



**UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE**  
FACULTAD DE CIENCIAS  
Departamento de Física

**SISTEMA ASTROFÍSICO DE FERMIONES:  
Valores críticos de masa asociados a la competencia entre  
efectos cuánticos y de evaporación**

Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias con mención en Física.

**LIC. ISRAEL ESPINOZA SOLIZ**

Profesor Guía: Dr. Luisberis Velázquez Abad

Antofagasta, Chile

Marzo de 2019



---

# Agradecimientos

Al concluir esta investigación de magíster deseo agradecer a las personas que de manera directa o indirecta me ayudaron a concluir mi trabajo de investigación. En primer lugar, a mi hermana **Miriam Espinoza** y mi hermano **Richard Espinoza** quienes siempre me apoyaron incondicionalmente a salir adelante y ser perseverante para alcanzar mi meta, a mi tía **Marcelina Soliz** por todo el apoyo y el cariño que me brindo. Reconocer a mi tutor el **Dr. Luisberis Velázquez** por transmitirme sus diversos conocimientos y dedicación que me permitieron culminar con mi trabajo de investigación. También Agradecer a mi profesor **Dr. Sergio Curilef Huichalaf** por las enseñanzas y por sus sabios consejos, a mis amigos **Felix Ugarte** y **Henry Revollo**. También deseo agradecer a mi amigo **Francisco Tello**, quien además de ser un excelente investigador, ha sido el que me mostro lo bello que es la física. A mis amigos y personal de la Universidad Católica del Norte en particular a **Michelle Magna** por la ayuda brindada cuando lo requerí.

Finalmente, agradecer al financiamiento recibido por la beca de postgrado interno UCN, que me permitió seguir formandome en este maravilloso mundo de la física.

*A todos ustedes, con mucho cariño.*

Israel Espinoza Soliz, Marzo de 2019.



---

# Resumen

En la presente investigación se analiza la influencia de la evaporación y las propiedades termodinámicas de un sistema astrofísico de partículas fermiónicas idénticas. Se parte de una generalización de los modelos de sistemas autogravitantes de fermiones existentes en la literatura al introducir un truncamiento en la distribución de Fermi-Dirac que reproduce en el límite clásico a la conocida distribución del modelo de King. Este modelo propuesto permitirá cierta aproximación elemental a la termodinámica de los sistemas estelares tales como las enanas blancas para condiciones de temperaturas no nulas (sistema no degenerado de fermiones), donde aparece de forma natural una velocidad de escape para los constituyentes del sistema de su propio campo gravitacional bajo la incidencia de agentes externos (e.g., el acompañante en un sistema binario). Particular interés reviste la influencia de la evaporación en los procesos colectivos existentes en sistemas astrofísicos: el colapso gravitacional y la disrupción evaporativa. En esta investigación se encontró que las curvas calóricas descritas a masa constante predicen la existencia de tres regiones con diferentes parámetros de masa  $\theta$ , cada uno de los cuales describe el sistema fermiónico en el plano  $(\eta, u^*)$ . Cada región se caracteriza por presentar un comportamiento termodinámico diferente. Además, el modelo predice la existencia de un valor máximo  $\theta_{max}$  del parámetro de masa  $\theta$  el cual impone una *masa mínima*  $M_{min}$  por debajo de la cual el sistema se evapora completamente. Un hecho relevante es que el modelo predice la existencia del colapso gravitacional donde el sistema experimenta una redistribución de la masa total dando lugar a una parte central fermiónica degenerada y el halo politrópico, ambos de mayor densidad.



---

# Abstract

In this research we analyze the influence of evaporation on the thermodynamic properties of an astrophysical system of fermionic identical particles. We start from a generalization of the self-gravitating systems models of fermiones existing in the literature when introducing a truncation in the Fermi-Dirac distribution which in the classical limit reduces to the well-known King distribution isotropic model. These assertions will allow us to make some elemental approximation to the thermodynamics of stellar systems such as white dwarfs stars for non-zero temperature conditions (non-degenerate fermion system), where there appears an escape velocity for the constituents of the system of its own gravitational field under the influence of external bodies (e.g., the companion in a binary system). Particularly interesting is the influence of evaporation on collective processes in astrophysical systems: gravitational collapse and evaporative disruption. In this research it was found that the caloric curves described at constant mass predict the existence of three well-defined regions with different mass parameters  $\theta$ , each of which describes the fermionic system in the plane  $(\eta, u^*)$ . Each region is characterized by a different thermodynamic behavior. In addition, the model predicts the existence of a maximum value  $\theta_{max}$  of the mass parameter  $\theta$  which imposes a *minimum mass*  $M_{min}$  below which the system evaporates completely. A relevant fact of the present research is that the model predicts the existence of the microcanonical collapse as a result of this fact the system undergoes a redistribution of its total mass between the fermionic central region and the outside classical region.



---

# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>II</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Antecedentes</b>	<b>6</b>
2.1. Modelos politrópicos . . . . .	6
2.2. Caso politrópico notable: gas degenerado de fermiones . . . . .	9
2.3. Modelo isotérmico de Antonov . . . . .	11
2.4. Modelo clásico de King . . . . .	16
<b>3 Metodología</b>	<b>21</b>
3.1. Descripción hidrodinámica . . . . .	21
3.2. Energía total y magnitudes asociadas . . . . .	24
<b>4 Discusión de resultados</b>	<b>26</b>
4.1. Generalidades . . . . .	26
4.1.1. Comportamientos de las integrales de Fermi truncadas . . . . .	26
4.1.2. Razón de masa $\theta$ y su relevancia como medida de degeneración cuántica del sistema . . . . .	29
4.1.3. Límite termodinámico . . . . .	31
4.2. Termodinámica del modelo . . . . .	32
4.2.1. Comportamiento termodinámico para parámetro de degeneración $\mu$ constante . . . . .	32
4.2.2. Comportamiento termodinámico para razón de masa $\theta$ constante	34
4.2.3. Perfiles de distribución . . . . .	38

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	III
<b>5 Consideraciones finales</b>	<b>43</b>
5.1. Conclusiones . . . . .	43
5.2. Problemas abiertos . . . . .	45
<b>Bibliografía</b>	<b>46</b>
<b>A Desarrollos computacionales</b>	<b>50</b>
A.1. Integración Runge-Kutta . . . . .	50
A.2. Integración numérica de las integrales de Fermi truncadas . . . . .	51
A.3. Función gamma-exponencial . . . . .	52
A.4. Interpolación de Fourier a segundo orden . . . . .	56

---

# Introducción

La presente investigación se centra en el campo de la termo-estadística de los sistemas astrofísicos [1–12]. La gravedad, al ser una interacción de largo alcance, hace que estos sistemas muestran comportamientos termodinámicos no convencionales, tales como la no extensividad de sus observables macroscópicos, una relajación muy lenta debido a la existencia de correlaciones de largo alcance entre sus constituyentes, capacidades caloríficas negativas, presencia de transiciones de fases exóticas, entre otros.

La incidencia de la evaporación es un proceso inevitable en los sistemas astrofísicos reales. Los sistemas astrofísicos tales como estrellas y galaxias no se pueden encerrar dentro de un recipiente para estudiarlos tal como sucede con los gases y líquidos en las aplicaciones cotidianas. Los elementos constituyentes de un sistema astrofísico pueden escapar si su velocidad supera cierto valor de escape. En la mayoría de las situaciones que encontramos en la naturaleza, los sistemas astrofísicos se encuentran en interacción con otros sistemas astrofísicos. En consecuencia, la velocidad o energía de escape está determinada por la presencia del campo gravitacional de otros sistemas [8]. Un modelo simple y notable que incorpora los efectos de la evaporación son los modelos de King [13], que se encuentran relacionados con los modelos de Wooley y Dickens [14], así como con el modelo de Wilson [15]. Todos ellos tienen la peculiaridad de describir perfiles de distribución de partículas de dimensión finita con núcleos isotérmicos y halos politrópicos. Todos estos modelos fueron recientemente generalizados por Gomez-Leyton y Velazquez en el marco de los modelos  $\gamma$ -exponencial truncados [16], los que fueron extendidos por Zochi y colaboradores [17] al incorporar anisotropía radial.

Si bien todos estos modelos describen las propiedades de un sistema astrofísico

entre los puntos de disrupción evaporativa (altas energías) al punto de colapso gravitacional (bajas energías), estos no incorporan las propiedades cuánticas de la materia que le permitirían arribar a configuraciones estables en la etapa *post-colapso gravitacional*, donde se espera la formación de núcleos muy densos de tamaños reducidos. Precisamente, este tipo de peculiaridades se tienen en cuenta al desarrollar modelos astrofísicos cuyos elementos constituyentes obedecen la estadística de Fermi-Dirac sobre las que tienen lugar las limitaciones asociadas al conocido principio de exclusión de Pauli. Ejemplos de estos modelos fueron desarrollados por Chandrasekhar y otros autores acerca de las propiedades de las estrellas enanas blancas y de las estrellas de neutrones [18, 19]; los cuales fueron desarrollados para estudiar sistemas en estados degenerados a temperatura cero.

Un desarrollo reciente de este tipo de situaciones para temperaturas no nulas es el modelo astrofísico de fermiones discutido por Chavanis [20, 21]; pero que incorpora la presencia de un contenedor para evitar el escape de las partículas y efectuar una descripción termoestadística rigurosa en condiciones de equilibrio termodinámico. Un desarrollo más realista se obtiene al incorporar los efectos de la evaporación de los constituyentes. La fundamentación teórica para esta nueva situación basada en consideraciones cinemáticas fueron discutidas por el propio Chavanis en un trabajo previo [22], donde se propone la función de distribución cuasi-estacionaria:

$$f_{FDT}(\mathbf{r}, \mathbf{p} | \beta, \varepsilon_c) = \frac{e^{\beta[\varepsilon_c - \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})]} - 1}{\alpha + e^{\beta[\varepsilon_c - \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})]}} H[\varepsilon_c - \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})], \quad (1.1)$$

donde  $H(x)$  es la función escalón de Heaviside. Esta propuesta puede ser considerada como una interpolación entre la distribución de Fermi-Dirac en el límite cuántico de bajas energías:

$$f_{FD}(\mathbf{r}, \mathbf{p} | \beta) = \frac{1}{e^{\beta[\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - \varepsilon_F]} + 1}, \quad (1.2)$$

[donde se desprecian los efectos de la evaporación al considerar  $\beta[\varepsilon_c - \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})] \gg 1$ , y que se obtiene al hacer  $\alpha = e^{\beta(\varepsilon_c - \varepsilon_F)}$ , siendo  $\varepsilon_F$  la energía de Fermi], y el límite de altas energías no degenerado que responde a una distribución del tipo Michie-King:

$$f_{MK}(\mathbf{r}, \mathbf{p} | \beta, \varepsilon_c) = \frac{1}{\alpha} \left[ e^{\beta[\varepsilon_c - \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})]} - 1 \right] H[\varepsilon_c - \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})], \quad (1.3)$$

[que se obtiene cuando  $\alpha \gg 1$  y  $f_{FDT}(\mathbf{r}, \mathbf{p}|\beta, \varepsilon_c) \ll 1$ ]. En estas expresiones hemos denotado por  $\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m + m\phi(\mathbf{r})$  la energía mecánica individual de una partícula de masa  $m$  e impulso  $\mathbf{p}$ , localizada en la posición  $\mathbf{r}$ , donde está presente el campo gravitacional de potencial  $\phi(\mathbf{r})$  del propio sistema. Además,  $\beta$  es el parámetro de temperatura inversa  $\beta = 1/kT$ ,  $\varepsilon_c$  es la energía de escape de los constituyentes del sistema. Por último,  $\alpha$  es una constante numérica positiva asociada a la normalización de la función de distribución, la cual asegura la desigualdad  $f_{FDT}(\mathbf{r}, \mathbf{p}|\beta) \leq 1$  asociada a la ocupación de los estados cuánticos en un sistema de fermiones.

El *modelo fermiónico de King* antes comentado fue introducido en la literatura por Ruffini y Stella en los años ochenta del siglo pasado [23] como una extensión natural del modelo clásico de Michie-King, y dirigido a describir halos de materia oscura formados por neutrinos pesados. Recientemente, el estudio de la termodinámica asociada a este modelo fue presentado por Chavanis y colaboradores [24, 25], quienes realizaron una aproximación de sus propiedades termodinámicas aunque de forma incompleta. La competencia entre los efectos cuánticos y los evaporativos deben predecir un valor mínimo para la masa total  $M$  del sistema, así como valores críticos de masa asociados a la naturaleza de los procesos colectivos inherentes a este escenario astrofísico, comportamientos estos que no han sido reportados en estos estudios antecedentes. Esto se debe a que las dependencias termodinámicas calculadas por Chavanis y colaboradores fueron realizadas para valores fijos del parámetro de degeneración  $\mu$ . Aunque este proceder facilita los cálculos involucrados; dificulta la interpretación física de los resultados obtenidos. El parámetro natural a ser prefijado para las dependencias termodinámicas es la masa total  $M$  del sistema. Sin embargo, desarrollar la caracterización termodinámica de este modelo para masa constante es un problema computacional complejo. Es por eso que una parte fundamental en el desarrollo de la presente investigación es la implementación de algoritmos computacionales adecuados para este propósito.

El **problema** de esta investigación se enmarca en el estudio de la incidencia combinada de la evaporación y las propiedades cuánticas en la termo-estadística de los sistemas astrofísicos. Nuestro **objetivo general** es estudiar los efectos de la evaporación en la termo-estadística asociada al modelo fermiónico de Michie-King. Como **objetivos**

**específicos**, nos proponemos (1) derivar las magnitudes hidrodinámicas y las ecuaciones estructurales que definen los perfiles de distribución de este modelo, así como sus parámetros y magnitudes termodinámicas, (2) desarrollar algoritmos computacionales en programación FORTRAN 90 que permitan la resolución numérica de las ecuaciones resultantes, y el cálculo de las dependencias termodinámicas para masa total constante, y finalmente, (3) procesar resultados numéricos obtenidos y comparar estos con los comportamientos reportados en otros modelos astrofísicos propuestos en la literatura.

La **importancia y originalidad** de este estudio es que aporta una mayor comprensión de la competencia entre los efectos cuánticos y de evaporación en la descripción termodinámica de algunos sistemas astrofísicos existentes en la naturaleza, tales como las entellas enanas blancas en sistemas binarios, y en particular, la estimación de los valores críticos de la masa total  $M$  asociados a la estabilidad termodinámica de los sistemas que se encuentran en estas condiciones.

Como **hipótesis** de partida, se plantea que la energía de escape  $\varepsilon_c$  prefija una primera dimensión lineal característica del sistema formado por  $N$  constituyentes en términos del concepto de radio de tidal  $R = -GNm^2/\varepsilon_c$  (del Inglés: *tidal radius* o radio de marea), el que entra directamente en la estructura de los halos de los perfiles de distribución y define el tamaño del sistema. Las propiedades cuánticas, por su parte, definen una segunda dimensión lineal  $\ell = \hbar^2/Gm^3N^{1/3}$  que caracteriza la estructura de los núcleos degenerados que se forman a bajas energías tras la ocurrencia del colapso gravitacional. Las magnitudes termodinámicas, y los perfiles de distribución dependen fuertemente del grado de degeneración del sistema astrofísico, que puede ser caracterizado mediante la razón de degeneración  $\chi = \ell/R$ , y que se relaciona directamente con la masa total del sistema  $M$  y el parámetro de degeneración  $\alpha$  de la función de distribución (1.1). En particular, el colapso gravitacional debe aparecer como una transición de fase microcanónica, cuyo carácter continuo o discontinuo dependerá de la razón de degeneración  $\chi$ . De igual manera que los efectos cuánticos-relativistas imponen un límite superior para la masa del sistema (límite de Chandrasekhar), la incidencia de evaporación de los constituyentes imponen cierto valor mínimo para la masa del orden  $M_{inf} \sim \hbar^6/G^3m^8R^3$  dependiente del radio de tidal  $R$  del sistema.

La **metodología** empleada es la descripción hidrodinámica de un sistema astrofísico bajo los efectos de la evaporación. Específicamente, a partir de la función de distribución propuesta (1.1) serán obtenidas las magnitudes hidrodinámicas que describen al modelo fermiónico de King, las cuales se acoplarán a la ecuación de Poisson que relaciona la distribución de partículas  $\rho$  y el potencial gravitacional  $\phi$ . La integración de las ecuaciones resultantes permitirá obtener las magnitudes termodinámicas del sistema, así como sus perfiles de distribución. Debido a la complejidad y carácter no lineal de las ecuaciones diferenciales obtenidas, se procederá a la integración numérica mediante el empleo de la programación en **FORTRAN 90** [26–28].

El resto de la tesis está organizada en cuatro capítulos y tres apéndices. El segundo capítulo, titulado *Antecedentes*, presenta algunos modelos existentes en la literatura que aportan en la comprensión de la termodinámica del modelo fermiónico de King. En el tercer capítulo, titulado *Metodología*, se derivan las ecuaciones estructurales y demás observables termodinámicos relevantes del modelo estudiado. En el cuarto capítulo, denominado *Resultados y discusiones*, se presentan los resultados obtenidos de la integración numérica del modelo, la descripción de los observables termodinámicos y sus perfiles de distribución. Finalmente, el quinto capítulo, llamado *Consideraciones finales* se presentan las conclusiones de este estudio y se enumeran algunos problemas abiertos. En los apéndices se exponen los resultados matemáticos más importantes, también se describen los algoritmos computacionales y los métodos numéricos empleados.

## Antecedentes

### 2.1. Modelos politrópicos

La estabilidad de objetos estelares tales como las estrellas enanas blancas está mantenida por la presión del gas degenerado de electrones, con propiedades próximas a las asociadas a temperatura cero. Como se sabe, la caracterización hidrodinámica de un sistema en estas condiciones corresponde al caso particular  $n = 3/2$  de los *modelos politrópicos* [29]. Por otra parte, el comportamiento de los halos en los objetos estelares que se comportan de forma adecuada según los modelos de King [13], o para estos sistemas con valores altos de energías, también se describen mediante los modelos politrópicos con  $n = 5/2$ . Resulta adecuado comenzar esta revisión de antecedentes repasando las propiedades de estos modelos.

