchete es dado por*

$$[X, Y] = XY - YX$$

con X e Y matrices. Estas álgebras aparecerán adelante con frecuencia. Muchas veces serán denotadas por $\mathfrak{gl}(n)$ solamente, sin especificar el cuerpo, cuando

este no fuese relevante. De la misma forma, el álgebra de las transformaciones lineales de un espacio vectorial V será denotada por $\mathfrak{gl}(V)$.

Este ejemplo se extiende para espacios de transformaciones lineales de espacios vectoriales que no son de dimensión finita, con el corchete dado de la misma forma por el conmutador.

- b) El espacio vectorial de todos los campos de vectores tangentes sobre una variedad M (suave) forman un álgebra de Lie, donde el corchete de Lie es el corchete de campos de vectores.
- c) Cualquier espacio vectorial es un álgebra de Lie si todos los corchetes de Lie son iguales a cero. Tal álgebra de Lie es llamada abeliana.
- d) Sea \mathfrak{g} un álgebra asociativa, entonces \mathfrak{g} admite una estructura estandar de álgebra de Lie con el corchete definido por el conmutador $[x, y] = xy - yx$. Note que $[x, x] = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.
- e) $\mathfrak{so}(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : A + A^T = 0\}$, aquí $\mathfrak{so}(3) \subset \mathfrak{gl}(3)$.
- f) $\mathfrak{sl}(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \text{tr}(A) = 0\}$, aquí $\mathfrak{sl}(3) \subset \mathfrak{gl}(3)$.
- g) $\mathfrak{sp}(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : JA + A^T J = 0\}$.

Definición 1.4 Un subespacio $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ es un **ideal** si

$$\forall Y \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{g}, \quad [X, Y] \in \mathfrak{h}.$$

Es claro que todo ideal es subálgebra, pero el reciproco no es cierto. Por ejemplo, el subespacio de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ generado por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ es una subálgebra, por ser unidimensional. Pero no es un ideal, ya que

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observación 1.2 *De la definición de subálgebra e ideales, no es difícil mostrar que suma e intersección de ideales resulta ser un ideal, suma de subálgebra con ideal e intersección de subálgebra con ideal es una subálgebra, de igual forma se tiene que intersección de subálgebras es una subálgebra. En cuanto a la suma de subálgebras no siempre se tiene una subálgebra.*

1.2. Álgebras de Lie solubles, nilpotentes, simples y subálgebra de Cartan

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie, para $A, B \subset \mathfrak{g}$, se define $[A, B]$ como el subespacio generado por

$$\{[X, Y] : X \in A, Y \in B\}.$$

Se definen por inducción los siguientes subespacios de \mathfrak{g} :

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{(0)} &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}' &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^{(k)} &= [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]. \end{aligned}$$

Estos subespacios son ideales de \mathfrak{g} . Para comprobar esto, basta notar que si \mathfrak{i} y \mathfrak{j} son ideales de \mathfrak{g} entonces $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$ también es un ideal.

Esta secuencia de ideales es conocida como **série derivada** de \mathfrak{g} y sus componentes son las **álgebras derivadas** de \mathfrak{g} .

Ejemplo 1.3

1. \mathfrak{g} es abeliana si y sólo si $\mathfrak{g}' = 0$.

$$2. \mathfrak{g} = \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathfrak{g}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathfrak{g}'' = \{0\} \text{ y } \mathfrak{g}^{(k)} = \{0\} \text{ si } k \geq 2.$$

Una **série central descendente** de un álgebra de Lie \mathfrak{g} es definida, por inducción, como:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^1 &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^2 &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}' \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^k &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}]. \end{aligned}$$

Como el producto de ideales es un ideal, se sigue de la anterior definición que \mathfrak{g}^k es un ideal para todo $k \geq 1$. De aquí que $\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] \subset \mathfrak{g}^k$ y por tanto es una série central descendente, es decir

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^2 \supset \dots \supset \mathfrak{g}^k \supset \dots$$

Proposición 1.1

1. $[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] \subset \mathfrak{g}^{i+j}$.
2. \mathfrak{g}^k es un subespacio generado por todos los posibles productos (corchetes) envolviendo k elementos de \mathfrak{g} : $[X_1, \dots, [X_{k-1}, X_k] \dots]$.

Por ejemplo:

Producto de dos elementos: $[X, Y]$.

Producto de tres elementos: $[X, [Y, Z]]$.

Producto de cuatro elementos: $[[X, Y], [Z, W]]$ o $[X, [Y, [Z, W]]]$.

Definición 1.5 *Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es **soluble** si alguna de sus álgebras derivadas se anula, esto es,*

$$\mathfrak{g}^{(k_0)} = 0$$

para algún $k_0 \geq 1$ (y, por tanto, $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ para todo $k \geq k_0$).

Ejemplo 1.4

1. *Las álgebras abelianas son solubles, ya que para estas clases de álgebras $\mathfrak{g}' = 0$.*
2. *Las álgebras de matrices triangulares superiores son solubles.*
3. *Las álgebras $\mathfrak{sl}(n)$ no son solubles pues sus álgebras derivadas coinciden con ellas mismas.*
4. *Si \mathfrak{g} es soluble y $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ es subálgebra, entonces \mathfrak{h} también es soluble.*

Definición 1.6 *Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es **nilpotente** si su serie central descendente se anula en algún momento, esto es,*

$$\mathfrak{g}^{k_0} = \{0\}$$

para algún $k_0 \geq 1$ (y, por tanto, $\mathfrak{g}^k = 0$ para todo $k \geq k_0$).

Las álgebras abelianas son nilpotentes, en cambio las álgebras de matrices triangulares superiores no lo son.

Proposición 1.2 *Sean \mathfrak{g} un álgebra de Lie y $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}$ ideales solubles (esto es, solubles como álgebras de Lie). Entonces $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ también es un ideal soluble.*

Proposición 1.3 *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión finita. Entonces, existe en \mathfrak{g} un único ideal soluble $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ que contiene todos los ideales solubles de \mathfrak{g} .*

Definición 1.7 *El ideal \mathfrak{r} de la proposición anterior es llamado el **radical soluble** (o simplemente radical) de \mathfrak{g} . Se acostumbra a nombrar este ideal de \mathfrak{g} como $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$.*

Ejemplo 1.5

1. \mathfrak{g} es soluble si y sólo si $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.
2. El radical de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ es

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

Definición 1.8 Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es *semisimple* si

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0$$

esto es, \mathfrak{g} no contiene ideales solubles además de 0.

Definición 1.9 Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es *simple* si

1. Los únicos ideales de \mathfrak{g} son 0 y \mathfrak{g} .
2. $\dim \mathfrak{g} \neq 1$.

Ejemplo 1.6

1. $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ es simple.
2. En general, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ es simple si \mathbb{K} no es de característica 2.

Definición 1.10 Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie. Una *subálgebra de Cartan* de \mathfrak{g} es una subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ que satisface

1. \mathfrak{h} es nilpotente.
2. Si $[X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ entonces $X \in \mathfrak{h}$.

Ejemplo 1.7

1. para $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$,

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \right\}.$$

2. Si \mathfrak{g} es nilpotente, entonces su única subálgebra de Cartan es ella misma.

3. Toda álgebra de Lie \mathfrak{g} de dimensión finita posee subálgebras de Cartan.

1.3. El álgebra de Lie de un grupo de Lie.

Definición 1.11 Sea G un grupo de Lie y sea $x \in G$. Se definen las traslaciones a izquierda y a derecha como los difeomorfismos de G dados por:

$$\begin{aligned} L_x &: G \longrightarrow G \\ &y \mapsto xy \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} R_x &: G \longrightarrow G \\ &y \mapsto yx \end{aligned}$$

respectivamente.

Si G es un grupo de Lie y $x \in G$, la aplicación $L_x : G \mapsto G$ dada por $y \mapsto xy$ claramente es un difeomorfismo, ya que es la compuesta de funciones diferenciables, $y \mapsto (x, y) \mapsto xy$. De igual forma si $x, y \in G$, se verifica fácilmente que $L_x \circ L_y = L_{xy}$, $L_e = id$, $L_x^{-1} = L_{x^{-1}}$.

Sea G es un grupo de Lie y $X \in \mathfrak{X}(G)$ un campo de vectores (no necesariamente C^∞ a priori) en G . X se dice **invariante por traslación a izquierda**, si $dL_x \circ X =$

$X \circ L_x$, para todo $x \in G$, lo que es lo mismo, $dL_x(X_g) = X_{xg}$ para todo $x, g \in G$. Denotaremos por \mathfrak{g} el conjunto de dichos campos.

Observación 1.3 *De la forma en que acabamos de definir los campos de vectores invariantes a izquierda se puede ver facilmente que un campo de vectores X es invariante a izquierda si y sólo si $X_g = dL_g(X_e)$ para todo $g \in G$.*

Proposición 1.4 [War13] *Sea G un grupo de Lie y sea \mathfrak{g} el espacio vectorial de todos los campos de vectores invariantes a izquierda de G , entonces*

- a) \mathfrak{g} es un espacio vectorial real y $\mathfrak{g} \cong T_eG$ vía el isomorfismo $\mathfrak{g} \mapsto T_eG$ dado por $\alpha(X) = X_e$.
- b) Los campos de vectores invariantes a izquierda son diferenciables.
- c) El corchete de dos campos invariantes a izquierda es invariante a izquierda.
- d) \mathfrak{g} es un álgebra de Lie que identificamos con T_eG , el álgebra de Lie de G y con el corchete dado por $[X, Y] = XY - YX$.

Demostración.

- a) Es claro que \mathfrak{g} es un espacio vectorial real y que α es lineal; veamos que α es inyectiva. Supongamos que $\alpha(X) = \alpha(Y)$, entonces para cada $g \in G$, $dL_g(X(e)) = dL_g(Y(e))$, luego

$$X(g) = dL_g(X(e)) = dL_g(Y(e)) = Y(g)$$

Por tanto, $X = Y$.

Veamos que α es sobreyectiva. Sea $x \in T_eG$, definamos un campo de vectores invariantes a izquierda por $X(g) = dL_g(x)$ para cada $g \in G$, de esta manera se tiene que $\alpha(X) = x$. Observe que aquí se está usando la identificación $X(g) \equiv X_g$

- b) Veamos que los campos de vectores invariantes a izquierda son diferenciables. Es suficiente probar que para todo campo invariante X y toda $f \in C^\infty(G)$, $X(f)$ es C^∞ , para lo cual queremos ver que ésta se escribe como una composición de funciones C^∞ . En efecto, para cualquier $g \in G$

$$Xf(g) = X_g f = dL_g(X_e)f = X_e(f \circ L_g) \quad (*)$$

Por lo tanto, es suficiente demostrar que $(*)$ es C^∞ . El truco es tomar un campo C^∞ Y tal que $Y_e = X_e$ y reemplazar a X por Y en lo anterior. Definamos inclusiones C^∞ de $G \mapsto G \times G$ por

$$i_e^1(g) = (g, e) \quad \text{e} \quad i_\tau^2(g) = (\tau, g)$$

Finalmente, si m es la multiplicación en el grupo, veamos que $(*)$ coincide con la función $((0, Y)(f \circ m)) \circ i_e^1$ que es C^∞ por ser composición de funciones C^∞ . En lo siguiente, notemos que $(0, Y)$ es un campo C^∞ en $G \times G$, el primer paso es la evaluación de un campo en una función aplicada en el punto (g, e) y las n primeras derivadas parciales son cero:

$$\begin{aligned} ((0, Y)(f \circ m)) \circ i_e^1(g) &= (0, Y)_{(g,e)}(f \circ m) = 0_e(f \circ m \circ i_e^1) + Y_e(f \circ m \circ i_g^2) \\ &= Y_e(f \circ m \circ i_g^2) = X_e(f \circ m \circ i_g^2) = X_e(f \circ L_g) = (*). \end{aligned}$$

- c) Que el corchete de dos campos invariantes a izquierda sea un campo invariante a izquierda es consecuencia de el siguiente hecho más general: Sea $\phi : G \rightarrow H$ un difeomorfismo entre variedades diferenciables, sean X e Y campos de vectores en G entonces,

$$d\phi[X, Y] = [d\phi X, d\phi Y]$$

aplicado a $G = H$ ya que G es ungrupo de Lie, $\phi = L_g$ la traslación a izquierda por un $g \in G$ arbitrario.

- d) Consecuencia de los items anteriores.

□

Ejemplo 1.8 Como ejemplo particular del anterior teorema se tiene que si $G = SO(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : AA^T = I, \det A = 1\}$, entonces $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : A + A^T = 0\}$, de igual forma, si $G = SL(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \det A = 1\}$, entonces $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \text{tr}(A) = 0\}$.

Definición 1.12 Sea M una variedad y G un grupo de Lie. Una función C^∞ , $\mu : G \times M \rightarrow M$ tal que

$$\mu(g_1 g_2, x) = \mu(g_1, \mu(g_2, x)), \quad \mu(e, x) = x$$

para todo $g_1, g_2 \in G$ y $x \in M$ es llamada una **acción a izquierda** de G sobre M . Si $\mu : G \times M \rightarrow M$ es una acción de G en M , entonces para $g \in G$ fijo, la función $x \mapsto \mu(g, x)$ es un difeomorfismo, denotado μ_g .

