



Universidad Católica del Norte
ver más allá

UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

CARACTERIZACIÓN DINÁMICA DE LA FORMA DE LYAPUNOV DE UNA MATRIZ

Tesis para optar el grado de
Magister en Ciencias
Mención Matemáticas

Tutor: Dr. Víctor Ayala Bravo

ANDRÉS ROBERT RODRIGUEZ MENDOZA

Antofagasta - Chile
2007

Índice general

Resumen	4
Agradecimientos	5
Dedicatoria	6
Introducción	7
1. Formas de Lyapunov	9
1.1. Espacios Métricos	9
1.2. Ecuaciones Diferenciales Lineales	10
1.3. Equivalencia y Conjugación de Flujos Lineales en \mathbb{R}^d	13
1.3.1. Equivalencia y Conjugación de Campos Vectoriales	13
1.4. El Espacio de Lyapunov para Matrices	15
1.5. Descomposición de Lyapunov de Matrices	16
2. Descomposición de Morse y Cadenas Recurrentes de Sistemas Dinámicos	21
2.1. Dinámica Topológica	21
2.1.1. Flujos	21
2.1.2. Conjuntos Límite	22
2.2. Descomposición de Morse y Atractores	26
2.2.1. Conjuntos Invariantes	27
2.2.2. Descomposición de Morse	28
2.2.3. Caracterización de una Descomposición de Morse via Sucesiones Atractor-Repulsor	31
2.3. Descomposición de Morse y Cadenas Recurrente	38

2.4. Cadenas Recurrentes y Atractores	42
3. Caracterización Dinámica de la Forma de Lyapunov de una Matriz	46
3.1. Cadenas Recurrentes, Conjugación y Equivalencia	46
3.1.1. Algunos Resultados en Conjugación y Equivalencia	46
3.2. Caracterización Topológica de Matrices en el Espacio Proyectivo . .	47
3.2.1. Caracterización de los Espacios de Lyapunov	50
3.3. Caracterización Topológica de Matrices en Variedades Flag	55
3.3.1. Sistemas Lineales sobre Grassmannianas y Variedades Flag .	55
Bibliografía	64

Índice de figuras

2.1. Flujo sistema lineal	29
2.2. Toro	45
3.1. A induce una Ecuación diferencial sobre \mathbb{P}^{d-1}	48
3.2. Flujo sobre \mathbb{P}^φ del Ejemplo 3.1	51
3.3. Flujo sobre \mathbb{P}^φ del Ejemplo 3.2	52
3.4. Flujo sobre \mathbb{P}^φ del Ejemplo 3.3	53
3.5. Flujo sobre \mathbb{P}^φ del Ejemplo 3.4	53

Resumen

*Dado una matriz $A \in gl(d, \mathbb{R})$, su caracterización dinámica de sus formas de Lyapunov se realiza usando los métodos de dinámica topológica. Sea $A \in gl(d, \mathbb{R})$ con flujo lineal φ sobre \mathbb{R}^d , la proyección de los espacios de Lyapunov son una descomposición fina de Morse de $\mathbb{P}\varphi$ sobre el espacio proyectivo \mathbb{P}^{d-1} , la cual puede ser extendida a Grassmannianas \mathbb{G} . Este resultado define un orden (con grafo asociado \mathbb{G} -grafo) sobre variedades *Flag*.*

Agradecimientos

- *A DIOS*, quién ha estado a mi lado en todo momento dándome las fuerzas necesarias para continuar luchando día tras día y seguir adelante rompiendo todas las barreras.
- *A MIS PADRES SIXTO Y NIEVES*, que velaron por mi salud y educación.
- *A DR. VICTOR AYALA BRAVO*, quien me dio la oportunidad de seguir creciendo profesionalmente.

Dedicatoria

- *La presente tesis se la dedico a mi querida familia: mis padres Sixto y Nieves, mis hermanos Edward, Richard, Raphael, Idelsa y Cesar por ayudarme a cumplir mis objetivos como persona y estudiante.*
- ★ *A mi queridos padres Sixto Rodríguez y Nieves Mendoza que me dieron la vida y han estado conmigo en todo momento. Gracias por brindarme su apoyo, confianza y amor incondicional, por hacer de mi una mejor persona a través de sus consejos y enseñanzas.*
- *Al Dr. Víctor Ayala Bravo, mi guía y mentor, gracias a Él mi vida tomo un rumbo lleno de oportunidades.*
- ★ *A todos los profesores del departamento de Matemáticas de la Universidad Católica del Norte.*
- *A Ciro Donoso Letelier por su apoyo incondicional durante mis estudios en Chile.*
- ★ *A mis compañeros de postgrado por sus consejos y apoyo en los momentos difíciles.*

Introducción

En la presente tesis estudiamos la caracterización de las formas de Lyapunov de matrices usando los métodos de la dinámica topológica. Nuestros objetos de estudio son la descomposición de Morse y conjuntos cadena recurrente, conceptos fueron introducidos por Conley en la segunda mitad del siglo XX; estos conjuntos tienen una excepcional relación con la estructura de los atractores, es por ello que han sido estudiados ampliamente por Hirsch y Hurley entre otros, obteniendo valiosos resultados cuya aplicación se ve en la Epidemiología, Teoría de Juegos y el Análisis Numérico. Dado que es un concepto aún en estudio, la terminología y notación no son únicas, depende del autor, sin embargo, con el objeto de evitar confusiones únicamente haremos referencia a la utilizada por Conley. La teoría de Conley [7], provee una serie de herramientas para el estudio de la dinámica de flujos generales sobre espacios métricos compactos.

El objeto del presente trabajo es mostrar de una manera sencilla la importancia de la descomposición de Morse y conjuntos cadena recurrente en la teoría de la Estabilidad. No se requiere del conocimiento previo del lector sobre el tema, sin embargo, dado que el estudio de estos conjuntos se hace a partir de la Topología Dinámica es necesario tener presente el conocimiento adquirido en un curso de Topología y Geometría Diferencial.

La organización del trabajo es de la siguiente manera; se incluye un capítulo preliminar con el objeto de sintetizar los resultados acerca de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales d -dimensionales $\dot{x} = Ax$, enfatizando en autovalores y autoespacios generalizados, también se estudia soluciones en espacios euclidianos \mathbb{R}^d desde el punto de vista de equivalencia y conjugación topológica con caracterizaciones relacionadas a la matriz A . En el capítulo 2, definimos formalmente el concepto de cadenas recurrentes, atractores y descomposición de Morse para

sistemas dinámicos, estudiamos algunas de sus propiedades y daremos ejemplos de ellos, y junto con los lemas probamos el teorema que caracteriza una descomposición de Morse a través de una sucesión atractor-repulsor, también vemos la relación que existe entre la estructura de los atractores y los conjuntos cadena. Estos conceptos son aplicados en el Capítulo 3 para sistemas lineales en Grassmannianas y variedades flag.

Andrés Rodríguez Mendoza

Capítulo 1:

Formas de Lyapunov

A continuación listaremos una serie de definiciones y resultados que nos servirán para fijar conceptos y notaciones, algunos de estos resultados son clásicos por lo que omitiremos las pruebas con el objeto de hacer más sencilla la comprensión de estos conceptos y pasar rápidamente al objetivo central de este trabajo de tesis, que consiste en estudiar las propiedades inherentes de los conjuntos cadena, descomposición de Morse y la caracterización de las formas de Lyapunov de matrices usando los métodos de la dinámica topológica.

1.1. Espacios Métricos

Se considera sistemas dinámicos continuos sobre espacios métricos compactos. Para esto, recordamos algunos conceptos básicos y teoremas conocidos.[10][11]

Definición 1.1. *Un espacio métrico (X, \tilde{d}) es un conjunto X junto con la función distancia $\tilde{d} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y, z \in X$ se cumple:*

- (i) $\tilde{d}(x, y) \geq 0$ y $\tilde{d}(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$
- (ii) $\tilde{d}(x, y) = \tilde{d}(y, x)$
- (iii) $\tilde{d}(x, y) \leq \tilde{d}(x, z) + \tilde{d}(z, y)$

Definición 1.2. *Un espacio métrico (X, \tilde{d}) es compacto, si toda sucesión de X , posee una subsucesión convergente. Esto es equivalente a las siguientes condiciones:*

- (a) *Cada cubrimiento $X = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$ por subconjuntos abiertos con α en algún conjunto índice tiene un subcubrimiento finito.*

(b) Si Δ es una familia de subconjuntos cerrados de X , tal que ninguna intersección finita de conjuntos cualesquiera de Δ es vacía, entonces la intersección de todos los conjuntos en Δ es vacía.

Note que la condición (b) implica, en particular que cualquier familia decreciente (con respecto a la inclusión de conjuntos) de subconjuntos cerrados no vacíos de X tiene intersección no vacía.

Teorema 1.1. *Un espacio métrico (X, \tilde{d}) es compacto si y sólo si es completo (esto es, toda sucesión de Cauchy tiene un límite) y totalmente acotado, esta propiedad significa que: para cualquier $\epsilon > 0$ existen finitos puntos $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ tal que:*

$$X = \bigcup_{i=1}^n \{y \in X, d(y, x_i)\} < \epsilon \quad (1.1.1)$$

Por tanto, cualquier espacio métrico compacto tiene una base contable de su topología, es decir, existen conjuntos contables $V_n, n \in \mathbb{N}$ tal que todo conjunto abierto V puede ser escrito como la unión de conjuntos V_n . (Ver [1][10][11])

Teorema 1.2 (Baire). *La intersección contable de subconjuntos abiertos y densos en un espacio métrico es denso. (Ver [1][10][11]).*

Teorema 1.3 (Blaschke). *El conjunto de subconjuntos cerrados no vacíos de un espacio métrico compacto se convierte en un espacio métrico compacto bajo la distancia de Hausdorff.*

$$d_H(A, B) = \max\{\max_{a \in A} [\min_{b \in B} d(a, b)], \max_{b \in B} [\min_{a \in A} d(a, b)]\} \quad (1.1.2)$$

(Ver [1][10][11]).

1.2. Ecuaciones Diferenciales Lineales

$gl(d, \mathbb{R})$ denota el conjunto de matrices $d \times d$ con entradas reales, y $GL(d, \mathbb{R})$ el conjunto de matrices invertibles.

Definición 1.3. *Para un matriz $A \in gl(d, \mathbb{R})$ la exponencial $e^A \in GL(d, \mathbb{R})$ está definido por*

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k,$$

donde $I \in GL(d, \mathbb{R})$ es la matriz identidad.

Una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes es dado por una matriz $A \in gl(d, \mathbb{R})$ a través de

$$\dot{x} = Ax \quad (1.2.1)$$

donde \dot{x} denota la diferenciación con respecto a t . Una función $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que $\dot{x}(t) = Ax(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, es llamado una solución de (1.2.1).

El **problema con valor inicial** para (1.2.1) consiste en encontrar, para un valor inicial dado $x_0 \in \mathbb{R}^d$, una solución $x(\cdot, x_0)$ que satisface $x(0, x_0) = x_0$.

Teorema 1.4. *Para cada problema con valor inicial dado por $A \in gl(d, \mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}^d$, la solución $x(\cdot, x_0)$ es única y está dado por*

$$x(t, x_0) = e^{tA}x_0, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.2.2)$$

Observación 1.1. Consideremos la ecuación diferencial lineal (1.2.1).

Sea $\varphi(t)$ una matriz fundamental de (1.2.1) con $\varphi(0) = I$, entonces se cumple:

1. $\varphi'(t) = A\varphi(t)$, $\varphi(0) = I$.
2. $\forall t, s \in \mathbb{R}$, $\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s)$.
3. $[\varphi(t)]^{-1} = \varphi(-t)$.
4. La serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ converge uniformemente sobre compactos a $\varphi(t)$.

Entonces la aplicación

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d,$$

dado por

$$\varphi(t, x) = e^{tA}x$$

es un flujo lineal de A .

Proposición 1.1. *Sea $J_A^{\mathbb{R}}$ la forma real de Jordan de una matriz $A \in gl(d, \mathbb{R})$.*

1. *Para $A \in gl(d, \mathbb{R})$, existe $P \in GL(d, \mathbb{R})$ tal que $A = P^{-1}J_A^{\mathbb{R}}P$.*
2. *Si $A = P^{-1}J_A^{\mathbb{R}}P$, entonces $e^A = P^{-1}e^{J_A^{\mathbb{R}}}P$, es decir, para calcular la exponencial de una matriz es suficiente conocer la exponencial de las formas de Jordan de la matriz.*

(Ver [12]).

Ejemplo 1.1. ■ Sea $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_d)$, entonces la solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = Ax$ con problema de valor inicial $x_0 \in \mathbb{R}^d$ está dado por

$$x(t, x_0) = e^{At}x_0 = \begin{pmatrix} e^{a_1} & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & e^{a_d} \end{pmatrix} x_0.$$

- Sea $A \in gl(d, \mathbb{R})$ diagonalizable, es decir, existe una matriz $T \in GL(d, \mathbb{R})$ y una matriz diagonal $D \in gl(d, \mathbb{R})$ con $A = T^{-1}DT$, entonces la solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = Ax$ con problema de valor inicial $x_0 \in \mathbb{R}^d$ está dado por

$$x(t, x_0) = T^{-1}e^{Dt}Tx_0.$$

- Sea B un bloque de Jordan asociado con un autovalor complejo $\lambda = a + ib$ de la matriz $A \in gl(d, \mathbb{R})$. Sea $y_0 \in E_\lambda$, el autoespacio real de λ . Entonces la solución $y(t, y_0)$ de $\dot{y} = By_0$ está dado por

$$y(t, y_0) = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix} y_0.$$

- Sea B un bloque de Jordan de dimensión n asociado con un autovalor real λ de la matriz $A \in gl(d, \mathbb{R})$. Entonces para

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}, \text{ tenemos } e^{Bt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdot & \cdot & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \frac{t^2}{2!} & \\ & & & \cdot & t & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

- Sea B un bloque de Jordan real de dimensión $n = 2m$ asociado con el autovalor complejo $\mu = a + ib$ de la matriz $A \in gl(d, \mathbb{R})$. Entonces con $D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ y $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, para

$$B = \begin{pmatrix} D & I & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot & I \\ & & & & & D \end{pmatrix},$$

tenemos

$$e^{Bt} = e^{at} \begin{pmatrix} \widehat{D} & t\widehat{D} & \frac{t^2}{2!}\widehat{D} & \cdot & \cdot & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\widehat{D} \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \frac{t^2}{2!}\widehat{D} \\ & & & & \cdot & t\widehat{D} \\ & & & & & \widehat{D} \end{pmatrix}$$

donde $\widehat{D} = \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$.