Los modelos politrópicos parten de asumir una ecuación de estado fenomenológica entre la presión  $p$  y la densidad  $\rho$  mediante la ley de potencia:

$$p = K\rho^\gamma = K\rho^{1+1/n}. \quad (2.1)$$

En esta relación,  $n$  es el índice politrópico ( $\gamma = 1 + 1/n$ ), y  $K$  cierta constante que depende del cuadro microscópico al que pueda asociarse esta ecuación de estado. Para calcular la ecuación de estructura para sistemas isotrópicos, se multiplica la ecuación de equilibrio hidrostático:

$$\frac{\partial}{\partial r} p(r) = -\rho(r) \frac{GM(r)}{r^2}, \quad (2.2)$$

[donde  $M(r)$  es la masa total del sistema encerrada a una distancia  $r$  de su centro] por  $r^2/\rho(r)$  y diferenciando con respecto a  $r$ , se obtiene:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dp(r)}{dr} \right] = -G \frac{dM(r)}{dr}. \quad (2.3)$$

Sustituyendo la ecuación de continuidad  $dM(r)/dr = 4\pi r^2 \rho(r)$  en la expresión anterior y reemplazando la ecuación (2.1), se obtiene:

$$\frac{(n+1)K}{4\pi G n} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ \frac{r^2}{\rho^{\frac{n-1}{n}}(r)} \frac{d\rho(r)}{dr} \right] = -\rho. \quad (2.4)$$

Expresando en términos de las variables adimensionales  $\theta$  y  $\xi$  definidas como:

$$\rho(r) \equiv \rho_c \theta^n(\xi), \quad r \equiv \alpha \xi \quad (2.5)$$

y definiendo  $\alpha$  como:

$$\alpha^2 \equiv \left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G \rho_c^{\frac{n-1}{n}}} \right], \quad (2.6)$$

obtenemos la ecuación de *Lane-Emden* [29]:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[ \xi^2 \frac{d\theta(\xi)}{d\xi} \right] = -\theta^n(\xi), \quad (2.7)$$

la que está sujeta a las siguientes condiciones en el origen  $\xi = 0$ :

$$\theta(\xi = 0) = 1, \quad \frac{d\theta(\xi = 0)}{d\xi} = 0. \quad (2.8)$$

En la figura 2.1 se observa que las soluciones  $\theta(\xi)$  decrecen monótonamente y para  $n < 5$  tienen un cero en un valor finito  $\xi = \xi_c$ , el cual corresponde al radio estelar.

$$R = \alpha \xi_c. \quad (2.9)$$

Las soluciones de la ecuación de Lane-Emden se conocen como soluciones politrópicas y solo dependen del valor de  $n$ . Las soluciones correspondientes a  $n \geq 5$  no intersectan el eje horizontal. Para  $n > 5$ , se demuestra que el radio y la masa de un sistema hipotético en estas condiciones tienen valores infinitos. Estas condiciones no resultan adecuadas para un sistema finito, por lo que las soluciones con  $n > 5$  son inestables. El caso marginal  $n = 5$  tiene solución analítica para la densidad:

$$\rho(r) = \rho_0 / [1 + (r/a)^2]^{5/2}, \quad (2.10)$$

y se corresponde con el conocido modelo de Plummer [30]. Algunas cantidades físicas importantes como el radio del sistema y la masa total pueden derivarse de la ecuación (2.7). Por ejemplo, el radio del sistema  $R$ :

$$R = \alpha \xi_c = \left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{\frac{1}{2}} \rho_c^{(1-n)/2n} \xi_c, \quad (2.11)$$

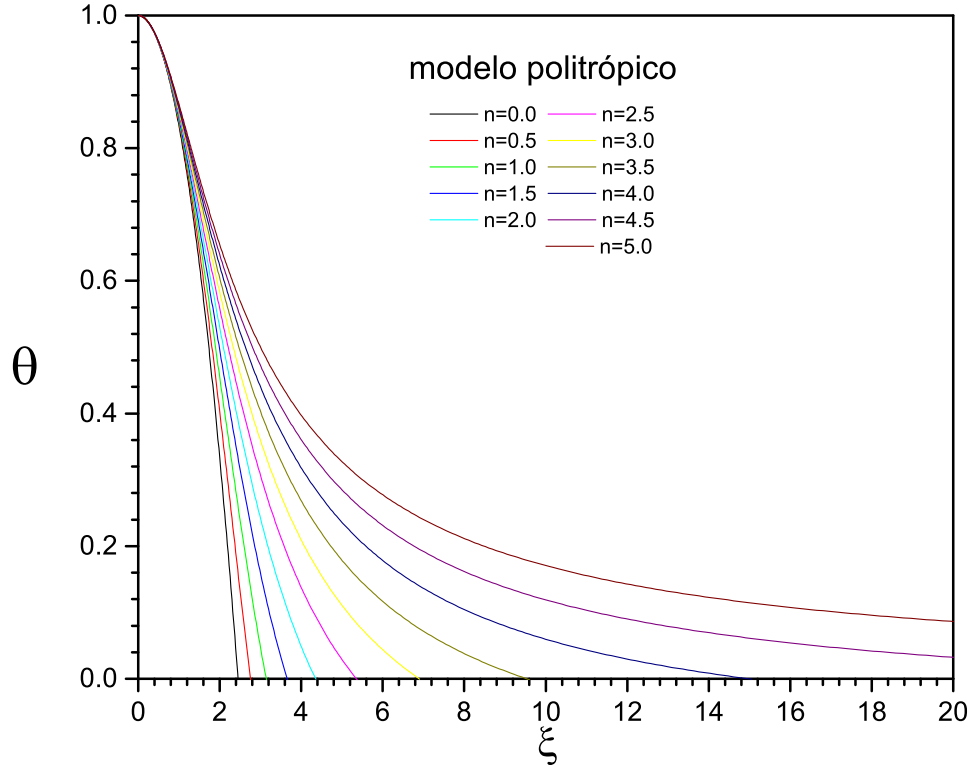


Figura 2.1: Soluciones de la ecuación de Lane-Emden para diferentes valores del índice  $n$ .

donde  $\rho_c$  es la densidad central y la cantidad  $\xi_c$  corresponde al radio de corte; este es el primer cero de la función  $\theta(\xi)$  de la ecuación de Lane-Emden (2.7). La masa total del sistema está dada por:

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr = 4\pi \left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{3/2} \rho_c^{(3-n)/2n} \xi_c^2 \left| \frac{d\theta(\xi = \xi_c)}{d\xi} \right|. \quad (2.12)$$

Eliminando  $\rho_c$  de las ecuaciones (2.11) y (2.12), se obtiene la relación masa-radio:

$$M = 4\pi C^3 \xi_c^2 \left| \frac{d\theta(\xi = \xi_c)}{d\xi} \right| \left[ \frac{R}{\xi_c C} \right]^{(3-n)/(1-n)}, \quad (2.13)$$

con  $C = \sqrt{(n+1)K/4\pi G}$ . Para el caso del gas degenerado de electrones no relativista  $n = 3/2$ , se tiene:

$$MR^3 = \text{constante}. \quad (2.14)$$

Este resultado muestra que las estrellas enanas blancas con mayor masa tienen radio menor, resultado coherente con las observaciones. Algunos perfiles para valores notables  $n = 3/2$  y  $n = 3$  del índice politrópico  $n$  se muestran en la figura 2.2.

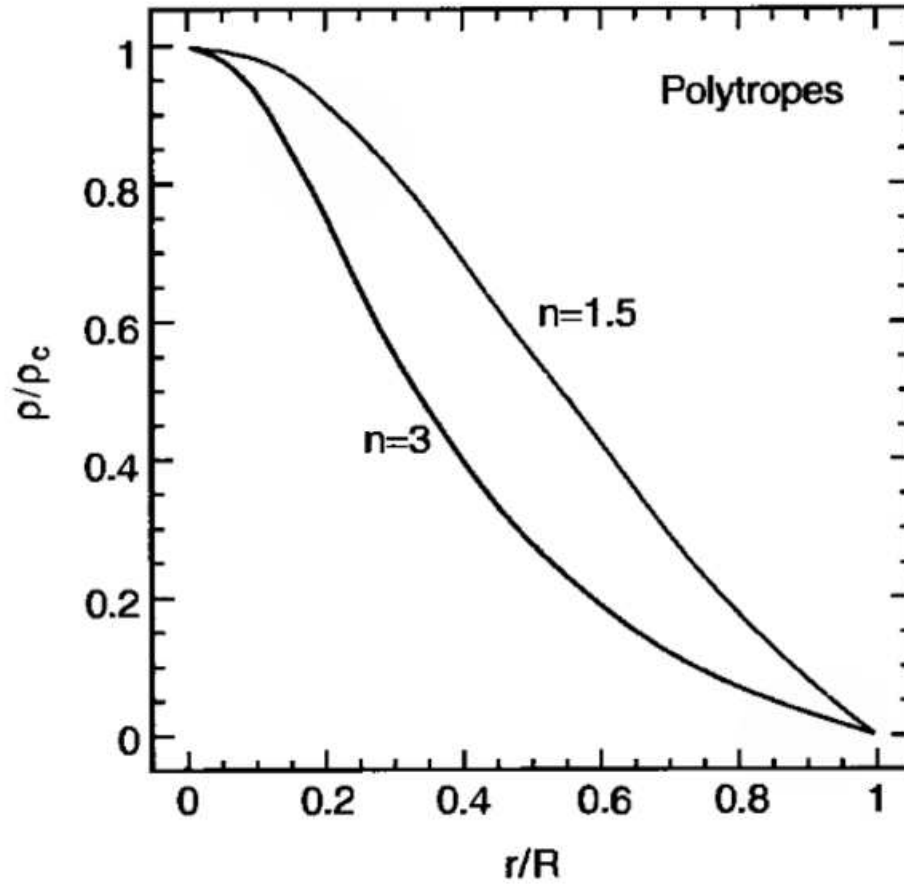


Figura 2.2: Perfiles correspondientes al modelo politrópico con  $n = 3/2$  y  $n = 3$ . En general, para valores mayores del índice politrópico  $n$ , la masa del sistema tiende a concentrarse en la región central del sistema [31].

## 2.2. Caso politrópico notable: gas degenerado de fermiones

Considerando la energía de Fermi  $\varepsilon_F$  en la Ec.(1.1) se obtiene una función de distribución dada por la función escalón de Heaviside en el límite de temperatura cero  $\beta \rightarrow +\infty$ :

$$f_{FDT}(\mathbf{r}, \mathbf{p} | +\infty) = H[\varepsilon_F - \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})]. \quad (2.15)$$

Denotando la energía de fermi  $\varepsilon_F = m\phi_F$ , en términos del potencial de superficie  $\phi_F$  se obtiene la siguiente expresión para la densidad de masa:

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{gm}{6\pi^2} \left\{ \frac{2m^2}{\hbar^2} [\phi_F - \phi(\mathbf{r})] \right\}^{\frac{3}{2}}. \quad (2.16)$$

Como se esperaba, esta expresión corresponde al modelo politrópico con exponente  $n = 3/2$ , el cual predice un perfil de distribución con radio finito  $R_F$ :

$$R_F = -GM/\phi_F, \quad (2.17)$$

al cual nos referiremos como el radio de Fermi. Introduciendo la función:

$$\chi(r) = \frac{1}{\phi_F} \phi(r) - 1, \quad (2.18)$$

y el radio adimensional  $\xi = ar/R_F$ , siendo  $a$  la constante adimensional auxiliar:

$$a^2 = G \frac{gm^4}{6\pi^2 \hbar^3} (8GMR_F^3)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.19)$$

se obtiene el problema de Poisson :

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[ \xi^2 \frac{d}{d\xi} \chi(\xi) \right] = -4\pi \chi^{\frac{3}{2}}(\xi). \quad (2.20)$$

Esta ecuación se resolverá considerando las siguientes condiciones de regularidad y borde:

$$\begin{aligned} \chi(0) &= C, \chi'(0) = 0, \\ \chi(\xi_c) &= 0, \xi_c \frac{d}{d\xi} \chi(\xi_c) = -1, \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde el radio de corte  $\xi_c = a$ . La integración numérica de la ecuación diferencial no lineal (2.20) se resolverá desde el origen, pero con  $C$  como una constante desconocida *a priori*. Nótese que la operación de reescalamiento:

$$\bar{\xi} = \Lambda^{1/4} \xi, \bar{\chi}(\bar{\xi}) = \chi(\xi) / \Lambda, \quad (2.22)$$

no modifica la forma del problema de Poisson (2.20). Considerando  $\Lambda = C$ , las condiciones de regularidad en el origen están dadas por:

$$\bar{\chi}(0) = 1, \bar{\chi}'(0) = 0, \quad (2.23)$$

los cuales son más convenientes para realizar la integración numérica de la ecuación diferencial (2.20). Este procedimiento nos permite encontrar las constantes  $C$  y  $\bar{\xi}_c = C^{1/4} a$  de las siguientes condiciones de frontera:

$$\bar{\chi}(\bar{\xi}_c) = 0, \quad \bar{\xi}_c \frac{d}{d\bar{\xi}} \bar{\chi}(\bar{\xi}_c) = -\frac{1}{C}, \quad (2.24)$$

y por tanto, la constante  $a^2 = \bar{\xi}_c^2 / \sqrt{C}$ . Un cálculo directo muestra que  $C = 1.3462$ ,  $\bar{\xi}_c = 1.0307$ , y  $a^2 = 0.9156$ . La expresión (2.19) puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$R_F^3 = \frac{1}{M} \frac{9\pi^4}{2g^2} \frac{\hbar^6}{G^3 m^8} a^4, \quad (2.25)$$

el cual nos permite calcular el radio de Fermi  $R_F$  para un sistema autogravitante de fermiones degenerados con masa total  $M$ . Considerando la densidad característica  $\rho_c = M/R_F^3$ , el perfil de densidad (2.16) puede ser reescrita de forma adimensional:

$$\rho(r) = a^2 \chi^{\frac{3}{2}}(r). \quad (2.26)$$

### 2.3. Modelo isotérmico de Antonov

El modelo de Antonov [1] corresponde a un gas de partículas puntuales idénticas no relativistas en condiciones de equilibrio termodinámico. De acuerdo a los métodos de la mecánica estadística, la función de distribución asociada a estas condiciones resulta de maximizar la entropía de Boltzmann-Gibbs:

$$S_{BG}[f] = - \int \frac{d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \ln f(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (2.27)$$

para valores fijos de la masa  $M$

$$M[f] = \int \frac{d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} m f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (2.28)$$

y la energía totales del sistema  $E$ :

$$E[f] = \int \frac{d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - \frac{1}{2} \int \int \frac{d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) f(\mathbf{r}', \mathbf{p}') \frac{Gm^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (2.29)$$

esto es:

$$\delta S_{BG} - \alpha \delta M - \beta \delta E = 0, \quad (2.30)$$

siendo  $\alpha$  y  $\beta$  los multiplicadores de Lagrange. De esta forma, se obtiene la distribución de *Maxwell-Boltzmann* [3]:

$$f_{MB}(\mathbf{r}, \mathbf{p} | \beta) = A e^{-\beta \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})}, \quad (2.31)$$

donde  $\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m + m\phi(\mathbf{r})$  es la energía mecánica de una partícula de masa  $m$  e impulso  $\mathbf{p}$ , posición  $\mathbf{r}$  con potencial gravitacional  $\phi(\mathbf{r})$ , siendo  $A$  la constante de normalización y el multiplicador  $\beta = 1/kT$  se identifica con temperatura inversa del sistema.

Para calcular la densidad de masa asociada a la función de distribución (2.31) integramos la expresión:

$$\rho(\mathbf{r}) = m \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (2.32)$$

de donde obtenemos:

$$\rho(\mathbf{r}) = A \left( \frac{m}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3/2} m \exp[-\beta m\phi(r)]. \quad (2.33)$$

Haciendo el cambio de variable  $\phi(0) - \phi(r) = \Phi(r) / \beta m$ :

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 \exp[\Phi(r)], \quad (2.34)$$

donde la densidad en el centro del sistema  $\rho_0$  está dada por:

$$\rho_0 = A \left( \frac{m}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3/2} m \exp[-\beta m\phi(0)]. \quad (2.35)$$

Introduciendo (2.34) en la ecuación de Poisson e asumiendo que el sistema tiene simetría esférica tenemos:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d}{dr} \ln \rho(r) \right] = -4\pi G \beta m \rho(r). \quad (2.36)$$

La ecuación diferencial (2.36) tiene una solución analítica:

$$\rho(r) = -\frac{1}{2\pi\beta G m r^2}, \quad (2.37)$$

la cual presenta una singularidad en el origen. Esta solución corresponde a una esfera singular isotérmica. De la ecuación (2.36) se deduce que la masa de este sistema aumenta con el radio:

$$M(R) = \frac{2}{\beta G m} R. \quad (2.38)$$

lo que significa que el sistema tiene masa total infinita si su tamaño  $R$  se extiende al infinito. Esto significa que el sistema descrito por la función de distribución de Maxwell-Boltzmann (2.31) carece de un estado de entropía máxima si su masa es finita. Esta dificultad se suele denominar *singularidad de largo alcance* de la descripción termodinámica. Antonv resolvió este problema de la masa infinita encerrando el sistema en un recipiente esférico de paredes rígidas de radio  $R$ .

Expresando la ecuación de Poisson correspondiente a la ecuación (2.31) en términos del potencial adimensional  $\Phi$  se obtiene:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[ \xi^2 \frac{d}{d\xi} \Phi(\xi) \right] = -\exp[\Phi(\xi)], \quad (2.39)$$

donde se ha introducido la variable adimensional  $\xi = \kappa r/R$ , con  $R$  que representa el radio de la esfera que contiene al sistema y  $\kappa$  es el valor que toma  $\xi$  en el radio de corte ( $\xi_c = \kappa$ ):

$$\kappa^2 = (4\pi G\beta m\rho_0) R^2. \quad (2.40)$$

La expresión (2.39) es la ecuación isotérmica de Lane-Emden; el cual debe ser integrada con las condiciones en el origen dadas por:

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = 0. \quad (2.41)$$

Los parámetros termodinámicos para el sistema isotérmico acotado por la esfera de radio  $R$  están dados por [3]:

$$\eta = \kappa\Phi'(\kappa), \quad (2.42)$$

$$\Lambda = \frac{3}{2} \frac{1}{\kappa\Phi'(\kappa)} - \frac{\exp[\Phi(\kappa)]}{\Phi'(\kappa)^2}, \quad (2.43)$$

donde  $\eta$  y  $\Lambda$  son las temperatura inversa y energía adimensionales:

$$\eta = \beta \frac{GMm}{R} \text{ y } \Lambda = -\frac{ER}{GMm}. \quad (2.44)$$

La figura 2.3 ilustra la razón de contraste  $\mathcal{R} = \rho(0)/\rho(R)$  y la temperatura inversa  $\eta$  como funciones de la energía adimensional  $\Lambda = -ER/GM^2$ . En el panel a) se observa un máximo para la energía  $\Lambda$  para un radio de contraste  $\mathcal{R} = 709$  punto  $A$ , que corresponde al *colapso gravotermal* [3]; el punto  $B$  donde  $\mathcal{R} = 32.1$  corresponde a una inestabilidad