Definición 1.13 Sea $\eta : G \times M \rightarrow M$ una acción de G en M , η se dice **transitiva**, si dados $x, y \in M$, existe $g \in G$ tal que $\eta(g, x) = y$.

Definición 1.14 Sea M una variedad y $x \in M$, el **subgrupo de isotropía** H_x de x es $H_x = \{g \in G : gx = x\} \subset G$.

Teorema 1.5 Sea $\eta : G \times M \rightarrow M$ una acción transitiva de un grupo de Lie G en una variedad M . Sea $x_0 \in M$ y sea H el grupo de isotropía en x_0 , entonces la aplicación $\beta : G/H \rightarrow M$ dada por $\beta(gH) = \eta(g, x_0)$ es un difeomorfismo, es decir, $G/H \cong M$. En este caso, decimos que M es una variedad homogénea (se puede escribir como el cociente de dos grupos).

1.4. Función Exponencial.

Definición 1.15 Un homomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$ es llamado un **subgrupo a 1-parámetro** de G .

Teorema 1.6 [War13] Sean G y H grupos de Lie con álgebras de Lie \mathfrak{g} y \mathfrak{h} respectivamente, con G simplemente conexo. Sea $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ un homomorfismo. Entonces existe un único homomorfismo $\varphi : G \rightarrow H$ tal que $d\varphi = \psi$.

Sea G un grupo de Lie, y sea \mathfrak{g} su respectiva álgebra. Sea $X \in \mathfrak{g}$. Entonces

$$\lambda \frac{d}{dr} \mapsto \lambda X$$

es un homomorfismo del álgebra de Lie \mathbb{R} sobre \mathfrak{g} . Como \mathbb{R} es simplemente conexo, existe, por Teorema 1.6, un único subgrupo a 1-parámetro

$$\mathbf{exp}_X : \mathbb{R} \rightarrow G$$

tal que

$$d\mathbf{exp}_X \left(\lambda \frac{d}{dr} \right) = \lambda X$$

En otras palabras, $t \mapsto \mathbf{exp}_X(t)$ es el único subgrupo a 1-parámetro de G donde el vector tangente en 0 es X_e .

Definición 1.16 Definimos la *función exponencial* como

$$\mathbf{exp} : \mathfrak{g} \rightarrow G$$

donde

$$\mathbf{exp}(X) = \mathbf{exp}_X(1)$$

Teorema 1.7 [War13] Sea G un grupo de Lie y \mathfrak{g} su respectiva álgebra de Lie. Sea $X \in \mathfrak{g}$, entonces

- a) $\mathbf{exp}(tX) = \mathbf{exp}_X(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- b) $\mathbf{exp}(t_1 + t_2)X = (\mathbf{exp} t_1 X)(\mathbf{exp} t_2 X)$ para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.
- c) $\mathbf{exp}(-tX) = (\mathbf{exp} tX)^{-1}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

- d) $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ es C^∞ y $d(\exp) : T_0\mathfrak{g} \longrightarrow T_eG$ es la función identidad (con la identificación usual), así \exp dá un difeomorfismo de una vecindad de 0 en \mathfrak{g} sobre una vecindad de e en G .
- e) $L_\sigma \circ \exp_X$ es la única curva integral de X que toma el valor de σ en 0. Como una consecuencia particular, los campos de vectores invariantes a izquierda son siempre completos.
- f) El grupo a 1-parámetro de difeomorfismos X_t asociado con el campo de vectores invariante a izquierda X es dado por

$$X_t = R_{\exp_X(t)},$$

donde $R_\sigma : G \longrightarrow G$ es tal que $R_\sigma(x) = x\sigma$, con $\sigma \in G$.

1.5. Representaciones de Grupos de Lie y de Álgebras de Lie.

Definición 1.17 Una transformación lineal $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ (con \mathfrak{g} y \mathfrak{g}' álgebras de Lie) es un

- a) Homomorfismo si $\psi[X, Y] = [\psi X, \psi Y]$.
- b) Isomorfismo si ψ es un homomorfismo invertible.
- c) Automorfismo si es un isomorfismo y $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$.

Se puede ver fácilmente que si $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ es un homomorfismo, entonces $\text{Ker}\psi$ es un ideal e $\text{Im}\psi$ es una subálgebra.

Definición 1.18 Sea G un grupo de Lie y V un espacio vectorial topológico localmente convexo. Una representación de G en V es un homomorfismo

$$\pi : G \longrightarrow GL(V)$$

que es continuo. En este caso decimos que (π, V) es una representación de G . Aquí $GL(V)$ denota las transformaciones lineales invertibles y continuas de V en V .

Ejemplo 1.9 Sea $G = S^1$, y sea

$$\begin{aligned} \pi : S^1 &\longrightarrow GL_2(\mathbb{C}) \\ \theta &\mapsto \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces (π, \mathbb{C}) es una representación de S^1 .

Ejemplo 1.10 Sea $G = SL_n(\mathbb{R})$ y consideremos la representación dada por asignar a cada elemento de G la transformación lineal que representa. Este representación es llamada la representación de definición de $G = SL_n(\mathbb{R})$.

Ejemplo 1.11 Sea $G = SL(n)$, $V = \mathfrak{sl}(n)$ y $Ad : SL(n) \longrightarrow \operatorname{Aut}(\mathfrak{sl}(n))$; donde $Ad(g) : \mathfrak{sl}(n) \longrightarrow \mathfrak{sl}(n)$ y esta dada por $Ad(g)(A) = gAg^{-1}$, entonces $(Ad, \mathfrak{sl}(n))$ es una representación de $SL(n)$. A esta representación la llamamos **representación adjunta** del grupo de Lie $SL(n)$.

Definición 1.19 Decimos que dos representaciones (π, V) , (σ, W) , son equivalentes si existe un isomorfismo de espacios vectoriales $T : V \longrightarrow W$ que conmuta con la acción del grupo, es decir el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\pi(g)} & V \\ \downarrow T & & \downarrow T \\ W & \xrightarrow{\sigma(g)} & W \end{array}$$

Definición 1.20 Sea (π, V) una representación de G . Decimos que $W \subset V$ es un espacio invariante si $\pi(g)W \subset W$ para todo $g \in G$.

Definición 1.21 Decimos que una representación (π, V) de G es irreducible si los únicos subespacios invariantes son $\{0\}$ y V .

Definición 1.22 Sea V un espacio vectorial y $\mathfrak{gl}(V)$ el álgebra de Lie de las transformaciones lineales de V . Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie (sobre el mismo cuerpo de escalares que V). Una representación de \mathfrak{g} en V es un homomorfismo

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V).$$

En la terminología usual, decimos que (ρ, V) es una representación de \mathfrak{g} y la imención de V es la dimensión de la representación. Una representación (ρ, V) se dice **fiel** si $\text{Ker}\rho = \{0\}$.

La noción de representación viene de la idea de describir (representar) las álgebras de Lie como álgebras de transformaciones lineales. En el caso de las representaciones fieles, $\mathfrak{g} \approx \text{Im}\rho$ y, por tanto, el álgebra puede ser vista como una subálgebra de transformaciones lineales (o matrices si su dimensión es finita). Esta idea de considerar álgebras de Lie como subálgebras de transformaciones lineales se hace, por lo menos a nivel teórico, para las álgebras de Lie de dimensión finita. Esto se debe a un resultado bastante conocido (**Teorema de Ado** ver [SM99]), el cual afirma que toda álgebra de Lie de dimensión finita admite una representación fiel también de dimensión finita.

Ejemplo 1.12

a) Sea $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ una subálgebra, la inclusión define, trivialmente, una representación de \mathfrak{g} en V denominada *representación canónica*.

b) La aplicación $\rho : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(3, \mathbb{K})$ dada por:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \longmapsto \begin{bmatrix} 2a & -2b & 0 \\ -c & 0 & b \\ 0 & 2c & -2a \end{bmatrix} \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{K})$$

es una representación de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$.

En efecto, consideremos la base $\{X, H, Y\}$ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ dada por

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se puede ver fácilmente que las constantes de estructura están dadas por:

$$\begin{aligned} [X, X] &= 0X + 0H + 0Y, & [X, H] &= -2X + 0H + 0Y, & [X, Y] &= 0X + 1H + 0Y, \\ [H, X] &= 2X + 0H + 0Y, & [H, H] &= 0X + 0H + 0Y, & [H, Y] &= 0X + 0H - 2Y, \\ [Y, X] &= 0X - 1H + 0Y, & [Y, H] &= 0X + 0H + 2Y & \text{y } [Y, Y] &= 0X + 0H + 0Y. \end{aligned}$$

Por tanto, si $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$, se tiene que

$$\rho(M) = \rho(bX + aH + cY) = b\rho(X) + a\rho(H) + c\rho(Y).$$

Dado que deseamos una representación de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$, las respectivas constantes de estructura, formarán las columnas de tres matrices (base de Imp), las cuales son:

$$\rho(X) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho(H) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y } \rho(Y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \rho\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}\right) &= \rho(M) = \rho(bX + aH + cY) = b\rho(X) + a\rho(H) + c\rho(Y) = \\ &= b \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & -2b & 0 \\ -c & 0 & b \\ 0 & 2c & -2a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.5.1. Representación adjunta de álgebras de Lie.

Definición 1.23 Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie, para todo $X \in \mathfrak{g}$, consideremos la transformación lineal

$$\text{ad}(X) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

definida por $ad(X)(Y) = [X, Y]$. La aplicación

$$ad : X \in \mathfrak{g} \mapsto ad(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

define una representación de \mathfrak{g} en \mathfrak{g} , denominada **representación adjunta** del álgebra \mathfrak{g} .

El hecho de ser lineal proviene de la bilinealidad del corchete. La propiedad de homomorfismo de ad es equivalente a la identidad de Jacobi. De hecho, la igualdad $ad([X, Y]) = ad(X)ad(Y) - ad(Y)ad(X)$ es la misma que

$$[[X, Y], Z] = [[X, Z], Y] + [X, [Y, Z]]$$

para todo $Z \in \mathfrak{g}$. Esta expresión es exactamente otra forma de la identidad de Jacobi. El kernel de la representación adjunta es denominado el centro de \mathfrak{g} y es denotado por $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$:

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : ad(X)(Y) = [X, Y] = 0 \text{ para todo } Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Esto es, el centro de un álgebra de Lie es el conjunto de sus elementos que conmutan con todos sus otros elementos. Evidentemente, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ es un ideal de \mathfrak{g} .

Ejemplo 1.13

- a) La representación adjunta de un álgebra abeliana \mathfrak{g} es trivial, es decir, para todo $X \in \mathfrak{g}$, $ad(X) = 0$.
- b) la representación del ejemplo 1.6, parte b) es la representación adjunta de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$; las matrices de $ad(X)$, $ad(H)$ y $ad(Y)$ en la base $\{X, H, Y\}$ son respectivamente,

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Concluimos esta primera parte definiendo un concepto de vital importancia para nuestro objetivo.

Definición 1.24 Sea G un grupo de Lie y \mathfrak{g} su respectiva álgebra de Lie. Consideremos la acción adjunta de G en \mathfrak{g} , la cual, como ya sabemos esta dada por

$$\begin{aligned} \text{Ad} &: G \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \\ (g, A) &\mapsto g^{-1}Ag \end{aligned}$$

si $H_0 \in \mathfrak{g}$, definimos y denotamos la **órbita adjunta** de H_0 , como el conjunto $\mathcal{O}(H_0) = \{g^{-1}H_0g : g \in G\}$.

1.5.2. Pesos de una representación.

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie. Una representación ρ de \mathfrak{g} en un espacio vectorial V es una **representación nilpotente** o una **nil-representación** si $\rho(X)$ es nilpotente para todo $X \in \mathfrak{g}$. Esto significa que, dado X , existe un entero positivo k (dependiendo de X) tal que $\rho(X)^k = 0$.

Un ejemplo de una nil-representación es la representación adjunta de un álgebra de Lie nilpotente.

Proposición 1.8 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $A \in \mathfrak{gl}(V)$. Suponga que A es nilpotente. Entonces, $\text{ad}(A)$ también es nilpotente. Por tanto, si $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ es una nil-representación, entonces $X \mapsto \text{ad}(\rho(X))$ también es una nil-representación.

Teorema 1.9 Sea $V \neq 0$ un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ una subálgebra. Suponga que todo $X \in \mathfrak{g}$ es nilpotente. Entonces, existe $v \in V$, $v \neq 0$ tal que $Xv = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Teorema 1.10 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ una subálgebra tal que todo $X \in \mathfrak{g}$ es nilpotente. Entonces, existen subespacios

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

tales que $XV_i \subset V_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$. Estos subespacios pueden ser definidos inductivamente por

$$V_0 = 0$$

$$V_i = \{v \in V : Xv \in V_{i-1} \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}\}$$

En particular, extendiendo sucesivamente las bases de los subespacios V_i , se llega a una base β de V tal que la matriz de X en relación a β es triangular superior con ceros en la diagonal para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Corolario 1.11 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ una subálgebra tal que todo $X \in \mathfrak{g}$ es nilpotente. Entonces, \mathfrak{g} es nilpotente. En particular, $\rho(\mathfrak{h})$ es una álgebra nilpotente si ρ es una nil-representación del álgebra \mathfrak{h} en V .

