



UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Matemáticas.

**SOBRE AUTOVALOR MAXIMAL Y
AUTOVALOR MAXIMAL
LAPLACIANO SIN SIGNO DE GRAFOS**

KATHERINE TAPIA MORALES

Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias Mención Matemática

Orientada por **Dra. María Rosario Robbiano Bustamante**

Antofagasta, Chile

Agosto 2015

Índice general

Introducción	4
1. Preliminares y resultados previos.	5
1.1. Un resultado de Emeric Deutsch	10
2. Cotas para el índice y para el autovalor maximal Laplaciano sin signo de un grafo	14
2.1. Cotas para el índice de un grafo	14
2.2. Cotas para el autovalor maximal Laplaciano sin signo	23
3. Composición generalizada de grafos	25
3.1. Aplicaciones de los resultados de Deutsch a composiciones generalizadas de grafos	26
4. Otros resultados de esta tesis	30
4.1. Sobre subconjuntos (κ, τ)	30
4.2. Una aplicación al estudio del autovalor maximal Laplaciano sin signo del grafo usando el número de bipartividad por vértices	32
4.3. Una aplicación al estudio del índice de un grafo usando el número de bipartividad por vértices	35
4.4. Composición generalizada de grafos con restricciones a subconjuntos de vértices	37
4.5. Intercalamiento de autovalores	44

Agradecimientos

Agradezco a mi familia por su apoyo incondicional en este largo camino, en especial a mi hermano a quien le dedico este trabajo.

Agradezco a la Dra. María Rosario Robbiano, quien ha sido mi tutora en este trabajo, por toda la dedicación brindada.

También agradezco al cuerpo docente del Departamento de Matemáticas de la Universidad Católica del Norte, quienes han sido parte fundamental en mi formación profesional.

Introducción

La Teoría Espectral de Grafos es el estudio del comportamiento de los autovalores de matrices asociadas a un grafo. Estas matrices pueden ser: la matriz de adyacencia, la matriz Laplaciana, la matriz de Randić y la matriz Laplaciana sin signo. Los autovalores de estas matrices se relacionan con invariantes del grafo, entre ellos, distancia media, diámetro, radio y número cromático. Así, ellos pueden dar valiosa información respecto del grafo o acerca de alguna aplicación que es modelada por este.

Es reconocido, alrededor de los últimos 12 años que el espectro de grafos ha tenido varias aplicaciones importantes en ciencia de la computación. El espectro de grafos surge en la literatura sobre tecnologías de internet, patrones de reconocimiento, minería de datos, multiprocesador de sistemas, bases de datos estadísticos y en muchas otras áreas. El mayor autovalor de un grafo, es decir el índice de un grafo es presentado como un muy importante invariante espectral. El índice de un grafo es un "valor medio dinámico" de los grados de sus vértices pues no solo toma en cuenta los grados de los vecinos inmediatos de un vértice si no que también da cuenta del grado de los vecinos de los vecinos, de los vecinos de los vecinos de los vecinos, etc.

Los árboles son grafos conectados acíclicos. Todo grafo posee a un árbol como sub-grafo. Esto permite una aproximación por árboles al estudio de grafos más complejos. El índice es también una medida de la extensión de la ramificación de un grafo, en especial de un árbol. Este autovalor de la matriz de adyacencia juega un importante rol en la modelación de propagación de un virus en las redes computacionales. Mientras más pequeño sea el índice de un grafo que representa a la red de trabajo, estará más protegida contra la propagación de posibles virus.

Este Trabajo de Tesis consta de 4 capítulos, en el primer capítulo son revisados notaciones y conceptos de Teoría de Grafos, Teoría de Matrices y de Teoría Espectral de Grafos que serán utilizados en el desarrollo de la Tesis. El capítulo 2, es un resumen de resultados sobre cotas superiores e inferiores del índice de un grafo y sobre cotas superiores e inferiores para el mayor autovalor Laplaciano sin signo de este. En el capítulo 3, como aplicación de un Teorema de Deutsch, se obtienen cotas superiores e inferiores para el índice de ciertos grafos. Este Teorema nos permite caracterizar los

grafos que alcanzan las cotas obtenidas, es decir los grafos en una familia de grafos con índice máximo y mínimo. Dichos grafos coinciden con los grafos de la familia con mayor autovalor Laplaciano sin signo, máximo y mínimo, respectivamente. En el capítulo 4, se obtiene una completa caracterización del grafo con el mayor índice y mayor autovalor maximal Laplaciano sin signo dados, el número de vértices y una cota superior al menor número de vértices que es necesario retirar para obtener un grafo bipartita. En este capítulo además se estudian cotas inferiores para el índice de un grafo como una aplicación del teorema de intercalamiento de autovalores para matrices simétricas demostrado por W. Haemers.

Capítulo 1

Preliminares y resultados previos.

Sea \mathcal{A} un conjunto y denotemos por $[\mathcal{A}]^k$ al conjunto de todos los conjuntos con exactamente k elementos provenientes de \mathcal{A} . Un *grafo* G es un par de conjuntos $(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G))$ tales que $\mathcal{E}(G) \subseteq [\mathcal{V}(G)]^2$. Los elementos de $\mathcal{V}(G)$, o \mathcal{V} , se llaman *vértices* y los elementos de $\mathcal{E}(G)$, o \mathcal{E} , se llaman *lados* o *aristas* del grafo. Los grafos se representan por medio de una composición de líneas y puntos. Si $|\mathcal{V}| = n$ y $|\mathcal{E}| = m$, decimos que G tiene orden n y tamaño m y lo llamamos (n, m) -grafo. Un vértice $v \in \mathcal{V}$ es *incidente* con un lado $e \in \mathcal{E}$ si $v \in e$. En ese caso también decimos que e incide con v . Si los vértices v y w inciden con un lado e del grafo entonces v y w son los *extremos* de e . Un lado con extremos x e y es generalmente denotado por xy o yx . Dos vértices distintos x e y son *adyacentes* o *vecinos* en G si $xy \in \mathcal{E}$. Decimos que dos grafos $G_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1)$ y $G_2 = (\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_2)$ son isomorfos, si existe biyección

$$\varphi : \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{V}_2$$

tal que $uv \in \mathcal{E}_1 \iff \varphi(u)\varphi(v) \in \mathcal{E}_2$. Si G_1 y G_2 son isomorfos, escribimos $G_1 \cong G_2$. Una función cuyo argumento son grafos y que asigna un mismo valor a grafos isomorfos es llamada *parámetro de grafo*. Por ejemplo el número de vértices, el número de lados y el número máximo de pares de lados adyacentes. Un grafo es llamado completo si cada par de vértices distintos, son adyacentes y el grafo completo con n vértices es denotado por K_n . Un grafo sin lados, pero con al menos un vértice es denominado vacío. El grafo sin vértices es llamado grafo nulo. Un grafo H es un *subgrafo* de un grafo G si los

conjuntos de vértices y de lados de H son subconjuntos de los vértices y de los lados de G , correspondientemente. Si el conjunto de vértices de H coincide con el conjunto de vértices de G llamamos a H , *subgrafo generador* de G . Decimos que H es *subgrafo inducido* de G si el conjunto de aristas de H coincide con el subconjunto aristas de G cuyos vértices están en H . Dado $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, *el subgrafo inducido* por \mathcal{U} , es el grafo cuyo conjunto de vértices es \mathcal{U} y tiene como aristas el subconjunto de aristas de G cuyos vértices están en \mathcal{U} . Este subgrafo es denotado por $G[\mathcal{U}]$. Si H es un subgrafo inducido de G el cual tiene a $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ como conjunto de vértices entonces el complemento de H en G es el subgrafo inducido $G[\mathcal{V} \setminus \mathcal{U}]$. Ciertos tipos de subgrafos surgen frecuentemente; entre estos están: un *clique* el cual es un subgrafo completo, este es necesariamente un subgrafo inducido. Un conjunto de vértices que induce un subgrafo vacío es llamado *conjunto independiente*. El número de vértices en un conjunto independiente máximo de G es llamado el número de independencia de G y es denotado por $\alpha(G)$. El orden del mayor clique de G es llamado el *número de clique* de G y es denotado por $\omega(G)$. Una *cobertura* K en un grafo G es un conjunto de vértices tal que cada arista de G es incidente con al menos un vértice de K . Una cobertura K es mínima si no existe otra cobertura K' en G con estrictamente menor número de vértices que K ; es minimal si no hay ninguna cobertura K_1 de G contenida propiamente en K . Observar que si K es una cobertura mínima entonces es cobertura minimal. El número de vértices de una cobertura mínima de G es el *número de cobertura* de G y es denotado por $\beta(G)$ para cualquier grafo con n vértices se cumple, $\alpha(G) + \beta(G) = n$, ver en [3].

Un grafo es *bipartita* si su conjunto de vértices puede ser dividido en dos subconjuntos no vacíos X e Y de forma que los extremos de cada arista de G sean de conjuntos distintos. El par (X, Y) es llamado una *bipartición* del grafo. Un grafo bipartita con bipartición (X, Y) es denotado por $G(X, Y)$. Un grafo *bipartita* $G(X, Y)$ es *completo* si cada vértice de X es adyacente a todos los vértices de Y . Si $G(X, Y)$ es completo con $|X| = p$ y $|Y| = q$, entonces $G(X, Y)$ es denotado por $K_{p,q}$. Un *camino* de longitud r desde x a y en el grafo es una secuencia de $r + 1$ vértices distintos partiendo de x y llegando a y tal que vértices consecutivos son adyacentes. Si hay un camino entre dos vértices arbitrarios de un grafo G entonces G es *conectado*, de otra forma es *desconectado*. Un subgrafo inducido de G que es maximal con respecto

a ser conectado es llamado una *componente conexa* de G o simplemente una *compo-*
nente de G . Un *ciclo* es un grafo conectado donde cada vértice tiene exactamente dos
vecinos. La longitud de un ciclo es su número de aristas: Un ciclo de longitud n es
denotado por C_n . Un grafo *acíclico* es aquel que no posee ciclos. Un grafo conectado
acíclico es llamado un *árbol* y un grafo acíclico es llamado un *bosque* pues cada com-
ponente es un árbol. Un grafo es llamado *q-regular* si cada vértice tiene q vecinos. El
complemento \overline{G} de un grafo G tiene el mismo conjunto de vértices que G , donde dos
vértices serán adyacentes en \overline{G} si y solo si no lo son en G . Una coloración propia de
 G es una función de \mathcal{V} sobre un conjunto finito de colores tal que a ningún par de
vértices adyacentes le son asignados el mismo color. El menor valor k tal que G pueda
ser propiamente coloreado con k colores es llamado el *número cromático* de G y es
denotado por $\chi(G)$. El conjunto de vértices de un color particular es llamado *clase de*
coloración y es un conjunto independiente. Si G es bipartita con al menos una arista,
entonces $\chi(G) = 2$. Si x es un vértice de G , el número de aristas incidentes con x en
 G es llamado el grado o valencia de G y es denotado por d_x o por $d(x)$. El mínimo y
el máximo grado de los vértices de G son denotados por $\delta(G)$ (o δ) y $\Delta(G)$ (o Δ),
respectivamente.