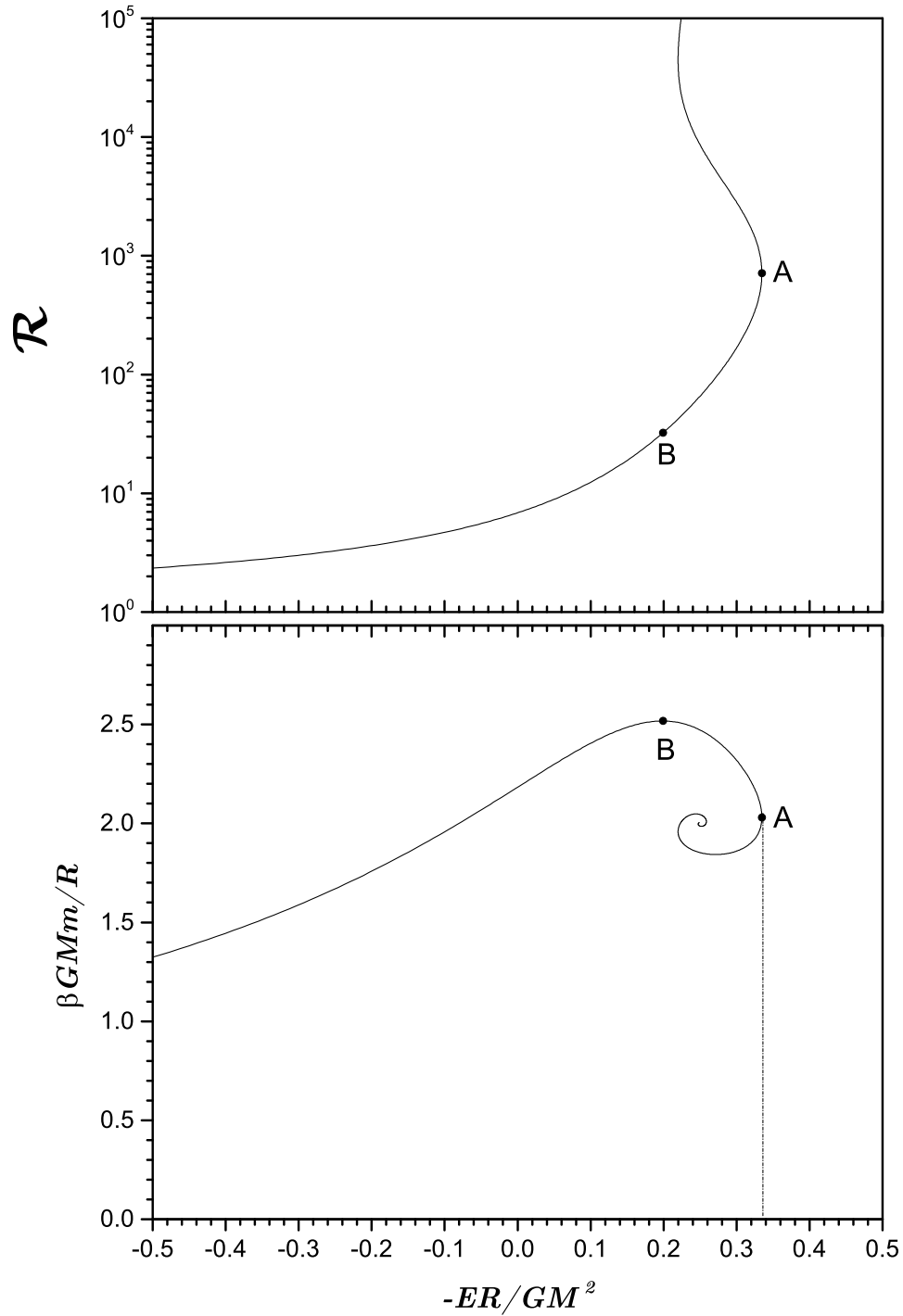


Figura 2.3: Curva calórica correspondiente a la ecuación (2.39). Panel a) Diagrama que ilustra la relación entre el radio de contraste  $\mathcal{R}$  y la energía total del sistema  $\Lambda$ . Panel b) Diagrama de equilibrio que muestra la relación entre la temperatura inversa adimensional  $\eta$  y la energía total adimensional  $\Lambda$  para un gas de partículas clásico no relativista isotérmico confinado dentro de una esfera de radio  $R$ .

isotérmica. En el panel b) se observa una inestabilidad isotérmica en el ensemble canónico, punto  $B$ . El punto  $A$  corresponde a un máximo de la energía  $\Lambda = 0.335$  por encima

de la cual el sistema es inestable. Nótese que la región entre los puntos  $A$  y  $B$  corresponde a configuraciones con *capacidad calorífica negativa*. Esto significa que cuando el sistema pierde energía aumenta su temperatura. Esta característica es común en los sistemas astrofísicos dentro el formalismo del ensemble microcanónico. Dado que en el ensemble canónico la capacidad calorífica es siempre positiva, la presencia de estos estados implica la *inequivalencia entre estos ensembles*, consecuencia de la naturaleza de la interacción de largo alcance de la interacción gravitacional.

Para deducir la ecuación (2.43) se consideró el teorema del virial:

$$3pV = 2\langle K \rangle + n\langle W \rangle, \quad (2.45)$$

para un sistema de partículas puntuales no-relativista cuyas fuerzas interactuantes muestran una dependencia radial dada por  $1/r^{n+1}$ , siendo  $p$  y  $V$  la presión y el volumen del sistema, respectivamente. Para un sistema astrofísico  $n = 1$ . Si dicho sistema se considera abierto, la presión exterior  $p = 0$ . En el caso del gas de partículas del modelo isotérmico de Antonov, la presión sobre las paredes del recipiente es no nula. Sin embargo, para energías suficientemente bajas se puede considerar que la presión ejercida sobre las paredes es aproximadamente nula,  $p \simeq 0$ . Por lo tanto, los valores promedios  $\langle K \rangle$  y  $\langle W \rangle$  de la energía cinética y potencial totales están relacionadas por  $\langle K \rangle = -\langle W \rangle/2$ . Considerando la energía total  $\langle E \rangle = \langle K \rangle + \langle W \rangle$ , y asumiendo la relación de equipartición entre la energía cinética y la *temperatura*  $\langle K \rangle = 3NkT/2$ , se obtiene la siguiente relación para la capacidad calorífica:

$$\langle E \rangle = -3NkT/2 \rightarrow C = d\langle E \rangle/dT = -3Nk/2 < 0. \quad (2.46)$$

El primero en desarrollar esta serie de razonamientos fue Eddington [32], quien evidenció por vez primera que los sistemas astrofísicos se calientan y contraen cuando disminuyen su energía interna, en definitiva, presentan capacidades caloríficas negativas. Para mayores valores de energía, la aproximación  $p \simeq 0$  no es válida para el gas de partículas. De hecho, en este límite, la energía potencial puede despreciarse frente a la presión y energía cinética, y el modelo isotérmico de Antonov tiende a recuperar el comportamiento de gas ideal, donde  $pV \simeq 2\langle K \rangle/3 \sim NkT$ .

## 2.4. Modelo clásico de King

Como fue evidenciado por Lynden-Bell [3], en el problema de maximizar la entropía de Boltzmann para determinar el estado de equilibrio termodinámico de un sistema estelar, se observa que no hay entropía máxima para valores de masa y energía constantes. Un sistema puede experimentar un aumento indefinido de entropía formando estructuras del tipo núcleo-halo. En una situación de este tipo, las regiones internas tienden a contraerse y las regiones externas a evaporarse. En efecto, las esferas isotérmicas que son soluciones de la ecuación de Boltzmann-Poisson tienen masa infinita ya que la densidad decae con  $r^{-2}$  para grandes distancias. La ausencia de entropía máxima en un dominio no acotado implica que el sistema estelar tiende a evaporarse bajo los efectos de las interacciones entre las estrellas. De hecho, los sistemas estelares que se observan en la naturaleza no se extienden hacia el infinito. Por ejemplo, los cúmulos globulares están sujetos a los efectos gravitacionales de las galaxias cercanas, por lo que la distribución de estos sistemas debe ser truncada para energías altas.

Uno de los modelos que incorpora este truncaje de velocidades es la función de distribución propuesta por Michie [33]:

$$f_K(\mathbf{r}, \mathbf{p} | \beta, \varepsilon_c) = A \left[ e^{\beta[\varepsilon_c - \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})]} - 1 \right] H[\varepsilon_c - \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})], \quad (2.47)$$

y que constituye el punto de partida de los modelos de King [13]. En esta expresión,  $A$  es una constante positiva y  $\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m + m\phi(\mathbf{r})$  es la energía mecánica de una partícula dada,  $H(x)$  es la función escalón de Heaviside y  $\varepsilon_c = m\phi_s$  es la energía de escape por encima de la cual las estrellas abandonan el sistema, siendo  $\phi_s$  el potencial gravitacional en la superficie del sistema. El modelo clásico de King toma en cuenta la evaporación de estrellas con energía alta.

La densidad de partículas  $n(\mathbf{r})$  del sistema puede calcularse de la siguiente ecuación:

$$n(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3\mathbf{p}. \quad (2.48)$$

Para resolver esta integral, vamos a introducir el *potencial dimensional*  $\Theta(\mathbf{r})$ :

$$\Theta(\mathbf{r}) = \beta m [\phi_s - \phi(\mathbf{r})], \quad (2.49)$$

y la variable de integración  $x = \sqrt{\beta \mathbf{p}^2 / 2m}$ . Con estas variables, la integral (2.48) queda expresada en la forma:

$$n(\mathbf{r}) = A \left( \frac{2m}{\beta} \right)^{3/2} \int_0^{\sqrt{\Theta}} \left( e^{\Theta - x^2} - 1 \right) 4\pi x^2 dx, \quad (2.50)$$

donde se ha considerado que la integración del impulso  $\mathbf{p}$  solo depende de su módulo  $|\mathbf{p}|$ . Se tiene que esta integral viene dada por:

$$n(\mathbf{r}) = C \exp(\Theta) F(\sqrt{\Theta}), \quad (2.51)$$

donde  $C = A(2m\pi/\beta)^{3/2}$  es una constante de normalización, y  $F(x)$  es la función auxiliar:

$$F(x) = \operatorname{erf}(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x + \frac{2}{3}x^3 \right) e^{-x^2}, \quad (2.52)$$

donde  $\operatorname{erf}(x)$  es la función error:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (2.53)$$

El potencial gravitacional  $\varphi(\mathbf{r})$  se somete a la ecuación de Poisson:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = 4\pi G m n(\mathbf{r}), \quad (2.54)$$

el cual puede ser reescrito en términos del potencial adimensional (2.49) en la forma:

$$\Delta\Theta(\mathbf{r}) = -4\pi (Gm^2\beta C) e^{\Theta(\mathbf{r})} F\left[\sqrt{\Theta(\mathbf{r})}\right]. \quad (2.55)$$

Teniendo en cuenta que la distribución de masa en este modelo tiene simetría esférica, el Laplaciano del potencial adimensional solo depende de su parte radial:

$$\Delta\Theta(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d}{dr} \Theta(r) \right]. \quad (2.56)$$

Conviene efectuar el cambio de variable  $r \rightarrow \xi \equiv \kappa r / R$ , con lo que el problema (2.55) queda escrito en la forma:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[ \xi^2 \frac{d}{d\xi} \Theta(\xi) \right] = -4\pi e^{\Theta(\xi)} F\left[\sqrt{\Theta(\xi)}\right], \quad (2.57)$$

al prefijar el siguiente valor para la constante auxiliar  $\kappa$ :

$$\kappa^2 = \beta G m^2 R_t^2 C. \quad (2.58)$$

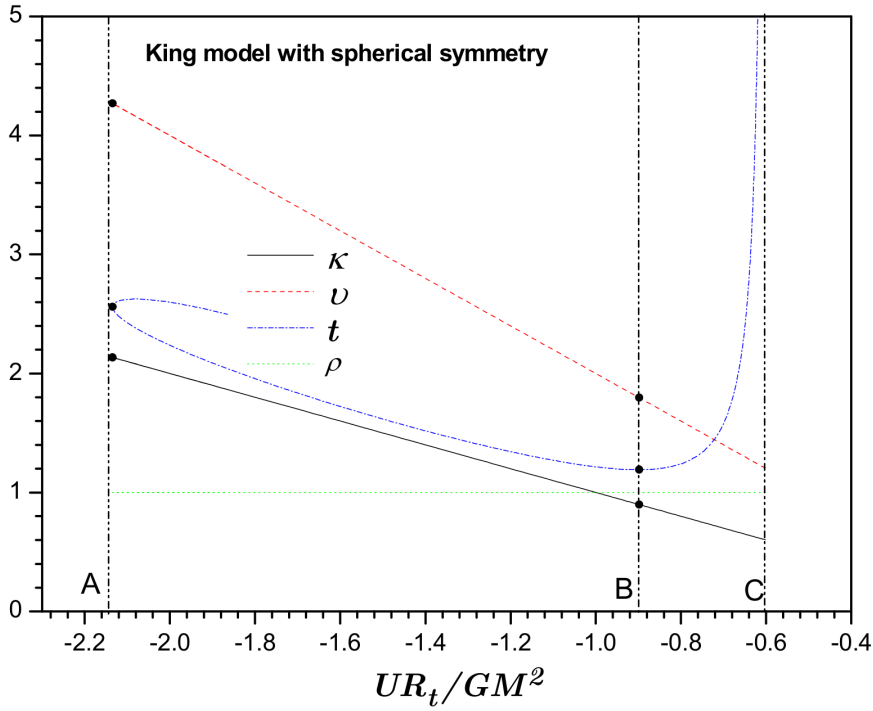


Figura 2.4: Dependencia de algunas cantidades *versus* la energía adimensional  $u = UR_t/GM^2$  asociada con el modelo de King: la energía cinética adimensional  $\kappa = \langle K \rangle R_t/GM^2$ , el valor negativo de la energía potencial adimensional  $v = -\langle W \rangle R_t/GM^2$ , el parámetro  $t = kTR_t/GMm$  correspondiente a la temperatura de una partícula dada por la distribución casi-estacionaria (2.47); y el cociente virial  $\rho = -2\langle K \rangle / \langle W \rangle$ . Las líneas verticales de puntos y trazos indican la posición de tres puntos notables ( $u_A, u_B, u_C$ ) de este modelo.

De acuerdo con la definición (2.49), el potencial adimensional  $\Theta(\mathbf{r})$  se anula en la superficie del sistema, lo que tiene lugar para cierto radio de corte  $\xi_c$ ,  $\Theta(\xi_c) = 0$ . Teniendo en cuenta que esta anulación tiene lugar cuando el radio  $r = R_t$ , se tiene que  $\kappa = \xi_c$ . De esta forma, el problema (2.57) puede ser resuelto con las siguientes condiciones de frontera:

$$\Theta(\xi_c) = 0 \text{ y } \xi \frac{d}{d\xi} \Theta(\xi_c) = -\eta, \quad (2.59)$$

donde hemos introducido la constante adimensional  $\eta$ :

$$\eta = \frac{\beta GMm}{R}. \quad (2.60)$$

Resulta más conveniente proceder a la integración numérica del problema (2.57) en el origen:

$$\Theta(0) = \Phi_0 \text{ y } \frac{d}{d\xi} \Theta(0) = 0, \quad (2.61)$$

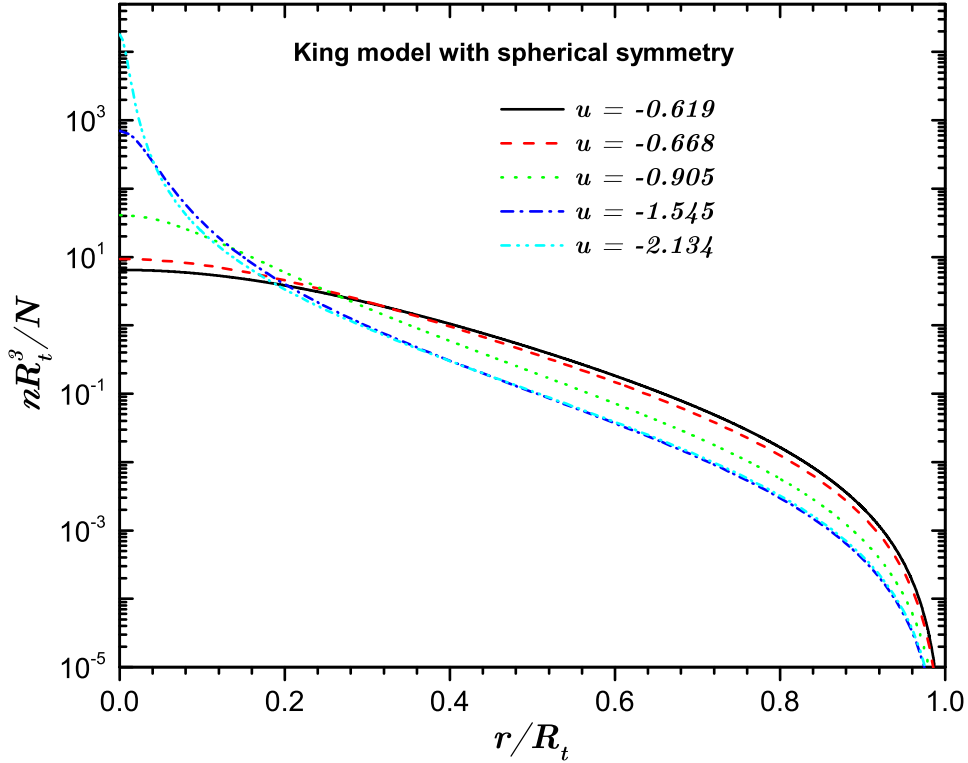


Figura 2.5: Perfiles de distribución asociados con el modelo de King para diferentes valores de la energía. Nótese que la disminución de la energía  $u = UR_t/GM^2$  da lugar a perfiles de distribución con núcleos más densos y halos diluidos.

donde  $\Phi_0$  es cierta constante de integración auxiliar.

De acuerdo a las dependencias mostradas en el panel izquierdo de la figura 2.4, el modelo de King satisface el radio virial  $\rho = -2\langle K \rangle / \langle W \rangle \equiv 1$ , el cual implica una disminución de la energía cinética cuando la energía total  $U$  aumenta. Sin embargo, el valor medio de la energía cinética total  $\langle K \rangle$  no sigue una relación lineal con la cantidad  $T = 1/k\beta$ , el cual puede considerarse como el *parámetro de temperatura* de una distribución cuasi-estacionaria de un solo cuerpo (2.47). Una vez más se observa, una rama de la curva calórica con capacidad calorífica negativa  $C < 0$  entre el punto de colapso gravotermal  $u_A \approx -2.134$  y el punto de colapso isotermal  $u_B = -0.898$ . Una nueva característica es la ligadura superior para la energía total en  $u_C = -0.601$ , el cual corresponde al punto de *disrupción de la evaporación*. Por tanto, una configuración macroscópica con energía  $u \geq u_C$  es inestable bajo la evaporación. Tales sistemas astrofísicos experimentan una repentina evaporación para liberar el exceso de energía para lograr estabilizarse. Es un hecho importante que la energía del colapso gravotermal  $u_A$  predi-

cho por el modelo de King es más pequeño que la correspondiente al modelo isotérmico de Antonov. Este comportamiento está relacionado al hecho que la distribución de partículas se anula en el radio de tidal  $R_t$ . En el panel derecho de la figura 2.5 se muestra que los perfiles de halos más diluidos exhiben núcleos densos. Por tanto, los valores absolutos de la energía potencial total, la energía cinética asociada y la temperatura son mayores que los correspondientes al modelo isotérmico.