1.3. Equivalencia y Conjugación de Flujos Lineales en \mathbb{R}^d

1.3.1. Equivalencia y Conjugación de Campos Vectoriales

Definición 1.4. Sean $X : U_1 \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$; $Y : U_2 \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ dos campos vectoriales en \mathbb{R}^d .

1. X se dice topológicamente equivalente a Y cuando existe un homeomorfismo $h : U_1 \rightarrow U_2$ que lleva órbitas de X en órbitas de Y preservando orientación.

Es decir, si $p \in U_1$ y $\tau_1(p)$ es la órbita orientada de X pasando por p , entonces $h(\tau_1(p))$ es la órbita orientada de Y pasando por $h(p)$, $\tau_2(h(p))$. Mas preciso; $h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t', h(p))$ con $t, t' > 0$ donde φ_1 es el flujo de X y φ_2 es el flujo de Y .

Si h es un difeomorfismo de clase C^k , los campos se dicen C^k -equivalentes. Usualmente C^0 -equivalentes es llamado topológicamente equivalentes. Estas definiciones establecen relaciones de equivalencia entre campos definidos en abiertos de \mathbb{R}^d . El homeomorfismo h se llama una equivalencia topológica y el C^k -difeomorfismo se llama una C^k -equivalencia.

2. X se dice topológicamente conjugado de Y cuando existe $h : U_1 \rightarrow U_2$ homeomorfismo tal que

$$h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x)), \quad \forall (t, x) \in D_1 \text{ dominio de } \varphi_1$$

Si h es un difeomorfismo de clase C^k , los campos se dicen C^k conjugados. Usualmente C^0 -conjugados es llamado topológicamente conjugados.

Sean $A, B \in gl(d, \mathbb{R})$ con flujos lineales asociados $\varphi(t, x) = e^{At}$ y $\psi(t, x) = e^{Bt}$ respectivamente, $x \in \mathbb{R}^d$ y $t \in \mathbb{R}$, equivalencia y conjugación de flujos lineales son caracterizados en los siguientes resultados:

Proposición 1.2. Para dos flujos lineales φ y ψ en \mathbb{R}^d , son equivalentes:

- φ y ψ son C^k -conjugados ($k \geq 1$)
- φ y ψ son linealmente conjugados, es decir, la aplicación conjugación h es un operador lineal en $GL(d, \mathbb{R})$
- A y B son similares, es decir, $A = TBT^{-1}$, con $T \in GL(d, \mathbb{R})$.

Cada uno de los argumentos implica que A y B tienen la misma estructura de autovalores y (sobre una transformación lineal) el mismo autoespacio (generalizado). En particular, las clases C^k -conjugación son exactamente la forma de Jordan de las clases de equivalencia en $gl(d, \mathbb{R})$.

Proposición 1.3. Para dos flujos lineales φ y ψ en \mathbb{R}^d , son equivalentes:

- φ y ψ son C^k -equivales ($k \geq 1$)
- φ y ψ son linealmente equivalentes, es decir, la aplicación conjugación h es un operador lineal en $GL(d, \mathbb{R})$
- $A = \alpha TBT^{-1}$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ y $T \in GL(d, \mathbb{R})$.

Cada uno de los argumentos implica que A y B tiene la misma estructura de Jordan (real) y sus autovalores difieren por una constante positiva. Por tanto las clases C^k -equivalencia son formas de Jordan modulo una constante positiva.

Proposición 1.4. *Si A y B son hiperbólicos (es decir, no existen autovalores en el eje imaginario) entonces los flujos lineales φ y ψ en \mathbb{R}^d son C^0 -equivalentes (y C^0 -conjugado) si y sólo si la dimensión del subespacio estable (y por tanto la dimensión del subespacio inestable) de A y B concuerdan.*

Recordemos que el conjunto de matrices hiperbólicas es abierto y denso en $gl(d, \mathbb{R})$, es decir, existe una vecindad $U \subset gl(d, \mathbb{R})$ tal que todo $B \in U$ son topológicamente equivalente a A .

1.4. El Espacio de Lyapunov para Matrices

La parte real de los autovalores de $A \in gl(d, \mathbb{R})$ determina el comportamiento exponencial de las soluciones de (1.2.1), descritas por las exponentes de Lyapunov y los correspondientes subespacios de Lyapunov.

Definición 1.5. *El espectro $spec(A)$ de una matriz $A \in gl(d, \mathbb{R})$ se define como*

$$\{\mu_i \in \mathbb{C}, \mu_i \text{ es un autovalor de } A, i = 1, \dots, d\}. \quad (1.4.1)$$

Definición 1.6. *El espectro de Lyapunov $\sum_{L_y}(A)$ de una matriz $A \in gl(d, \mathbb{R})$ se define como*

$$\{\lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i = Re\mu_i, i = 1, \dots, d\}. \quad (1.4.2)$$

El espectro de Lyapunov $\sum_{L_y}(A)$ describe el comportamiento de estabilidad de (1.2.1) en \mathbb{R}^d , incluyendo sus subespacios estable, centro e inestable.

Ejemplo 1.2. Para

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ -1 & -2 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

tenemos $spec(A) = \{-2 \pm i, -1, 1\}$ y $\sum_{L_y}(A) = \{-2, -1, 1\}$.

Sean $\mu_k = \lambda_k + i\alpha_k \in \text{spec}(A)$, $k = 1, \dots, r \leq d$, entonces ordenando las partes reales como $\lambda_1 < \dots < \lambda_l$, $1 \leq l \leq r \leq d$, se define:

Definición 1.7. Para $j = 1, \dots, l$, el espacio de Lyapunov de λ_j denotado por $L(\lambda_j)$, es definido por

$$L(\lambda_j) = \bigoplus E_k$$

donde la suma directa está tomada sobre todos los autoespacios reales generalizados E_k asociado a los autovalores con parte real igual a λ_j .

Observación 1.2. $\bigoplus_{j=1}^l L(\lambda_j) = \mathbb{R}^d$.

Definición 1.8. Asociado a la matriz $A \in gl(d, \mathbb{R})$ están definidos los conjuntos $L^- = \bigoplus\{L(\lambda_j), \lambda_j < 0\}$, $L^0 = \bigoplus\{L(\lambda_j), \lambda_j = 0\}$ y $L^+ = \bigoplus\{L(\lambda_j), \lambda_j > 0\}$, llamados subespacios de Lyapunov estable, centro e inestable respectivamente.

Para una ecuación diferencial lineal (1.2.1) en \mathbb{R}^d la correspondiente estructura de autoespacios puede ser descrito de la siguiente manera: Sea E_i la suma de los autoespacios (generalizados) de A correspondiente a todos los autovalores μ_i con igual parte real. Entonces

$$x \in E_i \text{ si y solo si } \lambda^+(x) = \lambda^-(x) = \text{Re}\lambda_i$$

donde λ^+ y λ^- son los exponentes de Lyapunov de la solución $\phi(t, x)$, definido por:

$$\lambda^+(x) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} |\phi(t, x)| \quad (1.4.3)$$

$$\lambda^-(x) = \limsup_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} |\phi(t, x)| \quad (1.4.4)$$

1.5. Descomposición de Lyapunov de Matrices

Cada clase de similaridad en $gl(d, \mathbb{R})$ es determinada únicamente por su forma de Jordan Real, excepto por el orden de los bloques de Jordan. Por tanto si ordenamos los bloques de Jordan a través:

- (a) ordenando la parte real de los autovalores en orden creciente, entonces dentro de los bloques con la misma parte real.

- (b) ordenando la parte imaginaria de los autovalores en orden creciente, y en (a) y (b) por
- (c) tamaño de los bloques de Jordan, entonces cada clase de similaridad en $gl(d, \mathbb{R})$ es determinado únicamente. De aquí para $A \in gl(d, \mathbb{R})$ su forma de Jordan será denotado por $J(A)$.

Definimos varias formas de Lyapunov para matrices que reflejan la parte real del espectro del subespacio asociado en \mathbb{R}^d .

De la forma de Jordan $J(A)$ se construye la forma normal de Lyapunov $L(A)$ de A como sigue:

Sean $\lambda_1 < \dots < \lambda_i < \dots < \lambda_m$ partes reales distintas de los autovalores de la matriz A con λ_i de multiplicidad j , entonces los espacios de Lyapunov asociados es dado por

$$L(\lambda_i) = \bigoplus_j J_{j,i}$$

donde $J_{j,i}$ son los subespacios correspondientes a los bloques de Jordan.

Definición 1.9. La forma normal de Lyapunov $L(A)$ de una matriz $A \in gl(d, \mathbb{R})$ es la matriz diagonal

$$L(A) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \cdot & \\ 0 & & \Lambda_m \end{pmatrix}, \text{ con } \Lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ & \cdot \\ 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

donde λ_i es la parte real de un autovalor de A y el tamaño del bloque Λ_i es igual a la dimensión del espacio de Lyapunov $\dim L(\lambda_i)$. Los bloques son ordenados de acuerdo al orden $\lambda_1 < \dots < \lambda_i < \dots < \lambda_m$.

Definición 1.10. Dos matrices A y B son llamados Lyapunov equivalentes si $L(A) = L(B)$.

Note que la equivalencia de Lyapunov es una relación de equivalencia sobre $gl(d, \mathbb{R})$. Cada clase tiene un único representante para cada uno de los m números reales $\lambda_1 < \dots < \lambda_i < \dots < \lambda_m$ y m números naturales $d_i = \dim L(\lambda_i)$, la dimensión i -ésima del espacio de Lyapunov.

Observación 1.3. (Parametrización de clases de Lyapunov en $gl(d, \mathbb{R})$) Sea \mathcal{C} un clase Lyapunov equivalente de matrices en $gl(d, \mathbb{R})$. El conjunto ζ de todas tales clases pueden ser parametrizadas como sigue:

- (i) un número natural m con $1 \leq m \leq d$, denotando el número de los diferentes exponentes de Lyapunov,
- (ii) un parámetro (continuo) de m variables $\mu \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^+)^{m-1}$ describiendo el vector de las exponentes de Lyapunov $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, donde $\mu_1 = \lambda_1$ y $\mu_i = \lambda_i - \lambda_{i-1}$ para $i = 2, \dots, m$,
- (iii) un conjunto de índices discreto $I_m \subset \{1, \dots, d - (m - 1)\}^{m-1}$ describiendo la dimensión de los espacios de Lyapunov (L_1, \dots, L_m) , donde $I_m(i) = \dim L_i$ para $i = 1, \dots, m - 1$ con $\sum_{i=1}^{m-1} I_m(i) := n_m \leq d - 1$ y $\dim L_m = d - n_m$.

La cardinalidad de I_m es como sigue.

Proposición 1.5. Para dimensión $d \geq 3$ y para $m(1 \leq m \leq d)$ exponentes de Lyapunov distintos la cardinalidad de I_m describiendo el número de posibles clases de Lyapunov es determinado como sigue:

- (i) $m = 1$ ó $m = d$ implica $\text{card}(I_m) = 1$,
- (ii) $m = 2$ ó $m = d - 1$ implica $\text{card}(I_m) = d - 1$,
- (iii) por otra parte $\text{card}(I_m)$ está dado por la fórmula con $m - 2$ términos

$$\text{card}(I_m) = \sum_{j_1=1}^{d-m+1} \sum_{j_2=1}^{j_1} \cdots \sum_{j_{i-3}=1}^{j_{i-4}} \sum_{j_{i-2}=1}^{j_{i-3}} j_{i-2}.$$

(Ver [1])

Para el estudio de flujos lineales uno frecuentemente necesita más información que la forma normal de Lyapunov de una matriz: la dimensión de los espacios de Lyapunov, en el orden natural de sus exponentes de Lyapunov, puede ser suficiente. Por tanto introducimos la forma corta de Lyapunov.

Definición 1.11. La forma corta de Lyapunov $SL(A)$ de una matriz $A \in gl(d, \mathbb{R})$ está dado por el vector de las dimensiones d_i de los espacios de Lyapunov (en el orden natural de sus exponentes de Lyapunov):

$$SL(A) = (m, d_1, \dots, d_m) \tag{1.5.1}$$

Nuevamente, la forma de estabilidad de Lyapunov define una relación de equivalencia sobre $gl(d, \mathbb{R})$. Sus clases, son parametrizados por dos números naturales (m_s, d_c) tal que $0 \leq m_s + d_c \leq d$.

Capítulo 2:

Descomposición de Morse y Cadenas Recurrentes de Sistemas Dinámicos

Los primeros conjuntos cadenas fueron introducidos por Conley, en la década de los setenta, definió el concepto de conjunto cadena recurrente y demostró importantes resultados sobre estos conjuntos bajo ciertas condiciones que involucran la compacidad del espacio. Más tarde en 1990, Hunley generalizó estos resultados, a espacios no necesariamente compactos, además del estudio de la Topología Dinámica este concepto ha tenido importantes aplicaciones en la Biología. [9][10][12]

La idea de los conjuntos cadena transitivos surge a partir de la noción de los conjuntos cadena recurrentes, por lo que antes de definir formalmente a los conjuntos cadena transitivos y estudiar sus propiedades, es necesario conocer algunos conceptos básicos de la Teoría de Estabilidad y recordar los resultados previamente establecidos. [8][16][19]

2.1. Dinámica Topológica

Iniciamos con algunos conceptos y propiedades básicas para sistemas dinámicos continuos sobre espacios métricos compactos, basados en la teoría de **Conley**.

2.1.1. Flujos

Definición 2.1. *Un flujo o sistema dinámico con tiempo continuo sobre un espacio métrico X está dado por una aplicación continua $\phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ que*

satisface:

(i) $\phi(0, x) = x$ para todo $x \in X$ y

(ii) $\phi(t + s, x) = \phi(t, \phi(s, x))$ para todo $x \in X$ y todo $t, s \in \mathbb{R}$

Observación 2.1. 1. Sea $t_1 \in \mathbb{R}$ cualquiera. La función $\Phi_{t_1} : X \rightarrow X$ que se obtiene fijando $t = t_1$ en $\phi(t, x)$, es un homeomorfismo.

En efecto: $\phi_{t_1} \circ \phi_{-t_1} = \phi_{t_1 - t_1} = \phi_0 = Id$ y análogamente $\phi_{-t_1} \circ \phi_{t_1} = \phi_{-t_1 + t_1} = \phi_0 = Id$; la inversa de ϕ_{t_1} es ϕ_{-t_1} .