El *grafo de líneas* de un grafo G es el grafo $\mathcal{L}(G)$ con las aristas de G como sus
vértices, y donde dos aristas son adyacentes en $\mathcal{L}(G)$ si y solo si tienen un vértice en
común en G . La estrella $K_{1,n}$, también denotada por S_{n+1} , tiene el grafo completo
 K_n como su grafo de líneas. El camino P_n tiene grafo de líneas al camino P_{n-1} . El
ciclo C_n es isomorfo a su propio grafo de líneas. Si G es q -regular, entonces $\mathcal{L}(G)$
es $(2q - 2)$ -regular. Recíprocamente, si $\mathcal{L}(G)$ es regular entonces G es regular o un
grafo bipartita $G(X, Y)$, donde cada vértice en X tiene valencia p y cada vértice en
 Y tiene valencia q , ver en [15]. Un *conjunto de aristas de corte* en un grafo G es
un conjunto de aristas cuya eliminación incrementa el número de componentes de G .
En un grafo conectado G la *conectividad por arista* es el menor número de aristas
en un conjunto de aristas de corte y es denotado por $\kappa_1(G)$. Si un simple lado e
forma un conjunto de aristas de corte, entonces e es llamado un *puente* o un *lado de*
corte. Como el conjunto de lados adyacentes a un vértice es un conjunto de corte, la
conectividad por aristas de un grafo no es mayor que el mínimo de los grados, ver en

[15]. Un *conjunto de vértices de corte* en un grafo G es un conjunto cuya eliminación incrementa el número de componentes de G . La *conectividad por vértices* de un grafo conectado G es el número mínimo de vértices en un conjunto de vértices de corte y es denotado por $\kappa_0(G)$. Los grafos completos no poseen conjunto de vértices de corte pero por convención se tiene que $\kappa_0(K_n)$ es $n - 1$. De manera similar en [13] se ha definido la *bipartividad por vértices* de G como el menor número de vértices cuya eliminación convierte el grafo en un grafo bipartita y es denotado por $v_b(G)$. La *bipartividad por aristas* de G es el menor número de lados cuya eliminación convierte a G en un grafo bipartita y es denotada por $\epsilon_b(G)$. Para un grafo G , la desigualdad $v_b(G) \leq \epsilon_b(G)$ se cumple, ver en [13]. Un *conjunto dominante* en G es un conjunto de vértices, \mathcal{U} , tal que cada vértice que no está en \mathcal{U} es adyacente a un vértice en \mathcal{U} . La menor cardinalidad de un conjunto dominante es llamada el *número de dominación* de G , y es denotada por $\gamma(G)$. Si G es conectado con n vértices entonces $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$, ver en [3]. Un conjunto (κ, τ) -regular en G es un conjunto de vértices S tal que $G[S]$ es un subgrafo inducido κ -regular donde cada vértice que no está en S tiene exactamente τ vecinos en S . Un *matching* N en un grafo G es un conjunto de lados que no tienen un vértice en común. El tamaño de un matching es su número de lados. Un vértice contenido en una arista de N es *cubierto* por N . Un matching que cubre cada vértice de G es un *matching perfecto* o un *1-factor*. Claramente, un grafo que contiene un matching perfecto tiene un número par de vértices. Un *matching máximo* es un matching con el mayor número posible de lados. Un matching N de G es un *matching inducido dominante* (DIM) de G si cada arista de G , ya sea en N o no, comparte un vértice extremo con exactamente una arista en N . Un DIM es también llamado *conjunto dominante eficiente* de aristas. Observe que si N es un DIM de G , entonces existe una partición de $\mathcal{V}(G)$ en dos subconjuntos disjuntos $\mathcal{V}(N)$ y \mathcal{R} , donde \mathcal{R} resulta ser un conjunto independiente pues dos vértices conectados de \mathcal{R} incidirían en una arista sin extremos en N .

Sean G y H dos grafos con conjuntos de vértices disjuntos. La *unión* $G \cup H$ es el grafo con la unión de los vértices de G y H como conjunto de vértices y la unión de las aristas de G y H como conjunto de aristas. En la misma forma, el *join* de G y H es el grafo $\overline{G \cup H}$ el cual consiste del grafo $G \cup H$ incrementado con todas las aristas

xy de modo que uno de sus vértices extremo sea de G y el otro de H . El join de G y H (o de H y G) es denotado por $G \vee H$.

Realizando previamente un etiquetado de sus vértices, a un grafo le pueden ser asociadas diversas matrices. La matriz de adyacencia de un grafo con n vértices, G , se denota por $A_G = (a_{ij})$ y es una matriz de $n \times n$, donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i v_j \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Sean $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ los autovalores de la matriz A_G , al notar que A_G es una matriz no negativa, simétrica con diagonal nula vemos que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ y vía la norma de Frobenius de A_G , ver en [20], cuando G es un (n, m) -grafo, se cumple

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2m. \quad (1.1)$$

La matriz de grados de los vértices, D_G es la matriz diagonal de $n \times n$ cuya i -ésima entrada diagonal es el grado del vértice v_i . Una consecuencia del Teorema de Geršgorin, ver en [29], es que las matrices $L_G = D_G - A_G$ y $Q_G = D_G + A_G$ son positivas semidefinidas, ver en [9, 5]. Nos referiremos a estas matrices como las matrices Laplaciana y Laplaciana sin signo de G , respectivamente. Sus espectros (multiconjunto o lista de autovalores) son llamados el espectro Laplaciano y el espectro Laplaciano sin signo de G . Observemos que 0 es siempre un autovalor Laplaciano cuya multiplicidad corresponde al número de componentes de G , ver en [14], con \mathbf{e} el vector solo de unos como autovector asociado. Hay numerosos resultados sobre el radio espectral de L_G , ver en [2, 11, 22, 23], para encontrar cotas inferiores y superiores.

De ahora en adelante, $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$ representan los autovalores Laplaciano sin signo de G . En general, para cualquier matriz real simétrica M , denotamos por $\lambda_i(M)$ su i -ésimo mayor autovalor y por σ_M su espectro. Si α es un autovalor de M y \mathbf{x} uno de sus autovectores, decimos que (α, \mathbf{x}) es un autopar de M . El radio espectral de M es el mayor módulo entre los módulos de los autovalores de M y es denotado por ρ_M . Esto es,

$$\rho_M = \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_M\}$$

Si $M = A_G$, el espectro es denotado por σ_G y llamado el *espectro de G* , sus elementos son llamados *autovalores de G* .

Denotamos por \mathbb{J}_{pq} la matriz de solo unos de orden $p \times q$. Si $q = 1$, simplemente escribimos \mathbb{J}_p . Considerando un grafo G de orden n y un subconjunto de vértices $S \subseteq \mathcal{V}(G)$, el vector característico de S es el vector columna n -dimensional $\chi(S) \in \{0, 1\}^n$ cuyas componentes ordenadas son $\chi_1(S), \chi_2(S), \dots, \chi_n(S)$, donde

$$\chi_t(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in S \\ 0 & \text{si } t \notin S. \end{cases}$$

Sea $1 \leq t \leq n$. Denotamos por $D(\chi(S))$, la matriz diagonal de $n \times n$ cuya t -ésima entrada diagonal es $\chi_t(S)$.

1.1. Un resultado de Emeric Deutsch

Es bien conocido que la raíz de Perron (o autovalor maximal) de una matriz no negativa irreducible M se encuentra entre la menor y la mayor suma fila de M . Ver en [25]. En [12] este resultado es generalizado al caso de una matriz M particionada en bloques. El autor ha demostrado el siguiente resultado.

Teorema 1.1 [12, Proposición 1] Sea

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1k} \\ M_{21} & M_{22} & & M_{2k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \\ M_{k1} & \dots & & M_{kk} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

una matriz no negativa irreducible de orden $n \times n$, donde M_{ij} es una submatriz de orden $n_i \times n_j$ ($1 \leq i, j \leq k$). Claramente, $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Sean ξ_{ij} y v_{ij} la menor y mayor suma fila de M_{ij} , respectivamente. Consideramos las matrices

$$\Omega(M) = (\xi_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}, \quad F(M) = (v_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$$

Entonces

$$\rho_{\Omega(M)} \leq \rho_M \leq \rho_{F(M)}$$

La igualdad ocurre si y solo si

$$\Omega(M) = F(M)$$

Para un grafo G , usamos $\pi_t(G)$ (respectivamente, $\pi_t(Q)$) para denotar la t -ésima suma fila de A_G (respectivamente, Q_G). Sea $1 \leq t \leq n$, notar que $\pi_t(G)$ (respectivamente $\pi_t(Q)$), corresponde al grado del t -ésimo vértice de G (respectivamente, a dos veces el grado del t -ésimo vértice de G).

En consecuencia

$$\max\{\pi_t(G) : 1 \leq t \leq n\} = \Delta \quad \min\{\pi_t(G) : 1 \leq t \leq n\} = \delta$$

y

$$\max\{\pi_t(Q) : 1 \leq t \leq n\} = 2\Delta \quad \min\{\pi_t(Q) : 1 \leq t \leq n\} = 2\delta.$$

Observación 1.1 Observemos que para la matriz M en (1.2) podemos considerar la suma de la i -ésima fila de bloques, $M_i = \sum_{j=1}^k M_{ij}$, además la matriz diagonal de sumas fila de M_i , de orden $n_i \times n_i$, R_i , donde el t -ésimo elemento diagonal de R_i es la t -ésima suma fila M_i . Al definir $R = \text{diag}(R_1, R_2, \dots, R_k)$, vemos que R no es más que la matriz de las sumas filas de M . El teorema anterior puede ser aplicado en la matriz particionada $N = R^{-1}MR$, obteniéndose del Teorema de Deutsch que

$$\rho_{\Omega(N)} \leq \rho_M \leq \rho_{F(N)}.$$

El siguiente ejemplo muestra que estas cotas no necesariamente son más ajustadas que las del Teorema 1.1.

Ejemplo 1.1 Considerar la partición de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix},$$

donde

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego $R = \text{diag}(2, 2, 1, 2, 2, 3)$. Así

$$R^{-1}MR = N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix},$$

donde

$$N_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$N_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, N_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

El radio espectral de M (y de N) es $\rho_M = 2,1149$. En este caso las matrices Ω y F

en el Teorema 1.1 son:

	Ω	F	$\rho_{\Omega(M)}$	$\rho_{F(M)}$
M	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$	1	3
			$\rho_{\Omega(N)}$	$\rho_{F(N)}$
N	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$	0,6666	3.

Capítulo 2

Cotas para el índice y para el autovalor maximal Laplaciano sin signo de un grafo

En este capítulo se muestran cotas superiores e inferiores para el índice de un grafo. Estas cotas están en función de parámetros del grafo. Primero necesitamos observar que si d_1, \dots, d_n son los grados de los vértices de un (n, m) -grafo G , entonces

$$2m = d_1 + \dots + d_n. \quad (2.1)$$

2.1. Cotas para el índice de un grafo

Teorema 2.1 *Considerar el (n, m) -grafo G . Sean δ y Δ su menor y mayor grado vértice, respectivamente. Entonces*

$$\delta \leq \lambda_1 \leq \Delta. \quad (2.2)$$

Demostración. Sea A_G la matriz de adyacencia de G y sea $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ el autovector de A_G asociado a λ_1 . De la i -ésima ecuación de la igualdad $A\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}$, se tiene

$$\lambda_1 x_i = \sum_{i \sim j} x_j \quad 1 \leq i \leq n.$$

Sea $x_k > 0$ la mayor coordenada de \mathbf{x} , entonces

$$\lambda_1 x_k = \sum_{j \sim k} x_j \leq \Delta x_k$$

Dividiendo por x_k en ambos lados de la desigualdad, obtenemos la segunda desigualdad en (2.2). Para la primera desigualdad, observar que por cuocientes de Rayleigh, ver en [20],

$$\lambda_1 = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \left\{ \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \right\}.$$

Si \mathbf{e}_n el vector n -dimensional con solo unos. De lo anterior vemos que

$$\lambda_1(G) \geq \max_{\mathbf{x} \neq 0} \left\{ \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \right\} \geq \frac{\mathbf{e}_n^T A \mathbf{e}_n}{\mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_n} = \frac{2m}{n}. \quad (2.3)$$

Sean d_1, \dots, d_n los grados de los v ertices de G , luego de (2.1) obtenemos directamente que

$$2m = d_1 + \dots + d_n \geq n\delta \Rightarrow \frac{2m}{n} \geq \delta. \quad (2.4)$$

De (2.3) y (2.4) se infiere la primera desigualdad en (2.2). ■

Corolario 2.1 *Considerar el (n, m) -grafo G . Entonces*

$$\lambda_1(G) \geq \frac{2m}{n}.$$

Demostración. Es una consecuencia directa de la desigualdad en (2.3). ■

Observación 2.1 *Una consecuencia directa del teorema 1.1 en [25] es que si G es un (n, m) -grafo conectado las desigualdades en (2.2) son igualdades si y solo si G es un grafo Δ -regular.*

Teorema 2.2 *Sea un (n, m) -grafo G con autovalores $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Entonces*

$$\lambda_1 \leq \left(\frac{2m(n-1)}{n} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.5)$$

DemostraciïŁn. Despejando λ_1 de $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ tenemos $\lambda_1 = -\sum_{i=2}^n \lambda_i$. Aplicando desigualdad triangular, llegamos a que $|\lambda_1| \leq \sum_{i=2}^n |\lambda_i|$. Luego, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, ver en [20], y por (1.1), obtenemos

$$2m - \lambda_1^2 = \sum_{i=2}^n \lambda_i^2 \geq \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=2}^n |\lambda_i| \right)^2 \geq \frac{\lambda_1^2}{n-1}.$$

Así

$$\begin{aligned} 2m &\geq \frac{\lambda_1^2}{n-1} + \lambda_1^2 \\ 2m &\geq \lambda_1^2 \left(\frac{n}{n-1} \right) \\ \frac{2m(n-1)}{n} &\geq \lambda_1^2. \end{aligned}$$

Lo que es equivalente a la desigualdad en (2.5). ■

Teorema 2.3 *Sea G un grafo con n vértices v_1, \dots, v_n con grados d_1, \dots, d_n , respectivamente. Sea $Z = \sum_{i=1}^n d_i^2$. Entonces*

$$\lambda_1(G) \geq \sqrt{\frac{Z}{n}}. \quad (2.6)$$

DemostraciïŁn. Sea \mathbf{e}_n el vector n -dimensional con solo unos. Luego \sqrt{Z} es la norma Euclidiana de $\mathbf{v} = (A_G) \mathbf{e}_n$. Luego $Z = \|(A_G) \mathbf{e}_n\|^2 = \mathbf{e}_n^T (A_G)^2 \mathbf{e}_n$. Por otro lado usando cuocientes de Rayleigh para $(A_G)^2$, ver en [20], $\lambda_1^2 \geq \frac{\mathbf{e}_n^T (A_G)^2 \mathbf{e}_n}{\mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_n} = \frac{Z}{n}$. De donde se obtiene la desigualdad (2.6). ■