## Metodología

### 3.1. Descripción hidrodinámica

Retornando a la caracterización del modelo fermiónico de King comentado en la sección introductoria, pasemos a desarrollar su descripción hidrodinámica asociada. La integración de la función de distribución (1.1) sobre el impulso  $\mathbf{p}$  determina la densidad de partículas  $n(\mathbf{r})$ :

$$n(\mathbf{r}) = \int g \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (3.1)$$

donde  $g = 2s + 1$  es la multiplicidad de espines de los estados cuánticos para partículas de spin  $s$ . La masa total  $M$  se obtiene de la integración de la densidad de masa  $\rho(\mathbf{r}) = mn(\mathbf{r})$  sobre la posición

$$M = \int d^3 \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}). \quad (3.2)$$

El potencial gravitacional del sistema  $\phi(\mathbf{r})$  está relacionado con la densidad de masa  $\rho(\mathbf{r})$  mediante la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = 4\pi G \rho(\mathbf{r}). \quad (3.3)$$

Una forma explícita del potencial gravitacional  $\phi(\mathbf{r})$  puede hallarse reemplazando el ansatz propuesto de la función de distribución (1.1) en la expresión para la densidad de partículas (3.1), y finalmente, reemplazamos la expresión de la densidad resultante en la ecuación de Poisson (3.3). Denotando la energía de escape  $\varepsilon_c$  en términos del potencial gravitacional superficial  $\phi_s$ ,  $\varepsilon_c = m\phi_s$ , podemos expresar la densidad de masa en la forma:

$$\rho(\mathbf{r}) = mg \int_0^{p_c} \frac{4\pi \mathbf{p}^2 d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{e^{\beta(\varepsilon_c - \varepsilon)} - 1}{\alpha + e^{\beta(\varepsilon_c - \varepsilon)}}, \quad (3.4)$$

donde  $p_c$  es el módulo del máximo valor del impulso para una partícula en la posición  $\mathbf{r}$ , esto es:

$$p_c = \sqrt{2m^2 [\phi_s - \phi(\mathbf{r})]}. \quad (3.5)$$

Introduciendo el potencial adimensional  $\Phi(\mathbf{r})$ :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \beta m [\phi_s - \phi(\mathbf{r})], \quad (3.6)$$

y efectuando el cambio de variable  $x = \beta \mathbf{p}^2 / 2m$ , se obtiene:

$$\rho(\mathbf{r}) = C'_0 F \left[ \Phi(\mathbf{r}), \mu, \frac{3}{2} \right]. \quad (3.7)$$

En esta última expresión se introdujo la *integral truncada de Fermi*  $F(\Phi, \mu, \gamma)$  definida por integral:

$$F(\Phi, \mu, \gamma) \equiv \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\Phi \frac{e^{\Phi-x} - 1}{1 + e^{\Phi-x-\mu}} x^{\gamma-1} dx, \quad (3.8)$$

así como la constante de normalización  $C'_0$ :

$$C'_0 = \frac{gm}{2\pi^2} \left( \frac{2m}{\beta \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \Gamma \left( \frac{3}{2} \right) \exp(-\mu). \quad (3.9)$$

Además, se reemplazó la constante de degeneración  $\alpha$  por su logaritmo  $\mu$ :

$$\mu = \ln \alpha \equiv \beta (\varepsilon_c - \varepsilon_F), \quad (3.10)$$

y que en lo adelante denominaremos *parámetro de degeneración*. Reemplazando el resultado (3.7) en la Ec.(3.3), se obtiene la siguiente ecuación diferencial en términos del potencial adimensional:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[ \xi^2 \frac{d\Phi(\xi)}{d\xi} \right] = -4\pi F \left[ \Phi(\xi), \mu, \frac{3}{2} \right] \quad (3.11)$$

para las soluciones con simetría esférica del problema de Poisson (3.3). En esta también se introdujo la variable radial adimensional  $\xi = \kappa r / R$ , siendo  $\kappa$  una constante auxiliar:

$$\kappa^2 = \beta m G C'_0 R^2, \quad (3.12)$$

donde  $R$  es el radio de tidal [8]:

$$R = -GM / \phi_s, \quad (3.13)$$

el cual define el tamaño lineal del sistema. La integración de la ecuación diferencial no lineal (3.11) puede ser realizada considerando las condiciones de frontera :

$$\Phi(\xi_c) = 0, \xi_c \frac{d\Phi(\xi_c)}{d\xi} = -\eta, \quad (3.14)$$

e imponiendo las condiciones de regularidad en el origen:

$$\Phi(0) = \Phi_0, \frac{d\Phi(0)}{d\xi} = 0. \quad (3.15)$$

Considerando la definición de la variable radial adimensional  $\xi$ , el valor de la constante auxiliar  $\kappa$  viene dada por el radio de corte  $\xi_c$ ,  $\kappa = \xi_c$ , mientras que la magnitud  $\eta$ :

$$\eta = \beta \frac{GMm}{R} \equiv \frac{T_c}{T} \quad (3.16)$$

representa la temperatura adimensional inversa del sistema expresada en unidades características de  $T_c = GMm/Rk$ , siendo  $k$  la constante de Boltzmann.

La integración de la ecuación diferencial no lineal (3.11) será implementada usando un método numérico adecuado al problema. Para este propósito, se considera el uso del esquema de integración numérica Runge-Kutta de cuarto orden, el cual se describe en el Apéndice A.1. Los parámetros  $(\Phi_0, \mu)$  son empleados como parámetros de integración para obtener la dependencia radial del potencial adimensional  $\Phi(\xi)$  en términos del radio adimensional  $\xi$ . Los cálculos se extienden desde el origen  $\xi = 0$  hasta que se anule el potencial adimensional  $\Phi(\xi)$  en el radio de corte  $\xi_c$ . De esta forma se obtendrán los parámetros dependientes auxiliares  $(\eta, \kappa)$  a través de las condiciones de frontera (3.14). Estos parámetros y el potencial adimensional  $\Phi(\xi)$  se emplearán para obtener otros observables. Por simplicidad, expresaremos todas las cantidades en su forma adimensional. Esto es posible usando unidades características adecuadas. En particular, las unidades características para la densidad de masa es  $\rho_c = M/R^3$ , por tanto podemos introducir la densidad adimensional (de masa o equivalentemente, de partículas) como  $q(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})R^3/M$ . Esta última función puede expresarse como:

$$q(\mathbf{r}) \equiv \frac{\kappa^2}{\eta} F \left[ \Phi(\mathbf{r}), \mu, \frac{3}{2} \right]. \quad (3.17)$$

Adicionalmente, las definiciones (3.9) y (3.12) para la constante de normalización  $C'_0$  y el parámetro auxiliar  $\kappa$ , respectivamente, pueden emplearse para obtener la siguiente

relación:

$$MR^3 = \frac{2\pi^3}{g^2} \frac{\hbar^6}{G^3 m^8} \kappa^4 \eta \exp(2\mu), \quad (3.18)$$

el cual nos permite calcular la masa total  $M$  en términos de los parámetros numéricos  $[\kappa, \eta, \mu]$  una vez fijado el valor del radio de tidal  $R$ .

### 3.2. Energía total y magnitudes asociadas

Otra cantidad observable importante es la energía total  $U = K + W$ , cuya energía cinética total  $K$  y energía potencial total  $W$  están dadas por:

$$K = \int g \frac{d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2, \quad (3.19)$$

$$W = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{r} \phi(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}). \quad (3.20)$$

La energía cinética total  $K$  puede expresarse de la forma:

$$K = \int d^3 \mathbf{r} v(\mathbf{r}), \quad (3.21)$$

donde  $v(\mathbf{r})$  es la densidad de la energía cinética dada por:

$$v(\mathbf{r}) = \int_0^{p_c} g \frac{4\pi \mathbf{p}^2 d|\mathbf{p}|}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 \frac{e^{\beta[\varepsilon_c - \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})]} - 1}{\alpha + e^{\beta[\varepsilon_c - \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})]}}. \quad (3.22)$$

Este último perfil de distribución puede ser escrita en términos del potencial adimensional  $\Phi(\mathbf{r})$  y de la función auxiliar (3.8) como:

$$v(\mathbf{r}) = \frac{3}{2\beta} \frac{1}{m} C'_0 F \left[ \Phi(\mathbf{r}), \mu, \frac{5}{2} \right]. \quad (3.23)$$

De aquí para adelante, se expresarán las cantidades de energía en unidades adimensionales usando la energía característica  $U_c = GM^2/R$ . En particular, la energía cinética total adimensional  $k = KR/GM^2$  dada por:

$$k = \frac{1}{\eta^2 \kappa} \mathcal{K}(\Phi_0, \mu), \quad (3.24)$$

donde  $\mathcal{K}(\Phi_0, \mu)$  denota la integral auxiliar:

$$\mathcal{K}(\Phi_0, \mu) \equiv \frac{3}{2} \int_0^{\xi_c} F \left[ \Phi(\xi), \mu, \frac{5}{2} \right] 4\pi \xi^2 d\xi. \quad (3.25)$$

La dependencia implícita de la última integral sobre el potencial central adimensional  $\Phi_0$  se explica por el hecho de que toda solución de la ecuación diferencial no lineal (3.11) emplea  $(\Phi_0, \mu)$  como parámetros de integración. La energía potencial total  $W$  puede reescribirse en términos del potencial adimensional (3.6) como:

$$W = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \left[ \phi_s - \frac{\Phi(\mathbf{r})}{\beta m} \right] \rho(\mathbf{r}). \quad (3.26)$$

De manera similar al cálculo anterior, se obtiene el siguiente resultado para la energía potencial total adimensional  $w = WR/GM^2$ :

$$w = -\frac{1}{2} - \frac{1}{\eta^2 \kappa} \mathcal{P}(\Phi_0, \mu), \quad (3.27)$$

donde  $\mathcal{P}(\Phi_0, \mu)$  denota la integral auxiliar:

$$\mathcal{P}(\Phi_0, \mu) \equiv \frac{1}{2} \int_0^{\xi_c} \Phi(\xi) F \left[ \Phi(\xi), \mu, \frac{3}{2} \right] 4\pi \xi^2 d\xi. \quad (3.28)$$

Considerando los resultados parciales (3.24) y (3.27), la energía total adimensional  $u = UR/GM^2 = k + w$  se expresa finalmente como sigue:

$$u = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\eta^2 \kappa} [\mathcal{K}(\Phi_0, \mu) - \mathcal{P}(\Phi_0, \mu)]. \quad (3.29)$$

Por definición, el radio entre la energía cinética por partícula y la temperatura:

$$\epsilon(\mathbf{r}) = m\beta \frac{2}{3} \frac{v(\mathbf{r})}{\rho(\mathbf{r})} = \epsilon[\Phi(\mathbf{r}), \mu] = \frac{F[\Phi(\mathbf{r}), \mu, \frac{5}{2}]}{F[\Phi(\mathbf{r}), \mu, \frac{3}{2}]}, \quad (3.30)$$

es un perfil de distribución que provee información acerca de la naturaleza degenerada o no-degenerada de la materia en una posición dada. De aquí para adelante, a este perfil de distribución nos referiremos como la función de degeneración. Las unidades características para la densidad de energía cinética es  $v_c = GM^2/R^4$ , el cual nos permite expresar la densidad de energía cinética adimensional  $e(\mathbf{r}) = v(\mathbf{r})R^4/GM^2$  de la forma:

$$e(\mathbf{r}) = \frac{3\kappa^2}{2\eta^2} F \left[ \Phi(\mathbf{r}), \mu, \frac{5}{2} \right]. \quad (3.31)$$

## Discusión de resultados

### 4.1. Generalidades

#### 4.1.1. Comportamientos de las integrales de Fermi truncadas

Información general de la termo-estadística del presente modelo se obtiene al analizar el comportamiento matemático de la integral truncada de Fermi (3.8) para  $\gamma = 3/2$ , la cual aparece en la ecuación de estructura (3.11) [el problema de Poisson que describe las funciones de distribución del sistema], así como de la función de degeneración (3.30) que describe el estado termodinámico del sistema en una posición dada del mismo. Estas funciones son representadas en la Fig.4.1 para algunos valores del parámetro de degeneración  $\mu$ . Algunos detalles sobre los cálculos requeridos para obtener estas funciones y su empleo en el presente estudio son presentadas en el Apéndice A.2. A primera vista, se puede reconocer la existencia de tres regímenes asintóticos diferentes, los cuales se vuelven más evidentes en aquellos casos con mayores valores del parámetro de degeneración  $\mu$ . Para una mejor comprensión, analicemos detalladamente estos comportamientos.

En el límite donde  $\exp(\Phi - \mu) \ll 1$ , uno puede ignorar el exponente en el denominador de la integral (3.8) para obtener la siguiente aproximación:

$$F(\Phi, \mu, \gamma) \simeq \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\Phi (e^{\Phi-x} - 1) x^{\gamma-1} dx = E(\Phi, \gamma + 1). \quad (4.1)$$

Acá se ha introducido la función auxiliar  $E(x, s)$  definida por:

$$E(x, s) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^x e^{x-t} t^{s-1} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(s+1+k)} x^{s+k}, \quad (4.2)$$

el cual representa una *generalización fraccional* de la función exponencial  $\gamma$ -exponencial

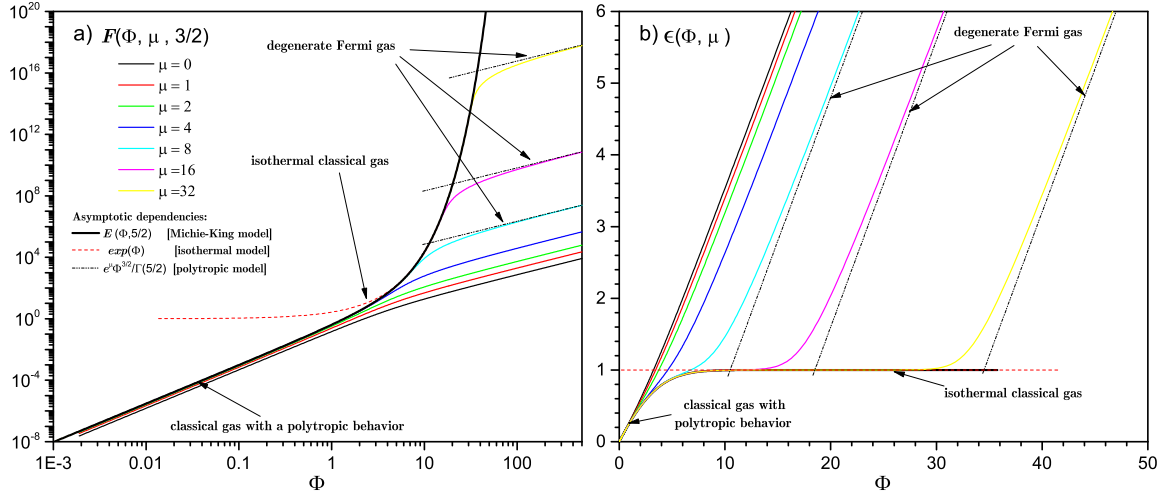


Figura 4.1: Panel a) Comportamiento de la función  $F(\Phi, \mu, 3/2)$  para diferentes valores del parámetro de degeneración  $\mu$ . Estos gráficos fueron realizadas usando la escala log-log para ilustrar mejor la existencia de las dependencias asintóticas de la ley de potencia. Panel b) Comportamiento de la función de degeneración  $\epsilon(\Phi, \mu) = F(\Phi, \mu, 5/2)/F(\Phi, \mu, 3/2)$  para diferentes valores del parámetro de degeneración  $\mu$ . Ambas figuras ilustran la existencia de tres regimenes asintóticos diferentes, que corresponden a) un gas degenerado de Fermi donde  $F(\Phi, \mu, 3/2) \propto \Phi^{3/2}$  para  $\Phi \gg 1$ , b) un gas isotérmico clásico donde  $F(\Phi, \mu, 3/2) \propto \exp(\Phi)$  para valores intermedios de  $\Phi$  y valores suficientemente largos del parámetro de degeneración  $\mu$ , y c) el gas politrópico clásico (donde  $F(\Phi, \mu, 3/2) \propto \Phi^{5/2}$  para  $\Phi \ll 1$ ). La existencia de tres regimenes que dependen fuertemente del parámetro de degeneración  $\mu$ . De hecho, el régimen del gas isotérmico intermedio desaparece para valores suficientemente pequeños de  $\mu$ , mientras el régimen correspondiente a un gas de Fermi degenerado parece ser sensiblemente perturbado.

[16]. Esta función puede expresarse en términos de la *función gamma incompleta*:

$$\gamma(s, x) = \int_0^x e^{-t} t^{s-1} dt \rightarrow E(x, s) \equiv \frac{1}{\Gamma(s)} e^x \gamma(s, x). \quad (4.3)$$

Considerando que  $\gamma(s, x \gg 1) \simeq \Gamma(s)$  y la representación en términos de una ley de potencia (4.2), uno puede ver que la función exponencial muestra dos límites asintóticos notables:

$$E(x, s) = \begin{cases} x^s / \Gamma(s+1) & \text{si } x \rightarrow 0 \\ \exp(x) & \text{si } x \gg 1 \end{cases}, \quad (4.4)$$

el cual corresponde a una ley de potencia y a una dependencia exponencial. Físicamente, estos comportamientos asintóticos pueden ser relacionados con un gas clásico no relativista con dependencia politrópica e isotérmica entre la densidad y la presión. El presente límite asintótico del gas autogravitante de fermiones corresponde al límite clásico donde se recupera el modelo de King [13]:

$$F\left(\Phi, \mu \gg \Phi, \frac{3}{2}\right) \simeq E\left(\Phi, \frac{5}{2}\right), \quad (4.5)$$

el cual es un caso particular de los modelos  $\gamma$ -exponencial introducidos por Gomez-Leyton y Velazquez para  $\gamma = 1$  [16]. Para mayores detalles y propiedades de esta función especial, ver apéndice A.3.

En el límite donde  $\exp(\Phi - \mu) \gg 1$ , tenemos:

$$F(\Phi, \mu, \gamma) \simeq \frac{1}{\Gamma(\gamma)} e^{\mu} \int_0^{\Phi} x^{\gamma-1} dx = \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} e^{\mu} \Phi^{\gamma}, \quad (4.6)$$

la que corresponde también a una dependencia politrópica, en este caso, la asociada al gas degenerado de fermiones (con temperatura cero):

$$F\left(\Phi, \mu, \frac{3}{2}\right) \simeq \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} e^{\mu} \Phi^{\frac{3}{2}}. \quad (4.7)$$

Los tres regímenes ilustrados en la Fig.4.1 corresponden a los dos regímenes asintóticos (4.4) del gas clásico en sus comportamientos politrópico e isotérmico, así como el régimen asintótico (4.7) del gas cuántico degenerado, que también representa un caso particular de los modelos astrofísicos politrópicos. Una ilustración transparente de la existencia de estos tres regímenes se obtiene a través de la representación de la función de degeneración  $\epsilon(\Phi, \mu)$  introducida en la Ec.(3.30). La función de degeneración es una magnitud adimensional que describe la razón entre la energía cinética por partículas descrita para este modelo para una posición dada, y la predicción termo-estadística de esta magnitud para el gas clásico isotérmico (de acuerdo al conocido teorema de equipartición de energía según grados de libertad):

$$\epsilon(\Phi, \mu) \equiv [m \langle \mathbf{v}^2 \rangle / 2] / [3kT/2]. \quad (4.8)$$

Por definición, este indicador toma valor igual a la unidad para el caso del gas clásico isotérmico. Cuando este indicador toma valores por debajo de la unidad, caracteriza la desviación del comportamiento isotérmico del gas clásico como consecuencia del truncamiento del espectro de velocidades debido a la incidencia de la evaporación de las partículas, llegando a comportamiento del modelo politrópico para valores de este cercanos a cero. Por último, si la función de degeneración toma valores por encima de la unidad, describe la dominancia de los efectos cuánticos, y en particular, el comportamiento politrópico del gas cuántico degenerado.