Corolario 1.12 Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión finita y suponga que \mathbf{ad} es una nil-representación. Entonces, una serie central ascendente satisface

$$0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$$

para algún n .

Teorema 1.13 [*Teorema de Engel*]. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión finita y suponga que para todo $X \in \mathfrak{g}$, $\mathbf{ad}(X)$ es nilpotente. Entonces, \mathfrak{g} es nilpotente.

Definición 1.25 Una aplicación lineal $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ es una derivación del álgebra de Lie \mathfrak{g} si satisface

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY] \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{g}$$

La representación adjunta es un ejemplo de una derivación. Se puede comprobar la regla de Leibniz usando la identidad de Jacobi, característica de las álgebras de Lie.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $A : V \rightarrow V$ una transformación lineal. El teorema de descomposición primaria descompone V en subespacios A -invariantes

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$$

donde

$$V_i = \{v \in V : p_i(A)^k v = 0 \text{ para algún } k \geq 1\}$$

donde los polinomios irreducibles p_i , $i = 1, \dots, s$ son las componentes primarias del polinomio minimal $p = p_1^{m_1} \dots p_s^{m_s}$ de A . En el caso en que el cuerpo de escalares es algebraicamente cerrado, $p_i(A) = A - \lambda_i$ con λ_i autovalor de A y los subespacios de la descomposición primaria se escriben como

$$V_i = \{v \in V : (A - \lambda_i)^k v = 0 \text{ para algún } k \geq 1\}.$$

Para enfatizar la relación de los subespacios con los autovalores de A , estos serán denotados por V_{λ_i} .

Proposición 1.14 *Suponga que el cuerpo de escalares es algebraicamente cerrado. Sean A y B transformaciones lineales de V y V_{λ_i} , como en lo anterior, los autoespacios generalizados de A . Entonces, $BV_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i}$ para todo i si y sólo si $\text{ad}(A)^q B = 0$ para algún $q \geq 1$.*

Teorema 1.15 *Suponga que el cuerpo de escalares es algebraicamente cerrado y tome una representación de \mathfrak{g} en V , con $\dim(V) < \infty$ y \mathfrak{g} nilpotente. Entonces existen funcionales lineales $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ tal que si*

$$V_{\lambda_i} = \{v \in V : \forall X \in \mathfrak{g}, \exists n \geq 1, (\rho(X) - \lambda_i(X))^n v = 0\},$$

entonces V_{λ_i} es \mathfrak{g} -invariante, para $i = 1, \dots, s$ y

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s}.$$

Definición 1.26 Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie y ρ una representación de \mathfrak{g} en V . Un peso de ρ es un funcional lineal $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ tal que los subespacios V_λ de V definidos por

$$V_\lambda = \{v \in V : \forall X \in \mathfrak{g}, \exists n \geq 1, (\rho(X) - \lambda(X))^n v = 0\}$$

satisfacen $V_\lambda \neq 0$. Los subespacios V_λ son llamados subespacios de pesos asociados a λ . La dimensión de V_λ es llamada la multiplicidad de λ .

Los pesos de una representación, son, por tanto, los autovalores de los elementos del álgebra.

Proposición 1.16 Sea ρ una representación de dimensión finita de \mathfrak{g} en V y suponga que existe $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $\rho(X) - \lambda(X)$ es nilpotente para todo $X \in \mathfrak{g}$. Entonces λ es lineal y $\tilde{\rho} = \rho - \lambda$ es una representación.

Teorema 1.17 Suponga que el cuerpo de escalares es algebraicamente cerrado y sea ρ una representación del álgebra nilpotente \mathfrak{g} sobre un espacio vectorial de dimensión finita V . Entonces, existe una base de V tal que en esa base ρ se escribe como

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} \rho_1(X) & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_s(X) \end{pmatrix} X \in \mathfrak{g}$$

con los bloques diagonales $\rho_i(X)$ de la forma

$$\rho_i(X) = \begin{pmatrix} \lambda_i(X) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i(X) \end{pmatrix} X \in \mathfrak{g},$$

donde λ_i es el peso de la representación.

La descomposición de Jordan de una derivación de una álgebra de Lie, se comporta bien en relación al producto de álgebras.

Proposición 1.18 *Sea $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ una derivación del álgebra de Lie \mathfrak{g} de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Tomando la descomposición primaria*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_m}$$

donde

$$\mathfrak{g}_{\lambda_i} = \{X \in \mathfrak{g} : (D - \lambda_i)^n X = 0 \text{ para algún } n \geq 1\}$$

es el autoespacio generalizado asociado al autovalor λ_i . Entonces,

$$[\mathfrak{g}_{\lambda_i}, \mathfrak{g}_{\lambda_j}] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j}.$$

($\mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j} = 0$ si $\lambda_i + \lambda_j$ no es autovalor de D).

1.6. Subálgebra de Cartan y forma de Cartan-Killing.

Dada una representación ρ de dimensión finita de un álgebra de Lie \mathfrak{g} , se define en \mathfrak{g} la forma traza β_ρ , que es una forma bilineal y simétrica dada por

$$\beta_\rho(X, Y) = \text{tr}(\rho(X)\rho(Y)).$$

Esta forma, juntamente con una forma cuadrática $\beta_\rho(X, X)$ asociada, desempeñan un papel central en la teoría de Lie, principalmente en el caso de las representaciones adjuntas.

Para las representaciones adjuntas la forma traza es denominada **forma de Cartan-Killing** del álgebra y será denotada de manera más simple por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Recordemos la definición de una subálgebra de Cartan.

Definición 1.27 *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie. Una subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} es una subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ que satisface*

1. \mathfrak{h} es nilpotente.
2. El normalizador de \mathfrak{h} en \mathfrak{g} coincide con \mathfrak{h} . Esta condición es equivalente a: si $[X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ entonces $X \in \mathfrak{h}$.

Una de las razones por las cuales se introduce la noción de subálgebra de Cartan es que este tipo de subálgebras es exactamente la que aparece como \mathfrak{g}_0 en la descomposición primaria de $ad(X)$ para X genérico (regular; término que definiremos más adelante) en \mathfrak{g} . Otra razón viene de la siguiente observación: el hecho de \mathfrak{h} ser nilpotente garantiza que su representación en \mathfrak{g} , vía la representación adjunta, se descompone en $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_{\lambda_i}$ con λ_i los pesos de la representación. El funcional nulo es siempre un peso de esa representación, pues la representación de \mathfrak{h} en sí misma es nilpotente. Además, \mathfrak{g}_0 es subálgebra y $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{h}$. La segunda condición en la definición de subálgebra de Cartan garantiza que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$.

En la terminología usual, los pesos no-nulos de la representación adjunta en \mathfrak{g} de una subálgebra de Cartan \mathfrak{h} son denominados **raíces**.

Definición 1.28 *El puesto de una álgebra de Lie de dimensión finita es el menor índice i en el que p_i no es idénticamente nulo, donde p_i denota los coeficientes de los polinomios característicos. Un elemento $X \in \mathfrak{g}$ se dice regular si $p_i(X) \neq 0$, donde i es el puesto de \mathfrak{g} .*

Ejemplo 1.14 *Sea $\mathfrak{sl}(2)$ con base canónica $\{X, H, Y\}$. Tomando $Z = aX + bH + cY$, la matriz de su adjunta en esa base es*

$$ad(Z) = \begin{bmatrix} 2b & -2a & 0 \\ -c & 0 & a \\ 0 & 2c & -2b \end{bmatrix}$$

y, por tanto, $p_Z(\lambda) = \lambda^3 - 4(b^2 + ac)\lambda$. De aquí que el puesto de $\mathfrak{sl}(2)$ es uno y Z es regular si y sólo si $b^2 + ac \neq 0$. En particular H es un elemento regular, mientras que X e Y no son regulares.

Teorema 1.19 Sea $X \in \mathfrak{g}$ y denotemos por $\mathfrak{g}_0(X)$ el autoespacio generalizado asociado al autovalor nulo en la descomposición primaria

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0(X) \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_k}$$

de $ad(X)$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalores no nulos. Entonces, $\mathfrak{g}_0(X)$ es subálgebra de Cartan si X es regular.

Corolario 1.20 Existen subálgebras de Cartan en álgebras de Lie de dimensión finita.

Teorema 1.21 Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión finita y $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ una subálgebra de Cartan. Entonces, existe un elemento regular $X \in \mathfrak{h}$.

Lema 1.22 Sea \mathfrak{h} una subálgebra de Cartan. Entonces, existe $X \in \mathfrak{h}$ tal que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$.

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie semi-simple (el único ideal soluble de \mathfrak{g} es el trivial) sobre \mathbb{K} y \mathfrak{h} una subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} . El álgebra se descompone como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_k}$$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ los pesos no-nulos de la representación adjunta de \mathfrak{h} en \mathfrak{g} . Siguiendo la notación anterior, esos pesos serán denominados raíces de \mathfrak{h} en relación de \mathfrak{g} y tal conjunto será denotado por Π . Los espacios \mathfrak{g}_{λ_i} serán denominados espacios de raíces.

Cuando el cuerpo es algebraicamente cerrado, la representación de \mathfrak{h} dentro de cada \mathfrak{g}_{λ_i} es dada por matrices de la forma

$$ad(H) = \begin{pmatrix} \lambda_i(H) & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i(H) \end{pmatrix}$$

para todo $H \in \mathfrak{h}$. Además,

$$[\mathfrak{g}_{\lambda_i}, \mathfrak{g}_{\lambda_j}] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j}.$$

La estructura de esta descomposición es descrita por los siguientes resultados.

Lema 1.23 Sean α y β dos pesos de \mathfrak{h} (raíces o el peso nulo) si $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ y $Y \in \mathfrak{g}_\beta$ entonces,

$$\langle X, Y \rangle = 0,$$

a menos que $\beta = -\alpha$.

Este lema junto al hecho de que la forma de Cartan-Killing es no degenerada, tiene las siguientes consecuencias

Corolario 1.24

1. La restricción de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a \mathfrak{h} es no degenerada.
2. Si α es una raíz, entonces $-\alpha$ también es raíz.
3. Para todo $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ existe $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $\langle X, Y \rangle \neq 0$

Proposición 1.25 Para todo $H \in \mathfrak{h}$ y todo peso α , $ad(H)|_{\mathfrak{g}_\alpha} = \alpha(H)id$ y las transformaciones lineales $ad(H), H \in \mathfrak{h}$ son simultáneamente diagonalizables.

Proposición 1.26 \mathfrak{h} es abeliana.

Proposición 1.27 El conjunto \prod de raíces genera el dual \mathfrak{h}^* de \mathfrak{h} , esto es $H = 0$ si $\beta(H) = 0$ para toda raíz β .

Capítulo 2

Variedades Simplécticas y Fibraciones de Lefschetz.

En este capítulo definiremos el concepto de variedades simplécticas al igual que el de fibraciones de Lefschetz, útiles para nuestra teoría debido a que nuestras fibraciones tendrán como espacio total variedades de este tipo y las fibras como tal serán variedades simplécticas. Así mismo, citaremos varios ejemplos de variedades simplécticas, algunos de ellos ya conocidos para muchos. Para tal propósito usaremos como referencia [Cal13].

2.1. Variedades Simplécticas.

En primer lugar veremos que las variedades simplécticas localmente pueden ser representadas por una forma canónica llamada coordenada de Darboux.

Teorema 2.1 *Sea Ω una forma antisimétrica en un espacio vectorial V . Entonces existe una base $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_k, e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ con respecto a la cual Ω tiene la*

matriz

$$\begin{bmatrix} 0_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & id_n \\ 0 & -id_n & 0 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n e^i \wedge f^i, \quad (2.1)$$

donde $\{e^1, \dots, e^n, f^1, \dots, f^n\}$ es la base dual para \mathcal{B} . Vamos a llamar \mathcal{B} la base estándar de una forma antisimétrica.

Corolario 2.2 Si V admite una forma antisimétrica no degenerada, entonces V tiene dimensión par.

Definición 2.1 Decimos que una forma antisimétrica Ω en V es una **forma simpléctica** si la función $\Omega : V \rightarrow V^*$, $v \mapsto \Omega(v, -)$ es biyectiva. Cualquier espacio vectorial que admita una forma simpléctica es llamado un **espacio vectorial simpléctico**. Denotamos a tal espacio como (V, Ω) .

Un isomorfismo lineal $\varphi : (V, \Omega) \rightarrow (V', \Omega')$ entre espacios vectoriales simplécticos es llamado un **simplectomorfismo** si este preserva la forma simpléctica, es decir, $\varphi^* \Omega' = \Omega$ (Por definición $(\varphi^* \Omega')(u, v) = \Omega'(\varphi(u), \varphi(v))$).

Observación 2.1 Puesto que la matriz de una forma simpléctica debe ser no singular se puede ver fácilmente a partir del Teorema 2.1 que cualquier espacio simpléctico es de dimensión par.

Definición 2.2 Un subespacio L de un espacio simpléctico V es llamado **Lagrangeano** si $\Omega|_L = 0$ y $\dim L = \frac{1}{2} \dim V$.

Definición 2.3 Una **forma simpléctica** ω sobre una variedad diferenciable M de dimensión $2n$, es una 2-forma diferencial cerrada que es simpléctica sobre cada espacio tangente. Una **variedad simpléctica** es una variedad suave M junto con una 2-forma ω , cerrada y no degenerada. Escribiremos (M, ω) para denotar tal variedad.