Teorema 2.4 *Sea H un subgrafo inducido de G con p vértices. Entonces*

$$\lambda_1 \geq \lambda_1(H) \quad y \quad \lambda_n \leq \lambda_p(H). \quad (2.7)$$

DemostraciïŁn. Aquí la matriz A_H es una submatriz principal de A_G . Luego si $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ son los autovalores de G y $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_p$ son los autovalores de H . El teorema de intercalamiento de autovalores para matrices simétricas, ver en [20], nos dice que

$$\lambda_i \geq \beta_i \geq \lambda_{n-p+i} \quad 1 \leq i \leq p.$$

Eligiendo $i = 1$, obtenemos la primera desigualdad en (2.7). Para la segunda tomaremos $i = p$. ■

Corolario 2.2 *Para un grafo G , sea Δ el grado vértice máximo. Entonces*

$$\lambda_1(G) \geq \sqrt{\Delta}. \quad (2.8)$$

Demostración. Sea $H = K_{1,\Delta} = S_{\Delta+1}$, la estrella con $\Delta+1$ vértices. Entonces, por nuestra hipótesis, G contiene un subgrafo inducido isomorfo a H , siendo el vértice v con grado máximo el "vértice raíz" de dicha estrella. Como el mayor autovalor $\lambda_1(S_{\Delta+1}) = \sqrt{\Delta}$, ver en [9], por Teorema 2.4 se obtiene la desigualdad en (2.8). ■

Recordemos que el número cromático $\chi(G)$ de G es el mínimo número de colores requeridos para colorear los vértices de modo que vértices adyacentes obtienen colores distintos.

Teorema 2.5 *Para cualquier grafo G*

$$\chi(G) \leq 1 + \lambda_1.$$

Demostración. Si $\chi(G) = 1$, entonces $\lambda_1 \geq 0$, lo cual es verdadero pues A_G es matriz no negativa, ver en [25]. Supongamos que $\chi(G) = p \geq 2$. Sea H un subgrafo inducido de G tal que $\chi(H) = p$ y además, supongamos que H es minimal respecto al número de vértices. Es decir, $\chi(H \setminus \{i\}) < p$ para cualquier vértice i de H .

Afirmación: $\delta(H) \geq p - 1$: Supongamos que i es un vértice de H con grado $d < p - 1$. Puesto que $\chi(H \setminus \{i\}) < p$, podemos colorear adecuadamente los vértices de $H \setminus \{i\}$ con a lo más con $p - 1$ colores. Como el grado de i es menor que $p - 1$, al adicionar el vértice i a H con todas sus correspondientes aristas, podemos continuar con la misma cantidad (menor o igual que $p - 1$) colores de los vértices de H , implicando que $\chi(H) \leq p - 1$, lo que contradice que H tiene número cromático p . Por lo tanto, el grado de cada vértice de H es al menos $p - 1$. Luego por Teorema 2.4, $\delta(H) \geq p - 1$, y en consecuencia se tiene

$$\lambda_1 \geq \lambda_1(H) \geq \delta(H) \geq p - 1,$$

por tanto

$$\lambda_1 \geq p - 1 = \chi(G) - 1.$$

De donde, el resultado, se sigue. ■

Lema 2.1 [4, Lema 3.21] Sea B una matriz simétrica de orden $n \times n$, particionada como:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

donde B_{11} es de orden $p \times p$. Entonces

$$\lambda_1(B) + \lambda_n(B) \leq \lambda_1(B_{11}) + \lambda_1(B_{22}).$$

Lema 2.2 [4, Lema 3.22] Sea B una matriz simétrica de orden $n \times n$, particionada como:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} & \dots & B_{1k} \\ B_{21} & 0 & \dots & B_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\lambda_1(B) + (k - 1)\lambda_n(B) \leq 0.$$

Teorema 2.6 Sea G un grafo con n vértices y con al menos una arista. Entonces

$$\chi(G) \geq 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_n}.$$

Demostración. Sea A_G la matriz de adyacencia de G . Si $\chi(G) = k$, entonces después de reetiquetar los vértices de G se puede escribir

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ A_{21} & 0 & \dots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lema anterior

$$\lambda_1(A_G) + (k - 1)\lambda_n(A_G) \leq 0.$$

Si G tiene al menos una arista entonces los autovalores de G suman cero pero no son todos iguales a cero, entonces $\lambda_n(A_G) < 0$.

Por lo tanto,

$$\chi(G) = k \geq 1 - \frac{\lambda_1(A_G)}{\lambda_n(A_G)} = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_n}.$$

■

Teorema 2.7 Sea $A = (a_{ij})$ una matriz simétrica $(0, 1)$ con traza cero. Sea $2m$ el número de 1's de A . Entonces

$$\rho(A) \leq \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8m} \right).$$

La igualdad se cumple si y solo si

$$m = \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$$

y PAP^T tiene la forma $\begin{pmatrix} J_k^0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ para alguna matriz permutación P , y $J_k^0 = A(K_k)$ es la matriz de orden $k \times k$ con 0's en la diagonal principal y 1's en otros lugares.

Demostración. Sean A_i la i -ésima fila de A , y r_i la i -ésima suma fila. Sea $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ un autovector de A de longitud uno correspondiente al radio espectral $\rho(A)$. Sea $\mathbf{x}(i)$ el vector obtenido de \mathbf{x} reemplazando x_i con 0. Como

$$A\mathbf{x} = \rho(A)\mathbf{x}$$

se tiene

$$A_i\mathbf{x} = A_i\mathbf{x}(i).$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, resulta

$$\rho(A)^2 x_i^2 = \|A_i\mathbf{x}(i)\|^2 \leq \|A_i\|^2 \|\mathbf{x}(i)\|^2 = r_i(1 - x_i^2), \quad (2.9)$$

sumando sobre $1 \leq i \leq n$ se obtiene

$$\rho(A)^2 \leq 2m - \sum_i r_i x_i^2.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
 \sum_i r_i x_i^2 &= \sum_{i \neq j} x_i^2 a_{ij} \\
 &= \sum_{i < j} (x_i^2 + x_j^2) a_{ij} \\
 &\geq \sum_{i < j} 2x_i x_j a_{ij} \\
 &= \sum_{i \neq j} x_i a_{ij} x_j \\
 &= \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \\
 &= \rho(A).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\rho(A)^2 \leq 2m - \rho(A)$$

lo cual implica

$$\begin{aligned}
 \rho(A)^2 + \rho(A) - 2m &\leq 0 \\
 \rho(A) &\leq \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8m} \right).
 \end{aligned}$$

Para obtener la igualdad, todas las desigualdades en el argumento anterior deben ser igualdades. En particular, de (2.9) se tiene

$$(x_i^2 + x_j^2) a_{ij} = 2x_i x_j a_{ij}$$

para todo $i < j$. Por tanto, ya sea

$$a_{ij} = 0 \quad \text{o} \quad x_i = x_j.$$

Así, la elección de P es de modo que P_x tiene la forma

$$P_x = (y_1, y_1, \dots, y_1, y_2, y_2, \dots, y_2, \dots, y_j, y_j, \dots, y_j)$$

donde y_1, y_2, \dots, y_j son distintos. Así, resulta que PAP^T tiene la forma diagonal en bloque

$$PAP^T = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_j \end{pmatrix},$$

donde cada B_i tiene un autovector $(1, 1, \dots, 1)^T$. Por consiguiente, cada B_i tiene sumas filas iguales, entonces $\rho(A)$ es la máxima suma fila de A . Por lo tanto, $\sqrt{1 + 8m}$ es un entero, entonces

$$m = \binom{k}{2}.$$

Entonces,

$$\rho(A) = k - 1$$

y se deduce fácilmente que existe un bloque distinto de cero $B_1 = J_k^0$, lo cual completa la prueba. ■

Para el siguiente resultado necesitamos un lema previo.

Lema 2.3 *Sea A una matriz no negativa con radio espectral ρ . Considere $h(x)$ un polinomio en la variable x . Entonces*

$$\min_{1 \leq i \leq n} \{\pi_i(h(A))\} \leq h(\rho) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{\pi_i(h(A))\}.$$

Teorema 2.8 [19] *Sea G un grafo simple con n vértices y m lados. Sean $\delta = \delta(G)$ el menor grado de los vértices de G y $\rho(G)$ el radio espectral de la matriz de adyacencia A de G . Entonces*

$$\rho(G) \leq \frac{\delta - 1 + \sqrt{(\delta + 1)^2 + 4(2m - \delta n)}}{2}. \quad (2.10)$$

La igualdad se cumple si y solo si G es o bien un grafo regular o un grafo bigrado en el que cada vértice es de grado δ o $n - 1$.

Demostración. Notar que la v -ésima suma fila de A^k , $\pi_v(A^k)$ es el número de caminos de longitud k en G que comienzan en v . En particular, $\pi_v(A)$ es $d(v)$ y $\pi_v(A^2) = \sum_{u \sim v} d(u)$. Se tiene

$$\begin{aligned} \pi_v(A^2) &= \sum_{u \sim v} d(u) \\ &= 2m - d(v) - \sum_{u \sim v, u \neq v} d(u) \\ &\leq 2m - d(v) - (n - d(v) - 1)\delta \\ &= 2m + (\delta - 1)d(v) - \delta(n - 1). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\pi_v(A^2 - (\delta - 1)A) \leq 2m - \delta(n - 1).$$

Como esto se cumple para cada vértice $v \in \mathcal{V}(G)$ por Lema 2.3 se infiere que

$$\rho(G)^2 - (\delta - 1)\rho(G) \leq 2m - \delta(n - 1)$$

$$\rho(G)^2 - (\delta - 1)\rho(G) - (2m - \delta(n - 1)) \leq 0.$$

Resolviendo la inecuación cuadrática, se obtiene

$$\rho(G) \leq \frac{\delta - 1 + \sqrt{(\delta - 1)^2 + 4(2m - \delta(n - 1))}}{2}.$$

Lo que implica (2.10). Para que la igualdad se cumpla, todas las desigualdades en el argumento anterior deben ser igualdades. En particular, se tiene que

$$\sum_{u \approx v, u \neq v} d(u) = (n - d(v) - 1)\delta,$$

para todo $v \in \mathcal{V}(G)$. Por lo tanto, ya sea $d(v) = n - 1$ o $d(u) = \delta$, para todo $u \in \mathcal{V}(G)$, $u \approx v$, lo cual implica que o bien G es un grafo regular o G es un grafo bigrado en el que cada vértice es de grado δ o $n - 1$.

A la inversa, si G es un grafo regular la igualdad se satisface. Sea G un grado bigrado en el que cada vértice es de grado δ o $n - 1$. Si $v \in \mathcal{V}(G)$, $d(v) = n - 1$, entonces

$$\begin{aligned} \pi_v(A^2 - (\delta - 1)A) &= \pi_v(A^2) - (\delta - 1)\pi_v(A) \\ &= 2m - d(v) - (\delta - 1)d(v) \\ &= 2m - \delta(n - 1). \end{aligned}$$

Si $d(v) = \delta < n - 1$, entonces $d(u) = \delta$, donde $u \approx v$ y $u \neq v$. Entonces

$$\begin{aligned} \pi_v(A^2 - (\delta - 1)A) &= \pi_v(A^2) - (\delta - 1)\pi_v(A) \\ &= 2m - d(v) - \sum_{u \approx v, u \neq v} d(u) - (\delta - 1)d(v) \\ &= 2m - \delta - (n - 1 - \delta)\delta - (\delta - 1)d(v) \\ &= 2m - \delta(n - 1), \end{aligned}$$

y

$$\rho(G) = \frac{\delta - 1 + \sqrt{(\delta + 1)^2 + 4(2m - \delta n)}}{2}.$$

Lo que completa la prueba. ■

Corolario 2.3 *Sea G un grafo simple conectado con n vértices y m lados. Entonces*

$$\rho(G) \leq \sqrt{2m - n + 1}.$$

La igualdad se cumple si y solo si G es la estrella $K_{1,n-1}$ o el grafo completo K_n .