2. Sea $x_0 \in X$ cualquiera. La función $\phi(\cdot, x_0) : \mathbb{R} \rightarrow X$ que se obtiene fijando $x = x_0$ en $\phi(t, x)$, es la parametrización de una curva continua orientada (según t creciente), que se llama **órbita** o trayectoria de x_0 . A veces también se llama órbita o trayectoria a la traza de esa curva, o sea al conjunto imagen de la función $\phi(\cdot, x_0)$ que denotamos como $\mathcal{O}(x_0)$

$$\mathcal{O}(x_0) = \{\phi(t, x_0) : t \in \mathbb{R}\}$$

En lo que sigue usaremos la notación $x \cdot \mathbb{R} = \mathcal{O}(x)$

3. Dos órbitas distintas no se intersecan, pues si lo hicieran existiría

$$x_2 \in \mathcal{O}(x_0) \cap \mathcal{O}(x_1).$$

Luego $x_2 = \phi(t_0, x_0) = \phi(t_1, x_1)$. Para $t \in \mathbb{R}$ se cumple: $\phi(t, x_0) = \phi(t - t_0 + t_0, x_0) = \phi(t - t_0, \phi(t_0, x_0)) = \phi(t - t_0, x_2) = \phi(t - t_0, \phi(t_1, x_1)) = \phi(t - t_0 + t_1, x_1)$. Entonces $\mathcal{O}(x_0) \subset \mathcal{O}(x_1)$. Simétricamente se cumple la inclusión opuesta, y entonces las órbitas coinciden.

Definición 2.2. Sea $x_0 \in X$, entonces decimos que

- x_0 es un punto fijo si $\phi(t, x_0) = x_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y
- x_0 es un punto periódico de período $T > 0$ si $\phi(T + t, x_0) = \phi(t, x_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

2.1.2. Conjuntos Límite

Sea $\phi(t, x)$ un sistema dinámico de variable real en el espacio X .

Definición 2.3. Se llama ω – límite de x_0 al conjunto de puntos dado por:

$$\omega(x_0) = \left\{ y_0 \in X : \exists t_n \longrightarrow \infty \text{ con } \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x_0) = y_0 \right\} \quad (2.1.1)$$

Se llama α – límite de x_0 al conjunto de puntos dado por:

$$\alpha(x_0) = \left\{ y_0 \in X : \exists t_n \longrightarrow -\infty \text{ con } \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x_0) = y_0 \right\} \quad (2.1.2)$$

Observación 2.2. 1. Si la órbita por x_0 es periódica, o si x_0 es un punto fijo, entonces $\omega(x_0) = \alpha(x_0) = \mathcal{O}(x_0)$.

2. Para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple $\omega(t, \phi(x_0)) = \omega(x_0)$ y $\alpha(t, \phi(x_0)) = \alpha(x_0)$.

En efecto: si $y \in \omega(x_0)$ existe $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x_0) = y$. Fijado $t \in \mathbb{R}$, $t_n - t \rightarrow \infty$. Luego, $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n - t, \phi(t_n, x_0)) \in \omega(\phi(t, x_0))$. Lo anterior prueba que $\omega(x_0) \subset \omega(\phi(t, x_0))$ para todo real t , y para todo punto x_0 . En particular vale para $-t$ en lugar de t y para $\phi(t, x_0)$ en lugar de x_0 . Se obtiene así la inclusión opuesta. En forma similar se demuestra la afirmación referente al conjunto α – límite.

Lo anterior dice que los conjuntos ω –límite y α –límite son inherentes a las órbitas, más que a los puntos. Es decir todos los punto de una misma órbita tienen los mismos ω –límite y α –límite.

Teorema 2.1. Los conjuntos $\omega(x_0)$ y $\alpha(x_0)$ son invariantes y cerrados.

Demostración. La invariancia de $\omega(x_0)$ se demuestra verificando que si $y \in \omega(x_0)$ entonces $\phi(t, y) \in \omega(x_0)$ para todo real t . En efecto, si $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x_0)$ con $t_n \rightarrow +\infty$, entonces fijado t real cualquiera $\phi(t, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t, \phi(t_n, x_0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n + t, x_0)$ con $t_n + t \rightarrow +\infty$. Luego $\phi(t, y) \in \omega(x_0)$ como se quería demostrar. Para demostrar que $\omega(x_0)$ es cerrado, tomemos un punto de acumulación r de $\omega(x_0)$ y probemos que $r \in \omega(x_0)$. En todo entorno V de r existe algún punto $y \in \omega(x_0)$, siendo entonces $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x_0)$ con $t_n \rightarrow +\infty$.

Como $y \in V$, y por la definición de límite, existe algún $T = t_n$ (para cierto n), que puede elegirse tan grande como se desee porque $t_n \rightarrow +\infty$ tal que $\phi(T, x_0) \in V$. Sea $V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_j \supset \dots$ una base local numerable de entornos del punto r . Para cada uno de ellos elegimos T_j de modo que $T_{j+1} > T_j$ y $\phi(T_j, x_0) \in V_j$. Entonces $\phi(T_j, x_0)_{j \rightarrow \infty} \rightarrow r$ con $T_j \rightarrow +\infty$. Es decir $r \in \omega(x_0)$. Las afirmaciones para el conjunto α – límite se demuestran de manera similar. \square

Definición 2.4. Un punto $x \in X$ se dice recurrente si $x \in \omega(x)$.

Definición 2.5. Para un subconjunto $Y \subset X$ el conjunto α -límite está definido como:

$$\alpha(Y) = \left\{ y \in X : \exists (x_n) \subset Y \text{ y } t_n \rightarrow -\infty \text{ en } \mathbb{R} \right. \\ \left. \text{con } \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x_n) = y \right\} = \bigcap_{t > 0} \text{cl}(Y \cdot (-\infty, -t]) \quad (2.1.3)$$

y análogamente el conjunto ω -límite de Y está definido como:

$$\omega(Y) = \left\{ y \in X : \exists (x_n) \subset Y \text{ y } t_n \rightarrow \infty \text{ en } \mathbb{R} \right. \\ \left. \text{con } \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x_n) = y \right\} = \bigcap_{t > 0} \text{cl}(Y \cdot [t, \infty)) \quad (2.1.4)$$

Note que, en general, $\omega(Y)$ será más grande que la unión de todos los $\omega(y)$, $y \in Y$. Si el espacio X es compacto, los conjuntos $\omega(Y)$ son no vacíos, compactos e invariantes. Son conexos si Y es conexo. Los conjuntos α -límite son los conjuntos ω -límite para sistemas con tiempo inverso $\phi(-t, x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in X$.

Ejemplo 2.1. Considere la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{x} = x(x-1)(x-2)^2(x-3)$$

sobre el intervalo compacto $X = [0, 3]$. Las soluciones $\varphi(t, x)$ de esta ecuación con $\varphi(0, x) = x$ son únicas y existe para todo $t \in \mathbb{R}$. Por tanto ellos definen un sistema dinámico $\phi : \mathbb{R} \times [0, 3] \rightarrow [0, 3]$ a través de $\phi(t, x) = \varphi(t, x)$. Los conjuntos límite de este sistema son de la siguiente forma: para puntos $x \in [0, 3]$ tenemos:

$$\omega(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{para } x = 0, \\ \{1\} & \text{para } x \in (0, 2), \\ \{2\} & \text{para } x \in [2, 3), \\ \{3\} & \text{para } x = 3. \end{cases}$$

Ejemplo 2.2. Consideremos el sistema dinámico en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, dado por la ecuación diferencial en su forma polar para $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$, y $a \neq 0$

$$\dot{r} = 1 - r, \quad \dot{\theta} = a$$

Para cada $x \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ el ω -límite, $\omega(x) = S^1 = \{(r, \theta), r = 1, \theta \in [0, 2\pi)\}$. El espacio estado $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ no es compacto, y el conjunto α -límite existe sólo si $y \in S^1$, para el cual tenemos $\alpha(y) = S^1$.

Definición 2.6. Un flujo sobre un espacio métrico X se dice topológicamente transitivo si existe algún $x \in X$ tal que $\omega(x) = X$;

Definición 2.7. Un flujo sobre un espacio métrico X se dice topológicamente mixing si para cualquiera dos conjuntos abiertos $V_1, V_2 \subset X$ existe $T > 1$ tal que

$$V_1 \cdot (-T) \cap V_2 \neq \emptyset.$$

Proposición 2.1. Si un flujo sobre un espacio métrico completo es topológicamente mixing, entonces es topológicamente transitiva y $\{x \in X, \omega(x) = X\}$ es residual, es decir, contiene una intersección contable de subconjuntos abiertos y densos.

Demostración. Topológicamente mixing implica que para dos conjuntos abiertos cualesquiera $V_1, V_2 \subset V$ existe una sucesión $t_k \rightarrow \infty$ tales que

$$V_1 \cdot (-t_k) \cap V_2 \neq \emptyset.$$

Así, para todo abierto $V \subset X$ el conjunto $\bigcup_{t \geq 0} V \cdot (-t)$ es denso en X , puesto que de otro modo podría existir conjuntos abiertos V_1 y V_2 con $(\bigcup_{t \geq 0} V_1 \cdot (-t)) \cap V_2 = \emptyset$. Ahora, para $m, n \in \mathbb{N}$ y un base contable V_n de la topología, y los conjuntos $V_n \cdot (-m)$ son abiertos. Entonces, los conjuntos

$$X_{m,n} := \bigcup_{t \geq m} V_n \cdot (-t) = \bigcup_{t \geq 0} (V_n \cdot (-m)) \cdot (-t)$$

son abiertos y densos. Por tanto, por el teorema de Baires (Teorema 1.1), la intersección $\bigcap_{m,n \in \mathbb{N}} X_{m,n}$ es no vacío. Afirmamos que para todo x en este conjunto $\omega(x) = X$. Es suficiente mostrar que la clausura de todo conjunto base V_n tiene intersección no vacía con $\omega(x)$. Claramente, $x \in \bigcap_{m,n \in \mathbb{N}} X_{m,n} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{t \geq m} V_n \cdot (-t)$. Esto muestra que $x \cdot t_m \in V_n$ para una sucesión $t_m \rightarrow \infty$. \square

Definición 2.8. Un flujo ϕ sobre un espacio métrico X tiene dependencia sensitiva en las condiciones iniciales si existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ y toda vecindad N de x existen $y \in N$ y $T > 0$ tal que $d(y \cdot t, x \cdot t) > \delta$

Proposición 2.2. Considere un flujo ϕ sobre un espacio métrico X que no es una órbita periódica. Si el flujo es topológicamente transitivo y tiene un subconjunto denso de puntos periódicos, entonces tiene dependencia sensitiva en los puntos iniciales.

Demostración. Primero observe que existe un número $\delta_0 > 0$ tal que para todo $x \in X$ existe un punto periódico $q \in X$ cuya órbita está a una distancia menor que $\frac{\delta_0}{2}$ de la órbita de x . De hecho, eligiendo dos puntos periódicos arbitrarios q_1 y q_2 con órbitas disjuntas $q_1 \cdot \mathbb{R}$ y $q_2 \cdot \mathbb{R}$. Si $\delta_0 > 0$ denota la distancia entre los conjuntos compactos $q_1 \cdot \mathbb{R}$ y $q_2 \cdot \mathbb{R}$, entonces por la desigualdad triangular, todo punto $x \in X$ está a una distancia menor que $\frac{\delta_0}{2}$ de una de las dos órbitas periódicas elegidas. Mostraremos que ϕ tiene dependencia sensitiva en las condiciones iniciales con constante de sensibilidad $\delta = \frac{\delta_0}{8}$.

Sea x un punto arbitrario en X y sea N alguna vecindad de x . Puesto que los puntos periódicos de ϕ son densos, existe un punto periódico $p \in U = N \cap B_\delta(x)$ donde $B_\delta(x)$ es la bola abierta de radio δ con centro x . Si T denota el periodo de p , existe un punto periódico $q \in X$ cuya órbita está a una distancia menor que 4δ de x . Sea el conjunto

$$V = \bigcap_{0 \leq t \leq T} (B_\delta(q \cdot t) \cdot (-t)).$$

Por la dependencia continua sobre las condiciones iniciales, el conjunto V es abierto y no vacío porque $q \in V$. Consecuentemente, puesto que ϕ es topológicamente transitivo, existe y en U y $\tau > 0$ tal que $y \cdot \tau \in V$.

Ahora sea j un entero par de $\frac{T}{\tau} + 1$. Entonces, $0 \leq jT - \tau \leq T$ y por construcción se tiene

$$y \cdot (jT) = (y \cdot \tau) \cdot (jT - \tau) \in V \cdot (jT - \tau) \subset B_\delta(q \cdot (jT - \tau))$$

Ahora, $p \cdot (jT) = p$ por la desigualdad triangular $d(p \cdot (jT), y \cdot (jT)) = d(p, y \cdot (jT)) \geq d(x, q \cdot (jT - \tau)) - d(q \cdot (jT - \tau), y \cdot (jT)) - d(p, x)$. Consecuentemente, como $y \cdot (jT) \in B_\delta(q \cdot (jT - \tau))$, se tiene $d(p \cdot (jT), y \cdot (jT)) > 4\delta - \delta - \delta = 2\delta$. Así, nuevamente usando la desigualdad triangular se obtiene, $d(x \cdot (jT), y \cdot (jT)) > \delta$ ó $d(x \cdot (jT), p \cdot (jT)) > \delta$. En este caso, hemos encontrado un punto en N cuya imagen después de un tiempo jT es mayor que la distancia δ de la imagen de x . \square

2.2. Descomposición de Morse y Atractores

El comportamiento global de flujos sobre espacios métricos compactos pueden ser descritos a través de la descomposición de Morse, los cuales son una colección especial de subconjuntos compactos invariantes.

2.2.1. Conjuntos Invariantes

Los conjuntos invariantes se caracterizan porque, por definición, si contiene a un punto x_0 entonces contiene a toda la órbita de x_0 .

Definición 2.9. *Un conjunto $K \subset X$ se dice **invariante**, si $x \cdot \mathbb{R} \subset K$ para todo $x \in K$.*

Observación 2.3. Se observa que $K \subset X$ es invariante si y sólo si $x \cdot \mathbb{R} = K$ para todo $x \in K$.