En otras palabras una variedad simplectica es un par (M, ω) donde ω es una 2-forma simpléctica y cerrada. En la definición anterior, no degenerada significa que para cualquier vector $u \neq 0$ en el espacio tangente en un punto, existe un vector v tal que $\omega(u, v) \neq 0$ y cerrada significa que la derivada exterior es idénticamente nula, es decir $d\omega = 0$.

Ejemplo 2.1 *El ejemplo más simple de una variedad simpléctica es $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, donde*

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$$

*para coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$. Esta forma se conoce como la **forma de Darboux**.*

Teorema 2.3 *Cualquier variedad compleja suave (M, J, g) admite estructura simpléctica si definimos la forma por $\omega(X, Y) = g(X, JY)$, donde g es la métrica de Fubini-Study y J la estructura compleja.*

Ejemplo 2.2 *Continuando con el ejemplo 2.1, podemos identificar \mathbb{C}^n con \mathbb{R}^{2n} y el pullback como la estructura simpléctica, esto hace de \mathbb{C}^n una variedad simpléctica. De hecho, en coordenadas complejas obtenemos la siguiente expresión para la forma simpléctica:*

$$\omega_0 = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i.$$

Además, ω_0 es compatible con la estructura compleja usual J y métrica hermitiana g en el sentido de que $\omega_0(X, Y) = g(X, JY)$, haciendo de \mathbb{C}^n una variedad de Kähler.

Ejemplo 2.3 *El espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}^n = \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ también admite una estructura simpléctica. Con la estructura compleja usual sobre \mathbb{P}^n , podemos usar la métrica de Fubini-Study g para definir la forma simplectica a través de $\omega(X, Y) = g(X, JY)$. La métrica de Fubini-Study puede definirse a través del siguiente fibrado, con fibra \mathbb{S}^1 .*

$$\begin{aligned} p & : \mathbb{S}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{P}^n \\ & z \mapsto [z] \end{aligned}$$

mediante la identificación del espacio tangente horizontal $\ker p_*$ con el espacio tangente de \mathbb{P}^n . Esto permite a la restricción de la métrica esférica (o métrica estandar) g_0 , en el espacio tangente horizontal, descender a una métrica g en \mathbb{P}^n , esto es, $g_0(X, Y) = g(p_*X, p_*Y)$ para cualquier par de vectores horizontales X, Y .

Para demostrar que esto define una métrica, debemos mostrar que:

- 1) \mathbb{S}^1 actúa en \mathbb{S}^{2n+1} por isometría,.
- 2) La acción satisface $p \circ g = p$ para todo $g \in \mathbb{S}^1$.
- 3) \mathbb{S}^1 actúa transitivamente sobre cada fibra.

El ítem 1 es claro, ya que $g_0(\lambda X, \lambda Y) = \lambda \bar{\lambda} g_0(X, Y) = g_0(X, Y)$ para $\lambda \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^1$. La relación de equivalencia definida sobre \mathbb{C}^{n+1} garantiza que el ítem 2 se satisface. La fibra sobre $[z_0, \dots, z_n]$ es dada por $\{\lambda(z_0, \dots, z_n) : \lambda \in \mathbb{S}^1\}$, la órbita de $(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{S}^{2n+1}$, mostrando así que el ítem 3 se satisface.

Lema 2.4 Sea ω una forma antisimétrica cerrada en una variedad suave M^{2m} , entonces (M^{2m}, ω) es una variedad simpléctica si y sólo si ω^m es una forma de volumen en M .

Demostración.

Por Teorema 2.1, una 2-forma ω puede escribirse localmente como

$$\sum_{i=1}^n e^i \wedge f^i,$$

para algún $n \leq m$. Si ω es no degenerada, entonces $n = m$ y el m -ésimo producto exterior es dado por

$$\omega^m = m! \bigwedge_{i=1}^m e^i \wedge f^i \neq 0$$

donde usamos el hecho de que $(e^i \wedge f^i) \wedge (e^j \wedge f^j) = (e^j \wedge f^j) \wedge (e^i \wedge f^i)$. Por lo tanto ω^m es una forma de volumen.

Recíprocamente, si ω es degenerada, entonces $n < m$ y el m -ésimo producto exterior es cero y así ω^m no es una forma de volumen.

□

Observación 2.2 *Dado que la existencia de una forma de volumen es equivalente a tener una orientación, ahora sabemos que cualquier variedad no orientable, como la banda de Möbius, no admite una estructura simpléctica.*

Definición 2.4 *Decimos que una función suave $\varphi : (M, \omega) \rightarrow (M', \omega')$ entre variedades simplécticas es un **simplectomorfismo** si esta preserva la forma simpléctica, es decir, $\varphi^*\omega' = \omega$.*

Teorema 2.5 [Sistema de Darboux.] *Sea (M, ω) una variedad simpléctica y suave de dimensión $2n$ y $p \in M$. Entonces existe un sistema de coordenadas local $(U, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ tal que*

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$$

sobre U . Tal sistema de coordenadas es llamado un sistema de Darboux.

Proposición 2.6 *La esfera \mathbb{S}^n admite una estructura simpléctica solo para $n = 2$.*

Demostración.

Podemos excluir de inmediato todas las esferas de dimensión impar, por la observación 2.1. Sea $n = 2k$ para $k > 1$ y supongamos por contradicción que ω es una forma simpléctica sobre \mathbb{S}^{2k} . Si ω^k fuese exacta, digamos $d\alpha = \omega^k$, entonces por el teorema de Stokes se tendría

$$0 \neq \int_{\mathbb{S}^{2k}} \omega^k = \int_{\partial \mathbb{S}^{2k}} \alpha = 0,$$

lo cual es una contradicción. Así, ω^k no es exacta y define un elemento no cero $0 \neq [\omega^k] \in H^n(\mathbb{S}^{2k}, \mathbb{R})$. Esto implica que $0 \neq [\omega] \in H^2(\mathbb{S}^{2k}, \mathbb{R})$, que puede ser

visto considerando el producto cohomológico o por cálculo directo: $\omega^k = (d\alpha)^k = d(\alpha \wedge (d\alpha)^{k-1})$. Pero

$$H_{dR}^k(\mathbb{S}^{2k}; \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k > 1 \end{cases},$$

que es una contradicción si $k > 1$.

La estructura simpléctica sobre \mathbb{S}^2 es dada tirando hacia atrás la estructura simpléctica de \mathbb{P}^1 usando la identificación suave de \mathbb{S}^2 con \mathbb{P}^1 .

□

Teorema 2.7 *Dada cualquier variedad suave X , La variedad cotangente asociada, T^*X es una variedad simpléctica.*

Demostración.

Sea $p = (x, \xi) \in T^*X$ y definamos la 1-forma tautológica $\alpha_p = (\pi^*\xi)_p$, donde $\pi : T^*X \rightarrow X$ es la proyección natural. Definamos ahora la 2-forma simpléctica canónica $\omega = -d\alpha$.

Para ver que esto realmente define una forma simpléctica, la escribimos en un sistema de coordenadas local $(\pi^{-1}(U), x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$. Primero $\alpha_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \xi_x \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \xi_i$, por tanto

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i \tag{2.2}$$

en $\pi^{-1}(U)$. Ahora se sigue que

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\xi_i \tag{2.3}$$

que es la ω_0 del ejemplo 2.1.

□

Definición 2.5 *Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Decimos que una subvariedad $i : L \rightarrow M$ es una **subvariedad Lagrangeana** si $i^*\omega \equiv 0$ y $\dim L = \frac{1}{2} \dim M$.*

Teorema 2.8 *Sea μ una 1-forma sobre una variedad suave X . Entonces*

$$X_\mu = \{(x, \mu_x) : x \in X, \mu_x \in T_x^*X\}$$

*es una subvariedad Lagrangeana de T^*X si y sólo si μ es una forma cerrada.*

Demostración.

En primer lugar, X_μ es una subvariedad embebida de T^*X , puesto que es la imagen de la sección μ . Sea $s_\mu : X \rightarrow T^*X$ este embebimiento, esto es, la 1-forma μ considerada como una función. Entonces

$$\begin{aligned} (s_\mu^* \alpha)_x &= (ds_\mu)_x^* \alpha_p \\ &= (ds_\mu)_x^* (d\pi)_p^* \mu_x \\ &= (\pi s)_x^* \mu_x \\ &= \mu_x. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Ahora, sea $\tau : X \rightarrow X_\mu$ el difeomorfismo que hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s_\mu} & T^*X \\ \downarrow \tau & \nearrow i & \\ X_\mu & & \end{array}$$

donde $i : X_\mu \rightarrow T^*X$ es la inclusión. Por definición, X_μ es una subvariedad Lagrangeana si y sólo si $i^*d\alpha = 0$, lo que ocurre si y sólo si $\tau^*i^*d\alpha = 0$, ya que τ es un difeomorfismo. Ahora, $\tau^*i^*d\alpha = (i\tau)^*d\alpha = s_\mu^*d\alpha = d(s_\mu^*\alpha) = d\mu$, donde la última igualdad se deduce de la ecuación (2.4).

□

Teorema 2.9 *Sea Z una subvariedad suave, de una variedad suave X . Entonces el fibrado conormal N^*Z es una subvariedad Lagrangeana de T^*X .*

Demostración.

Para la inclusión $i : N^*Z \rightarrow T^*X$, debemos mostrar que $i^*\omega = 0$. Para esto,

es suficiente mostrar que $i^*\alpha = 0$. Para esto fin, sea (U, x_1, \dots, x_n) el sistema de coordenadas local, alrededor de $x \in Z$ adaptado a Z , esto es, $x_{k+1}, \dots, x_n = 0$ sobre Z . Así $N^*Z \cap T^*X$ es definida por $x_{k+1} = \dots = x_n = 0 = \xi_1 = \dots = \xi_k$. Usando este hecho y la ecu. (2.2), vemos que $\alpha = \sum_{i>k} \xi_i dx_i$, y de este modo

$$\begin{aligned} i^*\alpha_p &= \alpha|_{T_p(N^*Z)} \\ &= \sum_{i>k} \xi_i dx_i|_{\text{span}\{\frac{\partial}{\partial x_j} : j \leq k\}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

2.2. Fibraciones de Lefschetz Topológicas.

Algo interesante, cuando se define una fibración de Lefschetz resulta del hecho de que alrededor de cada punto crítico se puede escribir la función que define la fibración, como una función de Morse.

Definición 2.6 *Sea M una variedad diferenciable y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, f es llamada una **función de Morse** si tiene sólo puntos críticos no degenerados.*

Recordemos que p es un punto crítico de f si $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$ para todo i y p es un punto crítico no degenerado si $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) \neq 0$ para tod i, j .

Teorema 2.10 [Lema de Morse] *Sea p un punto crítico no degenerado para $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, M una variedad diferenciable. Entonces existe un sistema de coordenadas locales (y_1, \dots, y_n) en una vecindad U de p con $y_i(p) = 0$ para todo i , tal que la igualdad*

$$f(x) = f(p) - y_1^2 - \dots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \dots + y_n^2$$

se satisface en todo $U \subset M$, donde λ es el índice de f en p .

Definición 2.7 Una *función de Morse holomorfa* sobre una variedad suave M , es una función holomorfa $f : M \rightarrow \mathbb{P}^1$ (ó \mathbb{C}) que solo tiene puntos críticos no degenerados.

Definición 2.8 Una terna (E, M, π) donde E y M son variedades complejas suaves y $\pi : E \rightarrow M$ es una aplicación holomorfa sobreyectiva se llama una **fibración compleja** si satisface la propiedad de levantamiento de homotopía.

Definición 2.9 Sea X una variedad compleja suave de dimensión n y $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ una fibración holomorfa (sobreyectiva). Decimos que f es una **fibración de Lefschetz topológica** si:

- 1) Existe una cantidad finita de puntos críticos p_1, \dots, p_k , y $f(p_i) \neq f(p_j)$ para $i \neq j$.
- 2) Cualquier par de fibras regulares son homeomorfas.
- 3) Para cada punto crítico p , existen vecindades $p \in U \subset X$, $f(p) \in V \subset \mathbb{P}^1$ tal que $f|_U$ es representada por la función de Morse holomorfa

$$f|_U(z_1, \dots, z_n) = z_1^2 + \dots + z_n^2,$$

y tal que $\text{crit} f \cap U = \{p\}$.

- 4) La restricción $f_{res} = f_{X - \cup X_i}$ al complemento de las fibras singulares X_i , es un fibrado localmente trivial.

Observación 2.3 La condición 1) no siempre se requiere, de hecho tendremos fibraciones donde dos puntos críticos tienen la misma imagen. Pueden existir fibras singulares con más de una singularidad.

Observación 2.4 Se pide en la literatura que la función tome valores en \mathbb{P}^1 , pero para nuestro caso y en nuestros ejemplos definiremos la fibración de Lefschetz tomando valores en \mathbb{C} .

Ejemplo 2.4 *La función de Morse holomorfa*

$$m : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(z_0, \dots, z_n) \mapsto \sum_{j=1}^n z_j^2$$

es una fibración de Lefschetz de acuerdo a nuestra definición. A continuación mostramos que m es una fibración de Lefschetz al cumplir los items de la definición 2.7.