Demostraciï£n. El resultado se sigue por $\delta \geq 1$ y el Teorema anterior. ■

2.2. Cotas para el autovalor maximal Laplaciano sin signo

Teorema 2.9 *Sean $s_1 \geq \dots \geq s_n$ y $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ los autovalores Laplacianos sin signo y los autovalores de un grafo G . Entonces*

$$2\lambda_1 \leq s_1.$$

Demostraciï£n. Puesto que $Q_G = 2A_G + L_G$, al considerar \mathbf{x} un autovector unitario de A_G asociado a su autovalor maximal (índice de G) y usando cociente, obtenemos

$$s_1 \geq \mathbf{x}^T (2A_G + L_G) \mathbf{x} = 2\mathbf{x}^T (A_G) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T L_G \mathbf{x} \geq 2\mathbf{x}^T (A_G) \mathbf{x} = 2\lambda_1.$$

La última desigualdad es debida a que $\mathbf{x}^T L_G \mathbf{x} \geq 0$, pues L_G es semidefinida positiva.

■

Corolario 2.4 *Para cualquier grafo G ,*

$$2\chi(G) \leq 2 + s_1.$$

Demostraciï£n. Este resultado es una consecuencia directa del Teorema 2.5. ■

Teorema 2.10 Considerar el (n, m) -grafo G . Sean δ y Δ su menor y mayor grado vértice, respectivamente. Entonces

$$2\delta \leq s_1 \leq 2\Delta. \quad (2.11)$$

DemostraciïŁn. Sea Q_G la matriz Laplaciana sin signo G y sea $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ el autovector de Q_G asociado a s_1 . De la i -ésima ecuaciïŁn de la igualdad $(Q_G)\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}$, se tiene

$$s_1 x_i = d_i + \sum_{i \sim j} x_j \quad 1 \leq i \leq n.$$

Sea $x_k > 0$ la mayor coordenada de \mathbf{x} , entonces

$$s_1 x_k = d_k x_k + \sum_{j \sim k} x_j \leq \Delta x_k + \Delta x_k$$

Dividiendo por x_k en ambos lados de la desigualdad, obtenemos la segunda desigualdad en (2.11). Para la primera desigualdad, observar que por cuocientes de Rayleigh, ver en [20],

$$s_1 = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \left\{ \frac{\mathbf{x}^T (Q_G) \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \right\}.$$

Si \mathbf{e}_n el vector n -dimensional con solo unos. De lo anterior vemos que

$$s_1(G) \geq \max_{\mathbf{x} \neq 0} \left\{ \frac{\mathbf{x}^T (Q_G) \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \right\} \geq \frac{\mathbf{e}_n^T (Q_G) \mathbf{e}_n}{\mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_n} = \frac{4m}{n}. \quad (2.12)$$

Sean d_1, \dots, d_n los grados de los vértices de G , luego de (2.1) obtenemos directamente que

$$2m = d_1 + \dots + d_n \geq n\delta \Rightarrow \frac{4m}{n} = 2\frac{2m}{n} \geq 2\delta. \quad (2.13)$$

De (2.12) y (2.13) se infiere la primera desigualdad en (2.11). ■

Corolario 2.5 Considerar el (n, m) -grafo G . Entonces

$$s_1(G) \geq \frac{4m}{n}.$$

DemostraciïŁn. Es una consecuencia directa de la desigualdad en (2.12). ■

Capítulo 3

Composición generalizada de grafos

Sean los grafos G_1 y G_2 , con conjuntos de vértices disjuntos, el join de G_1 y G_2 es el grafo $G_1 \vee G_2$ tal que $\mathcal{V}(G_1 \vee G_2) = \mathcal{V}(G_1) \cup \mathcal{V}(G_2)$ y $\mathcal{E}(G_1 \vee G_2) = \mathcal{E}(G_1) \cup \mathcal{E}(G_2) \cup \{ij : i \in \mathcal{V}(G_1) \wedge j \in \mathcal{V}(G_2)\}$. Una generalización de las operaciones con join fueron introducidas en [7] como sigue:

Definición 3.1 Considerar una familia de k grafos, $\mathcal{F} = \{G_1, \dots, G_k\}$, donde cada grafo G_i tiene orden n_i , para $1 \leq i \leq k$, y un grafo H tal que $\mathcal{V}(H) = \{1, \dots, k\}$. Cada vértice $i \in \mathcal{V}(H)$ es asignado al grafo $G_i \in \mathcal{F}$. La composición generalizada o H -join de G_1, \dots, G_k es el grafo $G = H[G_1, \dots, G_k]$, tal que $\mathcal{V}(G) = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{V}(G_i)$ y

$$\mathcal{E}(G) = \left(\bigcup_{i=1}^k \mathcal{E}(G_i) \right) \cup \left(\bigcup_{rs \in \mathcal{E}(H)} \{ij : i \in \mathcal{V}(G_r), j \in \mathcal{V}(G_s)\} \right).$$

Acá también usamos la notación $G = \bigvee_H \mathcal{F}$ para $G = H[G_1, \dots, G_k]$.

Ejemplo 3.1 Sean P_3, K_3, P_2 y C_4 el camino con 3 vértices, el grafo completo con 3 vértices, el camino con 2 vértices y el ciclo con 4 vértices, respectivamente. Considerar el H -join $G = P_3[K_3, P_2, C_4]$. Ver la figura más abajo.

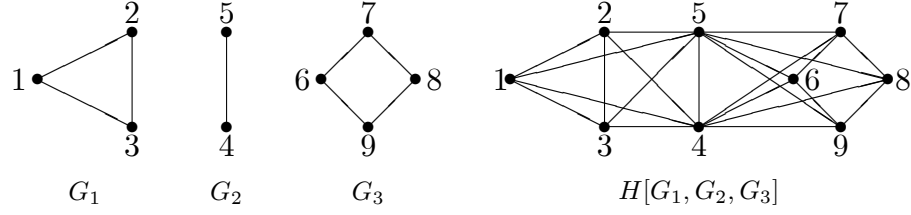


Figura 3.1:

3.1. Aplicaciones de los resultados de Deutsch a composiciones generalizadas de grafos

Primero aplicaremos el Teorema 1.1 a las matrices de adyacencia y Laplaciana sin signo del grafo $G_1 \vee G_2$.

Teorema 3.1 *Sea $G = G_1 \vee G_2$ el join de los grafos G_1 y G_2 . Sean n_1 y n_2 los órdenes de G_1 y G_2 , respectivamente. Denotemos por ρ y q los radios espectrales de la matriz de adyacencia y Laplaciana sin signo de G , respectivamente. Sean $\delta(G_i)$ (o δ_i) y $\Delta(G_i)$ (o Δ_i), los mínimos y máximos grado vértices, respectivamente, para $i = 1, 2$. Entonces*

$$\frac{\delta_1 + \delta_2 + \sqrt{(\delta_1 - \delta_2)^2 + 4n_1 n_2}}{2} \leq \rho \leq \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \sqrt{(\Delta_1 - \Delta_2)^2 + 4n_1 n_2}}{2}$$

y

$$\frac{2\delta_1 + 2\delta_2 + n_1 + n_2 + \sqrt{(n_1 + n_2 - 2\delta_1 - 2\delta_2)^2 - 8(\delta_1 n_2 + \delta_2 n_1)}}{2} \leq q \leq \frac{2\Delta_1 + 2\Delta_2 + n_1 + n_2 + \sqrt{(n_1 + n_2 - 2\Delta_1 - 2\Delta_2)^2 - 8(\Delta_1 n_2 + \Delta_2 n_1)}}{2}.$$

La igualdad, en ambas desigualdades, se cumple si y solo si G_1 y G_2 son grafos regulares.

Demostraci3n. Observar que

$$A_G = \begin{pmatrix} A_{G_1} & \mathbb{J}_{n_1 n_2} \\ \mathbb{J}_{n_2 n_1} & A_{G_2} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

y

$$Q_G = \begin{pmatrix} Q_{G_1} + n_2 I_{n_1} & \mathbb{J}_{n_1 n_2} \\ \mathbb{J}_{n_2 n_1} & Q_{G_2} + n_1 I_{n_2} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Usamos directamente el Teorema 1.1 para obtener

$$\rho_\Omega \leq \rho \leq \rho_F,$$

y

$$\rho_{\tilde{\Omega}} \leq q \leq \rho_{\tilde{F}},$$

$$\text{donde } \Omega = \begin{pmatrix} \delta_1 & n_2 \\ n_1 & \delta_2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \Delta_1 & n_2 \\ n_1 & \Delta_2 \end{pmatrix}, \tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 2\delta_1 + n_2 & n_2 \\ n_1 & 2\delta_2 + n_1 \end{pmatrix}, \text{ y } \tilde{F} = \begin{pmatrix} 2\Delta_1 + n_2 & n_2 \\ n_1 & 2\Delta_2 + n_1 \end{pmatrix}$$

El resultado se sigue del cálculo directo de los mayores autovalores de las matrices $\Omega, F, \tilde{\Omega}$, y \tilde{F} . Para el caso de la igualdad, se utiliza de nuevo el Teorema 1.1 notando que $\delta_i = \Delta_i$ si y solo si G_i es regular, para $i = 1, 2$. ■

Observación 3.1 Si G_1 y G_2 son grafos regulares con regularidades κ_1 y κ_2 , respectivamente un resultado más fuerte sostiene, los autovalores de $\Omega (= F)$ y $\tilde{\Omega} (= \tilde{F})$ son autovalores de G y Q_G , respectivamente. Ver [5, 18].

Notación 3.2 Desde este punto $a_{ij} = a_{ij}(H)$, es la entrada (i, j) de la matriz de adyacencia A_H .

Teorema 3.3 Sea H un grafo tal que $\mathcal{V}(H) = \{1, \dots, k\}$. Sea $\mathcal{F} = \{G_1, \dots, G_k\}$ una familia de k grafos. Considerar $G = H[G_1, \dots, G_k]$ el H -join de \mathcal{F} . Denotar por ρ el radio espectral de la matriz de adyacencia de G y por $\delta(G_i)$ (o δ_i) y $\Delta(G_i)$ (o Δ_i), los mínimos y máximos grado vértices de G_i con $1 \leq i \leq k$. Considerar las matrices de orden $k \times k$, $\Omega = (\xi_{ij})$ y $F = (v_{ij})$, donde

$$\xi_{ij} = \begin{cases} \delta_i, & \text{SI } i = j \\ a_{ij}n_j, & \text{SI } i \neq j \end{cases}$$

y

$$v_{ij} = \begin{cases} \Delta_i, & \text{SI } i = j \\ a_{ij}n_j, & \text{SI } i \neq j. \end{cases}$$

Entonces

$$\rho_\Omega \leq \rho \leq \rho_F.$$

La igualdad, en ambas desigualdades, ocurre si y solo si G_i es un grafo regular, para todo $1 \leq i \leq k$.

DemostaciïŁ;n. En vista de que

$$A_G = \begin{pmatrix} A_{G_1} & a_{12}\mathbb{J}_{n_1 n_2} & \cdots & & a_{1k}\mathbb{J}_{n_1 n_k} \\ a_{12}\mathbb{J}_{n_2 n_1} & A_{G_2} & \cdots & & a_{2k}\mathbb{J}_{n_2 n_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1k}\mathbb{J}_{n_{k-1} n_1} & a_{2p}\mathbb{J}_{n_{p-1} n_2} & \cdots & A_{G_{k-1}} & a_{k,k-1}\mathbb{J}_{n_{k-1} n_k} \\ a_{1k}\mathbb{J}_{n_k n_1} & a_{2k}\mathbb{J}_{n_k n_2} & \cdots & a_{k,k-1}\mathbb{J}_{n_k n_{k-1}} & A_{G_k} \end{pmatrix}$$

Si $\pi_t(M)$ la suma t -ésima suma fila de M . El resultado se sigue notando que

$$\min_t \pi_t(A_{G_i}) = \delta_i \quad \max_t \pi_t(A_{G_i}) = \Delta_i$$

junto con

$$\pi_t(a_{ij}\mathbb{J}_{n_i n_j}) = a_{ij}n_j, \quad \forall t$$

entonces, usando directamente el Teorema 1.1, se obtiene el resultado. En el caso de la igualdad, el Teorema 1.1 es usado notando que $\min_t \pi_t(A_{G_i}) = \max_t \pi_t(A_{G_i})$ si y solo si G_i es regular, $1 \leq i \leq k$. ■

ObservaciïŁ;n 3.2 Si $\mathcal{F} = \{G_1, \dots, G_k\}$ es una familia de k grafos, donde cada grafo G_i tiene regularidad κ_i , respectivamente un resultado más fuerte sostiene que los autovalores de $\Omega (= F)$ son autovalores de A_G . Ver [5, 18].