En efecto: $\phi(-t, K) \subset K$ para todo t real, implica que $\phi(t, \phi(-t, K)) \subset \phi(t, K)$ para todo t real. Entonces $K = \phi(0, K) = \phi(t, \phi(-t, K)) \subset \phi(t, K) \subset K$. Entonces $K = \phi(t, K)$ para todo t real.

Ejemplo 2.3. Los puntos fijos son ejemplos fundamentales de conjuntos invariantes. Los conjuntos invariantes para el sistema dinámico del ejemplo 2.1, son los conjuntos de la forma $\{x^*\}$, donde x^* es un punto fijo, todos los intervalos cerrados con puntos fijos en la frontera, y la unión disjunta de dos de este tipo.

Para estudiar la estructura del flujo cerca de un conjunto invariante K , analizamos las trayectorias en una vecindad pequeña de K . Por lo tanto, es crucial encontrar una vecindad de K que no contenga otro conjunto invariante.

Definición 2.10. *un subconjunto compacto $K \subset X$ se dice **invariante aislado**, si es invariante y existe una vecindad N de K , es decir, un conjunto N con $K \subset \text{int}N$, tales que $x \cdot \mathbb{R} \subset N$ para todo $t \in \mathbb{R}$ implica $x \in K$. Así un conjunto invariante K es aislado si toda trayectoria que permanece cerca de K en realidad pertenece a K .*

Ejemplo 2.4. Consideremos sobre el intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{x} = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{\pi}{x}) & \text{para } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{para } x = 0. \end{cases}$$

Conjuntos invariantes para el flujo asociado incluye nuevamente conjuntos de la forma $\{x^*\}$, donde x^* es un punto fijo. Pero el conjunto $\{0\}$ no es invariante aislado: pues si $U(0, \epsilon)$ es una ϵ -vecindad de 0 en $[0, 1]$, entonces existe $x \in U(0, \epsilon)$ con $\sin(\frac{\pi}{x}) = 0$, es decir, x es un punto fijo y por tanto $\phi(t, x) = x \in U(0, \epsilon)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

2.2.2. Descomposición de Morse

Dado un conjunto invariante K a menudo puede ser descompuesto en una colección de conjuntos invariantes aislados $\{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n\}$. Si podemos asignar un ordenamiento parcial a los conjuntos componentes que en algún sentido, conserva la acción del flujo de las componentes individuales nos referimos a $\{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n\}$ como una descomposición de Morse y cada \mathcal{M}_i como un conjunto de Morse. Un conjunto invariante puede tener muchas descomposiciones de Morse.

Definición 2.11. *Una descomposición de Morse de un flujo ϕ sobre un espacio métrico compacto X es una colección finita $\{\mathcal{M}_i, i = 1, \dots, n\}$ de conjuntos no vacíos, disjuntos dos a dos, y compactos invariantes aislados tal que:*

- (i) $\forall x \in X; \alpha(x), \omega(x) \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{M}_i$
- (ii) *Si existen $\mathcal{M}_{j_0}, \mathcal{M}_{j_1}, \dots, \mathcal{M}_{j_l}$ y $x_0, x_1, \dots, x_l \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathcal{M}_i$ con $\alpha(x_i) \subset \mathcal{M}_{j_{i-1}}$ y $\omega(x_i) \subset \mathcal{M}_{j_i}$ para $i = 1, 2, \dots, l$; entonces $\mathcal{M}_{j_0} \neq \mathcal{M}_{j_l}$*

Los elementos de una descomposición de Morse son llamados conjuntos de Morse.

Ejemplo 2.5. Consideremos el sistema Figura 2.1 En este caso $X = [2, 8]$ es un conjunto invariante. La descomposición de Morse de X es $\mathcal{M} = \{\{2\}, \{4\}, \{6\}, \{8\}\}$, donde los conjuntos de Morse son puntos fijos. Además, si analizamos vecindades pequeñas al rededor de 4, 8 vemos que las trayectorias se están moviendo en tales regiones. Recíprocamente, trayectorias están dejando vecindades de 2 y 6. Notemos que $\mathcal{N} = \{[2, 6], \{8\}\}$ es también una descomposición de Morse y que todas las trayectorias están dejando vecindades del conjunto de Morse $[2, 6]$. Además, todas las trayectorias están ingresando a 8.

Dado una descomposición de Morse el comportamiento cualitativo del flujo es determinado por la naturaleza de los conjuntos de Morse individuales y como los conjuntos de Morse interactúan. Por ejemplo el comportamiento cualitativo de \mathcal{N} está caracterizado de la siguiente manera:

1. Todas las trayectorias dejan las pequeñas vecindades de $[2, 6]$.
2. Todas las trayectorias entran en las pequeñas vecindades de $\{8\}$.
3. Trayectorias dejan vecindades de $[2, 6]$ y llegan a $\{8\}$.

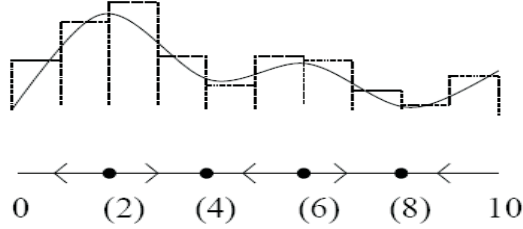


Figura 2.1: Flujo sistema lineal

Es importante notar que el comportamiento depende de la descomposición de Morse.

Así, los conjuntos de Morse contienen todos los puntos límite y los ciclos no están permitidos. Como una consecuencia sencilla de la definición 2.11 obtenemos la siguiente caracterización equivalente:

Proposición 2.3. *Una colección finita $\{\mathcal{M}_i, i = 1, \dots, n\}$ no vacía, disjuntos dos a dos, y compactos invariantes aislados es una descomposición de Morse si y sólo si la condición (i) de la Definición 2.11 sostiene, $\alpha(x) \cup \omega(x) \subset \mathcal{M}_i$ implica que $x \in \mathcal{M}_i$ y satisface la relación " \preceq " de orden (reflexiva, antisimétrica y transitiva):*

$$\mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}_k \text{ si existe } \mathcal{M}_{j_0} = \mathcal{M}_i, \mathcal{M}_{j_1}, \dots, \mathcal{M}_{j_l} = \mathcal{M}_k \text{ y } x_0, x_1, \dots, x_l \in X \\ \text{con } \alpha(x_{j_k}) \subset \mathcal{M}_{j_{k-1}} \text{ y } \omega(x_{j_k}) \subset \mathcal{M}_{j_k} \text{ para } k = i, \dots, l.$$

Enumeramos los conjuntos de Morse de tal manera que que si $\mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}_j$ entonces $i \leq j$.

Demostración. La condición (ii) en la Definición 2.11 es equivalente a la característica indicada de los conjuntos límite y la propiedad antisimétrica de la relación de orden " \preceq ". La transitividad es clara y la reflexividad se sigue de la descripción de flujo a través de la invariancia de los conjuntos de Morse. La enumeración siempre es posible, pero no necesariamente es única. \square

Ejemplo 2.6. Consideremos el sistema dinámico discutido en el Ejemplo 2.1. Este flujo tiene la siguiente descomposiciones de Morse $[1, 3] \preceq \{0\}$, $\{0\} \succeq \{1\} \preceq [2, 3]$, $\{0\} \succeq [1, 2] \preceq \{3\}$, $\{1\} \preceq \{0\} \cup [2, 3]$, y otros.

Note que $i < j$ no implica $\mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}_j$ y esto no implica la existencia de $x \in X$ con $\alpha(x) \subset \mathcal{M}_i$ y $\omega(x) \subset \mathcal{M}_j$. La descomposición de Morse describe el flujo a través de sus movimientos de los conjuntos de Morse con índices bajos hacia los conjuntos de Morse con índices altos.

Definición 2.12. Una descomposición de Morse $\{\mathcal{M}_i, i = 1, \dots, l\}$ es más fina que la descomposición de Morse $\{\mathcal{N}_j, j = 1, \dots, n\}$, si para todo \mathcal{M}_i existe un índice $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{N}_j$.

Ejemplo 2.7. Consideremos el sistema dinámico del ejemplo 2.5. La descomposición de Morse $\mathcal{M} = \{\{2\}, \{4\}, \{6\}, \{8\}\}$ es más fina que la descomposición de Morse $\mathcal{N} = \{[2, 6], \{8\}\}$.

Observación 2.4. Dados dos descomposiciones de Morse $\{\mathcal{M}_i, i = 1, \dots, l\}$ y $\{\mathcal{N}_j, j = 1, \dots, n\}$, la intersección de estos define una descomposición de Morse

$$\{\mathcal{M}_i \cap \mathcal{N}_j : \mathcal{M}_i \cap \mathcal{N}_j \neq \emptyset; i, j\}.$$

Note que en general, cualquier intersección finita de descomposiciones de Morse no define una descomposición de Morse. En particular, no necesariamente existe una descomposición fina de Morse, un ejemplo sencillo de esto es el Ejemplo 2.4.

La intersección de todas las descomposiciones de Morse para un flujo no necesariamente son un conjunto contable. Puede formar un conjunto de Cantor. Si existe una descomposición fina de Morse, este es único.

Ejemplo 2.8. El sistema dinámico del Ejemplo 2.1. Tiene una única descomposición fina de Morse $\{0\} \succeq \{1\} \preceq \{2\} \preceq \{3\}$.

Ejemplo 2.9. Consideremos el sistema dinámico definido en 2.4. Las descomposiciones de Morse del flujo asociado son los conjuntos

$$M^n := \left\{ \left\{ \frac{1}{n} \right\}, \left[0, \frac{1}{1+n} \right] \cup \left[\frac{1}{1-n}, 1 \right] \right\}, \text{ para } n \in \mathbb{N}$$

Note que $\bigcap M^n = \left\{ \{0\}, \left\{ \frac{1}{n} \right\} \text{ para } n \in \mathbb{N} \right\}$ no es una descomposición de Morse. El sistema no tiene una descomposición fina de Morse, puesto que todos los conjuntos individuales $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ para $n \in \mathbb{N}$ tendrían que estar incluidos como conjuntos de Morse.

Así, una descomposición de Morse de un conjunto invariante aislado K es una colección de conjuntos invariantes aislados en K tal que todo punto en K pertenece a un conjunto de Morse o está sobre una trayectoria que conecta distintos conjuntos de Morse.

Ahora, definamos el conjunto de trayectorias que unen dos conjuntos de Morse.

Definición 2.13. *Dados dos conjuntos de Morse, \mathcal{M}_i y \mathcal{M}_j de un conjunto invariante aislado K , el conjunto de conexión de órbitas entre \mathcal{M}_i y \mathcal{M}_j está dado por:*

$$\mathcal{C}(\mathcal{M}_j, \mathcal{M}_i; K) = \{x \in K : \omega(x) \in \mathcal{M}_i \text{ y } \alpha(x) \in \mathcal{M}_j\} \quad (2.2.1)$$

2.2.3. Caracterización de una Descomposición de Morse via Sucesiones Atractor-Repulsor

En esta sección se presenta el teorema 2.2, que muestra que podemos construir una descomposición de Morse $\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_n\}$ a través de una sucesión estrictamente creciente de atractores $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n = X$ y sus complementarios repulsores $X = A_0^* \supset A_1^* \supset A_2^* \supset \dots \supset A_n^* = \emptyset$.

Definición 2.14. *Para un flujo sobre un espacio métrico compacto X*

- *Un conjunto compacto invariante A es un **atractor** si admite una vecindad N (llamada vecindad atractor) tal que $\omega(N) = A$.*
- *Un **repulsor** es un conjunto compacto invariante R que tiene una vecindad N^* con $\alpha(N^*) = R$.*

Observación 2.5. (a) El conjunto vacío es considerado como un atractor.

(b) Todo atractor es compacto e invariante, y un repulsor es un atractor para el flujo con tiempo inverso.

(c) Si A es un atractor en X y $Y \subset X$ es un conjunto compacto invariante, entonces $A \cap Y$ es un atractor para el flujo restringido a Y .

Ejemplo 2.10. Para el sistema dinámico discutido en Ejemplo 2.1. El sistema tiene además del conjunto \emptyset y el espacio $[0, 3]$, tres atractores, $\{1\}$, $[1, 2]$ y $[1, 3]$. Análogamente, los repulsores no triviales del sistema son: $\{0\}$, $[2, 3]$, $\{3\}$, $\{0\} \cup [2, 3]$, y $\{0\} \cup \{3\}$.

Ejemplo 2.11. Consideremos el espacio métrico completo S^1 , la esfera 1-dimensional, el cual aquí identificaremos por $\frac{R}{2\pi}$. Sobre S^1 la ecuación diferencial

$$\dot{x} = \sin^2(x)$$

define un sistema dinámico. Para este flujo los únicos atractores son \emptyset y S^1 : Sea $A \subset S^1$ un atractor, existe una vecindad $N(A)$ con $\omega(N) = A$. Para cada punto $x \in S^1$ el conjunto límite $\omega(x)$ contiene al menos uno de los dos puntos fijos 0 o π , lo cual implica que cada atractor tiene que contener al menos uno de los dos puntos fijos. Consideremos el punto π y sea $N(\pi)$ cualquier vecindad. Tenemos $[0, \pi] \subset \omega(N) \subset A$. Repitiendo este argumento para el punto fijo 0 , vemos que $[0, \pi] \subset A$, y por lo tanto $A = S^1$.

Lema 2.1. Para toda *vecindad – atractor* N de un atractor A existe un tiempo $t^* > 0$ con $cl(N \cdot [t^*, \infty)) \subset int(N)$

Demostración. Podemos asumir que N es cerrado, entonces existen $t_n \rightarrow \infty$ y $x_n \in N$ con $x_n \cdot t_n \notin int(N)$ tal que $x_n \cdot t_n$ converge a algún elemento $x \notin int(N)$. Esto contradice la suposición $\omega(N) = A$. \square

Lema 2.2. Para un atractor A , el conjunto

$$A^* = \{x \in X, \omega(x) \cap A = \emptyset\}$$

es un repulsor, llamado el complemento repulsor. Entonces, (A, A^*) es llamado el par *atractor – repulsor*.

Demostración. Sea N una *vecindad – atractor* compacto de A . Elegimos $t^* > 0$ tal que $cl(N \cdot [t^*, \infty)) \subset N$ y definimos el conjunto abierto V por

$$V = X \setminus cl(N \cdot [t^*, \infty)).$$

Entonces, $X = N \cup V$ y $V \cdot (-\infty, -t^*] \subset X \setminus N \subset V$ por lo tanto, V es una vecindad de $\alpha(V) \subset X \setminus N \subset V$ y así, $\alpha(V)$ es un repulsor. Además, por invarianza $\alpha(V) \subset A^*$ la inclusión inversa se sigue, porque A es invariante aislado. \square

Observación 2.6. Note que A y A^* son disjuntos. Existe siempre el par *atractor – repulsor* trivial $A = X$ y $A^* = \emptyset$.