1) Hay precisamente un único punto critico en 0.

2) La función

$$\varphi_\lambda : m^{-1}(\lambda) \longrightarrow m^{-1}(1)$$

$$z \mapsto \frac{z}{\sqrt{\lambda}}$$

es un homeomorfismo para cualquier $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$.

4) Definamos $l_\theta = \{re^{2\pi i\theta} : r \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ para $\theta \in [0, 2\pi]$. Entonces la condición de trivialidad local es satisfecha para $U_{l_\theta} = \mathbb{C} - l_\theta$. De hecho, la función

$$\varphi : m^{-1}(U_{l_\theta}) \longrightarrow U_{l_\theta} \times m^{-1}(1)$$

$$z \mapsto (m(z), \varphi_{m(z)}(z)),$$

es un difeomorfismo y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} m^{-1}(U_{l_\theta}) & \xrightarrow{m} & U_{l_\theta} \\ \downarrow \varphi & \nearrow \text{proy} & \\ U_{l_\theta} \times m^{-1}(1) & & \end{array}$$

Ahora vamos a definir lo que es un lapiz de Lefschetz y este concepto lo usaremos para construir ejemplos de fibraciones de Lefschetz.

Definición 2.10 Sea (X, ω) una variedad simpléctica de dimensión $2n$, $A \subset X$ una subvariedad de codimensión 4, y $f : X - A \rightarrow \mathbb{P}^1$ una función suave. Decimos que f es un **lapiz de Lefschetz topológico** si

- 1) Existe una cantidad finita de puntos críticos p_1, \dots, p_k , y $f(p_i) \neq f(p_j)$ para $i \neq j$.
- 2) Para cada $a \in A$, existe un sistema compatible de coordenadas locales U en el que

$$f : (z_1, \dots, z_n) \mapsto \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{P}^1$$

y donde $A \cap U = \{z \in U : z_1(z) = z_2(z) = 0\}$.

- 3) f es representada por la función de Morse holomorfa

$$f(z_1, \dots, z_n) = z_1^2 + \dots + z_n^2$$

en algun sistema compatible de coordenadas complejas, alrededor de cada punto crítico p_i .

Denotamos un lapiz de Lefschetz topológico por (X, A, f) .

Teorema 2.11 [Don99] Sea ω una forma simpléctica sobre una variedad diferenciable M , de dimensión real 4. Si $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$ es la reducción de una clase integral h , entonces M admite un lapiz de Lefschetz.

Teorema 2.12 [Sti99] Si una 4-variedad diferenciable admite un lapiz de Lefschetz, entonces esta admite una estructura simpléctica.

Teorema 2.13 [Sti99] El blow-up de un lapiz de Lefschetz sobre una superficie compleja en el lugar de base es una fibración de Lefschetz.

Ejemplo 2.5 *A continuación presentamos un ejemplo explícito de un blow-up en un lapiz de Lefschetz en el lugar de base. Sea $p_0 = x_0$, $p_1 = x_1$ dos polinomios homogéneos en \mathbb{C}^3 . El lugar de base es dado por $B = \{[0, 0, 1]\}$, y la función*

$$\begin{aligned} \pi &: \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^1 \cup \{[0, 0]\} \\ x = [x_0, x_1, x_2] &\mapsto [p_1(x), -p_0(x)] = [x_1, -x_0] \end{aligned}$$

es un lapiz de Lefschetz. Las fibras son dadas por

$$\begin{aligned} \pi^{-1}([s_0, s_1]) &= \{[-s_1, s_0, s_2] : s_2 \in \mathbb{C}\} \\ &= V(s_0 p_0 + s_1 p_1) - B \\ &= \mathbb{P}^1 - \infty. \end{aligned}$$

Para construir la fibración de Lefschetz de este lapiz, necesitamos hacer blow-up a π en el lugar de base. Escribiendo $\mathbb{P}^2 = U^0 \cup U^1 \cup U^2$ como la unión de los abiertos estandar $U^i = \{[x_0, x_1, x_2] : x_i \neq 0\}$, se puede ver que $B \subset U^2 \cong \mathbb{C}^2$. Haciendo blow-up U^2 en B (pensando en \mathbb{C}^2 como en $(0, 0)$) obtenemos

$$\tilde{U}_B^2 = \{([y_0, y_1, y_2], [t_0, t_1]) : t_0 y_0 = -t_1 y_1\}.$$

Obtenemos el blow-up deseado pegando esto sobre los restantes abiertos estandar, es decir,

$$\tilde{\mathbb{P}}_B^2 = (U^0 \cup U^1 \cup \tilde{U}_B^2) / \sim,$$

donde $[x_0, x_1, 1] \sim ([y_0, y_1, 1], [t_0, t_1])$ si y sólo si $[x_0, x_1, 1] = [y_0, y_1, 1]$ y $(x_0, x_1) \neq (0, 0)$. De esta manera, la fibración de Lefschetz es dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} &: \tilde{\mathbb{P}}_B^2 \longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ [x_0, x_1, x_2] &\mapsto \pi(x) \quad \text{si } (x_0, x_1) \neq (0, 0) \\ ([y_0, y_1, y_2], [t_0, t_1]) &\mapsto [t_0, t_1] \quad \text{si } y_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Esto está bien definido sobre la superposición, ya que para $[x_0, x_1, 1] \sim ([y_0, y_1, y_2], [t_0, t_1])$, $\tilde{\pi}([y_0, y_1, 1], [t_0, t_1]) = [t_0, t_1] = [y_1, -y_0] = [x_1, -x_0] = \pi([x_0, x_1, 1])$.

Las fibras de esta fibración de Lefschetz son homeomorfas a \mathbb{P}^1 , ya que

$$\tilde{\pi}^{-1}([s_0, s_1]) = \{[-s_1, s_0, s_2] : s_2 \in \mathbb{C}\} \cup \{([0, 0, 1], [s_0, s_1])\} \cong \mathbb{P}^1.$$

Ahora queremos probar dos resultados muy importantes en los Teoremas 2.19 y 2.20, pero antes se requieren una serie de lemas.

Lema 2.14 [Spa66] Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración, $b \in B$ y R un anillo. Entonces existe una acción natural de $\pi_1(B, b)$ sobre $H_*(F_b, R)$.

Definición 2.11 Una fibración se dice orientable, si la acción del Lema 2.14 es la acción trivial.

Lema 2.15 Cualquier fibración $p : E \rightarrow B$ que tiene una base simplemente conexa es orientable.

Lema 2.16 [Spa66, Teorema 3.1.1] Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración que es orientable sobre un campo K , con fibra F , y B conexo por caminos. Entonces la característica de Euler con coeficientes en el campo K es multiplicativa, es decir, esta satisface

$$\chi(E) = \chi(F) \cdot \chi(B).$$

Lema 2.17 Para coeficientes en un anillo R ,

$$H_i(\mathbb{P}^n, R) = \begin{cases} R & \text{si } i = 2k < 2n \\ 0 & \text{si } i \text{ e.o.c.} \end{cases},$$

Demostración.

Considere \mathbb{P}^n como el cociente de \mathbb{S}^n vía la acción de \mathbb{S}^1 y definamos la función

$$f : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ [z_0, \dots, z_n] \mapsto \sum_{i=0}^n i \|z_i\|^2.$$

Esta función está bien definida, ya que solo estamos considerando dos puntos equivalentes hasta multiples escalares en \mathbb{S}^1 .

□

Corolario 2.18 $\chi(\mathbb{P}^n) = n + 1$.

Observación 2.5 *Aunque el Corolario 2.17 puede probarse directamente de la definición de la característica de Euler, como la suma alternante de los números de Betti, también se sabe que*

$$\chi = \sum (-1)^\lambda C_\lambda,$$

donde C_λ es el número de puntos críticos de índice λ (con respecto a cualquier función de Morse). Nuestra demostración del Lema 2.16 da entonces la misma característica de Euler mediante la suma de los $n + 1$ puntos críticos π .

Ahora estamos listos para probar el siguiente resultado de no existencia.

Teorema 2.19 *No existen fibraciones continuas $f : \mathbb{P}^{2k} \rightarrow \mathbb{P}^1$ para cualquier k .*

Demostración.

Supongamos que existe una fibración $f : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^1$ para algún $n = 2k$. Por Corolario 2.17, $\chi(\mathbb{P}^n) = 2k + 1$, que es impar, y $\chi(\mathbb{P}^1) = 2$. Sin embargo, por el Lema 2.15, $2k + 1 = \chi(\mathbb{P}^n) = \chi(F) \cdot \chi(\mathbb{P}^1) = 2 \cdot \chi(F)$, lo cual es una contradicción.

□

Teorema 2.20 *No existen funciones diferenciables, no constantes $f : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^1$, en particular no hay fibraciones suaves $f : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^1$.*

Demostración.

Supongamos que existe tal f . Esta función induce una función de cohomología de grupos $f^* : H^*(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$. Por el Lema 2.17, ambos grupos son isomorfos a \mathbb{Z} por lo que podemos elegir un generador $[\omega] \in H^2(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z})$, la clase de la forma simpléctica por ejemplo. Ya que $[\omega]^2 \in H^4(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z}) = 0$ y $H^4(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, sabemos que $f^2 = 0$. Pero esto fuerza a f a ser constante por ser ω no-degenerada, contradiciendo así el hecho de que f es no constante.

□

Corolario 2.21 *No hay fibraciones topológicas de Lefschetz $f : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^1$ para cualquier n .*

Observación 2.6 *Se sabe que cualquier 4-variedad simpléctica admite un lapiz de Lefschetz [Don99], que a su vez con blown up, adquiere estructura de fibración de Lefschetz. El espacio \mathbb{P}^2 es simpléctico, pero el Teorema 2.18 nos dice que no se puede esperar tener una fibración de Lefschetz, a menos que hagamos blown up.*

2.3. Fibraciones de Lefschetz Simpléticas.

Definición 2.12 *Sea X una variedad compleja y ω una forma simpléctica, que hace a (X, ω) una variedad simpléctica. Decimos que una fibración de Lefschetz topológica es una **fibración de Lefschetz simpléctica** si*

- 1) *la parte suave de cualquier fibra es una subvariedad simpléctica de (X, ω) .*
- 2) *Para cada punto crítico p_i , la forma ω_{p_i} es no degenerada sobre el cono tangente de X_i en p_i .*

Teorema 2.22 [Smi04] *Sea $p : E \longrightarrow B$ una fibración holomorfa, donde E es una variedad quasi-proyectiva y una variedad de Kahler. Entonces cualquier fibra de la restricción $p : p^{-1}(B_0) \longrightarrow B_0$ a una subvariedad $B_0 \longrightarrow B$ es una subvariedad simpléctica de E .*

Ejemplo 2.6 *Nuestro modelo local m del Ejemplo 2.4 es una fibración simpléctica, satisfaciendo los items 1 y 2 de la definición 2.12*

- 1) *La fibra regular $m^{-1}(1)$ es simpléctica por el Teorema 2.21. Podemos incluso dar una descripción explícita de esta, como el fibrado cotangente de la esfera*

(equipada con la forma simplectica canónica)

$$T^*\mathbb{S}^n = \{(q, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \|q\| = 1, \langle q, p \rangle = 0\} \quad (2.5)$$

via el symplectomorfismo

$$\begin{aligned} \psi &: m^{-1}(1) \longrightarrow T^*\mathbb{S}^n \\ z &\mapsto \left(\frac{\operatorname{Re}z}{|\operatorname{Re}z|}, -|\operatorname{Re}z|\operatorname{Im}z \right). \end{aligned}$$

Note que fijando un punto en la esfera, en la imagen no se fija $\operatorname{Re}z$. la parte suave de la fibra crítica está dada por

$$m^{-1}(0) - \{0\} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : |\operatorname{Re}z|^2 - |\operatorname{Im}z|^2 = 0 = \langle \operatorname{Re}z, \operatorname{Im}z \rangle\} - \{0\}.$$

Podemos ver que es una subvariedad simpléctica considerando la restricción $M = m|_{\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}} : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$. Entonces $M^{-1}(0) = m^{-1} - \{0\}$, que es una variedad simpléctica por el Teorema 2.21.

- 2) La variedad afín $m^{-1}(0)$ es definida precisamente por una ecuación homogénea y es, por tanto, un cono. Se deduce que el cono tangente a 0 es la misma variedad. Acabamos de ver que la restricción de ω a esta variedad es una forma simpléctica y, por tanto, no degenerada.

Definición 2.13 Una fibración de Lefschetz topológica $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ se dice **orientable** si X es orientable y el sistema de coordenadas local en el ítem 3 puede tomarse de manera compatible con la orientación de X y de \mathbb{P}^1 .

Proposición 2.23 [GS91, Teorema10.2.18] Una fibración de Lefschetz topológica $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ de curvas de género $g \geq 2$ sobre una 4-variedad X es orientable si y sólo si X admite una estructura simpléctica.