Para el caso Laplaciano sin signo se puede dar un resultado análogo. Para eso necesitamos las siguientes definiciones. Para $1 \leq i \leq k$, definir

$$N_i = \sum_{ij \in \mathcal{E}(H)} n_j$$

Teorema 3.4 Sea H un grafo tal que $\mathcal{V}(H) = \{1, \dots, k\}$. Sea $\mathcal{F} = \{G_1, \dots, G_k\}$ una familia de k grafos. Considerar $G = H[G_1, \dots, G_k]$ el H -join de \mathcal{F} . Denotar por q el radio espectral de la matriz Laplaciana sin signo de G y por $\delta(G_i)$ (o δ_i) y $\Delta(G_i)$ (o

Δ_i), los mínimos y máximos grado vértices de G_i , con $1 \leq i \leq k$. Considerar las $k \times k$ matrices $\tilde{\Omega} = (\xi_{ij})$ y $\tilde{F} = (v_{ij})$, donde

$$\xi_{ij} = \begin{cases} 2\delta_i + N_i, & \text{SI } i = j \\ a_{ij}n_j, & \text{SI } i \neq j \end{cases}$$

y

$$v_{ij} = \begin{cases} 2\Delta_i + N_i, & \text{SI } i = j \\ a_{ij}n_j, & \text{SI } i \neq j \end{cases}$$

Entonces

$$\rho_{\tilde{\Omega}} \leq q \leq \rho_{\tilde{F}}$$

La igualdad se cumple si y solo si G_i son grafos regulares para todo $1 \leq i \leq k$.

DemostraciïŁjn. Notando que

$$Q_G = \begin{pmatrix} Q_{G_1} + N_1I & a_{12}\mathbb{J}_{n_1n_2} & \cdots & & a_{1k}\mathbb{J}_{n_1n_k} \\ a_{12}\mathbb{J}_{n_2n_1} & Q_{G_2} + N_2I & \cdots & & a_{2k}\mathbb{J}_{n_2n_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1k}\mathbb{J}_{n_{k-1}n_1} & a_{2p}\mathbb{J}_{n_{p-1}n_2} & \cdots & Q_{G_{k-1}} + N_{k-1}I & a_{k,k-1}\mathbb{J}_{n_{k-1}n_k} \\ a_{1k}\mathbb{J}_{n_kn_1} & a_{2k}\mathbb{J}_{n_kn_2} & \cdots & a_{k,k-1}\mathbb{J}_{n_kn_{k-1}} & Q_{G_k} + N_kI \end{pmatrix}$$

Sea $\pi_t(M)$ como la demostraciïŁjn del Teorema 3.3. El resultado se sigue del Teorema 1.1 junto con observar que

$$\min\{\pi_t(Q_{G_i} + N_iI)\} = 2\delta_i + N_i \quad \max\{\pi_t(Q_{G_i} + N_iI)\} = 2\Delta_i + N_i,$$

respectivamente. Para la igualdad, utilizamos el caso de igualdad del Teorema 1.1, notando que $\min_t\{\pi_t(Q_{G_i} + N_iI)\} = \max_t\{\pi_t(Q_{G_i} + N_iI)\}$ si y solo si G_i es regular, para todo $1 \leq i \leq k$. ■

ObservaciïŁjn 3.3 Si $\mathcal{F} = \{G_1, \dots, G_k\}$ es una familia de k grafos, donde cada grafo G_i tiene regularidad κ_i , un fuerte resultado sostiene que todos los autovalores de $\tilde{\Omega}(= \tilde{F})$ son autovalores de Q_G . Ver [5, 18].

Capítulo 4

Otros resultados de esta tesis

4.1. Sobre subconjuntos (κ, τ)

Considerar un grafo G con un subconjunto de vértices $S \subseteq \mathcal{V}(G)$ es (κ, τ) -regular. Sean δ y Δ los grados de vértice máximo y mínimo de G , respectivamente. Sean α y β tales que

$$\alpha \leq |N_G(i) \cap S^C| \leq \beta \quad \text{para todo } i \in \mathcal{V}(G), \quad (4.1)$$

es posible notar que $\beta = \max\{\Delta - \kappa, \Delta - \tau\}$ y $\alpha = \min\{\delta - \kappa, \delta - \tau\}$. Aplicando el Teorema 1.1 es posible establecer en esta sección, los siguientes resultados.

Teorema 4.1 *Sea G un grafo con subconjunto de vértices $S \subseteq \mathcal{V}(G)$, (κ, τ) -regular. Sean α y β como en (4.1). Entonces*

$$\frac{\kappa + \alpha}{2} + \frac{\sqrt{(\kappa - \alpha)^2 + 4\alpha\tau}}{2} \leq \rho_G \leq \frac{\kappa + \beta}{2} + \frac{\sqrt{(\kappa - \beta)^2 + 4\beta\tau}}{2}$$

La igualdad se cumple si y solo si $\beta = \alpha$.

Demostración. Si $W \subseteq \mathcal{V}(G)$ denotamos por H_W al subgrafo inducido por W en G . Tomando $W = S$, se tiene

$$A_G = \begin{pmatrix} A_{H_S} & B \\ B' & A_{H_{(\mathcal{V}-S)}} \end{pmatrix}$$

Entonces para un t arbitrario, la t -ésima suma fila de B , $\pi_t(B)$ cumple, $\alpha \leq \pi_t(B) \leq \beta$.

Análogamente, para un t arbitrario, la t -ésima suma fila de B' se tiene, $\pi_t(B') = \tau$. Por otra parte, $\alpha \leq \pi_t(A_{H(\mathcal{V}-S)}) \leq \beta$, y $\pi_t(A(H_s)) = \kappa$. Ahora usando el Teorema 1.1 con las identificaciones apropiadas, se obtienen matrices.

$$\Omega = \begin{pmatrix} \kappa & \alpha \\ \tau & \alpha \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \kappa & \beta \\ \tau & \beta \end{pmatrix}$$

cuyos mayores autovalores son

$$\rho_\Omega = \frac{\kappa + \alpha}{2} + \frac{\sqrt{(\kappa - \alpha)^2 + 4\alpha\tau}}{2} \quad \text{y} \quad \rho_F = \frac{\kappa + \beta}{2} + \frac{\sqrt{(\kappa - \beta)^2 + 4\beta\tau}}{2}.$$

Por lo tanto, el resultado para el caso de igualdad se sigue del Teorema 1.1. ■

Teorema 4.2 Sea G un grafo con subconjunto de vértices $S \subseteq \mathcal{V}(G)$, (κ, τ) -regular. Sean α y β como en (4.1). Entonces

$$\frac{1}{2} \left(3\alpha + 2\kappa + \tau + \sqrt{\alpha^2 + \tau^2 + 4\kappa^2 - 4\alpha\kappa + 6\alpha\tau - 4\kappa\tau} \right) \leq q_G \leq \frac{1}{2} \left(3\beta + 2\kappa + \tau + \sqrt{\beta^2 + \tau^2 + 4\kappa^2 - 4\beta\kappa + 6\beta\tau - 4\kappa\tau} \right).$$

La igualdad se cumple si y solo si $\beta = \alpha$.

DemostraciïŁn. De manera similar a la demostraciïŁn del teorema anterior, referido a la matriz de adyacencia de G , la matriz Laplaciana sin signo de G es

$$Q_G = \begin{pmatrix} A_{H_S} + \kappa I_{|S|} + D_{|S|} & B \\ B' & A_{H(\mathcal{V}-S)} + D_{|\mathcal{V}-S|} + \tau I_{|\mathcal{V}-S|} \end{pmatrix},$$

donde las matrices $D_{|S|}$ y $D_{|\mathcal{V}-S|}$ de órdenes $|S|$ y $|\mathcal{V} - S|$, respectivamente son las diagonales de las sumas filas de B y B' , respectivamente. Ahora, aplicando el Teorema 1.1 a lo definido en el enunciado, se obtienen las matrices

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 2\kappa + \alpha & \alpha \\ \tau & 2\alpha + \tau \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{F} = \begin{pmatrix} 2\kappa + \beta & \beta \\ \tau & 2\beta + \tau \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores mayores son

$$q_{\tilde{\Omega}} = \frac{1}{2} \left(3\alpha + 2\kappa + \tau + \sqrt{\alpha^2 + \tau^2 + 4\kappa^2 - 4\alpha\kappa + 6\alpha\tau - 4\kappa\tau} \right)$$

y

$$\rho_{\tilde{F}} = \frac{1}{2} \left(3\beta + 2\kappa + \tau + \sqrt{\beta^2 + \tau^2 + 4\kappa^2 - 4\beta\kappa + 6\beta\tau - 4\kappa\tau} \right).$$

El caso de la igualdad se sigue directamente desde el caso de igualdad del Teorema 1.1.

■

4.2. Una aplicación al estudio del autovalor maximal Laplaciano sin signo del grafo usando el número de bipartividad por vértices

Los resultados de esta sección se encuentran en [26]. Como una aplicación, considerar las siguientes definiciones. La conectividad algebraica de un grafo G , definida como el segundo menor autovalor Laplaciano, μ es uno de los autovalores Laplacianos más importantes. En los últimos años, la conectividad algebraica ha recibido mucha atención, ver [1, 14, 21, 23, 27, 28] y las referencias allí citadas. Un grafo es conectado si y solo si $\mu > 0$. El grafo completo K_n tiene $\mu = n$ (que es igual al mayor autovalor Laplaciano de K_n). Por otro lado, G tiene más de una componente conectada si y solo si $\mu = 0$. La conectividad por vértices (o simplemente conectividad) de un grafo G , denotado por $\gamma(G)$, es el mínimo número de vértices de G cuya eliminación desconecta G , ver [14]. La conectividad por aristas de G , en este trabajo denotada por $\varphi(G)$, es el mínimo número de aristas cuya eliminación desconecta G . Fiedler en [14] ha demostrado que $2\varphi(G) \left(1 - 2\cos\frac{\pi}{n}\right) \leq \mu$ y si $G \not\cong K_n$, $\mu \leq \gamma(G)$. El mínimo número de vértices (respectivamente, aristas) cuya eliminación produce un grafo bipartito G se llama bipartividad por vértices (respectivamente, bipartividad por aristas) de G y se denota $v_b(G)$ (respectivamente, $\epsilon_b(G)$), ver [13]. Sea s_n el menor autovalor de $Q(G)$. Recientemente Fan y Fallat en [13] han establecido una relación entre s_n , $v_b(G)$ y $\epsilon_b(G)$ que es una reminiscencia de una relación similar que involucra μ , $\gamma(G)$ y $\varphi(G)$.

Consideremos el conjunto,

$$\Sigma_k(n) = \{G = (\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G)) : G \text{ es conectado, } |\mathcal{V}(G)| = n \text{ y } v_b(G) \leq k\}.$$

Lema 4.1 *Sea G un grafo conectado. Si $i, j \in \mathcal{V}(G)$ son tal que $ij \notin \mathcal{E}(G)$, y si G^+ es el grafo obtenido de G agregando una nueva arista ij . Entonces*

$$\rho_{G^+} > \rho_G \quad \text{y} \quad q_{G^+} > q_G$$

Demostraciïn. Este resultado es una consecuencia directa del Teorema de Dominaciïn por una matriz no negativa irreducible en [25, Teorema 2.1]. ■

Sea $\widehat{G} \in \Sigma_k(n)$ tales que $q_{\widehat{G}}$ cumple $q_{\widehat{G}} \geq q_G$, para todo $G \in \Sigma_k(n)$. Sea $k_0 \leq k$ tal que $3 \leq n - k_0$. Considerar $1, \dots, k_0 \in V(\widehat{G})$ tales que $\widehat{G} \setminus \{1, \dots, k_0\}$ es un grafo bipartito con biparticiïn $\{X, Y\}$. Sean $r = |X|$ y $s = |Y|$ entonces $r + s + k_0 = n$. Supongamos que existan vïrtices $i \in X$ y $j \in Y$ tales que $ij \notin \mathcal{E}(G)$. El grafo $\widehat{G} + ij \in \Sigma_k(n)$ y por Lema 4.1, se tiene que $q_{\widehat{G}+ij} > q_{\widehat{G}}$ lo cual es una contradicciïn. Entonces

$$\widehat{G} \setminus \{1, \dots, k_0\} = K_{r,s} =: \overline{K}_r \vee \overline{K}_s.$$

Por otra parte, supongamos que existen vïrtices $i \in X$ y $j \in Y$ tales que $ij \notin \mathcal{E}(G)$. El grafo $\widehat{G} + ij \in \Sigma_k(n)$ y por Lema 4.1, se tiene $q_{\widehat{G}+ij} > q_{\widehat{G}}$ lo cual es, nuevamente una contradicciïn. Entonces

$$\widehat{G}[\{1, \dots, k_0\}] = K_{k_0}.$$

Falta probar que $k_0 = k$. Asumir lo contrario, es decir, $k_0 \leq k - 1$ y $s + r = n - k_0 > n - k \geq 3$. Asï, $s + r > 3$, implicando que $r \geq 2$ o $s \geq 2$. Suponer que $r \geq 2$. Entonces el grafo $K_{k_0} \vee (\overline{K}_r \vee \overline{K}_s)$ tiene al subgrafo K_{k_0+1} formado por un vïrtice de \overline{K}_r y los vïrtices de K_{k_0} . Es fïcil comprobar que $\widehat{G} = K_{k_0} \vee (\overline{K}_r \vee \overline{K}_s)$, implicando que

$$q_G > q_{\widehat{G}}$$

lo que obviamente es una contradicciïn. Por lo tanto,

$$\widehat{G} = K_k \vee (\overline{K}_r \vee \overline{K}_s).$$

Considerar la función de dos variables reales, $f(z, w) = zw$. Notar que $f(z, w)$ es el número de aristas de grafo completo bipartito $K_{z,w}$. La solución real del problema de optimización

$$zw = \text{máximo} \quad , \quad \text{sujeto a } z + w = n - k$$

es alcanzada cuando $z = w$. Luego si, $n - k$ es par entonces para \widehat{G} concluimos que $r = s = \frac{n-k}{2}$. Si $n - k$ es impar, entonces $r = \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor$ y $s = 1 + r$.