De acuerdo a las dependencias ilustradas en la Fig.4.1.b, la existencia de estos tres regímenes se hacen bien evidentes para valores del parámetro de degeneración  $\mu$  suficientemente grandes, y en particular para  $\mu > 8.0$ . Sin embargo, el *plateau* isotérmico desaparece si los valores del parámetro de degeneración  $\mu$  son suficientemente bajos, en especial para  $\mu < 8.0$ , donde ocurre un tránsito directo entre el comportamiento politrópico del gas cuántico degenerado al comportamiento del gas clásico politrópico por efecto de evaporación de partículas. De acuerdo con estos resultados, los perfiles radiales de distribuciones de partículas que se derivan de este modelo pueden tener comportamientos asintóticos de la forma:

- perfiles de núcleo degenerado, con envoltura gaseosa intermedia isotérmica y halo politrópico clásico [ $\mu > 8.0$  y  $\Phi \gtrsim \mu$ ],
- perfiles de núcleo isotérmico y halo politrópico clásico [ $\mu > 8.0$  y  $1 \lesssim \Phi \lesssim \mu$ ],
- perfiles politrópicos clásicos [ $\Phi \rightarrow 0$ ],
- perfiles de núcleo degenerado y halo politrópico clásico [ $\mu < 8.0$  y  $1 \lesssim \Phi \lesssim \mu$ ],
- perfiles politrópicos cuántico degenerado [ $\Phi \rightarrow +\infty$ ].

#### 4.1.2. Razón de masa $\theta$ y su relevancia como medida de degeneración cuántica del sistema

De acuerdo con el modelo astrofísico del gas degenerado de fermiones abordado en la sección 2.2, para un sistema con masa total  $M$  descrito por la Ec.(3.18), el cociente  $\theta$  entre el volumen de la esfera con radio de Fermi  $R_F$  [ver Ec.(2.25)] y otra esfera con radio de tidal  $R$  está dada por la relación:

$$\theta = \left( \frac{R_F}{R} \right)^3 = \frac{\Delta}{MR^3}, \quad (4.9)$$

donde  $\Delta$  es una constante física dada por:

$$\Delta = \frac{9\pi^4}{2g^2} \frac{\hbar^6}{G^3 m^8} a^4. \quad (4.10)$$

Por definición, el parámetro  $\theta$  provee una medida geométrica de la degeneración cuántica del sistema, la que resulta alternativa a la asociada al parámetro de degeneración  $\mu$ , que por su definición:

$$\mu = \beta(\varepsilon_c - \varepsilon_F), \quad (4.11)$$

provee una medida termo-estadística de la degeneración cuántica ( $\beta$  es la temperatura inversa, mientras que  $\varepsilon_c$  y  $\varepsilon_F$  son las energías de escape y de Fermi de las partículas del sistema). Conviene definir ahora la *masa de Fermi*  $M_F$ , es decir, la masa del sistema degenerado de fermiones cuyo radio de Fermi  $R_F$  es igual al radio de tidal  $R$ :

$$M_F \equiv \frac{1}{R^3} \frac{9\pi^4}{2g^2} \frac{\hbar^6}{G^3 m^8} a^4. \quad (4.12)$$

Esta noción de masa tiene en cuenta la degeneración cuántica del sistema y la magnitud lineal que caracteriza la incidencia de la evaporación, por lo que es una magnitud importante para referir las propiedades termo-estadísticas del modelo fermiónico de King. De acuerdo con estas definiciones previas, la cantidad  $\theta$  en la Ec.(4.9) puede interpretarse como el cociente entre la masa de Fermi  $M_F$  y la masa total  $M$ :

$$\theta = \frac{M_F}{M}. \quad (4.13)$$

De acuerdo con la expresión (3.18), el parámetro de masa  $\theta$  para el modelo fermiónico de King puede calcularse a partir de las magnitudes derivadas de la integración numérica del problema de Poisson (3.11) en la forma:

$$\theta = \frac{M_F}{M} \equiv \frac{9\pi}{4} a^4 \frac{1}{\kappa^4 \eta} \exp(-2\mu). \quad (4.14)$$

El radio de Fermi definido en la Ec.(2.25) representa la dimensión lineal característica  $\ell$  referida en la hipótesis de esta investigación, de forma que el parámetro de masa  $\theta$  es una medida geométrica de la razón de degeneración  $\chi = \ell/R$  del sistema, y que describe la incidencia de los efectos cuánticos en la situación física aquí considerada. Uno puede esperar que el radio de Fermi  $R_F$  para un sistema auto-gravitante degenerado de fermiones no debería superar el valor del radio de tidal  $R$ , de tal forma que los valores del parámetro de masa  $\theta$  debieran ser valores reales positivos menores que la unidad. Sin embargo, como veremos en la próxima sección, este modelo presenta soluciones donde los valores del parámetro de masa  $\theta$  superan la unidad, precisamente, porque

el comportamiento del gas degenerado se puede ver afectado por los efectos de la evaporación de partículas, es decir, cuando existe una competencia muy fuerte entre los efectos cuánticos y evaporativos.

### 4.1.3. Límite termodinámico

Como podrá ser verificado en este capítulo, la termodinámica del modelo fermiónico de King depende crucialmente del parámetro de masa  $\theta$  antes definido, y que tiene en cuenta la masa total del sistema  $M$ , además de la energía total del sistema  $U$ , descrita en este caso en la variable energía adimensional  $u$ . La constancia de estas variables:

$$\theta = \Delta / MR^3 = cte \text{ y } u = UR / GM^2 = cte \quad (4.15)$$

implica la relevancia del siguiente *límite termodinámico*:

$$N \rightarrow \infty: VN = cte, \frac{U}{N^{7/3}} = cte, \quad (4.16)$$

(donde  $V \propto R^3$  es el volumen del sistema) que también ha sido obtenido para otros modelos termo-estadísticos astrofísicos [11, 12, 16, 34], y que consideran un sistema de partículas puntuales no relativistas interactuantes mediante la gravitación Newtoniana, con independencia de sus propiedades sean clásicas o cuánticas. Este límite termodinámico difiere del asociado a los sistemas convencionales [35]:

$$N \rightarrow \infty: \frac{V}{N} = cte, \frac{U}{N} = cte, \quad (4.17)$$

y revela el carácter *no extensivo* que manifiestan los sistemas astrofísicos. Dicho carácter no extensivo justifica el porque estos sistemas reales revisten de tanto interés en los esfuerzos que se hacen para extender la aplicación de la termodinámica para esta clase de sistemas físicos.

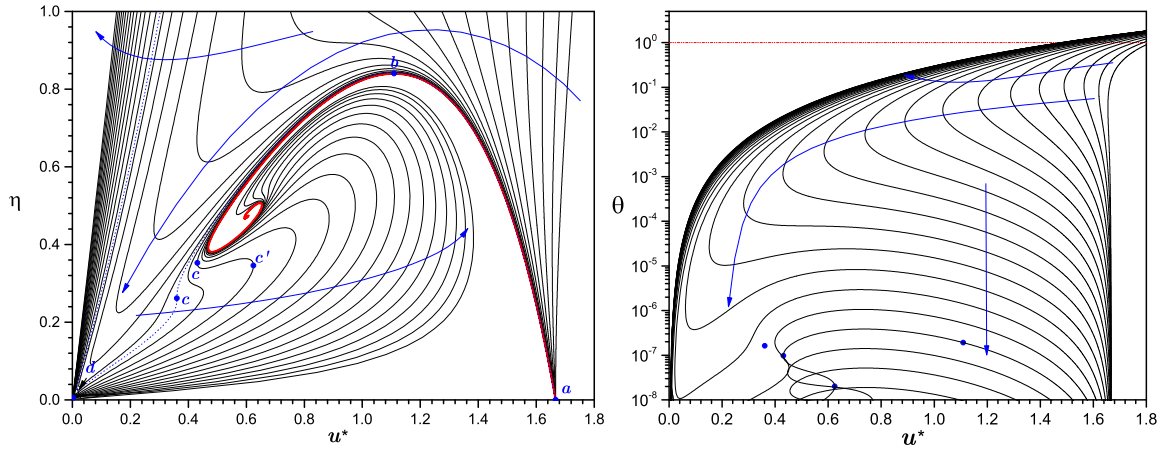


Figura 4.2: Panel izquierdo: Curvas calóricas  $\eta = \beta GMm/R$  versus  $u^* = -GM^2/RU$  a parámetro de degeneración  $\mu$  constante. Los valores de este último están dentro del intervalo  $\mu \in [0 - 16]$ , donde las flechas azules indican la dirección de crecimiento de  $\mu$ . La curva calórica correspondiente al modelo de Michie-King (línea roja gruesa) aparece como una curva límite cuando el parámetro de degeneración  $\mu \rightarrow +\infty$ . Algunos puntos notables están indicados para una degeneración de  $\mu = 9.0$ , y el punto notable  $c$  correspondiente al *punto crítico triple* de colapso gravitacional para  $\mu \approx 8.21$ . Panel derecho: Dependencias del parámetro de la masa  $\theta = M_F/M$  versus  $u^* = -GM^2/RU$  con parámetro de degeneración constante  $\mu$ .

## 4.2. Termodinámica del modelo

### 4.2.1. Comportamiento termodinámico para parámetro de degeneración $\mu$ constante

Dado que la integración numérica del problema de Poisson (3.11) asociado a este modelo aparece el parámetro de degeneración  $\mu$  de forma explícita, resulta natural estudiar los comportamientos termodinámicos del modelo fermiónico de King para valores fijos del parámetro de degeneración  $\mu$ . Las dependencias de la temperatura inversa adimensional  $\eta$  versus la energía adimensional  $u$  para diferentes valores del parámetro de degeneración  $\mu$  se muestran en la figura 4.2. Estas curvas son mostradas en términos de la variable auxiliar  $u^* = -1/u$ , cuyo uso resulta conveniente para mapear el punto de energía negativa infinita  $u = -\infty$  en el origen  $u^* = 0$ , y limitar de esta forma las curvas calóricas a una región finita del plano  $(u^*, \eta)$ .

En general, se observa una analogía entre las curvas calóricas mostradas en el panel a) de la figura 4.2 con las reportadas por Chavanis en la Fig.11 de Ref.[21]. Se evidencia además que estas curvas convergen hacia la dependencia correspondiente al mode-

lo de clásico de King en el límite asintótico  $\mu \rightarrow +\infty$ , representada aquí con la línea gruesa roja. Con el incremento del valor del parámetro de degeneración  $\mu$  se produce cierto *enrollamiento* de las curvas calóricas alrededor de la curva del modelo clásico de King. Un hecho importante es la existencia de *configuraciones post-colapso*, es decir, con energías inferiores al punto de colapso gravitacional. Como es de esperar, estas configuraciones post-colapso corresponden a configuraciones donde se forma un núcleo de fermiones degenerado.

Para una mejor comprensión, se indican algunos puntos notables de la curva calórica correspondiente a  $\mu = 9.0$ . Considerando la analogía existente con el modelo de Mickie-King, el primer punto notable  $u_a^*$  corresponde al punto crítico de la *disrupción evaporativa*. Esta configuración corresponde al límite  $\Phi_0 \rightarrow 0^+$  para un parámetro de degeneración  $\mu$  dado, esto es, las configuraciones de alta energía con exponente politrópico  $n = 5/2$ . Un segundo punto notable  $u_b^*$  es máximo local para la temperatura inversa adimensional  $\eta$ , al cual se conoce como el *punto de colapso isotérmico*. El punto correspondiente al colapso gravitacional  $u_c^*$  puede ser asociado con los dos puntos  $u_{c'}^* \geq u_c^*$ . El intervalo de energía  $[u_c^*, u_{c'}^*]$  es afectado por la incidencia de la metaestabilidad, donde la rama entre los puntos  $c$  y  $c'$  es inestable. El rango entre estos puntos notables  $|u_c^* - u_{c'}^*| \rightarrow 0^+$  cuando el parámetro de degeneración  $\mu \rightarrow \mu_c \simeq 8.21$ , el cual revela un *punto crítico triple* para la ocurrencia del colapso gravitacional. Este valor del parámetro de degeneración está relacionado con la ausencia del *plateau* isotérmico para la función de degeneración  $\epsilon(\Phi, \mu)$  para valores de  $\mu \lesssim 8.0$  como se muestra en el panel b) de la Fig.4.1. Como se esperaba, este valor crítico puede ser relacionado con la ausencia de perfiles de distribución con *núcleos isotérmicos* si el parámetro de degeneración cumple la condición  $\mu < \mu_c$ . Un tercer punto notable  $u_d^*$  es mínimo local de la energía en la rama post-colapso gravitacional. En general, el punto  $[u_d^*, \eta_d]$  se aproxima al origen  $(0,0)$  con el aumento del parámetro de degeneración  $\mu \rightarrow +\infty$ . Entre otros comportamientos, las dependencias acá ilustradas muestran soluciones en que se tienen dos valores diferentes de temperatura inversa  $\eta$  para un mismo valor de energía, por lo que en este tipo de situaciones el sistema experimenta una transición de fase microcanónica discontinua. Además, se observan dependencias en la que para un

mismo valor de temperatura existen más de un valor de energía, lo que se asocia con la presencia de capacidades caloríficas negativas.

En el panel b) de la figura 4.2 se muestra el comportamiento del parámetro de masa  $\theta$  versus  $u^*$ . Sin entrar en otros detalles, se aprecia que los valores de esta magnitud pueden superar la unidad, lo que evidencia de la incidencia de efectos evaporativos modifican el comportamiento del gas de fermiones para valores de temperatura muy cercanos a cero si la masa  $M$  del sistema es lo suficientemente baja. A pesar de estos resultados interesantes, no resulta evidente la interpretación física de las dependencias termodinámicas representadas en estas figuras. Esto se debe a que el comportamiento termodinámico para  $\mu$  constante predice una dependencia complicada del parámetro de masa inversa  $\theta$  con la energía. En otras palabras, la masa del sistema  $M$  se modifica de forma no natural (puede incrementarse o disminuir) al variar la energía en un proceso termodinámico con  $\mu$  constante. Un proceso con parámetro de degeneración  $\mu$  constante es semejante a la situación descrita en el ensemble gran canónico, donde tanto la temperatura como el potencial químico de un sistema termodinámico permanecen constantes por la presencia de reservorios infinitos de partículas y energía con las cuales este sistema se encuentra en equilibrio termodinámico. Sin embargo este cuadro no resulta apropiado para describir los fenómenos que ocurren en este contexto astrofísico. Para comprender la física asociada a este modelo conviene reconsiderar el presente problema en términos de la masa  $M$  y energía, porque estas son magnitudes físicas más naturales para analizar en este tipo de situaciones.

#### 4.2.2. Comportamiento termodinámico para razón de masa $\theta$ constante

Para comprender el problema numérico que se debe abordar para proceder al estudio de la termodinámica del modelo fermiónico de King para masa constante, hemos calculado y representado en la Fig.4.3 los mapas de contorno del parámetro de masa  $\theta$  en el plano de los parámetros de integración  $[\Phi_0, \mu]$  del problema de Poisson (3.11). Estas líneas de contorno representan la dependencia del parámetro de degeneración  $\mu$  como función del potencial central adimensional  $\Phi_0$  y del parámetro de masa

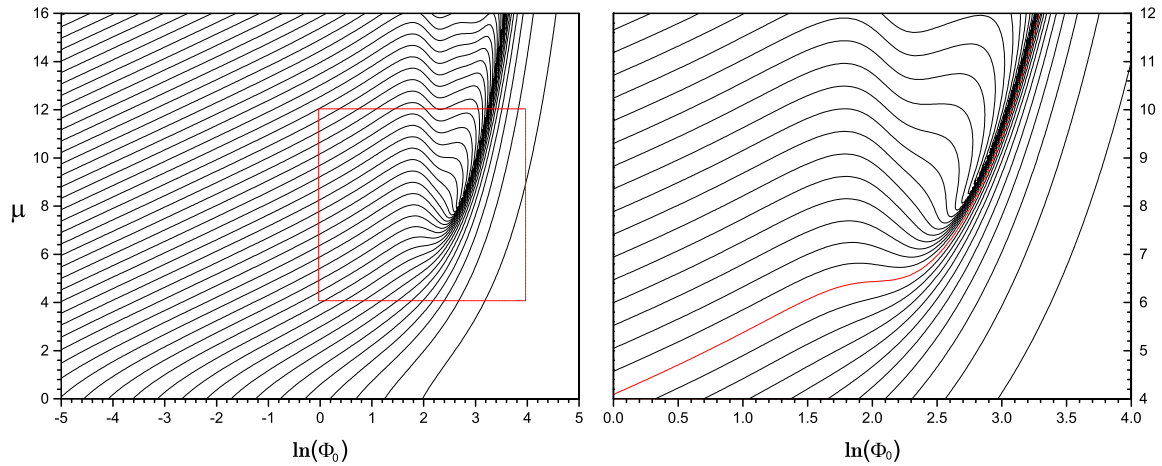


Figura 4.3: Panel izquierdo: Mapas de contorno de la relación  $\theta = M_F/M$  en el plano de integración de los parámetros  $[\Phi_0, \mu]$ . Panel derecho: Una ampliación de la zona encerrada dentro del rectángulo rojo del panel izquierdo donde se pueda apreciar mejor el comportamiento de las curvas cerca de la región de acumulación.

$\theta$ ,  $\mu = \mu(\Phi_0, \theta)$ . El problema numérico que se debe solucionar es la obtención de estas curvas a masa constante. Resulta interesante la existencia de cierta región donde las líneas de contorno tienden a acumularse, lo que evidencia que una variación aun muy pequeña de los parámetros de integración en esta región conlleva a cambios muy sensibles en los valores del parámetro de masa  $\theta$ . Sin entrar en mayores detalles, el método numérico implementado para llevar a cabo esta tarea se basa en la interpolación de Fourier de segundo orden en torno a un círculo de radio dado  $\epsilon$  centrado en un punto conocido ya conocido de estas curvas. Algunos detalles sobre este procedimiento computacional son aportados en el Apéndice A.4 Los resultados derivados de estos algoritmos son altamente costosos en la región de convergencia de las curvas debido a que el radio de exploración  $\epsilon$  debe reducirse para garantizar la precisión de los resultados cuando los cálculos se adentran en dicha región.