Ejemplo 2.7 Sea $p_0 = x_0^3 + x_1^3$ y $p_1 = x_0^3 + x_2^3$. En el lugar de base B , $x_0x_1x_2 \neq 0$ y así podemos asumir, sin pérdida de generalidades, que $x_2 = 1$. Por tanto,

$$B = \{[-e^{2k\pi i/3}, e^{2k\pi i/9}, 1] : k = 0, \dots, 8\}.$$

El correspondiente lapiz de Lefschetz es dado por

$$\begin{aligned}\pi & : \mathbb{P}^2 - B \longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ & [x_0, x_1, x_2] \mapsto [p_1(x), -p_0(x)] \\ & = [x_0^3 + x_2^3, -x_0^3 - x_1^3]\end{aligned}$$

y las fibras son $\pi^{-1}([s_0, s_1]) = V(s_0p_0 + s_1p_1) - B$. Por la fórmula grado-género, las fibras tienen género 1. Así, hay ciclos. Para demostrar que hay ciclos desvanecientes, el teorema fundamental de la teoría de Picard-Lefschetz nos dice que basta con demostrar que

$$f = \frac{x_0^3 + x_2^3}{x_0^3 + x_1^3}$$

tiene singularidades. En efecto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_0} &= \frac{(x_0^3 + x_1^3)3x_0^2 - (x_0^3 + x_2^3)3x_0^2}{(x_0^3 + x_1^3)^2} = \frac{(x_1^3 - x_2^3)3x_0^2}{(x_0^3 + x_1^3)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{-(x_0^3 + x_2^3)3x_1^2}{(x_0^3 + x_1^3)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{3x_2^2}{x_0^3 + x_1^3}.\end{aligned}$$

Resolviendo para 0 se puede ver que $[1, 0, 0]$ y $[0, 1, 0]$ son puntos críticos.

2.4. Fibraciones de Lefschetz y orbitas adjuntas.

En esta sección se enunciará el teorema que caracteriza las fibraciones de Lefschetz simplécticas de las orbitas adjuntas.

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie y $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ una subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} . Recordemos que una raíz de \mathfrak{h} es un funcional lineal $\alpha : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, tal que el espacio de raíces

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \forall H \in \mathfrak{h}, [H, X] = \alpha(H)X\} \neq \{0\}.$$

El conjunto de todas las raíces es denotado por \prod . La descomposición de \mathfrak{g} en espacios propios de $\mathbf{ad}(H)$, $H \in \mathfrak{h}$, es dada por

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \prod} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

Un elemento $H \in \mathfrak{h}$ es **regular** si $\alpha(H) \neq 0$ para toda $\alpha \in \prod$.

La restricción de la forma de Cartan-Killing a \mathfrak{h} es no degenerada, por lo que podemos definir, para cada $\alpha \in \prod$, $H_{\alpha} \in \mathfrak{h}$ por $\alpha(\cdot) = \langle H_{\alpha}, \cdot \rangle$. El subespacio real generado por H_{α} , $\alpha \in \prod$, es denotado por $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. En la construcción canónica de \mathfrak{u} tenemos $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \subset i\mathfrak{u}$ (\mathfrak{u} forma real compacta de \mathfrak{g}).

El siguiente resultado, por cierto muy reciente y de mucha importancia, muestra que es posible definir una fibración de Lefschetz simpléctica en las órbitas adjuntas de un álgebra de Lie semisimple compleja, de dimensión finita. Más adelante mostraremos la forma que da a la órbita adjunta estructura de variedad simpléctica. La prueba de este Teorema, que es altamente no trivial, se sale del objetivo de este trabajo.

Lo interesante del siguiente resultado, es que logra sumar a las órbitas adjuntas a ejemplos de variedades simplécticas y uno de los resultados principales de esta tesis es describir parte de la geometría de las órbitas adjuntas.

Teorema 2.24 [Gas16] *Dado $H_0 \in \mathfrak{h}$ y $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ con H un elemento regular. La función altura $f_H : \mathcal{O}(H_0) \rightarrow \mathbb{C}$ definida por*

$$f_H(x) = \langle H, x \rangle \quad x \in \mathcal{O}(H_0)$$

tiene un número finito ($= |\mathcal{W}|/|\mathcal{W}_{H_0}|$) de puntos críticos aislados y define una fibración de Lefschetz simpléctica, por lo que las siguientes propiedades se mantienen:

- 1) *Los puntos críticos son no degenerados (Hessiano no degenerado).*
- 2) *Si $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ son valores regulares, entonces las variedades de nivel $f_H^{-1}(c_1)$ y $f_H^{-1}(c_2)$ son difeomorfas.*

- 3) Existe una forma simpléctica Ω en $\mathcal{O}(H_0)$ tal que si $c \in \mathbb{C}$ es un valor regular, entonces la variedad de nivel $f_H^{-1}(c)$, es simpléctica, es decir, la restricción de Ω a $f_H^{-1}(c)$ es una forma simpléctica (no degenerada).
- 4) Si $c \in \mathbb{C}$ es un valor crítico, entonces $f_H^{-1}(c)$ es la unión de subespacios afines (contenidos en $\mathcal{O}(H_0)$). Estos subespacios son simplecticos con respecto a la forma Ω del ítem anterior.

En el teorema anterior \mathcal{W} denota el grupo de Weyl, el cual se define como $\mathcal{W} = \text{Nor}_G(\mathfrak{h})/\text{Cen}_G(\mathfrak{h})$ (Normalizador modulo Centralizador) o, equivalentemente, el grupo generado por reflexiones con respecto a las raíces. \mathcal{W} es finito.

A continuación comentaremos un poco sobre las puntos críticos de f , a los que corresponden fibras singulares de la fibración y enunciaremos una serie de resultados.

Primero que todo, si $A \in \mathfrak{g}$ y $x \in \mathcal{O}(H_0)$, entonces $[A, x]$ es un vector tangente a $\mathcal{O}(H_0)$ en x y la diferencial de f_H es dada por

$$(df_H)_x([A, x]) = \frac{d}{dt} \langle H, e^{t \cdot \text{ad}(A)} x \rangle |_{t=0} = \langle H, [A, x] \rangle = \langle [x, H], A \rangle. \quad (2.6)$$

De esta expresión se sigue que f_H es una función holomorfa con respecto a la estructura compleja de $\mathcal{O}(H_0)$. En efecto,

$$(df_H)_x(i[A, x]) = (df_H)_x([iA, x]) = \langle [x, H], iA \rangle = i \langle [x, H], A \rangle = i(df_H)_x([A, x]).$$

Siendo una función holomorfa, el rango de f_H con $x \in \mathcal{O}(H_0)$ (considerandola como una función que toma valores en $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$) es ya sea 0 o 2, dado que si $(df_H)_x([A, x]) \neq 0$ entonces $i(df_H)_x([A, x]) \neq 0$ y estas dos derivadas generan a $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$. En particular, esto muestra que $x \in \mathcal{O}(H_0)$ es un punto crítico de f_H si y sólo si $(df_H)_x = 0$. Por tanto, por la expresión 2.6 para la diferencial de f_H , se deduce que x es un punto crítico, es decir, $(df_H)_x([A, x]) = 0$ para todo $A \in \mathfrak{g}$ si y sólo si $[A, x] = 0$. Esto nos permite identificar los puntos críticos.

Proposición 2.25 *x es un punto crítico para f_H si y sólo si $x \in \mathcal{O}(H_0) \cap \mathfrak{h} = \mathcal{W} \cdot H_0$, donde \mathcal{W} es el grupo de Weyl. (En este punto se utiliza la hipótesis de que H es regular).*

Demostración.

Como se puede observar, x es crítico si y sólo si $[x, H] = 0$. Pero, como H es regular su centralizador es en sí la subálgebra de Cartan \mathfrak{h} . Se deduce que el conjunto de puntos críticos es $\mathcal{O}(H_0) \cap \mathfrak{h}$. Este conjunto es exactamente la órbita de H_0 por la acción de \mathcal{W} .

□

Puesto que \mathcal{W} es finito, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.26 *El conjunto de puntos críticos de f_H es finito.*

Ejemplo 2.8 *Sea $H_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ y consideremos la órbita adjunta de H_0 :*

$$\mathcal{O}(H_0) = \{gH_0g^{-1} : g \in SL(3, \mathbb{C})\} \subset \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}),$$

aquí $SL(3, \mathbb{C})$ esta actuando sobre su respectiva álgebra de Lie, $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, por conjugación.

$A \in \mathcal{O}(H_0)$ si y sólo si $(A - 2I)(A + I) = 0$ (A está descrita por el polinomio mini-

mal). Sea $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ y consideremos la función $f_H : \mathcal{O}(H_0) \rightarrow \mathbb{C}$, definida

como ya sabemos por $f_H(A) = \langle A, H \rangle$, donde $\langle A, H \rangle = \text{tr}(A\bar{H}^T)$ (forma de Cartan-Killing).

Sea $A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & y_2 \\ z_1 & x_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 & -x_1 - x_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{O}(H_0)$, entonces $\text{tr}(A\bar{H}^T) = 2x_1 + x_2$, por lo que $f_H(A) = 2x_1 + x_2$ (Note que también es posible describir $\mathcal{O}(H_0)$ como variedad algebraica dentro de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, por medio de los 9 polinomios que nos proporciona la condición $(A - 2I)(A + I) = 0$).

En este caso el grupo de Weyl, \mathcal{W} , permuta las entradas de la diagonal principal de H_0 , por lo que

$$\mathcal{W} \cdot H_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

De este modo, por la proposición 3.3, f_H tiene tres puntos críticos (elementos de $\mathcal{W} \cdot H_0$) y sus respectivos valores críticos son 3, 0 y -3.

Ejemplo 2.9 Considerando ahora $H = H_0$, donde $H_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$

e imitando el mismo procedimiento del ejemplo anterior, vemos que en este caso, $f_H(A) = x_1 - x_2$. También se puede ver fácilmente que $\mathcal{W} \cdot H_0$ o lo que es lo mismo, el conjunto de puntos críticos de f_H , es el conjunto,

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Los cuatro valores críticos asociados a estos puntos críticos son 2, 1, -1 y -2.

Capítulo 3

Métricas en grupos de Lie.

En esta sección definiremos algunas estructuras adicionales que permitirán relacionar las variedades simplécticas con la geometría compleja. De hecho, como veremos a continuación, las variedades simplécticas y las complejas son ejemplos particulares de las denominadas variedades casi complejas. Si contamos con una métrica hermitiana es posible definir, de manera sencilla, una 2-forma no degenerada en la variedad compleja. Si esta forma, denominada forma asociada, es cerrada, obtenemos una forma simpléctica que denominamos forma de Kähler.

Definición 3.1 *Una variedad de Riemanniana, es una variedad real suave M , equipada con un producto interior g_p sobre el espacio tangente T_pM en cada punto p , que varía de manera suave de punto a punto, en el sentido de que si X y Y son campos de vectores sobre M , entonces $p \mapsto g(X(p), Y(p))$ es una función suave.*

La familia $\{g_p\}_{p \in M}$ de productos interiores es llamada métrica Riemanniana (tensor). Una métrica Riemanniana (tensor) permite definir varias nociones geométricas en una variedad Riemanniana, como ángulos, longitudes de curvas, áreas (o volúmenes), curvatura, gradientes de funciones y divergencia de campos de vectores.

De manera más precisa, si $p \in M$, $g_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que: para cualesquiera campos de vectores diferenciables X, Y sobre M , $p \mapsto g_p(X(p), Y(p))$ define una

función suave de M a \mathbb{R} .

En otras palabras, una métrica Riemanniana es un $(0, 2)$ -tensor simétrico que es definido positivo (esto es, $g(X, X) > 0$ para todo vector tangente $X \neq 0$).

En un sistema de coordenadas locales en la variedad M dada por n funciones con valores reales x_1, x_2, \dots, x_n , los campos de vectores

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$$

da una base de vectores tangentes en cada punto de M . En relación con este sistema de coordenadas, las componentes del tensor métrico son, en cada punto p ,

$$g_{ij}(p) = g_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p \right).$$

3.1. Estructura compleja.

Una variedad casi compleja es una variedad suave, equipada con una estructura compleja lineal suave en cada espacio tangente. La existencia de esta estructura es una condición necesaria, pero no suficiente, para que una variedad sea una variedad compleja, es decir, cada variedad compleja es una variedad casi compleja, pero no al revés. Las estructuras casi complejas tienen aplicaciones importantes en la geometría simpléctica. De manera más formal se tiene la siguiente definición.

Definición 3.2 *Una estructura casi compleja en una variedad M es un tensor J de grado $(1, 1)$ tal que en cada punto p la transformación lineal $J_p : T_p M \mapsto T_p M$ satisface $J_p^2 = -\mathbb{I}$. Al par (M, J) se le denomina **variedad casi compleja**.*

Si M admite una estructura casi compleja, M es de dimensión par. En efecto, supongamos que M es n -dimensional, y que $J : TM \rightarrow TM$ es una estructura casi compleja. Si $J^2 = -1$ entonces $\det(J)^2 = (-1)^n$. Pero si M es una variedad real, entonces $\det J$ es un número real, así, n debe ser par. También se puede mostrar que

M es orientable.

Las únicas esferas que admiten estructuras casi complejas son \mathbb{S}^2 y \mathbb{S}^6 . En el caso de \mathbb{S}^2 , dicha estructura proviene de la estructura compleja de la esfera de Riemann. La 6-esfera, \mathbb{S}^6 , considerada como el conjunto de los octoniones imaginarios de norma 1, hereda una estructura casi compleja que proviene del producto de octoniones.