Si $r = s = \frac{n-k}{2}$, por Teorema (3.4),

$$\sigma(Q_G) = \left\{ (n-2)^{[k-2]}, \left(\frac{n+k}{2} \right)^{[n-k-2]} \right\} \cup \sigma(\widetilde{\Omega}),$$

donde

$$\widetilde{\Omega} = \begin{pmatrix} n+k-2 & \frac{n-k}{2} & \frac{n-k}{2} \\ k & \frac{n+k}{2} & \frac{n-k}{2} \\ k & \frac{n-k}{2} & \frac{n+k}{2} \end{pmatrix}.$$

Tenemos que,

$$\sigma(\Omega) = \left\{ k, \frac{k+2n-2-\sqrt{4-4k+4kn-3k^2}}{2}, \frac{k+2n-2+\sqrt{4-4k+4kn-3k^2}}{2} \right\}$$

Por los resultados del Teorema 3.4 y observación 3.3 obtenemos que $q_{\widehat{G}}$ corresponde al mayor autovalor de $\widetilde{\Omega}$

el cual es:

$$q_{\widehat{G}} = \frac{1}{2} \left(k + 2n - 2 + \sqrt{4 + 4kn - 4k - 3k^2} \right). \quad (4.2)$$

Si $r = \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor$ y $s = 1 + r$, por Teorema 3.4,

$$\sigma(Q_G) = \left\{ (n-2)^{[k-2]}, \left(\frac{n+k}{2} \right)^{[n-k-2]} \right\} \cup \sigma(\widetilde{\Omega}),$$

donde

$$\widetilde{\Omega} = \begin{pmatrix} n+k-2 & r & s \\ k & k+s & s \\ k & r & k+r \end{pmatrix}.$$

Como, $s = r + 1$, tenemos que

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} n - k - 2 & r & r + 1 \\ k & k + r + 1 & r + 1 \\ k & r & k + r \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Por los resultados en Teorema 3.4 y la observación en 3.3 obtenemos que $q_{\hat{G}} = \gamma_1$, el cual corresponde al autovalor máximo de $\tilde{\Omega}$

Teorema 4.3 *Sea $1 \leq k \leq n - 3$. Se cumple:*

(a) *Si $n - k$ es par, y*

$$\hat{G} = K_k \vee \left(\overline{K}_{\frac{n-k}{2}} \vee \overline{K}_{\frac{n-k}{2}} \right).$$

Entonces $q_{\hat{G}} \geq q_G$, para todo $G \in \Sigma_k(n)$, donde, la igualdad se cumple si y solo si $G = \hat{G}$. La expresión para $q_{\hat{G}}$ es dada por la ecuación (4.2).

(b) *Si $n - k$ es impar, entonces $q_{\hat{G}} \geq q_G$, para todo $G \in \Sigma_k(n)$, donde, la igualdad se cumple si y solo si $G = \hat{G}$.*

$$\hat{G} = K_k \vee \left(\overline{K}_{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} \vee \overline{K}_{\lfloor \frac{n+1-k}{2} \rfloor} \right).$$

Donde, la igualdad se cumple si y solo si $G = \hat{G}$. El autovalor $q_{\hat{G}}$ es el autovalor maximal de $\tilde{\Omega}$ en (4.3.)

4.3. Una aplicación al estudio del índice de un grafo usando el número de bipartividad por vértices

El índice del grafo es su radio espectral o autovalor maximal de su matriz de adyacencia. Sean $\hat{G} \in \Sigma_k(n)$ tales que $\rho_{\hat{G}} \geq \rho_G$, para todo $G \in \Sigma_k(n)$. Como las consideraciones son totalmente análogas a aquellas de la sección precedente, resaltamos solo las diferencias.

La búsqueda del grafo $\widehat{G} \in \Sigma_k(n)$ satisfaciendo la condición

$$q_{\widehat{G}} \geq q \quad \text{para todo } G \in \Sigma_k(n)$$

nos deja con $\widehat{G} = K_k \vee (\overline{K}_r \vee \overline{K}_s)$ donde $r = s = \frac{n-k}{2}$, si $n-k$ es par, y $r = \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor$, $s = r + 1 = \lfloor \frac{n+1-k}{2} \rfloor$, si $n-k$ es impar.

Si $r = s = \frac{n-k}{2}$, entonces por Teorema 3.3, y Observación 3.2 concluimos que $\rho_{\widehat{G}}$ corresponde al autovalor maximal de

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} k-1 & \frac{n-k}{2} & \frac{n-k}{2} \\ k & 0 & \frac{n-k}{2} \\ k & \frac{n-k}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

el cual es igual a

$$\rho_{\widehat{G}} = \frac{1}{2} \left(\frac{n+k-2}{2} + \sqrt{k^2 + (3k-1)(n-k) + \left(\frac{n-k+2}{2}\right)^2} \right). \quad (4.4)$$

Si $r = \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor$ y $s = \lfloor \frac{n+1-k}{2} \rfloor$, entonces, Teorema 3.3, y Observación 3.2 concluimos que $\rho_{\widehat{G}}$ corresponde al autovalor maximal de

$$\widetilde{\Upsilon} = \begin{pmatrix} k-1 & r & r+1 \\ k & 0 & r+1 \\ k & r & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Es en esta forma que hemos demostrado que.

Teorema 4.4 *Sea $1 \leq k \leq n-3$. Se cumple:*

(a) *Si $n-k$ es par, y*

$$\widehat{G} = K_k \vee \left(\overline{K}_{\frac{n-k}{2}} \vee \overline{K}_{\frac{n-k}{2}} \right).$$

Entonces $\rho_{\widehat{G}} \geq \rho_G$, para todos los grafos $G \in \Sigma_a(n)$. Donde, la igualdad se cumple si y solo si $G = \widehat{G}$. La expresión para $\rho_{\widehat{G}}$ es dada por la ecuación (4.4).

(b) *Si $n-k$ es impar, y*

$$\widehat{G} = K_k \vee \left(\overline{K}_{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} \vee \overline{K}_{\lfloor \frac{n+1-k}{2} \rfloor} \right).$$

Entonces $\rho_{\widehat{G}} \geq \rho_G$, para todos los grafos $G \in \Sigma_a(n)$. Donde, la igualdad se cumple si y solo si $G = \widehat{G}$. El autovalor $\rho_{\widehat{G}}$ es el autovalor maximal de $\widetilde{\Upsilon}$ en (4.5.)

4.4. Composición generalizada de grafos con restricciones a subconjuntos de vértices

Ahora, generalizamos la operación anterior de composición generalizada o H -join de acuerdo a la siguiente definición.

Definición 4.1 Considerar un grafo H de orden k y una familia de k grafos $\mathcal{F} = \{G_1, \dots, G_k\}$. Considerar también una familia de subconjuntos de vértices $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_k\}$, tal que $S_i \subseteq \mathcal{V}(G_i)$, para $1 \leq i \leq k$. La operación composición generalizada de la familia de grafos \mathcal{F} restringida por la familia de subconjuntos de vértices \mathcal{S} , denotado por $\bigvee_{(H, \mathcal{S})} \mathcal{F}$, produce un grafo tal que:

$$\mathcal{V}\left(\bigvee_{(H, \mathcal{S})} \mathcal{F}\right) = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{V}(G_i)$$

$$\mathcal{E}\left(\bigvee_{(H, \mathcal{S})} \mathcal{F}\right) = \left(\bigcup_{i=1}^k \mathcal{E}(G_i)\right) \cup \left(\bigcup_{rs \in \mathcal{E}(H)} \{ij : i \in S_r, j \in S_s; S_r, S_s \in \mathcal{S}\}\right)$$

Notar que el caso particular de la composición generalizada de la familia $\mathcal{F} = \{G_1, \dots, G_k\}$ restringida por la familia de subconjuntos $\mathcal{S} = \{\mathcal{V}(G_1), \dots, \mathcal{V}(G_k)\}$, coincide con lo descrito antes como composición generalizada u operación H -join de \mathcal{F} .

Ejemplo 4.1 La figura 4.1 representa un ejemplo de una operación de join H -generalizado de una familia de grafos \mathcal{F} restringida por una familia de subconjuntos de vértices $\mathcal{S} = \{S_1 = \{a, b\}, S_2 = \{d, f\}, S_3 = \{g, i, j\}\}$, En este ejemplo, $H = P_3$ y $\mathcal{F} = \{G_1, G_2, G_3\}$.

Considerar un grafo H de orden k y una familia de k grafos $\mathcal{F} = \{G_1, \dots, G_k\}$, una familia de subconjuntos de vértices $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_k\}$, tal que $S_i \subseteq \mathcal{V}(G_i)$, respectivamente, como en la Definición 3.1, a partir de ahora estudiaremos el grafo $G = \bigvee_{(H, \mathcal{S})} \mathcal{F}$. Comenzamos con $k = 2$, en este caso escribimos, $G = G_1(S_1) \vee G_2(S_2)$

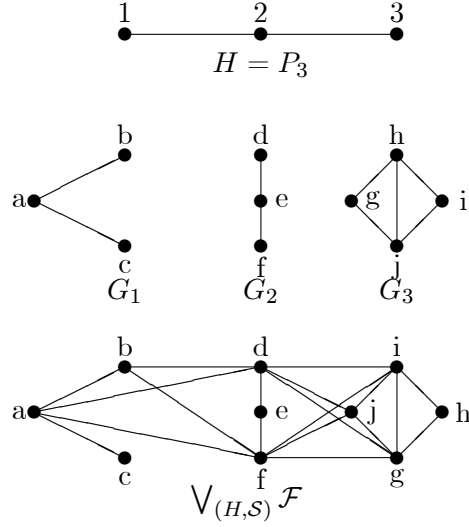


Figura 4.1: H -join de la familia de grafos $\mathcal{F} = \{G_1, G_2, G_3\}$, restringida por la familia de vértices $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, S_3\}$.

la operación join de la familia de grafos $\mathcal{F} = \{G_1, G_2\}$ restringida por la familia de subconjuntos de vértices $\mathcal{S} = \{S_1, S_2\}$.

Teorema 4.5 Sea $G = G_1(S_1) \vee G_2(S_2)$, denotamos por ρ el radio espectral de la matriz de adyacencia de G . Consideremos las matrices

$$\Omega = \begin{pmatrix} \delta_1 & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \delta_2 \end{pmatrix} \quad y \quad F = \begin{pmatrix} \Delta_1 & |S_2| \\ |S_1| & \Delta_2 \end{pmatrix},$$

$$\text{donde } \omega_{ij} = \begin{cases} |S_j| & \text{SI } |S_i| = n_i \\ 0 & \text{SI } |S_i| < n_i. \end{cases}$$

Entonces

$$\rho_\Omega \leq \rho \leq \rho_F.$$

La igualdad se cumple si y solo si $G = G_1 \vee G_2$, con G_1 y G_2 grafos regulares.

Demostraci3n. Sea $S_i \subseteq \mathcal{V}(G_i)$, $i = 1, 2$. De ahora en adelante, denotamos a $\chi(S_i)$ por χ_i . Para la entrada (t, p) de $\chi_1 \chi_2'$, tenemos

$$(\chi_1 \chi_2')_{tp} = \begin{cases} 1 & \text{SI } t \in S_1 \wedge p \in S_2 \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Entonces la matriz de adyacencia de G tiene la forma

$$\begin{pmatrix} A_{G_1} & \chi_1\chi'_2 \\ \chi_2\chi'_1 & A_{G_2} \end{pmatrix}$$

Notando que la t -ésima suma fila de $\chi_1\chi'_2$ es

$$\pi_t(\chi_1\chi'_2) = \begin{cases} |S_2| & \text{si } t \in S_1 \\ 0 & \text{si } t \notin S_1. \end{cases}$$

Por lo tanto, las matrices

$$\Omega = \begin{pmatrix} \delta_1 & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \delta_2 \end{pmatrix},$$

$$\text{donde } \omega_{ij} = \begin{cases} |S_j| & \text{SI } |S_i| = n_i \\ 0 & \text{SI } |S_i| < n_i \end{cases} \quad y$$

$$F = \begin{pmatrix} \Delta_1 & |S_2| \\ |S_1| & \Delta_2 \end{pmatrix},$$

se corresponden con las matrices en el Teorema 1.1. Por el cual se sigue la desigualdad en la afirmación. Para la condición de igualdad es necesario y suficiente que $\Omega = F$ lo que implicaría que $\delta_i = \Delta_i$ y $|S_i| = n_i$, $i = 1, 2$. ■

En el caso Laplaciano sin signo se tiene.