Ejemplo 2.12. Consideremos nuevamente el sistema dinámico discutido en los Ejemplos 2.1 y 2.10. Los pares no triviales *atractor – repulsor* son $A_1 = \{1\}$ con $A_1^* = \{0\} \cup [2, 3]$, $A_2 = [1, 2]$ con $A_2^* = \{0\} \cup \{3\}$, y $A_3 = [1, 3]$ con $A_3^* = \{0\}$.

Una consecuencia es la siguiente proposición, en particular, en sistemas con tiempo inverso el complemento repulsor de A^* es A .

Proposición 2.4. *Si (A, A^*) es un par atractor – repulsor y $x \notin A \cup A^*$, entonces $\alpha(x) \subset A^*$ y $\omega(x) \subset A$.*

Demostración. Por la definición de A^* se sigue que $\omega(x) \cap A \neq \emptyset$. Así existe $t_0 > 0$ con $x \cdot t_0 \in N$, donde N es una vecindad del atractor A con $\omega(N) = A$. Por lo tanto no existe un punto $y \in \omega(x) \setminus A$, y así $\omega(x) \subset A$. Ahora suponemos que existe un $y \in \alpha(x) \setminus A^*$. Así, por definición de A^* uno tiene $\omega(y) \cap A \neq \emptyset$. Usando dependencia continua sobre el valor inicial se tiene que existe $t_n \rightarrow \infty$ con $x \cdot (-t_n) \rightarrow A$, y entonces para un n suficientemente grande, $x \cdot (-t_n) \in N$. Claramente $x \cdot (-t_n) \cdot t_n \rightarrow n$ y por tanto $\omega(x) = A$ implica que $x \in A$, contradiciendo la elección de x . Así, $\alpha(x) \subset A^*$. \square

Trayectorias que se inician en una vecindad de un atractor dejan la vecindad en tiempo inverso.

Lema 2.3. Para un flujo sobre un espacio métrico X , un conjunto compacto invariante A es un atractor si y sólo si existe una vecindad compacta N de A tal que $x \cdot (-\infty, 0] \not\subset N$ para todo $x \in N \setminus A$.

Demostración. La condición necesaria es clara porque $x \cdot (-\infty, 0] \subset N$ implica $x \in \omega(N)$. Recíprocamente, sea N una vecindad compacta de A tal que $x \cdot (-\infty, 0] \not\subset N$ para todo $x \in N \setminus A$. Así existe un $t^* > 0$ tal que $x \cdot [-t^*, 0] \not\subset N$ para todo $x \in N \setminus cl(X \setminus N)$. Ahora elegimos una vecindad V de A tal que $V \cdot [0, t^*] \subset N$. Entonces $V \cdot [0, \infty) \subset N$ y por tanto $\omega(N) = A$ y A es un atractor. \square

Esto implica la siguiente caracterización del par *atractor – repulsor*.

Lema 2.4. Sea $(x, t) \mapsto x \cdot t$ un flujo sobre el espacio métrico compacto X . Entonces, el par A, A^* de conjuntos disjuntos, compactos e invariantes es un par *atractor – repulsor* si y sólo si

- (i) $x \in X \setminus A^*$ implica $x \cdot [0, \infty) \cap N \neq \emptyset$ para toda vecindad N de A y

(ii) $x \in X \setminus A$ implica $x \cdot (-\infty, 0] \cap N^* \neq \emptyset$ para toda vecindad N^* de A^* .

Demostración. Ciertamente, las condiciones (i) y (ii) son necesarias. Recíprocamente, suponemos que (i) se cumple y sea W una vecindad compacta de A con $W \cap A^* = \emptyset$. Entonces (ii) implica que $x \cdot (-\infty, 0] \setminus W$ para todo $x \in W \setminus A$. Por el Lema 2.3 esto implica que A es un atractor. Además, se sigue de (i) que $\omega(x) \cap A \neq \emptyset$ para todo $x \in X \setminus A^*$. Por lo tanto $A^* = \{x \in X, \omega(x) \cap A = \emptyset\}$ es el repulsor complementario de A . \square

El siguiente resultado caracteriza la descomposición de Morse via sucesiones *atractor–repulsor*.

Teorema 2.2. *Para un flujo sobre un espacio métrico compacto X una colección finita de subconjuntos $\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_n\}$ define una descomposición de Morse si y sólo si existe una sucesión estrictamente creciente de atractores*

$$\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n = X$$

tal que

$$\mathcal{M}_{n-i} = A_{i+1} \cap A_i^* \text{ para } 0 \leq i \leq n-1$$

Demostración. .

\Rightarrow) Suponemos que $\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_n\}$ es una descomposición de Morse. Definamos una sucesión creciente de conjuntos invariantes $A_0 = \emptyset$ y para $1 \leq k \leq n$ A_k como

$$A_k = \{x \in X, \omega^*(x) \subset \mathcal{M}_n \cup \mathcal{M}_{n-1} \cup \dots \cup \mathcal{M}_{n-(k-1)}\}$$

mostraremos que $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n = X$ es una sucesión de atractores tal que $\mathcal{M}_{n-i} = A_{i+1} \cap A_i^*$ para $0 \leq i \leq n-1$.

Paso 1: Los conjuntos A_k son cerrados.

Como X es compacto, entonces es claro que $A_n = X$ es cerrado. Ahora procediendo inductivamente asumimos que A_{k+1} es cerrado. Probaremos que A_k es cerrado. Sea $x_m \in A_k$ con $x_m \rightarrow x \in X$. Entonces $x \in A_{k+1}$, puesto que $A_k \subset A_{k+1}$ y A_{k+1} es cerrado. Afirmamos que $\omega^*(x) \subset \mathcal{M}_n \cup \mathcal{M}_{n-1} \cup \dots \cup \mathcal{M}_{n-(k-1)}$, y por tanto $x \in A_k$.

Ahora puesto que $\omega^*(x) \subset A_j$ para algún j (por nuestra suposición), necesariamente tenemos por $\omega^*(x) \subset A_{k+1}$ que $\omega^*(x) \subset \mathcal{M}_n \cup \mathcal{M}_{n-1} \cup \dots \cup \mathcal{M}_{n-(k-1)} \cup \mathcal{M}_{n-k}$. Consecuentemente ocurre, o $\omega^*(x) \subset \mathcal{M}_n \cup \mathcal{M}_{n-1} \cup \dots \cup \mathcal{M}_{n-(k-1)}$ en este caso estaría demostrado, o bien $\omega^*(x) \subset \mathcal{M}_{n-k}$. Para ver que este último caso no ocurre, sea V una vecindad abierta de \mathcal{M}_{n-k} tal que $V \cap \mathcal{M}_j = \emptyset$ para $j \neq n-k$. Como $\omega(x)^* \subset \mathcal{M}_{n-k}$, existen una sucesión $t_\nu \rightarrow \infty$ y $z \in \mathcal{M}_{n-k}$ tal que $x \cdot (-t_\nu) \in V$ y $d(x \cdot (-t_\nu), z) \leq \nu^{-1}$ para todo $\nu \geq 1$. Por tanto para todo ν existe un $m_\nu \geq \nu$ tal que $x_{m_\nu} \cdot (-t_\nu) \in V$ y $d(x_{m_\nu} \cdot (-t_\nu), z) \leq 2\nu^{-1}$. Porque $\omega(x_i) \cup \alpha(x_i) \subset \mathcal{M}_n \cup \dots \cup \mathcal{M}_{n-k+1}$ para todo i , existen $\tau_\nu < t_\nu < \sigma_\nu$ tales que $x_{m_\nu} \cdot (-\sigma_\nu)$ y $x_{m_\nu} \cdot (-\tau_\nu) \in \partial V$ y $x_{m_\nu} \cdot (-t) \in clV$ para todo $t \in [\tau_\nu, \sigma_\nu]$. La invarianza de \mathcal{M}_{n-k} implica que $t_\nu - \sigma_\nu \rightarrow \infty$ como $\nu \rightarrow \infty$. Podemos asumir que existe $y \in \partial V$ con $x_{m_\nu} \cdot (\sigma_\nu) \rightarrow y$ para $\nu \rightarrow \infty$. Entonces se sigue que $y \cdot [0, \infty) \subset clV$ y por tanto por la elección de V uno tiene $\omega(y) \subset \mathcal{M}_{n-k}$. Porque A_{k+1} es cerrado e invariante, tenemos $y \in A_{k+1}$ y así $\alpha(y) \subset \mathcal{M}_n \cup \dots \cup \mathcal{M}_{k-n}$. La ordenación de los conjunto de Morse implica que $y \in \mathcal{M}_{n-k}$, contradiciendo $y \in \partial V$.

Paso 2: A_k es un atractor.

Si A_k no es un atractor, por el lema 2.3 para toda vecindad compacta N de A_k existe $x \in N \setminus A_k$ con $x \cdot (\infty, 0] \subset N$. Entonces existe $j \geq n - (k-1)$ con $\omega^*(x) \subset \mathcal{M}_j$. Por otra parte $x \notin A_k$ implica que $\omega^*(x) \not\subset \mathcal{M}_n \cup \mathcal{M}_{n-1} \cup \dots \cup \mathcal{M}_{n-(k-1)}$, por tanto $\omega^*(x) \in \mathcal{M}_i$ para algún $i < n - (k-1)$. Una contradicción, lo cual implica que el conjunto A_k es un atractor.

Paso 3: $\mathcal{M}_{n-i} = A_{i+1} \cap A_i^*$

Primeramente, si $x \in \mathcal{M}_{n-i}$ entonces $x \in A_{i+1}$, lo cual implica que $\mathcal{M}_{n-i} \subset A_{i+1}$. Supongamos que $x \notin A_i^*$, entonces $\omega(x) \cap A_i \neq \emptyset$, implica que $\omega(x) \in A_i$ y por lo tanto $\omega(x) \subset \mathcal{M}_j$ para $j > n - i$. Una contradicción, lo cual implica que $x \in A_i^*$, y por tanto $\mathcal{M}_{n-i} \subset A_{i+1} \cap A_i^*$.

Recíprocamente, si $x \in A_{i+1} \cap A_i^*$, entonces $x \in A_{i+1} \wedge x \in A_i^*$. Si $x \in A_{i+1}$, entonces $\omega(x) \subset \mathcal{M}_n \cup \mathcal{M}_{n-1} \cup \dots \cup \mathcal{M}_{n-i}$ y para $x \in A_i^*$ por el lema B.2.11

implica que

$$\omega(x) \cap (\mathcal{M}_n \cup \mathcal{M}_{n-1} \cup \dots \cup \mathcal{M}_{n-(i-1)}) \subset \omega(x) \cap A_i = \emptyset$$

y por tanto $\omega(x) \subset \mathcal{M}_n \cup \mathcal{M}_{n-1} \cup \dots \cup \mathcal{M}_{n-i}$. Ahora la definición de una descomposición de Morse implica que $x \in \mathcal{M}_{n-i}$.

\Leftarrow) En forma recíproca, sea el conjunto $\{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n\}$ definida por una sucesión de atractores

$$\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n = X$$

como

$$\mathcal{M}_{n-i} = A_{i+1} \cap A_i^* \text{ para } 0 \leq i \leq n-1$$

Paso 1: Los conjuntos de Morse son compactos e invariantes.

La compacidad de los conjuntos \mathcal{M}_{n-i} se sigue de la compacidad de los conjuntos atractores A_{i+1} y repulsores A_i^* . Y la invarianza de \mathcal{M}_{n-i} se sigue por la invarianza de los conjuntos atractores A_{i+1} y repulsores A_i^* .

Paso 2: Los conjuntos de Morse son disjuntos dos a dos. Si $i < j$, entonces

$$\mathcal{M}_{n-i} \cap \mathcal{M}_{n-j} = A_{i+1} \cap A_i^* \cap A_{j+1} \cap A_j^* = A_{i+1} \cap A_j^* \subset A_j \cap A_j^* = \emptyset$$

.

Paso 3: Para $x \in X$, entonces o $x \cdot \mathbb{R} \subset \mathcal{M}_j$ para cualquier conjunto de Morse \mathcal{M}_j , o existen índices $i < j$ tal que $\omega^*(x) \subset \mathcal{M}_{n-j}$ y $\omega(x) \subset \mathcal{M}_{n-i}$. Puesto que $A_n = X = A_0^*$, existe un entero tan pequeño i tal que $\omega(x) \subset A_i$, y existe un entero muy grande j tal que $\omega^*(x) \subset A_j$. Claramente $i > 0$ y $j < n$.

Ahora, $\omega(x) \not\subset A_{i-1}$, es decir, $x \in A_{i-1}^*$. Así por la invarianza de A_{i-1} tenemos que $x \cdot \mathbb{R} \subset A_{i-1}^*$ y $\omega(x) \subset A_{i-1}^*$. Por otra parte, $\omega^*(x) \not\subset A_{j+1}^*$ y afirmamos que $x \cdot \mathbb{R} \subset A_{j+1}$. En efecto, de otra manera $x \cdot t \notin A_{j+1}$ para algún $t \in \mathbb{R}$. Si ahora $x \cdot t \notin A_{j+1}^*$, entonces $\omega(x)^* \subset A_{j+1}^*$, una contradicción, así $x \cdot t \in A_{j+1}^*$ y así $\omega(x) \subset A_{j+1}^*$, nuevamente una contradicción. Por tanto $x \cdot \mathbb{R} \subset A_{j+1}$.

Ahora $j \geq i-1$, porque de otra manera $j+1 \leq i-1$ y así $A_{j+1} \subset A_{i-1}$, lo cual implica que $x \cdot \mathbb{R} \subset A_{i-1}^* \cap A_{i-1} = \emptyset$. Si $j = i-1$, entonces $x \cdot \mathbb{R} \subset A_{i-1}^* \cap A_i = \mathcal{M}_{n-i-1}$. Si $j > i-1$, entonces $\omega(x) \subset A_{i-1}^* \cap A_{j+1} \subset A_{i-1} \cap A_i = \mathcal{M}_{n-i-1}$ y $\omega^*(x) \subset A_j^* \cap A_{j+1} = \mathcal{M}_{n-j}$. Esto prueba la afirmación. \square

Corolario 2.1. Sea $\{\mathcal{M}_i, i = 1, \dots, n\}$ una descomposición fina de Morse de un flujo sobre un espacio métrico compacto, con orden \preceq . Entonces los conjuntos de Morse máximos (con respecto a \preceq), son atractores, y los conjuntos de Morse mínimos son repulsores.