Definición 3.3 Una *estructura compleja* sobre un espacio vectorial real V es un endomorfismo lineal J de V tal que $J^2 = -\mathbb{I}$, donde \mathbb{I} es la transformación identidad en V .

Ejemplo 3.1

1. Un espacio vectorial real con una estructura compleja puede tener la estructura de un espacio vectorial complejo. Definimos la multiplicación escalar por números complejos como

$$(a + ib)X = aX + bJX, \quad \forall X \in V \text{ y } a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Si tenemos un espacio vectorial complejo V de dimensión compleja n , podemos definir un endomorfismo lineal J de V por

$$J(X) = iX, \quad \forall X \in V.$$

Entonces, V considerado como un espacio vectorial real de dimensión $2n$, tiene a J como su estructura compleja.

Proposición 3.1 Sea J una estructura compleja asociada con un espacio vectorial real $2n$ dimensional. Entonces existen vectores X_1, \dots, X_n de V tal que $\{X_1, \dots, X_n, JX_1, \dots, JX_n\}$ es una base para V .

3.2. Métrica Hermitiana y variedad de Kähler.

Definición 3.4 Una métrica Hermitiana es un producto interior h , definido sobre un espacio vectorial real V con estructura compleja J , tal que

$$h(JX, JY) = h(X, Y) \quad \forall X, Y \in V \quad \text{y} \quad h(X, Y) = \overline{h(Y, X)}.$$

Lema 3.2 Para una métrica Hermitiana h , $h(X, JX) = 0$ para cada vector X .

Demostración.

$$h(X, JX) = h(JX, J^2X) = -h(JX, X) = -h(X, JX). \quad \square$$

Proposición 3.3 Sea h una métrica Hermitiana en un espacio vectorial real $2n$ dimensional V con estructura compleja J . Entonces existen vectores X_1, \dots, X_n de V tales que

$$\{X_1, \dots, X_n, JX_1, \dots, JX_n\}$$

es una base ortonormal para V con respecto a h .

Una variedad Hermitiana es el análogo complejo de una variedad Riemanniana. Más precisamente, una variedad Hermitiana es una variedad compleja con un producto interior Hermitiano que varía suavemente en cada espacio tangente (holomorfo). También se puede definir una variedad Hermitiana como una variedad real con una métrica Riemanniana que conserva una estructura compleja, de manera más formal, se tiene la siguiente definición.

Definición 3.5 Una *variedad Hermitiana*, M , es una variedad suave junto con un par (J, h) consistente de una estructura compleja y una métrica Hermitiana en el espacio tangente TM .

Una estructura Hermitiana define en M una 2-forma diferenciable $\omega(X, Y) = h(X, JY)$, la cual es llamada la 2-forma canónica de la variedad Hermitiana M .

De lo anterior, podemos introducir el concepto de variedad de Kähler. Como las variedades de Kähler están equipadas con varias estructuras complejas, se pueden describir desde varios puntos de vista, como lo son: desde el punto de vista simpléctico y desde el punto de vista complejo. De esta manera, se tienen las siguientes definiciones, desde el punto de vista simpléctico y complejo respectivamente.

Definición 3.6 Una *variedad Kähler* es una variedad simpléctica suave (X, ω) equipada con una estructura compleja integrable J que es compatible con la forma simpléctica ω , lo que significa que la forma bilineal

$$g(u, v) = \omega(u, Jv)$$

sobre el espacio tangente de X en cada punto es simétrica y definida positiva (y, por tanto, es una métrica Riemanniana sobre X).

Definición 3.7 Una *variedad de Kähler* es una variedad compleja suave X con una métrica Hermitiana h cuya 2-forma asociada ω es cerrada. Con más detalle, h proporciona una forma Hermitiana definida positiva sobre el espacio tangente TX en cada punto de X , y la 2-forma ω es definida por

$$\omega(u, v) = \text{Re}h(iu, v)$$

para vectores tangentes. Para una variedad de Kähler X , la forma de Kähler ω es una $(1, 1)$ -forma real y cerrada.

Una variedad de Kähler también se puede ver como una variedad Riemanniana, con la métrica de Riemann definida por

$$g(u, v) = \text{Re}h(u, v).$$

Ahora estamos en condiciones de definir la 2-forma simpléctica que permite definir, en el Teorema 2.24, una fibración de Lefschetz teniendo como espacio total la órbita

adjunta de un álgebra de Lie semisimple compleja.

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple compleja con forma de Cartan-Killing $\langle X, Y \rangle = \text{tr}(ad(X)ad(Y)) \in \mathbb{C}$, y G un grupo de Lie conexo con álgebra de Lie \mathfrak{g} . Sea $H_0 \in \mathfrak{h}$. La orbita adjunta de H_0 sabemos que está definida por

$$\mathcal{O}(H_0) = \text{Ad}G \cdot H_0 = \{\text{Ad}(g)H_0 \in \mathfrak{g} : g \in G\}.$$

Fijemos una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ y una forma real compacta \mathfrak{u} (la forma de Cartan-Killing restringida a \mathfrak{u} es definida negativa) de \mathfrak{g} . Asociados a estas subálgebras existen los subgrupos $T = \langle \exp \mathfrak{h} \rangle = \exp \mathfrak{h}$ y $U = \langle \exp \mathfrak{u} \rangle = \exp \mathfrak{u}$. Denotemos por τ la conjugación asociada a \mathfrak{u} , definida por $\tau(X) = X$ si $X \in \mathfrak{u}$ y $\tau(Y) = -Y$ si $Y \in i\mathfrak{u}$. Por lo tanto, Si $Z = X + iY \in \mathfrak{g}$ con $X, Y \in \mathfrak{u}$ entonces $\tau(X + iY) = X - iY$. En este caso, $\mathcal{H}_\tau : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\mathcal{H}_\tau(X, Y) = -\langle X, \tau Y \rangle$$

es una forma Hermitiana ([SM99], Lema 12.7) en \mathfrak{g} . Escribimos la parte real e imaginaria de \mathcal{H} como

$$\mathcal{H}(X, Y) = (X, Y) + i\Omega(X, Y) \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

La parte real (\cdot, \cdot) es un producto interior y la parte imaginaria Ω es una forma simpléctica en \mathfrak{g} . En efecto, se tiene que

$$0 \neq i\mathcal{H}(X, X) = \mathcal{H}(iX, X) = i\Omega(iX, X),$$

esto es, $\Omega(iX, X) \neq 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, con lo cual se muestra que Ω es no degenerada. Mas aún, $d\Omega = 0$ por tanto Ω es una forma bilineal constante. El hecho de que $\Omega(iX, X) \neq 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ garantiza que la restricción de Ω a cualquier subespacio complejo de \mathfrak{g} es también no degenerada.

Ahora, los espacios tangentes a $\mathcal{O}(H_0)$ son subespacios vectoriales complejos de \mathfrak{g} . Por tanto, el pullback de Ω por la inclusión $\mathcal{O}(H_0) \hookrightarrow \mathfrak{g}$ define una forma simpléctica en $\mathcal{O}(H_0)$, la que da a $\mathcal{O}(H_0)$ estructura de variedad simpléctica.

Ejemplo 3.2 Cuando $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ se tiene que:

- a) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un múltiplo (constante) de la forma $\text{tr}(XY)$.
- b) Una elección canónica de \mathfrak{h} es la subálgebra de matrices diagonales.
- c) Con esta elección de \mathfrak{h} las raíces son los funcionales lineales $\alpha_{ij}(\text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}) = a_i - a_j$, $i \neq j$, con $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}$ los subespacios generados por las bases elementales dadas por las matrices E_{ij} (matrices de 1 en la entrada ij y 0 en el resto).
- d) $\mathfrak{u} = \mathfrak{su}(n)$, el álgebra (real) de matrices anti-Hermitianas. En este caso $\tau(Z) = -\bar{Z}^T$, $Z \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ y la forma Hermitiana asociada es un múltiplo de $\mathcal{H}_\tau(X, Y) = \text{tr}(X\bar{Y}^T)$.
- e) $H \in \mathfrak{h}$ es regular si y sólo si sus autovalores son todos distintos.
- f) \mathcal{W} es el grupo de permutaciones de n elementos, que actúa sobre \mathfrak{h} permutando las entradas de sus diagonales.
- g) Si $H \in \mathfrak{h}$ entonces $\mathcal{O}(H)$ es conjunto de matrices diagonalizables que tienen los mismos autovalores que H .

Capítulo 4

Dedales Lagrangeanos reales en fibraciones de Lefschetz.

En este capítulo, dada una fibración de Lefschetz simpléctica, describimos subvariedades Lagrangeanas de ella. A tales subvariedades le damos el nombre de dedales Lagrangeanos. Junto a estas también se obtienen los llamados ciclos evanescentes Lagrangeanos.

4.0.1. Dedales Lagrangeanos reales.

La siguiente es la descripción de subvariedades Lagrangeana de una variedad simpléctica. Nuestra idea se basa en las siguientes generalidades:

Consideremos una fibración de Lefschetz simpléctica $f : N \rightarrow \mathbb{C}$, donde N es una variedad compleja suave ($\dim_{\mathbb{C}} N = n$), con métrica Hermitiana $M(\cdot, \cdot)$, estructura compleja J y forma simpléctica $\Omega(\cdot, \cdot)$. Escribamos $f = f_1 + if_2$ y sea V una subvariedad Lagrangeana que contiene un punto crítico x de f , al cual corresponde una fibra singular de la fibración. Sea $g = g_1 + ig_2$ la restricción de f a V . Tomemos los siguientes campos gradientes

$$F_1 = \text{grad}f_1, F_2 = \text{grad}f_2, G_1 = \text{grad}g_1 \text{ y } G_2 = \text{grad}g_2.$$

Como f es una función holomorfa, $df(Jv) = idf(v)$ si v es un vector tangente. Esto significa

$$df_1(Jv) + idf_2(Jv) = idf_1(v) - df_2(v)$$

así $df_2(v) = -df_1(Jv)$. Es decir, $M(F_2, v) = -M(F_1, Jv) = -M(JF_1, v)$, con lo que se muestra que

$$F_2 = -JF_1 \quad F_1 = JF_2.$$

De estas igualdades se sigue que x es un punto crítico de f si y sólo si x es un punto crítico de f_1 y f_2 . Los Hessianos de f_1 y f_2 en el punto crítico x se relacionan de la siguiente manera: Si A y B son campos vectoriales, entonces

$$\begin{aligned} \text{Hess}f_1(A, B) &= BAf_1 = BM(F_1, A) \\ &= BM(F_2, JA) = B(JA)f_2 \\ &= \text{Hess}f_2(JA, B). \end{aligned}$$

Si f tiene puntos críticos aislados, entonces ambas, f_1 y f_2 son funciones de Morse. La relación entre los Hessianos muestra que cada punto crítico tiene índice 0 (= dimensión de la parte definida positiva menos dimensión de la parte definida negativa). De hecho, si $\text{Hess}f_1(A, A) > 0$ entonces

$$\text{Hess}f_1(JA, JA) = \text{Hess}f_2(-A, JA) = -\text{Hess}f_2(JA, A) = -\text{Hess}f_1(A, A)$$

así la parte definida positiva y la negativa tienen la misma dimensión.

Para obtener la relación entre F_i y G_i observese que, dado que V es una subvariedad Lagrangeana, el espacio tangente a N en un punto $y \in V$ se descompone como

$$T_y N = T_y V \oplus JT_y V \quad y \in V,$$

pues $JT_y V$ es el complemento ortogonal con respecto a la métrica $M(\cdot, \cdot)$, de $T_y V$.

De hecho, si $u, v \in T_y V$ entonces

$$M(u, Jv) = -\Omega(u, v) = 0$$

por tanto los subespacios $T_y V$ y $JT_y V$ son ortogonales y tienen la misma dimensión, luego son complementarios. En consecuencia se tiene la siguiente relación entre F_i y G_i sobre puntos de V .

Proposición 4.1 *Si $y \in V$ entonces $F_1(y) = G_1(y) - JG_2(y)$ y $F_2(y) = G_2(y) - JG_1(y)$*

Demostración.

Para el caso de F_1 tomamos la descomposición $F_1(y) = u + Jv \in T_y V \oplus JT_y V$. Dado que g_1 es la restricción de f_1 a V , se deduce que $(df_1)_y(w) = (dg_1)_y(w)$ si $w \in T_y V$. De esta manera, para $w \in T_y V$

$$\begin{aligned} (dg_1)_y(w) &= (df_1)_y(w) = M(F_1(y), w) \\ &= M(u + Jv, w) = M(u, w) \end{aligned}$$

y vemos que $u = G_1(y)$. Ahora tomemos $Jw \in JT_y V$. Así que,

$$\begin{aligned} (df_1)_y(Jw) &= -(df_2)_y(w) = -(dg_2)_y(w) \\ &= -M(G_2(y), w) \end{aligned}$$

y $M(F_1(y), Jw) = -M(G_2(y), w)$, es decir,

$$M(v, w) = M(Jv, Jw) = -M(G_2(y), w).$$

Como w es arbitrario, esto muestra que $v = -G_2(y)$. Así, para $y \in V$

$$F_2 = -JF_1 = -J(G_1 - JG_2) = G_2 - JG_1.$$

□

De la anterior proposición se puede ver que si $G_2 = 0$, entonces $F_1 = G_1$ y, en consecuencia F_1 es tangente a V . De esto se tiene el siguiente corolario.