Teorema 4.6 Sea $G = G_1(S_1) \vee G_2(S_2)$ como antes, denotamos por q el radio espectral de la Laplaciana sin signo, $Q(G)$. Considerar las matrices

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 2\delta_1 + \omega_{12} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & 2\delta_2 + \omega_{21} \end{pmatrix} \quad y \quad \tilde{F} = \begin{pmatrix} 2\Delta_1 + |S_2| & |S_2| \\ |S_1| & 2\Delta_2 + |S_1| \end{pmatrix}$$

$$\text{donde } \omega_{ij} = \begin{cases} |S_j| & \text{SI } |S_i| = n_i \\ 0 & \text{SI } |S_i| < n_i \end{cases}$$

Entonces

$$\rho_{\tilde{\Omega}} \leq q \leq \rho_{\tilde{F}}$$

La igualdad se cumple si y solo si $G = G_1 \vee G_2$ con G_1 y G_2 , grafos regulares.

Demostraci3n. Sea $S_i \subseteq \mathcal{V}(G_i)$, $i = 1, 2$. Para la entrada (t, p) de $\chi_1 \chi_2'$ tenemos

$$(\chi_1 \chi_2')_{tp} = \begin{cases} 1 & \text{SI } t \in S_1 \wedge p \in S_2 \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Entonces la matriz de Laplaciana sin signo de G tiene la forma

$$\begin{pmatrix} Q_{G_1} + |S_2| D(\chi_1) & \chi_1 \chi_2' \\ \chi_2 \chi_1' & Q_{G_2} + |S_1| D(\chi_2) \end{pmatrix}$$

Notando que la t -ésima suma fila es

$$\pi_t(Q_{G_i} + |S_j| D(\chi_i)) = \begin{cases} 2d_t + |S_j| & \text{SI } t \in S_i \\ 2d_t & \text{SI } t \notin S_i \end{cases}$$

Por lo tanto las matrices

$$\Omega = \begin{pmatrix} 2\delta_1 + \omega_{12} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & 2\delta_2 + \omega_{21} \end{pmatrix}$$

$$\text{donde } \omega_{ij} = \begin{cases} |S_j| & \text{SI } |S_i| = n_i \\ 0 & \text{SI } |S_i| < n_i \end{cases} \quad y$$

$$F = \begin{pmatrix} 2\Delta_1 + |S_2| & |S_2| \\ |S_1| & 2\Delta_2 + |S_1| \end{pmatrix},$$

se corresponden con las matrices en el Teorema 1.1 se sigue la desigualdad en la afirmaci3n. Para la condici3n de igualdad es necesario y suficiente que $\Omega = F$ lo que implica $\delta_i = \Delta_i$, y $|S_i| = n_i$, $i = 1, 2$. ■

Como ya vimos, es posible generalizar la operaci3n H -join de la familia de grafos \mathcal{F} a una operaci3n de H -join restringida por la familia de subconjuntos de v3rtices \mathcal{S} , denotada por $\bigvee_{(H, \mathcal{S})} \mathcal{F}$. Desde ahora y por simplicidad denotaremos $a_{ij} = a_{ij}(H)$, la entrada (i, j) de la matriz de adyacencia del grafo H .

Teorema 4.7 Sea $\mathcal{F} = \{G_1, \dots, G_k\}$ una familia de k grafos, donde cada grafo G_i tiene orden n_i , para $i = 1, \dots, k$, y sea H un grafo tal que $\mathcal{V}(H) = \{1, \dots, k\}$. Considerar

tambi3n una familia de subconjuntos de v3rtices $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_k\}$, tal que $S_i \subseteq \mathcal{V}(G_i)$ para $1 \leq i \leq k$. Sea $G = \bigvee_{(H, \mathcal{S})} \mathcal{F}$. Entonces

$$\xi_{ij} = \begin{cases} \delta_i & \text{SI } i = j \\ 0 & \text{SI } S_i \subsetneq \mathcal{V}(G_i) \\ a_{ij}|S_j| & \text{SI } S_i = \mathcal{V}(G_i) \end{cases}$$

y

$$v_{ij} = \begin{cases} \Delta_i & \text{SI } i = j \\ a_{ij}|S_j| & \text{SI } i \neq j \end{cases}$$

La igualdad se cumple si y solo si G_i es regular y $S_i = \mathcal{V}(G_i)$, para todo $1 \leq i \leq k$.

Demostraci3n. Para $tq \in \mathcal{E}(H)$ notar

$$(\chi_i \chi'_j)_{tq} = \begin{cases} 1 & \text{SI } t \in S_i \wedge q \in S_j \\ 0 & \text{OTRO CASO.} \end{cases}$$

Entonces la matriz de adyacencia de G tiene la forma

$$\begin{pmatrix} A_{G_1} & a_{12}\chi_1\chi'_2 & \cdots & a_{1,k-1}\chi_1\chi'_{k-1} & a_{1,k}\chi_1\chi'_k \\ a_{12}\chi_2\chi'_1 & A_{G_2} & \cdots & a_{2,k-1}\chi_2\chi'_{k-1} & a_{2k}\chi_2\chi'_k \\ a_{31}\chi_3\chi'_1 & a_{32}\chi_3\chi'_2 & \cdots & a_{3,k-1}\chi_3\chi'_{k-1} & a_{3k}\chi_3\chi'_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k-1,1}\chi_{k-1}\chi'_1 & a_{k-1,2}\chi_{k-1}\chi'_2 & \cdots & A_{G_{k-1}} & a_{k-1,k}\chi_{k-1}\chi'_k \\ a_{k,1}\chi_k\chi'_1 & a_{k2}\chi_k\chi'_2 & \cdots & a_{k-1,k}\chi_k\chi'_{k-1} & A_{G_k} \end{pmatrix}$$

Observar que la t -3sima suma fila de la matriz $a_{ij}\chi_i\chi'_j$ es

$$\pi_t(a_{ij}\chi_i\chi'_j) = \begin{cases} a_{ij}|S_j| & \text{SI } t \in S_i \\ 0 & \text{OTRO CASO} \end{cases}$$

Entonces

$$\max\{\pi_t(a_{ij}\chi_i\chi'_j) : 1 \leq t \leq n_i\} = a_{ij}|S_j|$$

Si $S_i \subsetneq \mathcal{V}(G_i)$,

$$\min\{\pi_t(a_{ij}\chi_i\chi'_j) : 1 \leq t \leq n_i\} = 0$$

y si $S_i = \mathcal{V}(G_i)$,

$$\min\{\pi_t(a_{ij}\chi_i\chi_j') : 1 \leq t \leq n_i\} = a_{ij}|S_j|$$

Ahora, usando el Teorema 1.1 con las identificaciones apropiadas, el resultado es rápidamente obtenido. El caso de la igualdad se sigue inmediatamente del caso de igualdad del Teorema 3.3, usando de nuevo identificaciones apropiadas.

■

Para $1 \leq i \leq k$. Definir

$$c_i = \sum_{ij \in \mathcal{E}(H)} |S_j|.$$

Para el caso Laplaciano sin signo el resultado es.

Teorema 4.8 Sea $\mathcal{F} = \{G_1, \dots, G_k\}$ una familia de k grafos, donde cada grafo G_i tiene orden n_i , para $1 \leq i \leq k$, y sea H un grafo tal que $\mathcal{V}(H) = \{1, \dots, k\}$. considerar también una familia de subconjuntos de vértices $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_k\}$, tales que $S_i \subseteq \mathcal{V}(G_i)$ para $1 \leq i \leq k$. Sea $G = \bigvee_{(H, \mathcal{S})} \mathcal{F}$. Entonces

$$\rho_{\tilde{\Omega}} \leq q \leq \rho_{\tilde{F}},$$

donde $\tilde{\Omega} = (\tilde{\xi}_{ij})$ y $\tilde{F} = (\tilde{v}_{ij})$, donde

$$\tilde{\xi}_{ij} = \begin{cases} 2\delta_i + c_i & \text{SI } i = j \text{ y } S_i = \mathcal{V}((G_i)) \\ 2\delta_i & \text{SI } i = j \text{ y } S_i \subsetneq \mathcal{V}((G_i)) \\ a_{ij}|S_j| & \text{SI } S_i = \mathcal{V}((G_i)) \\ 0 & \text{SI } S_i \subsetneq \mathcal{V}((G_i)) \end{cases}$$

y

$$\tilde{v}_{ij} = \begin{cases} 2\Delta_i + c_i & \text{SI } i = j \\ a_{ij}|S_j| & \text{SI } i \neq j \end{cases}$$

La igualdad se cumple si y solo si G_i es regular y $S_i = \mathcal{V}(G_i)$ para todo $1 \leq i \leq k$.

Demostraci3n. Para $1 \leq i \leq k$ definir

$$c_i = \sum_{ij \in \mathcal{E}(H)} |S_j|$$

Para $tq \in \mathcal{E}(H)$ notar que

$$(\chi_i \chi'_j)_{tq} = \begin{cases} 1 & \text{SI } t \in S_i \wedge q \in S_j \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases},$$

Luego la matriz Laplaciana sin signo de G se estructura de la forma

$$\begin{pmatrix} Q_{G_1} + c_1 D(\chi_1) & a_{12} \chi_1 \chi'_2 & \cdots & a_{1,k-1} \chi_1 \chi'_{k-1} & a_{1,k} \chi_1 \chi'_k \\ a_{12} \chi_2 \chi'_1 & Q_{G_2} + c_2 D(\chi_2) & \cdots & a_{2,k-1} \chi_2 \chi'_{k-1} & a_{2k} \chi_2 \chi'_k \\ a_{31} \chi_3 \chi'_1 & a_{32} \chi_3 \chi'_2 & \cdots & a_{3,k-1} \chi_3 \chi'_{k-1} & a_{3k} \chi_3 \chi'_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k-1,1} \chi_{k-1} \chi'_1 & a_{k-1,2} \chi_{k-1} \chi'_2 & \cdots & Q_{G_{k-1}} + c_{k-1} D(\chi_{k-1}) & a_{k-1,k} \chi_{k-1} \chi'_k \\ a_{k,1} \chi_k \chi'_1 & a_{k2} \chi_k \chi'_2 & \cdots & a_{k-1,k} \chi_k \chi'_{k-1} & Q_{G_k} + c_k D(\chi_k) \end{pmatrix}$$

Observemos que la suma de la t -ésima fila de la matriz $Q_{G_i} + c_i D(\chi(S_i))$ es

$$\pi_t(Q_{G_i} + c_i D(\chi_i)) = \begin{cases} 2d_t + c_i & \text{SI } t \in S_i \\ 2d_t & \text{SI } t \notin S_i, \end{cases}$$

donde d_t denota el grado del vértice t -ésimo en $\mathcal{V}(G_i)$. Luego

$$\text{máx } \pi_t(Q_{G_i} + c_i D(\chi_i)) = 2\Delta_i + c_i.$$

Si $S_i \subsetneq \mathcal{V}(G_i)$,

$$\text{mín}\{\pi_t(Q_{G_i} + N_i I)\} = 2\delta_i$$

y si $S_i = \mathcal{V}(G_i)$,

$$\text{mín}(\pi_t Q_{G_i} + c_i D(\chi_i)) = 2\delta_i + c_i.$$

Ahora, usando Teorema 1.1 con las identificaciones apropiadas, el resultado es rápidamente obtenido. El caso de igualdad es también inmediato del caso de igualdad del Teorema 1.1. ■

4.5. Intercalamiento de autovalores

Considerar dos sucesiones de números reales $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$ y $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_k$ con $k < n$. Se dice que la segunda sucesión intercala a la primera siempre que

$$\alpha_i \geq \beta_i \geq \alpha_{n-k+i} \quad \text{para } 1 \leq i \leq k.$$

El intercalamiento es llamado ajustado si existe un entero l con $1 \leq l \leq k$ tal que

$$\alpha_i = \beta_i \quad \text{para } 1 \leq i \leq l$$

y

$$\beta_i = \alpha_{n-k+i} \quad \text{para } l+1 \leq i \leq k.$$

Si $k = n - 1$ el intercalamiento se convierte en

$$\alpha_1 \geq \beta_1 \geq \alpha_2 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \alpha_{n-1} \geq \beta_{n-1} \geq \alpha_n$$

lo que esclarece el nombre. La matriz cuociente $\overline{M} = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$, de la matriz por bloques, simétrica

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1k} \\ M_{21} & M_{22} & & M_{2k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \\ M_{k1} & \dots & & M_{kk} \end{pmatrix}$$

es la matriz simétrica de orden $k \times k$ cuya (i, j) -entrada, es el promedio de las sumas filas de M_{ij} . Más precisamente

$$m_{ij} = \frac{1}{n_i} (\mathbb{J}_{n_i}^T M_{ij} \mathbb{J}_{n_j})$$

La partición en bloques de M es llamada regular (o equitativa) si cada bloque M_{ij} de M tiene sumas filas (y columnas) constante. En [18] fue probado el siguiente resultado.