Los resultados de este estudio son mostrados en la Fig.4.4. En el panel superior, se muestran las dependencias del parámetro de degeneración  $\mu = \mu(\Phi_0, \theta)$  para diferentes valores del parámetro de masa  $\theta$ , mientras que en el panel inferior, se muestran las correspondientes curvas calóricas. De acuerdo con estos resultados, las curvas calóricas del modelo fermiónico de King pueden clasificarse en las siguientes regiones de valores del parámetro de masa  $\theta$ :

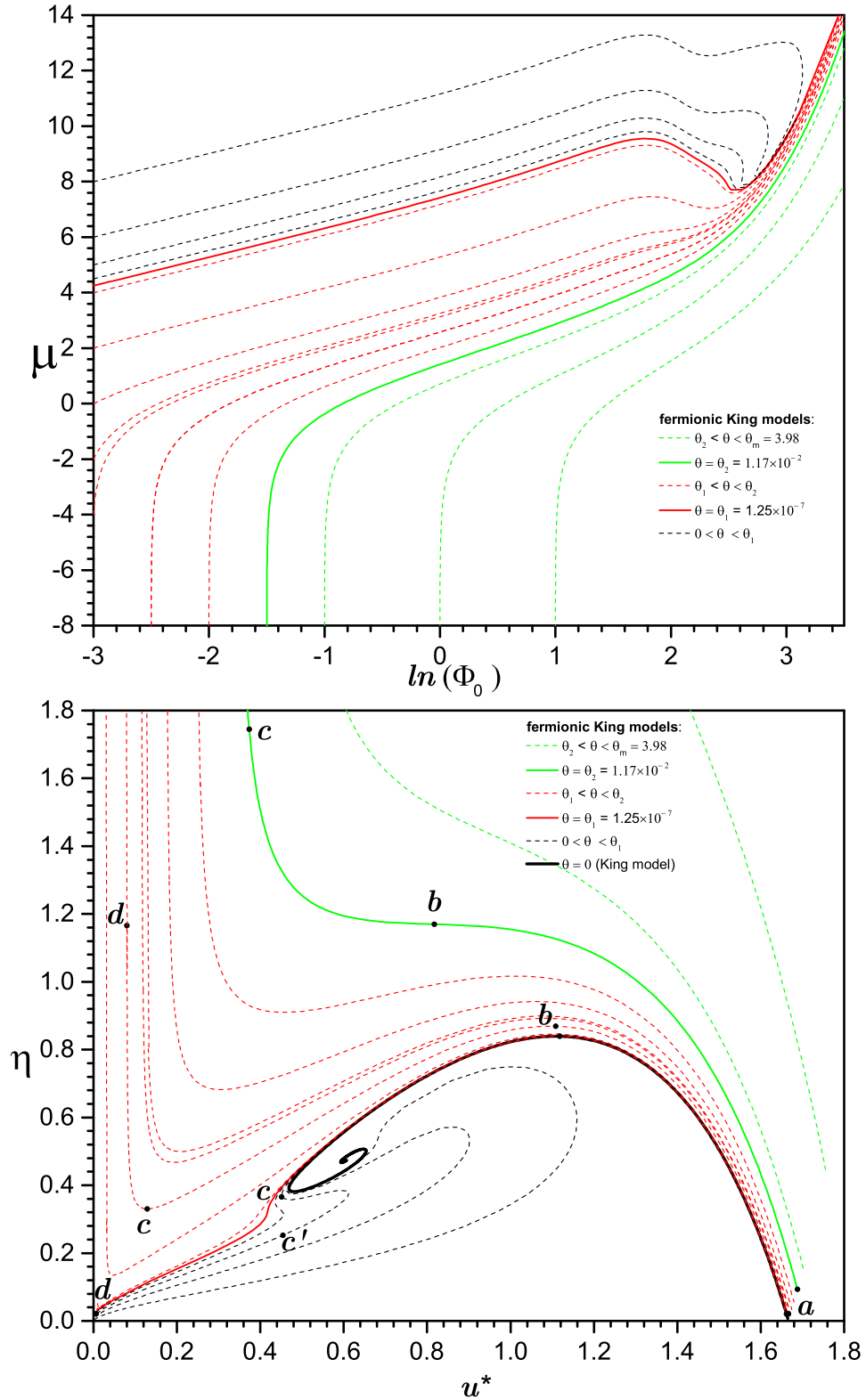


Figura 4.4: Panel superior: Mapas de contorno de la relación  $\theta = M_F/M$  en el plano de integración de los parámetros  $[\Phi_0, \mu]$ . Panel inferior: Curvas calóricas para diferentes valores del parámetro de masa  $\theta$ .

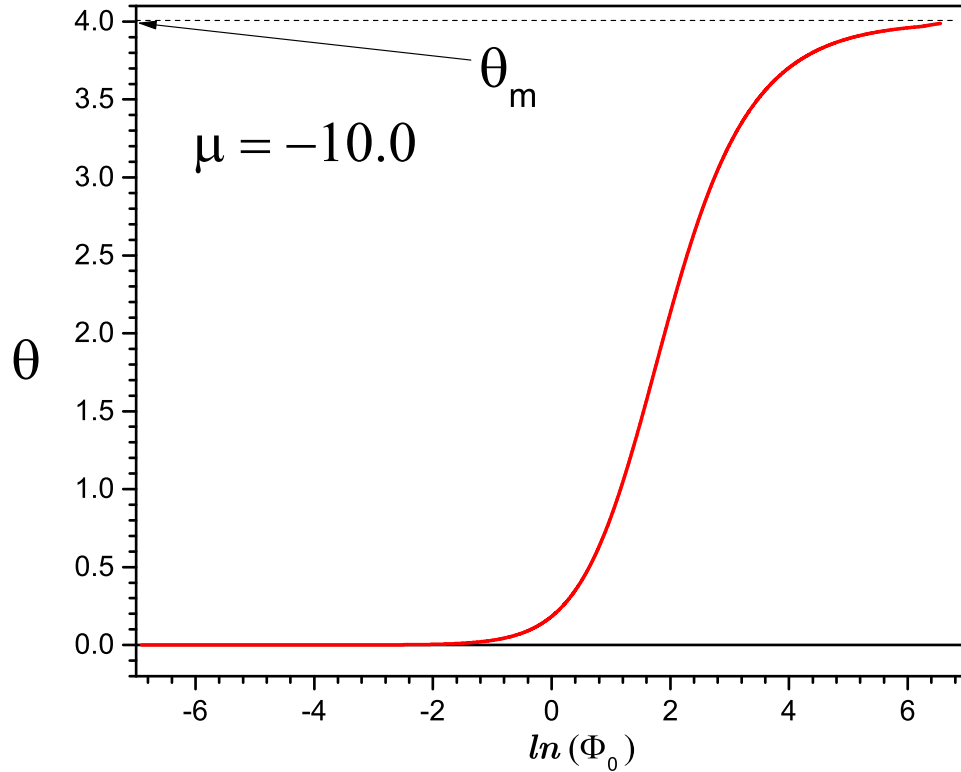


Figura 4.5: Estimación del valor extremal  $\theta_m$  del parámetro de masa  $\theta$  en función del potencial adimensional central  $\Phi_0$  para parámetro de degeneración constante  $\mu = -10$ . La extrapolación asintótica para  $\Phi_0 \rightarrow +\infty$  de estos resultados con una dependencia del tipo  $\theta = \theta_m + a \exp(-b\Phi_0)$  arroja la estimación  $\theta_m \simeq 4.0$ .

**Región I:**  $0 < \theta < \theta_1$  (**curvas negras**) con  $\theta_1 \simeq 1.25 \times 10^{-7}$ . En esta región existen estados con capacidad calorífica negativa y la transición hacia configuraciones con núcleo fermiónico degenerado, de mayor densidad y temperatura, es una *transición de fase microcanónica discontinua*, por lo que el colapso gravitacional hacia esta etapa es un proceso violento.

**Región II:**  $\theta_1 < \theta < \theta_2$  (**curvas rojas**) con  $\theta_2 \simeq 1.17 \times 10^{-2}$ . En esta región existen estados con capacidad calorífica negativa, lo que significa, que la gravedad del sistema ejerce una influencia dominante sobre la termodinámica del mismo para estos casos. La transición hacia las configuraciones de núcleo fermiónico degenerado es una transición de fase microcanónica continua.

**Región III:**  $\theta_2 < \theta < \theta_m$  (**curvas verdes**) con  $\theta_m \simeq 4$ . En esta región no existen estados con capacidad calorífica negativa, lo que indica que la masa no es lo suficientemente grande como para que la gravedad del sistema domine su termodinámica.

ca. La transición del sistemas hacia configuraciones de núcleo fermiónico es una transición de fase microcanónica continua.

**Región IV:**  $\theta > \theta_m$ . El modelo no presenta soluciones para esta región de valores del parámetro de masa  $\theta$ . El valor  $\theta_m$  implica un valor de *masa mínima*  $M_{\text{mín}} = M_F/\theta_m$  para la estabilidad del sistema. Para valores inferiores a este límite, el sistema sufrirá una completa **disrupción evaporativa**.

La estimación del valor extremal  $\theta_m$  puede apreciarse en la Fig.4.5. La extrapolación de estos datos arroja  $\theta_m \simeq 4.0$ . De acuerdo con este resultado, si la masa del sistema  $M$  resulta inferior a una cuarta parte de la masa de Fermi,  $M < M_F/4$ , este sufrirá una evaporación muy intensa de sus constituyentes hasta disiparse por completo debido a la acción gravitacional de sistemas externos. Precisamente, la gravitación del sistema para sistemas de masa tan pequeñas no es lo suficientemente fuerte como para retener sus constituyentes dentro del radio de tidal  $R$ .

### 4.2.3. Perfiles de distribución

Las figuras 4.6-4.8 ilustran algunos ejemplos de perfiles de distribución asociados al modelo fermiónico de King, los cuales muestran el comportamiento termodinámico para cada una de las tres regiones de valores del parámetro de masa  $\theta$  antes indicadas en la Fig.4.4. En los paneles superiores se muestran algunos perfiles radiales de distribución de masa  $\rho(\mathbf{r})$  para ciertos puntos (configuraciones) notables de las curvas calóricas. En los paneles inferiores, se muestran los comportamientos radiales de las correspondientes funciones de degeneración  $\epsilon[\Phi(\mathbf{r}); \mu]$ . Como se ha comentado en esta tesis, la función de degeración indica el comportamiento termodinámico local de estas distribuciones, es decir, los tres comportamientos asintóticos del modelo fermiónico de King: un comportamiento politrópico de gas cuántico degenerado, o de gas clásico isotérmico, o de gas clásico politrópico por efectos de evaporación.

En la figura 4.6 se ilustra el perfil de la región III de las curvas calóricas. Los perfiles  $c$  y  $b$  muestran un leve comportamiento fermiónico en la región central y halos politrópicos, mientras que el perfil  $a$  muestra un comportamiento puramente politrópico de

gas clásico por efectos de evaporación. Para todas estas distribuciones existe una fuerte competencia entre los efectos cuánticos y evaporativos. La gravedad del sistema para este valor del parámetro de masa  $\theta$  no es tan intensa como para que la termodinámica del sistema presente configuraciones con capacidad calorífica negativa.

En la figura 4.7 se ilustra el perfil de la región II de las curvas calóricas. El perfil  $d$  muestra una distribución notable que muestra las tres regiones bien definidas: un núcleo fermiónico, una envoltura intermedia isotérmica, y un halo politrópico. El perfil  $c$  muestra un leve comportamiento fermiónico en la zona central y luego presenta un extenso halo politrópico. Los perfiles  $b$  y  $a$  muestran comportamientos esencialmente politrópicos. La acción gravitacional asociada a estos valores del parámetro de masa  $\theta$  es lo suficientemente intensa como para presentar configuraciones con capacidad calorífica negativa.

Finalmente, la figura 4.8 muestra los perfiles de la región I de las curvas calóricas. Los perfiles más notables de los representados acá corresponden a las dependencias  $c$  y  $c'$ . Ambos perfiles corresponden a configuraciones con igual energía en torno al intervalo de energías donde tiene lugar el colapso gravitacional del sistema. El perfil  $c'$  corresponde a la región postcolapso gravitacional, mientras que el  $c$  es una configuración previa al colapso. Durante la transición de fase discontinua desde el perfil  $c$  al  $c'$ , se observa un calentamiento del sistema [la configuración postcolapso  $c$  presenta mayor temperatura que la configuración  $c$ , de acuerdo con lo indicado en la Fig.4.4], así como una redistribución de la masa desde las regiones intermedias hacia las regiones centrales y exteriores del sistema. La parte de esta masa que se desplaza hacia el centro conduce a la formación un núcleo de mayor densidad, mientras que la otra parte de la masa se desplaza hacia el exterior, conforma un halo de mayor densidad. En esencial, este es el mismo tipo de comportamiento observado por Tello-Ortiz y Velazquez [34]. El perfil  $c$  presenta un núcleo de gas clásico isotérmico, mientras que el perfil  $c'$  presenta un núcleo de gas cuántico degenerado. Ambos perfiles presentan halos politrópicos. Los perfiles  $a$  y  $b$  muestran comportamientos esencialmente de gas clásico politrópico por efectos de evaporación.

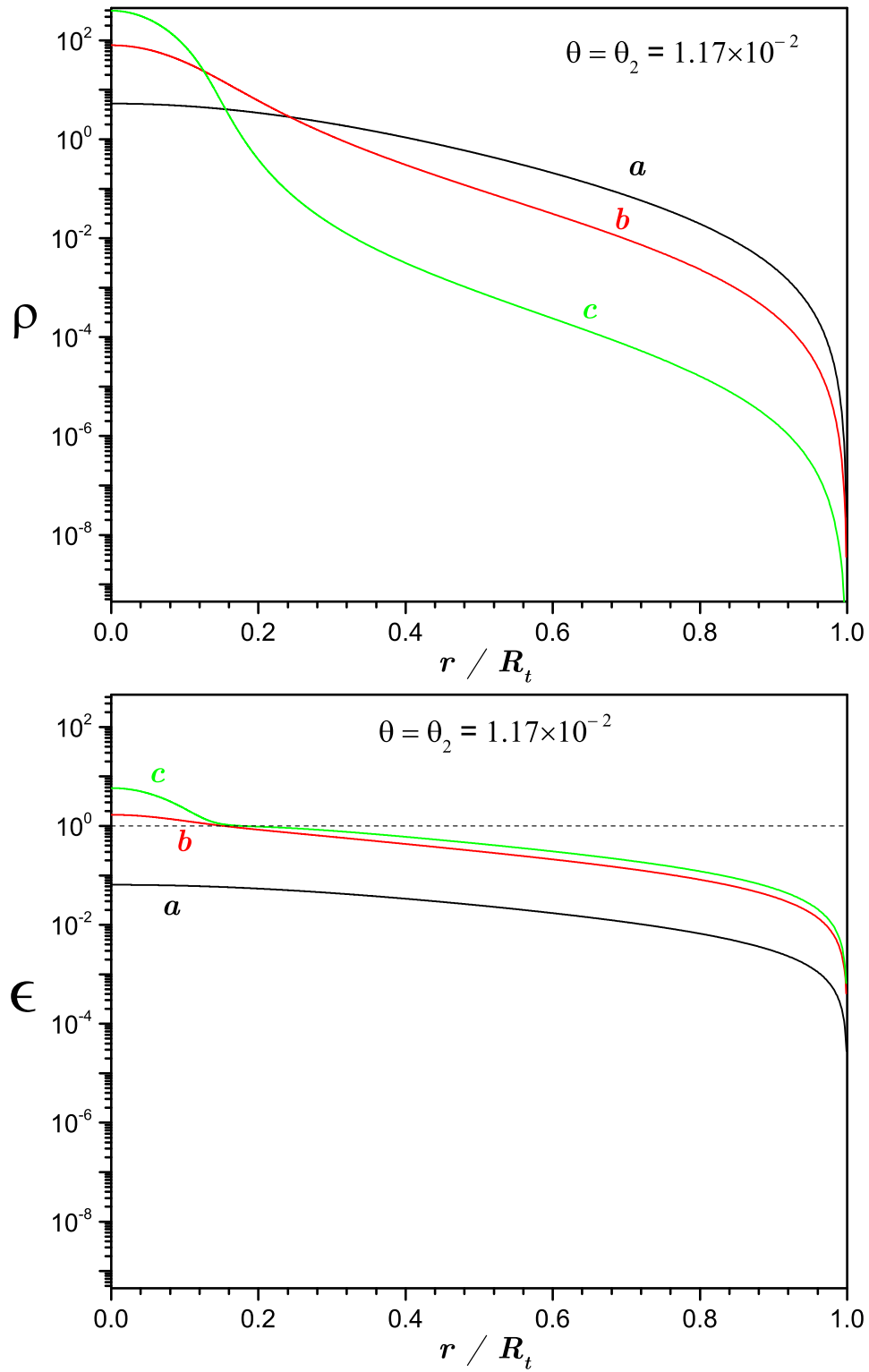


Figura 4.6: Panel superior: perfiles radiales de distribución de masa  $\rho(\mathbf{r})$  para ciertos puntos (configuraciones) notables de las curvas calórica para  $\theta = 1.17 \times 10^{-2}$ , correspondiente a la región III. Panel inferior: comportamientos radiales de las correspondientes funciones de degeneración  $\epsilon[\Phi(\mathbf{r}); \mu]$  para los mismos perfiles de distribución de partículas mostrados en el panel superior.

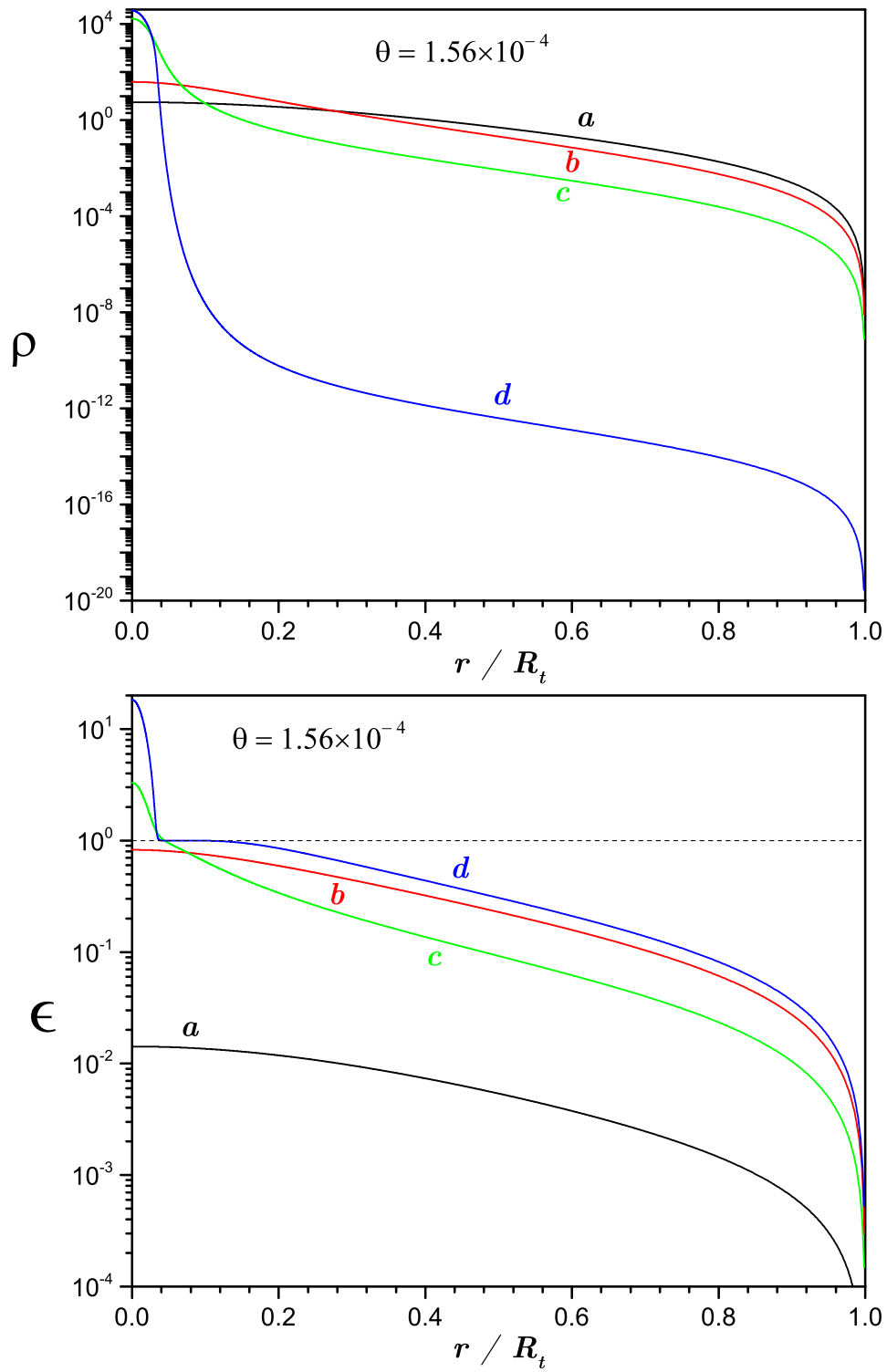


Figura 4.7: Las mismas dependencias de la figura 4.6; pero para la curva calórica con  $\theta = 1.56 \times 10^{-4}$ , correspondiente a la región II.