Demostración. El resultado se sigue de la Proposición 2.4 y el Lema 2.3. □

Ejemplo 2.13. Ilustramos el Teorema 2.2 viendo nuevamente el Ejemplo 2.1. Para este sistema una sucesión estrictamente creciente de atractores con sus respectivos repulsores es

$$A_0 = \emptyset \subset A_1 = \{1\} \subset A_2 = [1, 2] \subset A_3 = [1, 3] \subset A_4 = [0, 3]$$

$$A_0^* = [0, 3] \supset A_1^* = \{0\} \cup [2, 3] \supset A_2^* = \{0\} \cup \{3\} \supset A_3^* = \{0\} \supset A_4^* = \emptyset.$$

La descomposición de Morse asociada es:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_4 &= A_1 \cap A_0^* = \{1\}, \\ \mathcal{M}_3 &= A_2 \cap A_1^* = \{2\}, \\ \mathcal{M}_2 &= A_3 \cap A_2^* = \{3\}, \\ \mathcal{M}_1 &= A_4 \cap A_3^* = \{0\}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.14. Consideremos el sistema dinámico definido en el ejemplo 2.14. De acuerdo con el Teorema 2.2 su única descomposición de Morse es trivial $\mathcal{M} = \{S^1\}$. Esta también puede ser visto directamente de la Definición 2.11 de la descomposición de Morse: La unión de los conjuntos de Morse necesita contener todos los conjuntos límite de los puntos individuales $x \in S^1$. En este ejemplo tenemos

$$\omega(x) = \begin{cases} \{\pi\} & \text{para } x \in (0, \pi], \\ \{0\} & \text{para } x \in (\pi, 0]. \end{cases}$$

y

$$\alpha(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{para } x \in [0, \pi), \\ \{\pi\} & \text{para } x \in [\pi, 0). \end{cases}$$

Asumimos que existen dos descomposiciones de Morse \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 , con $0 \in \mathcal{M}_1$ y $\pi \in \mathcal{M}_2$. Esto contradice la condición *no-ciclo* (ii) de la definición 2.11. Por tanto los puntos 0 y π están en el mismo conjunto de Morse y el único conjunto de Morse es $\mathcal{M} = S^1$.

2.3. Descomposición de Morse y Cadenas Recurrente

A continuación se introduce el concepto de cadena recurrente y vemos su relación con la descomposición de Morse.

Definición 2.15. Para $x, y \in X$ y $\epsilon, T > 0$ una (ϵ, T) – cadena desde x a y está dado por un número natural $n \in \mathbb{N}$, junto con los puntos

$$x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y \text{ y tiempo } T_0, T_1, \dots, T_{n-1} > T$$

tal que $d(x_i \cdot T_i, x_{i+1}) < \epsilon$ para $i = 1, \dots, n - 1$.

Definición 2.16. Un subconjunto $Y \subset X$ es **cadena transitiva** si para todo $x, y \in Y$ y todo $\epsilon, T > 0$ existe una (ϵ, T) – cadena desde x a y .

Note que no requerimos en esta definición que la considerada (ϵ, T) – cadena permanezca en Y .

Definición 2.17. Un punto $x \in X$ es **cadena recurrente** si para todo $\epsilon, T > 0$ existe una (ϵ, T) – cadena desde x a x . El **conjunto cadena recurrente** \mathcal{R} es el conjunto de todos los puntos cadena recurrente, es decir,

$$\mathcal{R} = \{x \in X, \text{ para todo } \epsilon, T > 0 \text{ existe una } (\epsilon, T) \text{ – cadena de } x \text{ a } x\} \quad (2.3.1)$$

Observación 2.7. El conjunto \mathcal{R} es cerrado e invariante. (Ver [2]).

Ejemplo 2.15. Consideremos nuevamente el sistema dinámico discutido en 2.3. Obviamente, todos los puntos fijos son puntos cadena recurrente: tomemos cualquier $t_n > 0$ y $\epsilon > 0$ y consideremos cadenas del tipo $x_n = \phi(t_n, x_{n-1})$ con $x = x_0$. En este ejemplo, no existen otros puntos con esta propiedad, el cual puede ser visto de la siguiente manera: Consideremos un punto $x \in [0, 3]$ que no sea un punto fijo y sea $\delta := \min d(x, x^*)$, donde x^* es un punto fijo. Sea $\epsilon := \frac{1}{3}\delta$ y $a = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x)$. Sea $T := \min\{t > 0, d(\phi(t, x), a) = \epsilon\}$. Fijemos ϵ, T y consideremos (ϵ, T) – cadena iniciando en $x : x_0 = x, y_1 = \phi(t, x)$ para algún $t \geq T$, entonces $d(y_1, a) \leq \epsilon$, desde que la convergencia de $\phi(t, x)$ a a es monótona. Elegimos $x_1 \in U(y_1, \epsilon)$ la ϵ – vecindad de y_1 . Entonces $d(x, x_1) > \epsilon$ y hay dos posibilidades:

- (a) $x_1 \notin \{\phi(t, x), t \geq 0\}$, en este caso $d(\{\phi(t, x_1), t \geq 0\}, x) \geq 3\epsilon$.

(b) $x_1 \in \{\phi(t, x), t \geq 0\}$, en este caso $d(\phi(t, x - 1), a) \leq \epsilon$ para todo $t \geq T$.

Repitiendo la construcción para $y_2 := \phi(t, x_1)$ para algún $t \geq T$ y $x_2 \in U(y_2, \epsilon)$ vemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se sigue que $d(x_n, x) > \epsilon$, por tanto no existe una (ϵ, T) – cadena desde x a x . La clave para este ejemplo es que las trayectorias que se inician desde x se alejan y no pueden retornar, aún usando "jumps" de tamaño ϵ , para x o $\alpha(x)$, debido a la topología del espacio $[0, 3]$. Esto es diferente en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.16. Considere el sistema dinámico definido en Ejemplo 2.11. En este caso tenemos $\mathcal{R} = S^1$: Sea $x \in S^1$ y $\epsilon, T > 0$ dados, asumimos sin pérdida de generalidad que $x \in (0, \pi]$. Desde que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = \pi$ existe $t_1 > T$ con $d(\phi(t_1, x), \pi) < \frac{\epsilon}{2}$. Tomemos $x_1 \in U(\pi, \frac{\epsilon}{2}) \cap (\pi, 0)$. Desde que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x) = 0$, $t_3 > t$ con $x_2 := \phi(-t_3, x) \in U(0, \frac{\epsilon}{2})$. Ahora, $x = x_0, x_1, x_2, x_3 = x$ es una (ϵ, T) – cadena desde x a x . De manera similar uno construye para cualquier $\epsilon, T > 0$ una (ϵ, T) – cadena desde x a y para dos puntos $x, y \in S^1$, mostrando que este sistema dinámico es cadena transitiva, y por tanto cadena recurrente sobre S^1 .

La siguiente proposición muestra que en \mathcal{R} , sólo la existencia de una cota inferior positiva para los tiempos en (ϵ, T) – cadena es importante.

Proposición 2.5. Considere $y \in \mathcal{R}$ y $x \in X$ y sea $\tau > 0$. Si para todo $\epsilon > 0$ existe una (ϵ, τ) – cadena desde x a y , entonces para todo $\epsilon, T > 0$ existe una (ϵ, T) – cadena desde x a y .

Demostración. (Ver [2]) □

Teorema 2.3. El flujo restringido a un subconjunto cadena transitiva maximal (con respecto a la inclusión de conjuntos) del conjunto cadena recurrente \mathcal{R} es cadena transitiva. En particular, el flujo restringido a \mathcal{R} es cadena recurrente.

Demostración. Sean $y, y' \in Y \subset \mathbb{R}$, donde Y es un conjunto cadena transitiva maximal en \mathbb{R} . Para todo $p \in \mathbb{N}$ existe una $(\frac{1}{p}, 1)$ -cadena en X desde y a y' , con $x_0 = y, x_1, \dots, x_{n_p} = y' \in X$ y tiempos $T_0^p, \dots, T_{n_p-1}^p \in [1, 2]$. Defina $K_p = \bigcup_{i=0}^{n_p} \{x_i \cdot [0, T_i^p]\}$. Por el teorema de Blaschke (Teorema 1.2) existe una subsucesión de K_p convergente en la métrica de Hausdorff d_H a un subconjunto compacto no vacío $K \subset X$ con $y, y' \in K$. Afirmamos que para todo $x, z \in K$ y todo $q \in \mathbb{N}$

existe una $(\frac{1}{p}, 1)$ -cadena en K con tiempos $T_0^q, \dots, T_{n_q-1}^q \in [1, 2]$ desde x a z . En particular, esto implica $K \subset Y$ y por tanto la suposición se sigue.

La afirmación es probada como sigue. El flujo es uniformemente continuo sobre el conjunto compacto $X \times [0, 2]$. Por tanto, existe un número $\delta > 0$ tal que

$$d(a, b) < \delta \text{ implica } d(a \cdot t, b \cdot t) < \frac{1}{3q}, \text{ para todo } t \in [0, 3].$$

Eligiendo $p \in \mathbb{N}$ con $p > \text{máx}\{3q, \delta^{-1}\}$ y $d_H(K_p, K) < \delta$ uno puede construir una $(\frac{1}{q}, 1)$ -cadena desde x a z en K como lo requerido. □

Proposición 2.6. *Un subconjunto cerrado Y de un espacio métrico compacto X es cadena transitiva si este es cadena recurrente y conexo. Recíprocamente, si el flujo sobre X es cadena transitiva, entonces X es conexo.*

Demostración. Suponga primero que Y es cadena recurrente y conexo. Sea $x, y \in Y$ y fijamos $\epsilon, T > 0$. Cubrimos Y con bolas de radios $\frac{\epsilon}{4}$. Por compacidad existen finitos puntos cualesquiera $y_1, \dots, y_{n-1} \in Y$ tal que para todo $z \in Y$ existe y_i con $d(z, y_i) < \frac{\epsilon}{4}$. Defina $y_0 = x$ y $y_n = y$. Puesto que Y es conexo la distancia entre los puntos y_i es acotado inferiormente por $\frac{3}{4}\epsilon$. Ahora, para cada cadena recurrente del flujo existen $(\frac{\epsilon}{4}, T)$ -cadenas desde y_i a y_{i+1} para $i = 0, 1, \dots, n-1$. Una apropiada concatenación de estas cadenas lleva a una (ϵ, T) -cadena desde x a y . Por tanto cadena transitiva se sigue.

Recíprocamente, sea un flujo sobre X una cadena transitiva. Si X no es conexo, puede ser escrito como una unión disjunta de conjuntos abiertos no vacíos V y W . Entonces estos conjuntos también son cerrados, compactos y

$$\epsilon_0 := \inf\{d(v, w), v \in V, w \in W\} > 0.$$

Por tanto para $\epsilon < \frac{\epsilon_0}{2}$ no puede existir (ϵ, T) -cadenas desde un elemento de V a un elemento de W . □

Obtenemos la siguiente caracterización de las componentes conexas de \mathcal{R} .

Teorema 2.4. *Las componentes conexas del conjunto cadena recurrente \mathcal{R} coincide con los subconjuntos cadena transitiva máxima de \mathcal{R} . Además el flujo restringido a una componente conexa de \mathcal{R} es cadena transitiva.*

Demostración. Por el Teorema 2.3 sabemos que el flujo restringido a un subconjunto cadena transitiva maximal \mathcal{R}_0 de \mathcal{R} es cadena transitiva. Por tanto, por la segunda parte de la Proposición 2.6 \mathcal{R}_0 es conexo y así contenido en una componente conexa de \mathcal{R} . Recíprocamente, la primera parte de la Proposición 2.6 implica que toda componente conexa de \mathcal{R} es cadena transitiva, porque este es cerrado, cadena recurrente y conexo, así se sigue la primera afirmación. La segunda afirmación es una consecuencia inmediata. \square

Ejemplo 2.17. Consideremos nuevamente el sistema de los Ejemplos 2.1 y 2.15. Para este ejemplo, las componentes del conjunto cadena recurrente, es decir, las componentes de cadenas recurrentes son $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$ y $\{3\}$.

Ejemplo 2.18. Un ejemplo de un flujo para el cual los conjuntos límites de puntos están estrictamente contenidos en las componentes cadenas recurrentes pueden ser obtenidos como sigue: Sea $M = [0, 1] \times [0, 1]$. Sea el flujo ϕ definido sobre M tal que todos los puntos sobre la frontera son puntos fijos, y las órbitas para puntos $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$ son líneas rectas $\phi(\cdot, (x, y)) = \{(z_1, z_2), z_1 = x, z_2 \in (0, 1)\}$ con $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \phi(t, (x, y)) = (x, \pm 1)$. Para este sistema, cada punto en el interior $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$ son de la forma $\{(x, -1)\}$, y los conjuntos ω – límite son $\{(x, +1)\}$. La única componente cadena recurrente para este sistema es $M = [0, 1] \times [0, 1]$, el cual también es el único conjunto de Morse.

El siguiente lema, el cual indica una cota superior uniforme para el tiempo total que son necesarios para conectar dos puntos en una componente cadena recurrente.

Lema 2.5. Sea \mathcal{R}_0 una componente cadena recurrente y fijemos $\epsilon, t > 0$. Entonces existe $\bar{T}(\epsilon, T) > 0$ tal que para todo $x, y \in \mathcal{R}_0$ existe una (ϵ, T) – cadena desde x a y con longitud total $\leq \bar{T}(\epsilon, T)$.