Teorema 4.9 *Sea \overline{M} la matriz cuociente de una matriz simétrica particionada M , entonces los autovalores de \overline{M} intercalan a los autovalores de M . Por otra parte, si el intercalamiento es ajustado, entonces la partición de M es regular y si M tiene una partición regular entonces los autovalores de \overline{M} son autovalores de M .*

Sean G_1 y G_2 dos grafos. Vamos a denotar por $\mu(G_i)$ (o por μ_i) el promedio de los grados de los vértices de un grafo G_i . Esto es

$$\mu_i = \frac{1}{n_i} (\mathbb{J}_{n_i}^T A_{G_i} \mathbb{J}_{n_i}). \quad (4.6)$$

Considerando el resultado del Teorema 4.9 podemos mejorar la cota inferior del radio espectral del join $G_1 \vee G_2$.

Teorema 4.10 *Sea $G = G_1 \vee G_2$ el join de los grafos G_1 y G_2 . Sean n_1 y n_2 los órdenes de G_1 y G_2 , respectivamente. Vamos a denotar por ρ y por q los radios espectrales de la matriz de adyacencia y Laplaciana sin signo de G , respectivamente. Sean $\mu(G_i)$ (o μ_i) y $\delta(G_i)$ (o δ_i) el elemento definido en (4.6) y el menor grado vértice de G_i , respectivamente, para $i = 1, 2$. Entonces*

$$\frac{\mu_1 + \mu_2 + \sqrt{(\mu_1 - \mu_2)^2 + 4n_1n_2}}{2} \leq \rho.$$

y

$$\frac{2\mu_1 + 2\mu_2 + n_1 + n_2 + \sqrt{(n_1 + n_2 - 2\mu_1 - 2\mu_2)^2 - 8(\mu_1n_2 + \mu_2n_1)}}{2} \leq q$$

y estas cotas inferiores satisfacen

$$\frac{\delta_1 + \delta_2 + \sqrt{(\delta_1 - \delta_2)^2 + 4n_1n_2}}{2} \leq \frac{\mu_1 + \mu_2 + \sqrt{(\mu_1 - \mu_2)^2 + 4n_1n_2}}{2} \quad (4.7)$$

y

$$\begin{aligned} & \frac{2\delta_1 + 2\delta_2 + n_1 + n_2 + \sqrt{(n_1 + n_2 - 2\delta_1 - 2\delta_2)^2 - 8(\delta_1n_2 + \delta_2n_1)}}{2} \\ & \leq \frac{2\mu_1 + 2\mu_2 + n_1 + n_2 + \sqrt{(n_1 + n_2 - 2\mu_1 - 2\mu_2)^2 - 8(\mu_1n_2 + \mu_2n_1)}}{2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Demostraciïñ. Debemos considerar las matrices cuocientes \bar{A}_G y \bar{Q}_G de las matrices particionadas A_G y Q_G en (3.1) y en (3.2), respectivamente. Entonces

$$\bar{A}_G = \begin{pmatrix} \mu_1 & n_2 \\ n_1 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

y

$$\bar{Q}_G = \begin{pmatrix} 2\mu_1 + n_2 & n_2 \\ n_1 & 2\mu_2 + n_1 \end{pmatrix}.$$

Por Teorema 4.9 las dos primeras desigualdades se siguen. Por otro lado, dado que $\delta_l \leq \mu_l$, mediante el uso del Teorema de dominación por una matriz no negativa irreducible en [25, Teorema 2.1] las segundas desigualdades (4.7) y (4.8). ■

Observación 4.1 *Notemos las desigualdades (4.7) y (4.8) evidencian que que las cotas inferiores de este último resultado son más ajustadas que las cotas inferiores dadas por el Teorema 3.1.*

Aplicaremos Teorema 4.9 para obtener una cota inferior para el índice de un grafo con un DIM N .

Teorema 4.11 *Sea $N = \{i_1j_1, \dots, i_kj_k\}$ un DIM de G y $c = \sum_{i \in \mathcal{V}(N)} d_i$. Entonces*

$$\rho_G \geq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{6k^2 - k(8c - n) + 2c^2}{4k(n - 2k)}}.$$

Demostración. Sea $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, re-etiquetando como primeros a los vértices de N , vemos que la matriz de adyacencia de G toma la forma

$$A_G = \begin{pmatrix} J_2 & 0 & \dots & * \\ 0 & J_2 & & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & J_2 & * \\ * & \dots & & * & \mathbf{0} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_N & E \\ E^t & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

donde

$$A_N = \begin{pmatrix} J_2 & 0 & \dots \\ 0 & J_2 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ 0 & & \ddots & J_2 \end{pmatrix} \in R^{2k \times 2k},$$

es la matriz de adyacencia de N , E es una submatriz de A_G que representa las conexiones de los v3rtices de N con los v3rtices en $\mathcal{V}(G) \setminus \mathcal{V}(N)$. Es claro que

$$\mathbb{J}_{2k}^T E \mathbb{J}_{(n-2k)} = c - 2k,$$

por lo que la matriz cuociente

$$\bar{A}_G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{c-2k}{2k} \\ \frac{c-2k}{n-2k} & 0 \end{pmatrix}.$$

Cuyo autovalor maximal es

$$\lambda_1(\bar{A}_G) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{6k^2 - k(8c - n) + 2c^2}{4k(n - 2k)}}.$$

Usando Teorema 4.9, el resultado se sigue. ■

Ahora usaremos la t3cnica del resultado anterior para determinar una cota inferior para el autovalor maximal de un grafo con un conjunto de v3rtices (κ, τ) -regular.

Teorema 4.12 *Sea $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un grafo. Sea $S \subseteq \mathcal{V}$, un subconjunto con n' v3rtices, (κ, τ) -regular. Sea H_1 , tal que $H_1 = G[S]$. Supongamos adem3s que el subgrafo $H_2 = G[\mathcal{V} \setminus S]$, generado por $\mathcal{V} \setminus S$ es \varkappa -regular. Entonces*

$$\rho_G \geq \frac{\kappa + \varkappa}{2} + \sqrt{\frac{(\kappa - \varkappa)^2}{4} + \frac{\tau^2(n - n')}{n'}}.$$

En particular, si H_2 es un subgrafo (\varkappa, ϱ) -regular de G

$$\rho_G = \frac{\kappa + \varkappa}{2} + \sqrt{\frac{(\kappa - \varkappa)^2}{4} + \varrho\tau}.$$

Demostraci3n. Etiquetamos los v3rtices de G de manera que A_G tome la forma

$$A_G = \begin{pmatrix} A_{H_1} & E \\ E^T & A_{H_2} \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Luego

$$\mathbb{J}_{n-n'}^T E^T \mathbb{J}_k = \tau(n - n')$$

y en consecuencia

$$\mathbb{J}_{n'}^T E \mathbb{J}_{n-n'} = \tau (n - n') \quad (4.10)$$

por lo que la matriz cuociente

$$\overline{A}_G = \begin{pmatrix} \kappa & \frac{\tau(n-n')}{n'} \\ \tau & \varkappa \end{pmatrix}.$$

Cuyo autovalor maximal es

$$\lambda_1(\overline{A}_G) = \frac{\kappa + \varkappa}{2} + \sqrt{\frac{(\kappa - \varkappa)^2}{4} + \frac{\tau^2 (n - n')}{n'}}.$$

Usando Teorema 4.9, la primera desigualdad del enunciado, se sigue. Para la segunda desigualdad si H_2 es un subgrafo (\varkappa, ϱ) -regular de G , vemos que la partici3n de la matriz A_G en (4.9) es regular (equitativa), la igualdad en (4.10) se convierte en $\mathbb{J}_{n'}^T E \mathbb{J}_{n-n'} = \varrho n'$ y la matriz cuociente en ese caso es

$$\overline{A}_G = \begin{pmatrix} \kappa & \varrho \\ \tau & \varkappa \end{pmatrix}.$$

Cuyo autovalor maximal es

$$\lambda_1(\overline{A}_G) = \frac{\kappa + \varkappa}{2} + \sqrt{\frac{(\kappa - \varkappa)^2}{4} + \varrho\tau}.$$

Usando Teorema 4.9, la igualdad del enunciado, se concluye. ■

Bibliografía

- [1] N. Abreu. Old and new results on algebraic connectivity of graphs. *Lin. Algebra Appl.* 423 (2007) 53–73.
- [2] W. Anderson, T. Morley. Eigenvalues of the Laplacian of a graph. *Linear Multilinear Algebra* 18 (1985) 141–145.
- [3] R. Balakrishnan, K. Ranganathan. *A Textbook Of Graph Theory*. Springer Science+Business Media New York 2012.
- [4] R. B. Bapat. *Graphs and Matrices*. Springer.
- [5] A. E. Brouwer, W. Haemers. *Spectra of graphs*. Springer-Verlag, 2012.
- [6] D. M. Cardoso, I. Sciriha, C. Zerafa. Main eigenvalues and (κ, τ) -regular sets. *Linear Algebra Appl.* 423 (2010) 2399-2408.
- [7] D. Cardoso, E. Andrade, M. Agueiras, M. Robbiano. Spectra of graphs obtained by a generalization of the join graph operation. *Discrete Mathematics* 313 (2013) 733–741.
- [8] D. M. Cardoso, D. Cvetković, P. Rowlinson, S. K. Simić. A sharp lower bound for the least eigenvalue of the signless Laplacian of a non-bipartite graph. *Lin. Algebra Appl.* 429 (2008) 2270-2780.
- [9] D. Cvetković, M. Doob and H. Sachs. *Spectra of Graphs - Theory and Application*. Academic Press, New York, 1980.

- [10] D. Cvetković, P. Rowlinson, S. Simić. Signless Laplacians of finite graphs. *Lin. Algebra Appl.* 423 (2007) 155–171.
- [11] K. Das. An improved upper bound for Laplacian graph eigenvalues. *Lin. Algebra Appl.* 338 (2003) 269–278.
- [12] E. Deutsch. Bounds for the Perron root of a nonnegative irreducible partitioned matrix. *Pacific Journal of Mathematics.* 92, N° 1 (1981) 49-56..
- [13] S. Fallat, Yi-Zheng Fan. Bipartiteness and the least eigenvalue of signless Laplacian of graphs. *Lin. Algebra Appl.* 436 (2012) 3254-3267.
- [14] M. Fiedler. Algebraic connectivity of graphs. *Czechoslovak Math. J.* 23 (1973) 298-305.
- [15] C. Godsil, G. Royle. *Algebraic Graph Theory.* 2001. Springer Verlag.
- [16] R. Grone, R. Merris. The Laplacian spectrum of a graph II, *SIAM J. Discr. Math.* 7 (1994) 221–229.
- [17] R. Grone, R. Merris, V. S. Sunder. The Laplacian spectrum of a graph. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 11 (1990) 218–238.
- [18] Haemers, W. Interlacing Eigenvalues and Graphs. *Linear Algebra Appl.* 227-228 (1995) 593-616.
- [19] Y. Hong, J.L. Shu, K. Fang. A sharp upper bound of the spectral radius of graphs. *Journal of Combinatorial Theory. Series B* 81 (2001), 177-183
- [20] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis,* Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [21] S. Kirkland. A bound on the algebraic connectivity of a graph in terms of the number of cutpoints. *Linear Multilinear Algebra* 47 (2000) 93–103.
- [22] J. S. Li, X. D. Zhang. On the Laplacian eigenvalues of a graph. *Lin. Algebra Appl.* 285 (1998) 305-307.

- [23] R. Merris. Laplacian matrices of a graph: A survey. *Lin. Algebra Appl.*, 197&198 (1994) 143-176.
- [24] R. Merris. A note on Laplacian graph eigenvalue. *Linear Algebra Appl.*, 285 (1998) 33-35.
- [25] H. Minc. *Nonnegative Matrices.* John Wiley & Sons, 1988.
- [26] M. Robbiano, K. Tapia Morales. Extremal graphs with bounded vertex bipartiteness number. Submitted to Elsevier.
- [27] O. Rojo, L. Medina, N. M. M. Abreu, C. Justel. Extremal algebraic connectivities of certain caterpillar classes and symmetric caterpillars. *Electron. J. Linear Algebra* 20 (2010) 136–157.
- [28] O. Rojo, L. Medina, N. M. M. Abreu, C. Justel. On the algebraic connectivity of some caterpillars: a sharp upper bound and total ordering. *Lin. Algebra Appl.* 432 (2010) 586–605.
- [29] R. S. Varga. *Geršgorin and His Circles.* Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2004.