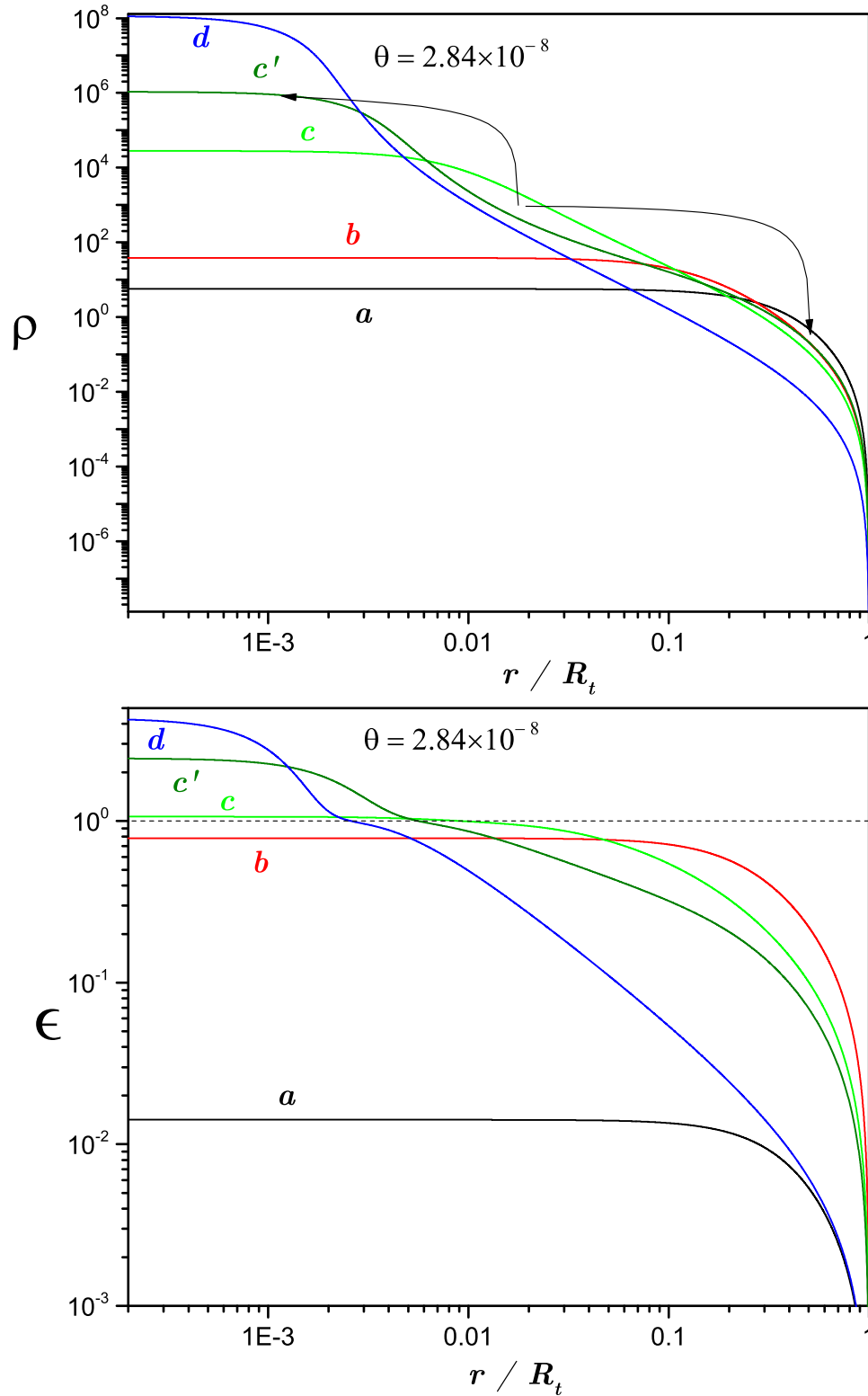


Figura 4.8: Las mismas dependencias de la figura 4.6; pero para la curva calórica con  $\theta = 2.84 \times 10^{-8}$ , correspondiente a la región I. Nótese la redistribución de la masa de las regiones intermedias hacia las centrales y exteriores cuando el sistema experimenta un colapso gravitacional a energía constante, con una eventual transición desde el perfil  $c$  hacia el  $c'$ .

---

## Consideraciones finales

### 5.1. Conclusiones

De acuerdo con los resultados generales presentados en el capítulo anterior, las integrales de Fermi truncadas asociada al problema de Poisson del modelo fermiónico de King contienen información relevante para su termodinámica. Estas integrales especiales dependen de forma crucial del parámetro de degeneración  $\mu$ , en función del cual pueden derivarse la existencia de los tres comportamientos asintóticos de este modelo: un gas clásico con comportamiento politrópico debido a efectos de evaporación, un gas clásico isotérmico, o un gas cuántico con comportamiento politrópico asociado a la degeneración del sistema de fermiones con temperatura cero. Para un valor del parámetro  $\mu \rightarrow +\infty$ , se evidencia que se recupera el modelo clásico de King. El análisis preliminar evidencia que el límite termodinámico asociado a este modelo astrofísico corresponde a un comportamiento no extensivo, el cual resulta idéntico a otros modelos existentes en la literatura donde se consideran sistemas de partículas puntuales no relativistas que interactúan mediante la gravedad Newtoniana (fuerzas entre partículas con dependencia cuadrada inversa de la distancia de separación).

Una característica distintiva del modelo Fermionico de King es la presencia de una rama post-collapso gravitacional a bajas energías, donde se presentan perfiles de distribución con núcleo degenerado. Sin embargo, las curvas calóricas obtenidas para valores constantes del parámetro de degeneración  $\mu$  muestran un comportamiento termodinámico de difícil de interpretación. Aparentemente, esto se debe a la dependencia no natural que presenta la masa total del sistema  $M$  con la energía para este tipo de procesos. La descripción del comportamiento termodinámico del modelo Fermiónico de King resulta mucho más accesible cuando se trabaja con la energía  $U$  y la masa

$M$  totales como variables de control. Esta perspectiva de análisis revela la existencia de cuatro regiones valores notables para la masa del sistema con diferentes comportamientos termodinámicos. Para efectuar una mejor caracterización de estas regiones, se introdujo el concepto de *masa de Fermi*  $M_F$ , definido en la Ec.(4.12), la que representa cierto valor característico de la masa del sistema asociada a la situación límite donde este modelo presenta una fuerte competencia entre las propiedades cuánticas de sus constituyentes y la incidencia de su evaporación.

Haciendo uso del parámetro de masa  $\theta = M_F/M$ , se pudo apreciar que el carácter discontinuo de la transición de fase microcanónica asociada al colapso gravitacional se presenta para  $0 < \theta < \theta_1 \simeq 1.25 \times 10^{-7}$ , mientras que resulta una transición de fase microcanónica continua para  $\theta_1 < \theta < \theta_m \simeq 4.0$ . La presencia de estados con capacidad calorífica negativa, los que indican la dominancia de la termodinámica por parte de la gravedad, solo se presenta para  $0 < \theta < \theta_2$ , tal que  $\theta_1 < \theta_2 \simeq 1.17 \times 10^{-2}$ . Finalmente, el modelo no presenta soluciones para valores del parámetro de masa  $\theta > \theta_m$ , lo que indica que aquellas configuraciones del sistema con una masa total  $M$  inferior a un cuarto de la masa de Fermi,  $M < M_F/4$ , no corresponden a configuraciones casi-estacionarias del modelo Fermiónico de King. Este valor representa un límite inferior de la masa total  $M$  del sistema para garantizar su estabilidad ante la evaporación. La existencia de este límite inferior de masa, precisamente, es una de las contribuciones fundamentales de la presente investigación.

## 5.2. Problemas abiertos

La investigación presentada en esta tesis deja algunos problemas abiertos, los cuales se citan a continuación:

- Introducir los efectos relativistas en la descripción de los sistemas astrofísicos auto-gravitantes.
- Comparar las curvas calóricas obtenidas con los datos observaciones para mostrar si el modelo fermiónico de King describe la naturaleza de los halos de materia oscura.
- Desarrollar modelos con dos o más clases de partículas constituyentes que permitan acercar este modelo teórico a las condiciones semejantes a sistemas estelares reales, i.e.: estrellas enanas blancas.



---

# Bibliografía

- [1] ANTONOV V. A., 1962, *Vest. Leningrad Univ.* **7** 135; 1995 Translation IAU Symposium **113** 525.
- [2] LYNDEN-BELL D. y WOOD R., 1968, *The gravo-thermal catastrophe in isothermal spheres and the onset of red-giant structure for stellar systems*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 138 núm. 495.
- [3] LYNDEN-BELL D., 1967, *Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 136 núm.
- [4] LYNDEN-BELL D., 1999, *Negative specific heat in astronomy, physics and chemistry*, Physica A, vol. **263** núm. 128.
- [5] HJORTH J., MADSEN J., 1993, *Statistical mechanics of galaxies*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 265 núm. 237.
- [6] RUFFINI R., STELLA L., 1983, *On semi-degenerate equilibrium configurations of a collisionless self-gravitating Fermi gas*, *Astron. Astrophys.* **119** 35
- [7] CHAVANIS P. H., LEMOU M., MÉHATS F., 2014, *Models of dark matter halos based on statistical mechanics: The classical King model*, arXiv: 1409.7838v1.
- [8] BINNEY J., TREMAINE S., 1994, *Galactic Dynamics*, New Jersey: Princenton University Press.
- [9] DAUXOIS T., RUFFO S., ARIMONDO E. y WILKENS M., 2002, *Dynamics and Thermodynamics of Systems With Long Range Interactions*, Springer , vol. **602** Lecture Notes in Physics.

- [10] THIRRING W., 1970, *Systems with negative specific heat*, Zeitschrift für Physik, vol.235 núm. 339.
- [11] VELAZQUEZ. L. and GUZMAN. F., 2003, *Alternative model of the Antonov problem*, Physical Review E, Vol.68 066116.
- [12] VELAZQUEZ. L., GOMEZ-GARCIA. S. and GUZMAN. F., 2009, *Alternative model of the Antonov problem: Generalization with the presence of a mass spectrum*, Physical Review E, Vol.79 011120.
- [13] KING I. R., 1962, *The structure of star clusters. I. an empirical density law*, The Astronomical Journal, vol.67 núm. 471. KING I. R., 1965, *The structure of star clusters. II. steady-state velocity distributions*, The Astronomical Journal, vol.70 núm. 376. KING I. R., 1966, *The structure of star clusters. III. some simple dynamical models*, The Astronomical Journal, vol.71 núm. 64. KING I. R., 1966, *The structure of star clusters. IV. photoelectric surface photometry in nine globular clusters*, The Astronomical Journal, vol.71 núm.276.
- [14] WOOLEY R. V. D. R. and DICKENS R. J., 1961, *Studies in the equilibrium of globular clusters IV*, Royal Obj. Bull. No.,vol.42 núm. 291.
- [15] WILSON CH. P., 1975, *Dynamical models of elliptical galaxies*, The Astronomical Journal, vol.80 núm. 1430.
- [16] GOMEZ-LEYTON., VELAZQUEZ L., 2014, *Truncated  $\gamma$ -exponential models for tidal stellar systems*, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, P04006.
- [17] GIELES M., ZOCCHI A., 2015, *A family of lowered isothermal models*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 454 núm. 576
- [18] OPPENHEIMER J. R., VOLKOFF G.M., 1939, *On Massive Neutron Cores*. Department of Physics, University of California, Berkeley, California. Physical Review, Vol.55
- [19] CHANDRASEKHAR S., 1942, *An introduction to the theory of stellar structure*, Dover Publications, New York.

- [20] CHAVANIS P. H., Sommeria J., 1998, *Degenerate equilibrium states of collisionless stellar systems*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **296**
- [21] CHAVANIS P. H., 2002, *Phase transitions in self-gravitating systems: self-gravitating fermions and hard-sphere models*, Physical Review E, vol.**65** núm.056123.
- [22] CHAVANIS P. H., 1998, *On the 'coarse-grained' evolution of collisionless stellar systems* Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **300** 981.
- [23] RUFFINI R., STELLA L., 1983, *On semi-degenerate equilibrium configurations of a collisionless self-gravitating Fermi gas*, Astronomy and Astrophysics, vol.**119** 35
- [24] CHAVANIS P. H. *et al*, 2014, *Models of dark matter halos based on statistical mechanics: The classical King model* Physical Review D, vol.**91** 063531
- [25] CHAVANIS P. H. *et al*, 2014, *Models of dark matter halos based on statistical mechanics: The fermionic King model* Physical Review D, vol.**92** 123527
- [26] HAHN B. D., 1996, *Introduction to Fortran 90 for Scientists and Engineers*, Elsevier.
- [27] BURDEN R.L., FAIRES J.D., 2011, *Numerical Analysis*, 9th Edition, Brooks/Cole.
- [28] PRESS W.H., TEUKOLSKY S.A., VETTERLING W.T., FLANNERY B.P., 1992, *Numerical Recipes in C-The Art of Scientific Computing*, 2nd Edition, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.
- [29] CHANDRASEKHAR S., 1960, *Principles of Stellar Dynamics*, New York: Dover Publications.
- [30] PLUMMER H. C., 1911, *On the problem of distribution in globular star clusters*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol.**71** núm. 460.
- [31] PRIALNIK D., 2000, *An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution*, Cambridge University Press, New York.
- [32] EDDINGTON SIR. A. S., 1916, *The Internal Constitution of the Stars*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol.**76** núm. 525.

- [33] MICHIE R. W., 1963, *On the distribution of high energy stars in spherical stellar systems*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. **125** núm. 127; MICHIE R. W., BODENHEIMER P. H., 1963, *The dynamics of spherical stellar systems, II*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. **126** núm. 269; MICHIE R. W., 1963, *The dynamics of spherical stellar systems, III*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. **126** núm. 331; MICHIE R. W., 1963, *The dynamics of spherical stellar systems, IV*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. **126** núm. 499.
- [34] TELLO-ORTIZ E., 2014, *CLUSTERIZACION GRAVITACIONAL EN COSMOLOGIA: Una mirada desde la descripción termodinámica de los sistemas con interacciones de largo alcance*. Tesis de Licenciatura, Universidad Católica del Norte, Antofagasta.
- [35] REICHL. L.E., *A modern course in Statistical Mechanics*, (Wiley, 1998).

## A

# Desarrollos computacionales

## A.1. Integración Runge-Kutta

El método de Runge-Kutta es un conjunto de tratamientos iterativos que nos permiten resolver ecuaciones diferenciales de primer orden. Dentro de esta familia de algoritmos iterativos se encuentra el más empleado para reducir ecuaciones diferenciales, comúnmente denominado método de Runge-Kutta de cuarto orden o RK4. Tenemos un problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (\text{A.1})$$

Para este problema, el método RK4 viene dado por:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) h, \quad (\text{A.2})$$

donde los términos de aproximación intermedios  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  y  $k_4$  son dados por:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i), & k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right), \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right), & k_4 &= f(x_i + h, y_i + k_3h), \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

siendo  $h$  el tamaño del intervalo o paso de la iteración. Además, el valor siguiente  $y_{n+1}$  es determinado por el valor  $y_n$  más el producto entre el tamaño del intervalo y una pendiente. Esta última se determina mediante un promedio ponderado de pendientes, donde  $k_1$  es la pendiente al inicio del intervalo,  $k_2$  es la pendiente en el punto medio del intervalo y para encontrarlo se utiliza el valor de  $k_1$  para encontrar el valor de  $y$  en el punto  $x_n + h/2$  utilizando el método de Euler. Luego,  $k_3$  es la pendiente del punto medio y la encontraremos mediante  $k_2$ ,  $k_4$  es la pendiente al final del intervalo, con el valor de  $y$  determinado por  $k_3$ . Promediando las pendientes se le asigna un mayor peso a las pendientes del punto medio, por lo que:

$$\text{pendiente} = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}. \quad (\text{A.4})$$

Por lo tanto, el método de Runge-Kutta es un método de cuarto orden lo cual significa que el error del paso es del orden de  $O(h^5)$ , mientras que el error total acumulado tiene orden  $O(h^4)$ .

En el caso del problema considerado en este estudio, el problema de Poisson (3.11), para aplicar el método de Runge-Kutta se requiere replantear este problema como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Hay varias formas posibles; pero entre todas estas se consideró el esquema:

$$\frac{d\Phi(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{\xi^2}G(\xi), \quad \frac{dG(\xi)}{d\xi} = -4\pi\xi^2 F \left[ \Phi(\xi), \mu, \frac{3}{2} \right]. \quad (\text{A.5})$$

Como condición inicial de integración, se tiene en cuenta los valores de estas funciones en el origen  $\xi = 0$ , que en este caso se reducen a:

$$\Phi(0) = \Phi_0, \quad G(0) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Sin embargo, para  $\xi = 0$  la primera ecuación en (A.5) tiene una indeterminación del tipo  $0/0$ . Es por eso que la integración se realiza a partir de un valor muy pequeño; pero no nulo para la variable radial  $\xi$ . Para ello, se consideró el comportamiento de las funciones  $\Phi(\xi)$  y  $G(\xi)$  para pequeñas distancias  $\xi$ :

$$\Phi(\xi) = \Phi_0 - \frac{2\pi}{3}F_0\xi^2 + O(\xi^2), \quad G(\xi) = -\frac{4\pi}{3}F_0\xi^3 + O(\xi^3), \quad (\text{A.7})$$

donde  $F_0 = F \left[ \Phi_0, \mu, \frac{3}{2} \right]$ .