Demostración. Por hipótesis para todo $x, y \in \mathcal{R}_0$ existe una $(\frac{\epsilon}{2}, T)$ – cadena desde x a y . Usando la dependencia continua en las condiciones de sensibilidad en las iniciales y compacidad, existe finitas (ϵ, T) – cadena conectando todo $x \in \mathcal{R}_0$ con $z_0 \in \mathcal{R}_0$ fijo. También existe finitas (ϵ, T) – cadena conectando z con elementos arbitrarios $y \in \mathcal{R}_0$. Así, existe finitas (ϵ, T) – cadena conectando todos los puntos en \mathcal{R}_0 y el máximo de sus longitudes totales es la cota superior denotada por $\bar{T}(\epsilon, T)$. \square

2.4. Cadenas Recurrentes y Atractores

Procedemos a analizar la relación entre cadenas recurrentes y atractores,

Definición 2.18. Para $Y \subset X$ definimos el conjunto cadena límite

$$\Omega(Y) = \left\{ z \in X, \text{ existe } y \in Y \text{ tal que para todo } \epsilon, T > 0 \right. \\ \left. \text{ existe una } (\epsilon, T) \text{ - cadena desde } y \text{ a } z \right\} \quad (2.4.1)$$

Además, para $\epsilon, T > 0$ define

$$\Omega(Y, \epsilon, T) = \left\{ z \in X, \text{ existen } y \in Y \text{ y una } \right. \\ \left. (\epsilon, T) \text{ - cadena desde } y \text{ a } z \right\} \quad (2.4.2)$$

Observación 2.8. $\omega(Y) \subset \Omega(Y)$

Proposición 2.7. Para $Y \subset X$ el conjunto $\Omega(Y)$ es la intersección de todos los atractores conteniendo $\omega(Y)$.

Demostración. Note que $\Omega(Y) = \bigcap_{\epsilon, T > 0} \Omega(Y, \epsilon, T)$, y para todo $\epsilon, T > 0$ define $N := cl(\Omega(Y, \epsilon, T))$, entonces $\omega(Y) \subset \Omega(Y, \epsilon, T) \subset int(N)$, donde la segunda inclusión se sigue desde que $\Omega(Y) \subset N$ y es abierto. Ahora, si $z \in \omega(N)$, entonces existen $t_n \rightarrow \infty$ y $x_n \in N$ con $x_n \cdot t_n \rightarrow z$. Elegimos $n_0 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ y $p \in \Omega(Y, \epsilon, T)$ con $d(p, x_{n_0}) < \delta$, $t_{n_0} > T$, $d(x_{n_0} \cdot t_{n_0}, z) < \frac{\epsilon}{2}$ y $d(z_{n_0} \cdot t_{n_0}, x_{n_0} \cdot t_{n_0}) < \frac{\epsilon}{2}$ para todo z con $d(z, x_{n_0}) < \delta$. Como $p \in \Omega(Y, \epsilon, T)$ existe una (ϵ, T) - cadena desde algún $y \in Y$ a p y obtenemos

$$d(p \cdot t_{n_0}, z) \leq d(p \cdot t_{n_0}, x_{n_0} \cdot t_{n_0}) + d(x_{n_0} \cdot t_{n_0}, z) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Así la concatenación de cadenas produce una (ϵ, T) - cadena desde y a z .

A seguir mostraremos que $A := \omega(N)$ es un conjunto cerrado invariante con vecindad N y por tanto un atractor.

Por la invarianza de $\Omega(Y)$ tenemos $A = \omega(cl(\Omega(Y, \epsilon, T))) \supset \Omega(Y) \supset \omega(Y)$. Por otra parte tenemos que $\Omega(Y) = \omega(\Omega(Y))$ de hecho es igual a la intersección de los atractores conteniendo $\omega(Y)$.

Ahora, supongamos que A es cualquier atractor conteniendo $\omega(Y)$, V una vecindad abierta de A disjunta de A^* , $t > 0$ tal que $clV \cdot t \subset V$ y

$$0 < \epsilon < \inf\{d(y, z), y \in V \text{ y } z \notin cl(V) \cdot t\}.$$

Si $T > t$ tal que $Y \cdot T \subset clV \cdot t$, entonces toda (ϵ, T) –cadena desde Y debe terminar en V . Por lo tanto, si $\omega(x) \subset A$, también $\Omega(x) \subset A$ y así $\Omega(Y)$ es la intersección de todos los atractores conteniendo $\omega(Y)$. \square

Esta proposición implica, en particular, que un flujo cadena transitiva tiene solo el atractor trivial $A = X$, desde que para todo $Y \subset X$, $\Omega(Y) = X$.

Ejemplo 2.19. Considere nuevamente el sistema dinámico discutido en el Ejemplo 2.1. Para este sistema dinámico tenemos que para $Y \subset [0, 3]$, $\omega(Y) = \Omega(Y)$.

Obtenemos la siguiente relación entre conjunto cadenas recurrentes y atractores.

Teorema 2.5. *El conjunto cadena recurrente \mathcal{R} satisface*

$$\mathcal{R} = \bigcap \{A \cup A^*, A \text{ es un atractor}\}.$$

En particular, existe una descomposición fina de Morse $\{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n\}$ si y sólo si el conjunto cadena recurrente \mathcal{R} tiene solo finitas componentes conexas cualesquiera. En este caso, los conjuntos de Morse coincide con las componentes cadenas recurrentes de \mathcal{R} y el flujo restringido a todo conjunto de Morse es cadena transitiva y cadena recurrente.

Demostración. Si A es un atractor y $x \in X$, ocurre $\omega(x) \subset A$ ó $\omega(x) \subset A^*$. Si $x \in \mathcal{R}$, entonces, por la Proposición 2.5, x está contenido en todo atractor, el cual contiene $\omega(x)$. Por tanto $x \in A \cup A^*$. Recíprocamente, si x está en la intersección, entonces x está en todo atractor conteniendo $\omega(x)$. Por tanto $x \in \Omega(x)$, esto es $x \in \mathcal{R}$. Si existe una descomposición fina de Morse, entonces el flujo restringido a un correspondiente conjunto de Morse debe ser cadena transitiva, por tanto los conjuntos de Morse son componentes conexas de \mathcal{R} . Recíprocamente, las componentes conexas \mathcal{M}_i de \mathcal{R} definen una descomposición de Morse, porque son conjuntos invariantes aislados ordenados. De hecho, esta es una descomposición fina de Morse: Usando la caracterización de la descomposición de Morse vía el aumento de sucesiones atractores, uno ve que una descomposición fina de Morse implicaría la existencia de un atractor A tal que $A \cap \mathcal{M}_i$ es un subconjunto propio de \mathcal{M}_i para algún i y por tanto este sería un atractor del flujo restringido a \mathcal{M}_i . Esto contradice cadena transitiva de \mathcal{M}_i . \square

Ejemplo 2.20. Sea φ el flujo sobre el toro \mathbb{T}^2 en la Figura 2.2: p_0 un atractor (sumidero), p_1, p_2 sillas y p_3 un repulsor (fuente).

- Si $U_0 = \emptyset$, entonces $A_0 = \emptyset$ y $A_0^* = \mathbb{T}^2$.
- Si U_1 es una vecindad atractora de p_0 , entonces $A_1 = \{p_0\}$ y $A_1^* = \{p_3\} \cup W^s(p_2) \cup W^s(p_1)$.
- Si U_2 es un conjunto invariante(positivo) que contiene a p_0, p_1 pero no a p_2 ó p_3 , entonces $A_2 = \{p_0\} \cup W^u(p_1)$ y $A_2^* = \{p_3\} \cup W^s(p_2)$.
- Si U_3 es un conjunto invariante(positivo) que contiene a p_0 y p_2 pero no a p_1 ó p_3 , entonces $A_3 = \{p_0\} \cup W^u(p_2)$ y $A_3^* = \{p_3\} \cup W^s(p_1)$.
- Si U_4 es un conjunto tal que $\mathbb{T}^2 \setminus U_4$ es una vecindad repulsora de p_3 , entonces $A_4 = \{p_0\} \cup W^u(p_1) \cup W^u(p_2)$ y $A_4^* = \{p_3\}$.
- Finalmente, si $U_5 = \mathbb{T}^2$, entonces $A_5 = \mathbb{T}^2$ y $A_5^* = \emptyset$.

Luego tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \bigcap_{0 \leq j \leq 5} \{A_j \cup A_j^*, A \text{ es un atractor}\} \\
&= \{p_j, 0 \leq j \leq 3\} \\
&= \{p_0, p_1, p_2, p_3\}.
\end{aligned}$$

la descomposición fina de Morse es

$$\{\mathcal{M}_1 = \{p_0\}, \mathcal{M}_2 = \{p_1\}, \mathcal{M}_3 = \{p_2\}, \mathcal{M}_4 = \{p_3\}\}$$

.

Finalmente, mostramos la cadena transitiva del flujo restringido a un conjunto límite.

Proposición 2.8. *Si el flujo es topológicamente transitivo, entonces es cadena transitiva. En otras palabras, un flujo restringido a un conjunto ω -límite $\omega(x)$ con $x \in X$ es cadena transitiva.*

Demostración. Los conjuntos ω -límite son conexos, es suficiente (por la Proposición 2.4) mostrar que el flujo restringido a $\omega(x)$ es cadena recurrente. Defina un flujo $(y, t) \mapsto y \cdot t$ en $[-1, 1]$ por la ecuación $\dot{y} = 1 - y^2$. En $X \times [-1, 1]$ defina un flujo por $(x, y) \mapsto (x \cdot t, y \cdot t)$. Entonces, $Z = cl((x, 0) \cdot \mathbb{R})$ es un conjunto compacto invariante. Por el Teorema 2.5 el conjunto cadena recurrente contiene todos los

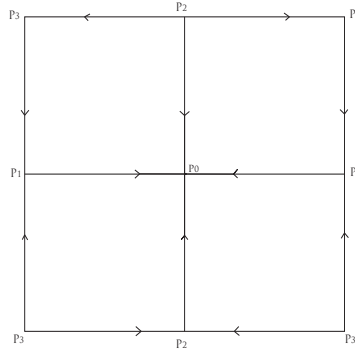


Figura 2.2: Toro

conjuntos ω -*limite*, y por tanto el conjunto cadena recurrente del flujo restringido a Z es

$$\mathcal{R}(Z) = \alpha(x) \times \{-1\} \cup \omega(x) \times \{1\}.$$

Por el Teorema 2.3 el flujo restringido a $\mathcal{R}(Z)$ es cadena recurrente y las componentes conexas de $\mathcal{R}(Z)$ son cadenas transitivas. Por tanto, el flujo restringido a $\omega(x) \times \{1\}$ y el flujo restringido a $\alpha(x)$ son cadena recurrente. \square

Capítulo 3:

Caracterización Dinámica de la Forma de Lyapunov de una Matriz

3.1. Cadenas Recurrentes, Conjugación y Equivalencia

3.1.1. Algunos Resultados en Conjugación y Equivalencia

Denotamos al espacio de campo de vectores sobre una variedad M por $\mathcal{X}(M)$. Sean $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ dos campos vectoriales C^∞ sobre una C^∞ -variedad M . Sea $h : M \rightarrow M$ una equivalencia topológica para X e Y .

Lema 3.1. Si M es compacto, entonces una conjugación topológica aplica conjuntos cadena transitiva de X sobre conjuntos cadena transitiva de Y .

Demostración. Como la función equivalente h es un homeomorfismo y M es compacto, $\forall \epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\forall z \in M$ se cumple que $B(z, \epsilon) \subset h^{-1}[B(h(z), \delta)]$ con $B(z, \epsilon) = \{y \in M : \bar{d}(z, y) < \epsilon\}$ donde \bar{d} es una métrica sobre M . Sea φ_1, φ_2 flujos sobre M con equivalencia topológica $h : \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$. Sea $N_2 \subset M$ un conjunto cadena recurrente de φ_2 , afirmamos que $N_1 := h^{-1}[N_2]$ es un conjunto cadena recurrente de φ_1 : De hecho tomemos $p_1, q_1 \in N_1$ y fijemos $\epsilon > 0, T > 0$. Considerando ξ_2 una (δ, T) -cadena de $p_2 = h(p_1)$ a $q_2 = h(q_1)$, se tiene que $h^{-1}(\xi_2) =: \xi_1$ es una (ϵ, T) -cadena de p_1 a q_1 . \square

Lema 3.2. Si M es compacto, entonces una equivalencia topológica aplica conjuntos cadena recurrentes de X sobre conjuntos cadena recurrentes de Y .

Lema 3.3. Una equivalencia topológica h aplica conjuntos invariantes sobre conjuntos invariantes.

Demostración. Se sigue directamente del hecho que h aplica órbitas en órbitas \square

3.2. Caracterización Topológica de Matrices en el Espacio Proyectivo

Espacio Proyectivo Real

Sea el espacio $\mathbb{R}^d - \{0\}$, definimos la clase de equivalencia: Sean $x, y \in \mathbb{R}^d - \{0\}$, entonces $x \sim y$ si y sólo si existe $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $y = tx$, es decir $x \sim y$ si y sólo si están sobre la misma recta pasando por el origen en \mathbb{R}^d .

Denotamos por $[x]$ la clase de equivalencia de $x \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ y por:

$$\mathbb{P}^{d-1} = \frac{\mathbb{R}^d - \{0\}}{\sim} = \{[x] : x \in \mathbb{R}^d - \{0\}\}$$

el espacio proyectivo real $(d - 1)$ -dimensional. Sea $\mathbb{P} : \mathbb{R}^d - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^{d-1}$ la proyección.