Corolario 4.2 *Si la parte imaginaria de $f = f_1 + if_2$ es constante sobre la subvariedad Lagrangeana, entonces $\text{grad}f_1$ es tangente a V .*

En consecuencia, obtenemos un método para construir variedades (suaves) estables e inestables de $\text{grad} f_1$ en una singularidad x . Definamos antes los conceptos de variedad estable e inestable.

Definición 4.1 *Sea E una variedad (compleja) suave, X un campo de vectores sobre E y $p \in E$. Se define la variedad estable de X_p como el conjunto*

$$V_p^+ = \{x \in E : \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_x(t) = p, \text{ para alguna curva integral } \phi_x \text{ de } x\},$$

en forma análoga la variedad inestable de p se define como

$$V_p^- = \{x \in E : \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_x(t) = p, \text{ para alguna curva integral } \phi_x \text{ de } x\}.$$

Proposición 4.3 *Sea V una subvariedad (suave) Lagrangeana que contiene un punto crítico x de la función $f = f_1 + if_2$ que define una fibración de Lefschetz. Suponga que f_2 es constante sobre V y que la restricción del Hessiano, $\text{Hess}(f)(x)$ a el subespacio tangente $T_x V$ es definido negativo (respectivamente positivo). Entonces, la variedad estable (respectivamente inestable) de G_1 en V es un subconjunto abierto de la variedad estable (respectivamente inestable) de F_1 .*

Demostración.

El Hessiano de g_1 es la restricción a $T_x V$ de el Hessiano de f_1 . La hipótesis garantiza que el punto fijo x es un atractor (respectivamente repulsor) de $G_1 = \text{grad} g_1$. En consecuencia, en el caso definido negativo, la variedad estable de G_1 es un subconjunto abierto en V que contiene a x . En este conjunto abierto F_1 , coincide con G_1 , ya que por hipótesis f_2 es constante sobre V , esto es, $G_2 = 0$. Por tanto, la variedad estable de G_1 está contenida en la variedad estable de F_1 . Un argumento similar se usa para el caso definido positivo.

□

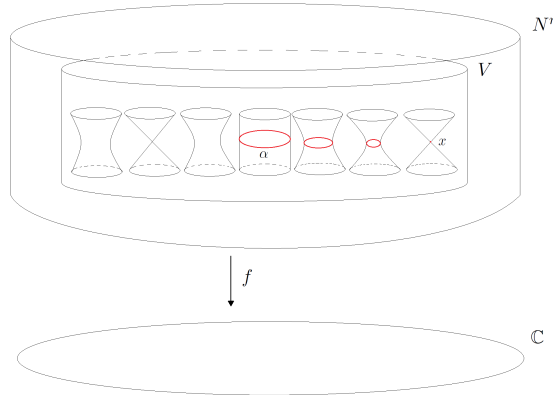
Dado que los niveles de una función de Morse en una vecindad de una singularidad atractora o repulsora son esferas (por el lema de Morse), esta proposición tiene la siguiente consecuencia.

Corolario 4.4 *Bajo las hipótesis de la proposición 4.4, tomado un nivel $g_1^{-1}\{c\} = f_1^{-1}(c) \cap V$ con c cerca a $g_1(x) = f_1(x)$ y $c < g_1(x)$ en el caso definido negativo y $c > g_1(x)$ en el caso definido positivo. Entonces, $g_1^{-1}\{c\}$ es homeomorfo a una esfera de dimensión $\dim V - 1$.*

La esfera $g_1^{-1}\{c\}$ es una subvariedad Lagrangeana de el nivel $f^{-1}\{c\}$ (ya que en la proposición 4.4 tomamos la hipótesis de que g_2 es constante). En otras palabras, se han contruido esferas Lagrangeanas dentro de las fibras regulares y tales esferas son los ciclos evanecentes, la dimensión de tales esferas es $n - 1$ real, es decir, la mitad de la dimensión de la fibra regular.

Lema 4.5 [ABKP00] *Sea $f : N \rightarrow \mathbb{C}$ una fibración de Lefschetz, sean N_ρ una fibra regular y N_i una fibra singular de dicha fibración, entonces existe una retracción $r_i : N_\rho \rightarrow N_i$ para cada fibra singular N_i .*

Definición 4.2 *Un ciclo evanecente geométrico es una esfera Lagrangeana $\alpha \in N_\rho$ tal que $r_i(\alpha)$ es un punto.*



La siguiente idea es para construir un dedal Lagrangeano teniendo como frontera la esfera $g_1^{-1}(c)$ contenida en la subvariedad Lagrangeana V .

Una fibración simpléctica con espacio total E tiene una conexión natural ∇ . En cada punto de la fibración tomamos como ∇_p el espacio horizontal definido como el ortogonal simpléctico a la fibra E_p en p .

Sabemos que cada conexión determina un transporte paralelo. De nuestra construcción resulta que el transporte paralelo de un ciclo α vía ∇ , sobre la fibra regular hasta la singularidad, coincide con el transporte de α vía $\mathbf{grad} f_1$.

Para esto, observe que para cualquier $y \in N$, el ortogonal simpléctico de la fibra $\Phi_y = f^{-1}(f(y))$ es generado por $F_1 = \mathbf{grad} f_1$ y $J\mathbf{grad} f_1 = -\mathbf{grad} f_2 = -F_2$. En efecto, $F_1(y)$ es ortogonal a $T_y\Phi_y$, ya que es su gradiente. Sin embargo, Φ_y es una subvariedad compleja, así $\Omega(F_1(y), v) = M(F_1(y), Jv) = 0$ si $v \in T_y\Phi_y$. Esto muestra que

$$\Omega(JF_1(y), v) = M(JF_1(y), Jv) = M(F_1(y), v) = 0$$

si $v \in T_y\Phi_y$, lo cual muestra que $F_1(y)$ y $JF_1(y)$ generan el ortogonal simpléctico de Φ_y .

En consecuencia se obtiene el siguiente dedal Lagrangeano para f .

Proposición 4.6 *Bajo las hipótesis de la proposición 4.4, tomando c cerca de $f_1(x) = g_1(x)$. se tiene que*

$$g_1^{-1}[c, g_1(x)] = f_1^{-1}[c, f_1(x)] \cap V$$

(en el caso definido negativo) o $g_1^{-1}[g_1(x), c] = f_1^{-1}[f_1(x), c] \cap V$ (en el caso definido positivo) es homeomorfo a una bola cerrada en $\mathbb{R}^{\dim V}$. Esta bola es un dedal Lagrangeano.

Demostración.

En el caso definido negativo, $g_1^{-1}[c, g_1(x)]$ es el dedal Lagrangeano obtenido por el transporte paralelo de la esfera Lagrangeana $g^{-1}\{c\}$ a lo largo del segmento de línea $[c, g_1(x)] \subset \mathbb{R}$. En efecto, si $s \in [c, g_1(x)]$ y $z \in g_1^{-1}\{s\}$ entonces la elevación horizontal del vector $\frac{d}{dt}$ es un múltiplo de $F_1(z)$. Esto pasa porque la elevación horizontal es un

vector $W = aF_1(z) + bJF_1(z)$ con $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $df_z(W) = (df_1)_z(W) + i(df_2)_z(W)$ es real. Por tanto, $df_z(W)$ coincide con $(df_1)_z(W)$. Esto implica que $(df_2)_z(W) = 0$, es decir,

$$\begin{aligned} 0 &= M(F_2, W) = -M(JF_1(z), aF_1(z) + bJF_1(z)) \\ &= -bM(JF_1(z), JF_1(z)) \end{aligned}$$

y en consecuencia, $b = 0$.

En el caso definido negativo el coeficiente $a > 0$, ya que f_1 crece en la dirección de F_1 .

Por tanto, el transporte paralelo de un punto de $g_1^{-1}\{c\}$ a lo largo del segmento $[c, g_1(x)]$ sigue las trayectorias de F_1 (reparametrizado). Tales trayectorias convergen a x , así, la unión de los transportes paralelos de $s \in [c, g_1(x)]$ es la bola $g_1^{-1}[c, g_1(x)] = f_1^{-1}[c, f_1(x)] \cap V$.

El mismo argumento se usa en el caso definido positivo, con $-F_1$ en lugar de F_1 . □

Cabe destacar que el número de esferas Lagrangeanas halladas en este caso en las fibras regulares de una fibración de Lefschetz, es igual al número de puntos críticos de la fibración, ya que cada esfera corresponde al borde (o frontera) del dedal Lagrangeano (bola).

De la anterior construcción se tiene la siguiente definición.

Definición 4.3 *Un dedal Lagrangeano dentro de una subvariedad (suave) estable o inestable, construido como en la proposición 4.6, será llamado un **dedal Lagrangeano real**, ya que se obtiene elevando una curva horizontal real.*

En definitiva, hemos obtenido:

- Ciclos evanescentes Lagrangeanos (esferas).
- Dedales Lagrangeanos (bolas).

Como una aplicación de lo anterior, ahora se puede describir parte de la geometría de las órbitas adjuntas de un álgebra de Lie, es así como concluimos este trabajo enunciando el siguiente teorema

Teorema 4.7 (E Gasparim, A Nisperuza, L San Martin.) *Sea $\mathcal{O}(H)$ una órbita adjunta de un álgebra de Lie semisimple compleja de dimensión finita y $f : \mathcal{O}(H) \rightarrow \mathbb{C}$ un potencial holomorfo. Entonces, para puntos críticos de f , existen ciclos evanescentes Lagrangeanos con sus respectivos dedales Lagrangeanos reales.*

Observación 4.1 *Para una fibración de Lefschetz sobre una variedad compacta, una consecuencia del teorema fundamental de la teoría de Picard-Lefschetz es que a cada singularidad corresponde un ciclo evanescente (topológico), pero el teorema no garantiza existencia de ciclos evanescentes en el caso no compacto. Lo novedoso de nuestro trabajo es que garantiza existencia de ciclos evanescentes en el caso no compacto, más aun, dichos ciclos son Lagrangeanos, así como son Lagrangeanos sus correspondientes dedales.*

Conclusiones

El objetivo de este trabajo se centró básicamente en encontrar subvariedades Lagrangeanas de variedades symplecticas (dedales reales), que como habíamos mencionado en un principio, no es una tarea fácil desde el punto de vista de la geometría symplectica. En particular se ha mostrado que, dada una fibración de Lefschetz, $f : N \rightarrow \mathbb{C}$, haciendo la parte imaginaria de esta función constante y al tomar niveles de valores regulares, estos niveles son esferas sobre las fibras regulares, y al transportar tales ciclos o esferas a través de fibras regulares hasta una fibra singular, se generan los llamados dedales, que como se mostró son Lagrangeanos (bolas) en el espacio total N . Los ciclos evanescentes (borde del dedal) son esferas reales y tales esferas son Lagrangeanas en las fibras regulares y los dedales mismos son Lagrangeanos en el espacio total (Corolario 4.4, Proposición 4.6).

Por otra parte, usando teoría de Lie, en los Teoremas 2.24 se presenta una forma de definir fibraciones de Lefschetz simpléctica teniendo como espacio total a las órbitas adjuntas de un álgebra de Lie semisimple compleja, de dimensión finita de un álgebra de Lie \mathfrak{g} . Nuestras variedades Lagrangeanas fueron encontradas en las fibras regulares de una fibración de Lefschetz simpléctica y también en su espacio total, es decir, tenemos la máquina para construir fibraciones de Lefschetz simpléctica y el resultado que nos dice donde encontrar subvariedades Lagrangeanas cuando se tienen este tipo de fibraciones. Por último, como aplicación de este trabajo, se ha logrado describir parte de la geometría de las órbitas adjuntas de un álgebra de Lie semisimple compleja, de dimensión finita.

Bibliografía

- [ABKP00] J. Amorós, F. Bogomolov, L. Katzarkov, and T. Pantev. Symplectic lefschetz fibrations with arbitrary fundamental groups. *Journal of Differential Geometry*, 54(3):489–545, 2000.
- [Cal13] B. Callander. Fibracoes de lefschetz. *Tesis de Maestría Unicamp*, 2013.
- [Don99] S. K. Donaldson. Lefschetz pencils on symplectic manifolds. *J. Differential Geom.*, 53(2):205–236, 1999.
- [Gas14] Grama L. San Martin L.A.B. Gasparim, E. Adjoint orbits of semi-simple lie groups and lagrangean submanifolds. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 60, 361–385, 2014.
- [Gas16] Grama L. San Martin L. Gasparim, E. Symplectic lefschetz fibrations on adjoint orbits. *Forum Math*, 28:967–979, 2016.
- [SM99] L. A. B. San Martin. *Álgebras de Lie*. Editora Unicamp, 1999.
- [Smi04] I. Smith. Monodromy, vanishing cycles, knots and the adjoint quotient. *ArXiv Mathematics e-prints*, dec 2004.
- [Spa66] Edwin H. Spanier. *Algebraic Topology*. Springer-Verlag. McGraw-Hill, 1966.

- [Sti99] Robert E. Gompf; András I. Stipsicz. *4-Manifolds and Kirby Calculus*. Graduate Texts in Mathematics. American Mathematical Society, 1999.
- [War13] F.W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.