## A.2. Integración numérica de las integrales de Fermi truncadas

La integral truncada de Fermi está dada por:

$$F(\Phi, \mu, \gamma) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\Phi \frac{(e^{\Phi-x} - 1)x^{\gamma-1}}{1 + e^{\Phi-x-\mu}} dx, \quad (\text{A.8})$$

haciendo el cambio de variable  $x = \Phi t$  tenemos:

$$F(\Phi, \mu, \gamma) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \Phi^\gamma \int_0^1 \frac{\{e^{\Phi(1-t)} - 1\} t^{\gamma-1}}{1 + e^{\Phi(1-t)-\mu}} dt. \quad (\text{A.9})$$

La integral (A.9) se calcula usando la regla de Simpson, que viene dada por la expresión:

$$\int_a^b f(t) dt \approx \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]. \quad (\text{A.10})$$

Si el intervalo de la variable auxiliar  $t \in [0, 1]$  se divide en  $2n$  intervalos igualmente espaciados, con  $t_i = i/(2n)$ , con  $i$  entero en el intervalo  $0 - 2n$ , la regla de Simpson se plantea:

$$I = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n [f(t_{2(k-1)}) + 4f(t_{2k-1}) + f(t_{2k})], \quad (\text{A.11})$$

donde  $f(t)$  viene dada por la expresión:

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \Phi^\gamma \frac{\{e^{\Phi(1-t)} - 1\} t^{\gamma-1}}{1 + e^{\Phi(1-t)-\mu}}. \quad (\text{A.12})$$

Para cada valor del parámetro de degeneración  $\mu$ , se obtiene una estimación de las integrales truncadas de Fermi para  $\gamma = 3/2$  y  $5/2$  para un conjunto finito de puntos  $\Phi_j \in [\Phi_{\text{mín}}, \Phi_{\text{máx}}]$  del potencial adimensional  $\Phi$ . En nuestro caso,  $\Phi_{\text{mín}} = 1.0 \times 10^{-3}$  y  $\Phi_{\text{máx}} = 5.0 \times 10^2$ . Esta estimación fue empleada para hacer una interpolación de las integrales truncadas de Fermi para ser utilizadas en la integración numérica del problema de Poisson (3.11), y de esta forma, acelerar los cálculos. Para valores del potencial adimensional  $\Phi$  fuera del anterior intervalo fueron empleadas las fórmulas asintóticas (4.4) y (4.7).

### A.3. Función gamma-exponencial

Las distribuciones truncadas de Wooley & Dickens y King pueden ser generalizadas para cualquier entero no negativo  $\gamma = n$  sustrayendo los primeros  $n$  de la expansión de la función exponencial:

$$E_n(x) = \begin{cases} \exp(x) - \sum_{k=0}^{n-1} x^k / k!, & \text{for } x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Notese que este ansatz contiene la funciones Woolley & Dickens, y King como casos particulares con  $\gamma = 0$  y  $\gamma = 1$ , los cuales garantizan que las primeras derivadas  $n - 1$  en  $x = 0$  se anulen:

$$E_n(0) = E'_n(0) = \dots = E_n^{(n-1)}(0) = 0. \quad (\text{A.14})$$

Para valores positivos del argumento  $x$ , las funciones (A.13) pueden reescribirse en forma integral:

$$E_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x \eta^{n-1} \exp(x-\eta) d\eta. \quad (\text{A.15})$$

Introduciendo la función gamma  $\Gamma(\gamma)$  tenemos:

$$\Gamma(\gamma) = \int_0^{+\infty} \eta^{\gamma-1} \exp(-\eta) d\eta. \quad (\text{A.16})$$

Finalmente, la función gamma exponencial truncada toma la forma:

$$E_\gamma(x) \equiv E(x; \gamma) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^x \eta^{\gamma-1} \exp(x-\eta) d\eta, \quad (\text{A.17})$$

que puede ser expresada en serie de potencias como:

$$E_\gamma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\gamma+n}}{\Gamma(\gamma+1+n)}. \quad (\text{A.18})$$

Esta función generaliza la función exponencial usando  $\gamma$  como *parámetro de deformación*. La expresión A.17 es simplemente la *integral fraccional de Riemann-Liouville* de la función exponencial ordinaria. Considerando la diferenciación fraccional para las series de funciones de potencia:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \sum_{\mu} a_{\mu} x^{\mu} \equiv \sum_{\mu} a_{\mu} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} x^{\mu-\alpha}, \quad (\text{A.19})$$

las condiciones (A.14) se generalizan de la forma:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} E(0; \gamma) = 0, \quad (\text{A.20})$$

donde el orden de la diferenciación fraccional  $\alpha$  corresponde al intervalo  $0 \leq \alpha < \gamma$ . La función  $\gamma$ -exponencial  $E(x; \gamma)$  se define de la siguiente forma:

$$E(x; \gamma) = e^x \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^x e^{-\tau} \tau^{\gamma-1} d\tau, \quad (\text{A.21})$$

el cual se anula para  $x < 0$ . Esta familia de funciones está relacionado con la *función gamma incompleta*:

$$\gamma(s, x) = \int_0^x e^{-t} t^{s-1} dt, \quad (\text{A.22})$$

esta función solo difiere de la expresión (A.21) en el hecho de que  $A(s, x) = e^x / \Gamma(s)$ . Además, la ecuación (A.21) puede obtenerse empleando el *operador integral fraccional* [?]:

$$(J^\gamma f) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^x (x-t)^{\gamma-1} f(t) dt. \quad (\text{A.23})$$

Cambiando la variable de integración  $t \rightarrow x - t$  en la última expresión, tenemos:

$$(J^\gamma f) \equiv \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^x t^{\gamma-1} f(x-t) dt, \quad (\text{A.24})$$

el cual se reduce a la expresión (A.21) cuando  $f(t) = \exp(t)$ . Desarrollando la integración por partes, se obtiene de la definición (A.21) la siguiente relación de recurrencia:

$$E(x; \gamma) = \frac{x^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} + E(x; \gamma+1), \quad (\text{A.25})$$

el cual se reduce a la expansión en serie de potencias (A.18). Esta representación nos permite obtener las siguientes expresiones:

$$E(x; -n) = E(x; 0) = e^x, \quad E\left(x, \frac{1}{2}\right) = e^x \operatorname{erf}(\sqrt{x}), \quad (\text{A.26})$$

donde  $n$  es un número entero positivo. En general, la función  $\gamma$ -exponencial  $E(x; \gamma)$  es una función continua y diferenciable para cada valor de  $x > 0$ . Esta función se anula para  $x = 0$  cuando  $\gamma > 0$ , mientras es discontinua en  $x = 0$  cuando el parámetro de deformación  $\gamma \rightarrow 0$ . Se puede verificar que la función  $E(x; \gamma)$  con  $\gamma > 0$  muestra un *comportamiento exponencial* para valores de  $x$  suficientemente grandes y una *serie de potencias* para valores pequeños de  $x$ :

$$E(x; \gamma) = \begin{cases} x^\gamma / \Gamma(\gamma+1) & \text{if } x \ll 1, \\ e^x & \text{if } x \gg 1. \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

De acuerdo a la relación de recurrencia (A.25), la función  $\gamma$ -exponencial  $E(x, \gamma)$  siempre diverge en el origen  $x = 0$  si el parámetro de deformación  $\gamma$  es negativo pero no es un número entero. El comportamiento de esta familia de funciones se muestra en el panel a) de la figura (A.1) para algunos valores del parámetro de deformación  $\gamma$ . Además, se consideró la *función de desviación*:

$$\delta(x, \gamma) = 1 - \exp(-x)E(x, \gamma) \quad (\text{A.28})$$

que caracteriza la desviación relativa de  $\gamma$ -exponencial  $E(x, \gamma)$  la exponencial ordinaria. El comportamiento de esta última función se ilustra en el panel b) de la figura (A.1).

Usando la expansión en serie de potencias (A.17), se puede obtener las reglas de la *diferenciación e integración*:

$$\frac{d}{dx} E(x; \gamma) = E(x; \gamma-1), \quad (\text{A.29})$$

$$\int E(x; \gamma) dx = E(x; \gamma+1) + C, \quad (\text{A.30})$$

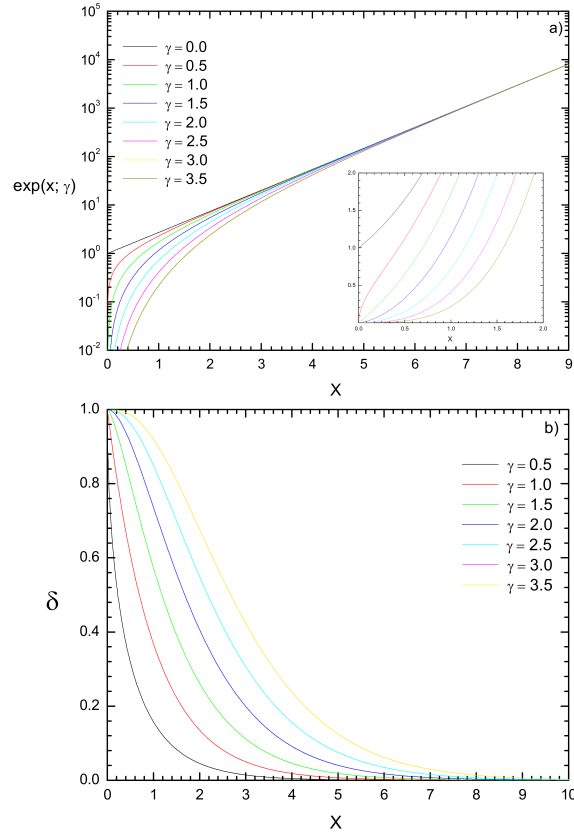


Figura A.1: Panel (a): comportamiento de la función gamma exponencial para diferentes valores del parámetro de deformación gamma. Panel (b): dependencia de la función de desviación (A.28) con respecto a  $x$ .

y la *formula de convolución*:

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x E(x-\tau; \gamma) \tau^{\nu-1} d\tau = E(x; \gamma + \nu). \quad (\text{A.31})$$

La última relación se obtiene usando la *función Beta*:

$$B(\mu, \nu) = \int_0^1 (1-\tau)^{\mu-1} \tau^{\nu-1} d\tau = \frac{\Gamma(\mu) \Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu + \nu)}. \quad (\text{A.32})$$

Note que la definición (A.21) es un caso particular de la formula de convolución (A.31) para  $\gamma = 0$ . Además, esta identidad considera la integración fraccional de la función *gamma*-exponencial:

$$\hat{J}^\nu E(x; \gamma) \equiv \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x E(\tau; \gamma) (x-\tau)^{\nu-1} d\tau = E(x; \gamma + \nu). \quad (\text{A.33})$$

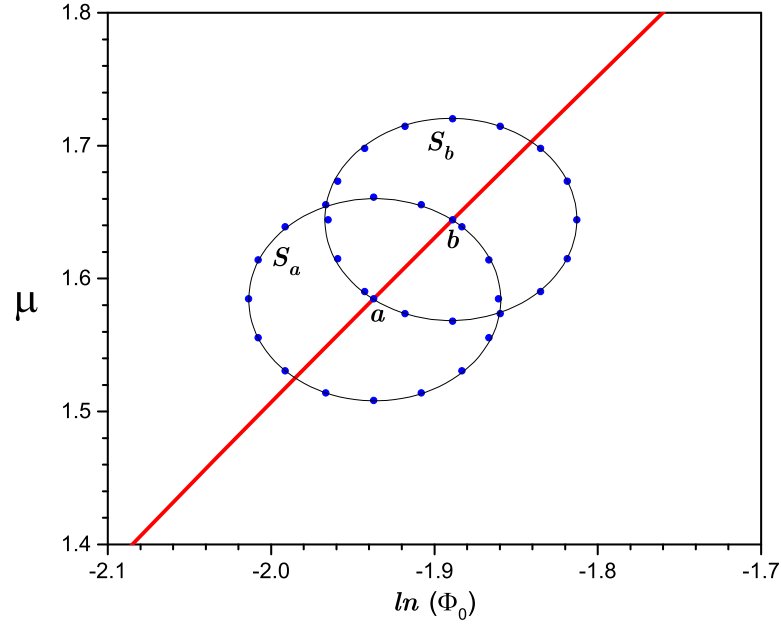


Figura A.2: Ilustración del método de interpolación de Fourier empleado para determinar la curva de masa constante o parámetro de masa  $\theta$  constante en el plano  $[\ln \Phi_0, \mu]$ .

#### A.4. Interpolación de Fourier a segundo orden

En la figura A.2, se ilustra el método de interpolación de Fourier empleado para obtener las curvas de parámetro de masa  $\theta$  constante (línea continua roja) en el plano de los parámetros de integración  $[\ln \Phi_0, \mu]$  del problema de Poisson (3.11). A partir de un punto  $a$  conocido de esta curva, se calcula el valor del parámetro de masa  $\theta$   $[\ln \Phi_0, \mu]$  para un conjunto finito de puntos dispuestos sobre una circunferencia  $S_a$  de radio  $\varepsilon$  centrada en el punto  $a$ . Dichos puntos son empleados para hacer una interpolación de la función  $f(\varphi) = \theta$   $[\ln \Phi_0, \mu]$  definida sobre la circunferencia  $S_a$ , tal que los parámetros de integración sobre la circunferencia  $S_a$  se suponen que dependen del ángulo  $\varphi$  en la forma:

$$\ln \Phi_0 = \ln \Phi_{0a} + \varepsilon \cos(\varphi) \text{ y } \mu = \mu_a + \varepsilon \sin(\varphi). \quad (\text{A.34})$$

Esta función interpolada se emplea para obtener un nuevo punto  $b$  dispuesto sobre la curva de parámetro de masa  $\theta$  (uno de los puntos de intersección de la circunferencia  $S_a$  con la curva de parámetro de masa constante). El procedimiento se repite hasta obtener el rango de la curva que se desea calcular.

La expansión de Taylor hasta el segundo orden para dos variables alrededor del ori-

gen, está dada por:

$$f(x, y) \equiv f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{y=y_0 \\ x=x_0}} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{y=y_0 \\ x=x_0}} (y - y_0) + \frac{1}{2} \left\{ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{\substack{y=y_0 \\ x=x_0}} (x - x_0)^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{y=y_0 \\ x=x_0}} (x - x_0)(y - y_0) + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{\substack{y=y_0 \\ x=x_0}} (y - y_0)^2 \right\}. \quad (\text{A.35})$$

Al suponer la dependencia de los puntos  $(x, y)$  sobre una circunferencia:

$$x = x_0 + \varepsilon \cos(\varphi), \quad y = y_0 + \varepsilon \sin(\varphi), \quad (\text{A.36})$$

se obtiene el desarrollo de Fourier hasta segundo orden:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \equiv \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi + a_2 \cos(2\varphi) + b_2 \sin(2\varphi). \quad (\text{A.37})$$

Comparando los coeficientes, tenemos:

$$a_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \varepsilon^2, \quad a_1 = \frac{\partial f}{\partial x} \varepsilon, \quad b_1 = \frac{\partial f}{\partial y} \varepsilon, \quad (\text{A.38})$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \varepsilon^2, \quad b_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \varepsilon^2. \quad (\text{A.39})$$

Los coeficientes de la serie de Taylor hasta segundo orden se pueden expresar como los coeficientes de la serie de Fourier:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{a_1}{\varepsilon}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{b_1}{\varepsilon}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2b_2}{\varepsilon^2} \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2a_2 + a_0}{\varepsilon^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{a_0 - 2a_2}{\varepsilon^2}. \quad (\text{A.41})$$

De forma vectorial, el desarrollo de Taylor hasta segundo orden de aproximación se expresa como sigue:

$$\delta f = (\mathbf{s} \cdot \nabla) f + \frac{1}{2} (\mathbf{s} \cdot \nabla)^2 f, \quad (\text{A.42})$$

En general, el vector desplazamiento  $\mathbf{s}$  a lo largo de la curva de masa constante puede ser representado como la superposición de vectores:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{|\mathbf{n}|} \left( \alpha \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{2} \omega \alpha^2 \mathbf{n} \right), \quad (\text{A.43})$$

siendo  $\mathbf{n}$  y  $\boldsymbol{\tau}$  los vectores normales y tangentes de las curvas equipotenciales:

$$\mathbf{n} = \nabla f = (f_x, f_y) = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) f, \quad \boldsymbol{\tau} = (f_y, -f_x) = \left( \frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x} \right) f. \quad (\text{A.44})$$

Note que estos vectores no están normalizados; pero son ortogonales,  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$ . Introduciendo este vector de desplazamiento en la serie de Taylor (A.42), en segundo orden de aproximación del parámetro  $\alpha$  tenemos:

$$\delta f = \frac{1}{2|\mathbf{n}|} w \alpha^2 (\mathbf{n} \cdot \nabla) f + \frac{\alpha^2}{2|\mathbf{n}|^2} (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla)^2 f, \quad (\text{A.45})$$

$$= \frac{1}{2|\mathbf{n}|^2} \alpha^2 [w |\mathbf{n}|^3 + [\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla]^2 f] \quad (\text{A.46})$$

De la condición  $\delta f = 0$  se deduce el valor del coeficiente  $w$ :

$$w = -\frac{1}{|\mathbf{n}|^3} [\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla]^2 f. \quad (\text{A.47})$$

El valor absoluto de desplazamiento:

$$ds = \sqrt{1 + w^2 \alpha^2} d\alpha \simeq \left(1 + \frac{1}{2} w^2 \alpha^2\right) d\alpha, \quad (\text{A.48})$$

de donde se desprende la fórmula aproximada:

$$s \simeq \alpha \left(1 + \frac{1}{6} w^2 \alpha^2\right) = \alpha (1 + \delta), \quad (\text{A.49})$$

siendo:

$$\delta = \frac{1}{6} w^2 \alpha^2. \quad (\text{A.50})$$

En términos de las derivadas en coordenadas Cartesianas, el coeficiente  $w$  se expresa como:

$$w = -\frac{1}{2|\nabla f|^2} [\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla]^2 f = -\frac{1}{2(f_x^2 + f_y^2)} (f_{xx} f_y^2 - 2f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2), \quad (\text{A.51})$$

que en términos de los coeficientes de Fourier en la forma:

$$w = -\frac{1}{(a_1^2 + b_1^2) \varepsilon^2} ((a_0 + a_2) (b_1)^2 - 2b_2 a_1 b_1 + (a_0 - a_2) (a_1)^2). \quad (\text{A.52})$$

Si deseamos que la aproximación a segundo orden sea buena, la contribución a segundo orden del desplazamiento en la dirección normal  $\mathbf{n}$  debe permanecer pequeña, lo que implica:

$$|w\alpha| \leq \delta^2 \text{ o } |\alpha| \leq \delta^2 / |w|. \quad (\text{A.53})$$

Para una parábola, en su vértice, el radio de curvatura viene dado por:

$$r = \frac{1}{2|w|}, \quad (\text{A.54})$$

de ahí que la condición de acotación para el parámetro  $\alpha$  está asumiendo que este sea menor que una fracción del radio de curvatura  $|\alpha| \leq 2\delta^2 r$ . En el método de interpolación de Fourier, la variable  $\alpha$  corresponde al radio de la circunferencia  $\varepsilon$ . Este radio debe ser lo suficientemente pequeño para que la interpolación sea adecuada, y con ella, la estimación del nuevo punto  $b$  dispuesto sobre la curva de parámetro de masa constante  $\theta$ . Esta consideración resulta crucial, sobre todo, cuando los cálculos se adentran en la región de acumulación de las curvas antes mencionadas en la figura 4.3.