Ahora, como cada recta que pasa por el origen en \mathbb{R}^d intersecta a la esfera \mathbb{S}^{d-1} en exactamente dos puntos antipodales $\{x, -x\}$, se tiene que

$$\mathbb{P}^{d-1} = \pi(\mathbb{S}^{d-1})$$

es decir, si en \mathbb{S}^{d-1} se considera la relación de equivalencia $x \sim y$ si y sólo si $y = \pm x$ entonces

$$\mathbb{P}^{d-1} = \frac{\mathbb{S}^{d-1}}{\sim} = \{[x] : x \in \mathbb{S}^{d-1}\} = \{\{x, -x\}; x \in \mathbb{S}^{d-1}\}.$$

Considere la ecuación diferencial con tiempo invariante en \mathbb{R}^d de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t), A \in gl(d, \mathbb{R}) \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

y sea $x(t) = \varphi(\cdot, \cdot)$ su flujo lineal en \mathbb{R}^d . φ se proyecta en un flujo $\mathbb{P}\varphi$ sobre \mathbb{P}^{d-1} ,

$$\mathbb{P}\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{P}^{d-1} \rightarrow \mathbb{P}^{d-1}$$

definiendo

$$s(t) = \frac{x(t)}{|x(t)|},$$

es un punto de equilibrio de la ecuación diferencial. Inversamente, todo punto de equilibrio sobre la esfera corresponde a un autovector para un autovalor real λ . Consideremos en particular, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La proyección sobre la esfera unitaria implica que todo punto es un punto de equilibrio, por lo tanto obtenemos una sola componente de la cadena recurrente. Para una ecuación general de la forma $\dot{x} = Ax$ con $x(0) = x_0$, la suma de autoespacios generalizados correspondientes a sus autovalores con parte real (Espacios de Lyapunov) igual puede ser descrito topológicamente de la siguiente manera:

Proposición 3.1. *Sea W la suma de todos los autoespacios (reales) generalizados de A correspondientes a todos los autovalores λ_i con parte real fija. Entonces, la proyección $\mathbb{P}W$ de W sobre el espacio proyectivo es una componente de la cadena recurrente de la ecuación inducida y tal que toda componente es de esa forma.*

Demostración. Consideremos la forma de Jordan real de A : Primero observe que todos los autovalores λ con parte real igual a la suma de los autoespacios correspondientes proyectado sobre el espacio proyectivo es una cadena transitiva. Ahora consideremos los bloques de Jordan para un autovalor real

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

y para un autovalor complejo $\lambda = a + ib$ reemplazamos λ y 1 por bloques 2×2

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

respectivamente. Observamos que para que un autovalor real toda sucesión converge para $t \rightarrow \pm\infty$ al correspondiente autoespacio proyectivo $\mathbb{P}E_0 = \mathbb{P}(1, 0, \dots, 0)^T$ y de forma similar para un autovalor complejo al autoespacio $\mathbb{P}E_0$ dado por

$$E_0 = \text{Span}\{(1, 0, 0, \dots, 0)^T, (0, 1, 0, \dots, 0)^T\}.$$

En el caso de autovalores reales la solución fundamental correspondiente ϕ con $\phi(0) = I$ tiene la forma

$$\phi(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdot & \cdot & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \frac{t^2}{2!} \\ & & & & \cdot & t \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando esta función a la primera componente llega a ser dominado para $|t|$ grande. Por lo tanto, la afirmación se sigue en este caso. Para un autovalor complejo el argumento es similar usando bloques 2×2 .

$$\begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$$

□

3.2.1. Caracterización de los Espacios de Lyapunov

Los espacios de Lyapunov pueden ser caracterizados por propiedades topológicas del flujo proyectivo. El siguiente resultado es clásico:

Teorema 3.1. *Sea $\mathbb{P}\varphi$ una proyección sobre \mathbb{P}^{d-1} de un flujo lineal $\varphi(t, x) = e^{At}$. Entonces, $\mathbb{P}\varphi$ tiene m componentes cadena recurrente $\{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_m\}$, donde m es el número de las diferentes exponentes de Lyapunov de A . Para cada exponente de Lyapunov λ_i tenemos $\mathcal{M}_i = \mathbb{P}L_i$, la proyección del i -ésimo espacio de Lyapunov sobre \mathbb{P}^{d-1} . Además $\{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_m\}$ define una descomposición fina de Morse de $\mathbb{P}\varphi$ y $\mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}_j$ si y sólo si $\lambda_i < \lambda_j$, donde m es el número de las diferentes exponentes de Lyapunov de A .*

Demostración. Se sigue directamente por la Proposición 3.2 y el Teorema 2.5. □

A continuación ilustramos el Teorema 3.1.

Ejemplo 3.1. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

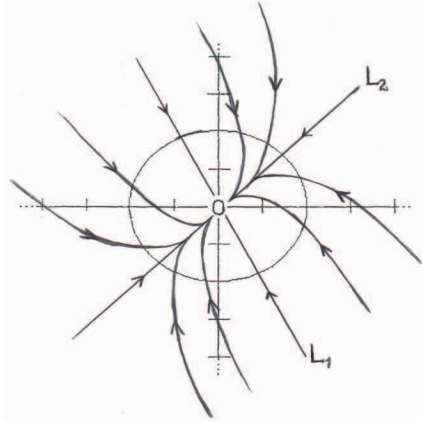


Figura 3.2: Flujo sobre \mathbb{P}^1 del Ejemplo 3.1

se tiene $\text{spec}(A) = \{-4, -1\}$ y $\sum_{L_y}(A) = \{-4, -1\}$ y sus correspondientes espacios de Lyapunov están dados por $L_1 = \ker(A - \lambda_1 Id) = \langle(1, -2)\rangle$ y $L_2 = \ker(A - \lambda_2 Id) = \langle(1, 1)\rangle$. Proyectando estos espacios de Lyapunov al espacio proyectivo \mathbb{P}^1 obtenemos $\mathcal{M}_1 = \mathbb{P}(L_1)$ y $\mathcal{M}_2 = \mathbb{P}(L_2)$. Así $\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\}$ define una descomposición de Morse de \mathbb{P}^1 .

Ejemplo 3.2. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

tenemos $\text{spec}(A) = \{-2, 1\}$ y $\sum_{L_y}(A) = \{-2, 1\}$ y sus correspondientes espacios de Lyapunov están dados por $L_1 = \ker(A - \lambda_1 Id) = \langle(-2, 1)\rangle$ y $L_2 = \ker(A - \lambda_2 Id) = \langle(1, -2)\rangle$. Proyectando estos espacios de Lyapunov al espacio proyectivo \mathbb{P}^1 obtenemos $\mathcal{M}_1 = \mathbb{P}(L_1)$ y $\mathcal{M}_2 = \mathbb{P}(L_2)$. Así, $\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\}$ define una descomposición de Morse de \mathbb{P}^1 .

Ejemplo 3.3. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

se tiene $\text{spec}(A) = \{-1, 1\}$ y $\sum_{L_y}(A) = \{\pm 1\}$ y sus correspondientes espacios de Lyapunov están dados por $L_1 = \ker(A - \lambda_1 Id) = \langle e_1 \rangle$ y $L_2 = \ker(A - \lambda_2 Id) = \langle e_2 \rangle$. Proyectando estos espacios de Lyapunov al espacio proyectivo \mathbb{P}^1 obtenemos

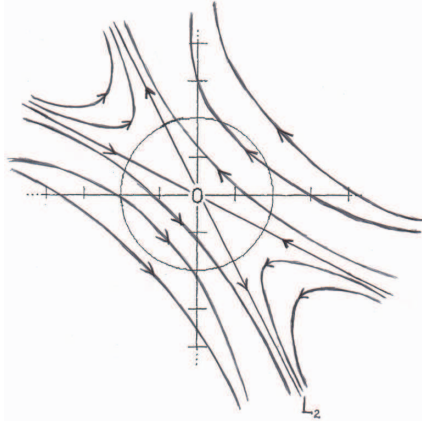


Figura 3.3: Flujo sobre \mathbb{P}^2 del Ejemplo 3.2

$\mathcal{M}_1 = \mathbb{P}(L_1)$ y $\mathcal{M}_2 = \mathbb{P}(L_2)$. Así $\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\}$ define una descomposición de Morse de \mathbb{P}^2 .

Ejemplo 3.4. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se tiene $\text{spec}(A) = \{-i, i, 1\}$ y $\sum_{L_y} (A) = \{0, 1\}$ y sus correspondientes espacios de Lyapunov están dados por $L_1 = \ker(A - \lambda_1 Id) = \langle e_1, e_2 \rangle$ y $L_2 = \ker(A - \lambda_2 Id) = \langle e_3 \rangle$. Proyectando estos espacios de Lyapunov al espacio proyectivo \mathbb{P}^2 obtenemos $\mathcal{M}_1 = \mathbb{P}(L_1) = \mathbb{S}^1$ y $\mathcal{M}_2 = \mathbb{P}(L_2) = p_N$. Así $\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\}$ define una descomposición de Morse de \mathbb{P}^2 .

Flujos topológicamente equivalentes $\mathbb{P}\varphi$ y $\mathbb{P}\psi$ tienen la misma descomposición de Morse.

Proposición 3.2. Para $A, B \in gl(d, \mathbb{R})$, sean $\mathbb{P}\varphi$ y $\mathbb{P}\psi$ flujos asociados en \mathbb{P}^{d-1} . Sea h una equivalencia topológica de $\mathbb{P}\varphi$ y $\mathbb{P}\psi$. Entonces las componentes de las cadenas recurrentes $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n$ de $\mathbb{P}\psi$ son de la forma $\mathcal{N}_i = h[\mathcal{M}_i]$, donde \mathcal{M}_i es una componente de la cadena recurrente de $\mathbb{P}\varphi$. En particular, el número de componentes de cadena recurrente de $\mathbb{P}\varphi$ y $\mathbb{P}\psi$ son similares, y h aplica el orden en $\{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_m\}$ sobre el orden en $\{\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n\}$.

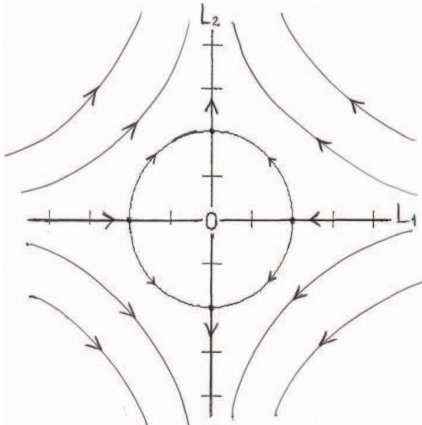


Figura 3.4: Flujo sobre $\mathbb{P}\varphi$ del Ejemplo 3.3

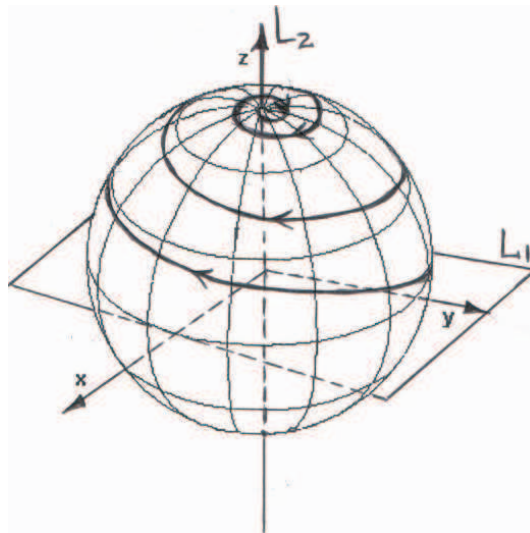


Figura 3.5: Flujo sobre $\mathbb{P}\varphi$ del Ejemplo 3.4

Demostración. La primera parte se sigue del Lema 3.2. Correspondencia de los ordenes se sigue inmediatamente del hecho que h aplica trayectorias en trayectorias, preservando su orientación. \square

De hecho se pueden decir más acerca de las formas normales de A y B .

Proposición 3.3. *Para $A, B \in gl(d, \mathbb{R})$. Sean $\mathbb{P}\varphi$ y $\mathbb{P}\psi$ flujos asociados en \mathbb{P}^{d-1} . Sea h una equivalencia topológica de $\mathbb{P}\varphi$ y $\mathbb{P}\psi$. Entonces la estructura de Jordan (real) de A y B son similares modulo reordenamiento de los bloques correspondientes a los exponentes de Lyapunov similares.*

Las proposiciones anteriores tienen una recíproca, se resulta en la siguiente caracterización:

Teorema 3.2. *Para $A, B \in gl(d, \mathbb{R})$, sean $\mathbb{P}\varphi$ y $\mathbb{P}\psi$ flujos asociados en \mathbb{P}^{d-1} . Entonces existe una equivalencia topológica h de $\mathbb{P}\varphi$ y $\mathbb{P}\psi$ si y sólo si A y B tienen el mismo número de exponentes de Lyapunov $\lambda_1 < \dots < \lambda_m$ y $\mu_1 < \dots < \mu_m$, y para el i -ésimo espacio de Lyapunov la estructura de Jordan real son similares, $i = 1, \dots, m$.*

Demostración. (\Leftarrow) Por la Proposición 3.2 y Proposición 3.3.

(\Rightarrow) Consideremos una transformación lineal $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ de la siguiente manera: Sea λ una exponente de Lyapunov de A con espacio de Lyapunov L_A y estructura de Jordan $J(A)$. Ordenamos los bloques de Jordan de $J(A)$ como se describió en la sección 3. Sea μ la correspondiente exponente de Lyapunov de B con espacio de Lyapunov L_B y misma estructura de Jordan $J(A) = J(B)$. Tomamos una base $\mathcal{B}_A = \{x_1, \dots, x_n\}$ de L_A y análogamente $\mathcal{B}_B = \{y_1, \dots, y_n\}$ para L_B . Definimos $Tx_i = y_i$ para $i = 1, \dots, n$. Usando la misma construcción para todas las exponentes de Lyapunov de A , llegamos a $T \in GL(d, \mathbb{R})$ el cual es una equivalencia de flujos lineales. Su proyección $\mathbb{P}T$ sobre \mathbb{P} es la equivalencia deseada. \square

Observación 3.1. La prueba del Teorema 3.2 muestra que $\mathbb{P}\varphi$ y $\mathbb{P}\psi$ son topológicamente equivalentes si y sólo si son C^∞ -equivalentes si y sólo si son equivalentes a través de la proyección de una transformación lineal.

El Teorema 3.4 caracteriza la C^0 -equivalencia de flujos lineales proyectados en \mathbb{P}^{d-1} . Mientras, C^0 -equivalencia determina el número m de distintas exponentes

de Lyapunov, este también caracteriza la estructura de Jordan dentro de cada espacio de Lyapunov. Por tanto, C^0 -equivalencia no son herramientas útiles para caracterizar m . El requisito de aplicar órbitas φ_A en órbitas de φ_B es también fuerte. Un debilitamiento lleva a la siguiente caracterización.

Teorema 3.3. *Dos matrices $A, B \in gl(d, \mathbb{R})$ tienen la misma forma corta de Lyapunov si y sólo si existe un homeomorfismo $h : \mathbb{P}^{d-1} \rightarrow \mathbb{P}^{d-1}$ que aplica la descomposición fina de Morse de $\mathbb{P}\varphi$ sobre la descomposición fina de Morse de $\mathbb{P}\psi$, es decir, h aplica conjuntos de Morse sobre conjuntos de Morse y preserva sus ordenes.*

Demostración. (Ver [2]) □

Corolario 3.1. Asumimos que A y B son hiperbólicos. Entonces, A y B tienen la misma forma corta cero-Lyapunov si y sólo si flujos lineales en \mathbb{R}^d con C^0 -equivalentes si y sólo si existe un homeomorfismo $h : \mathbb{P}^{d-1} \rightarrow \mathbb{P}^{d-1}$ que respeta la descomposición fina de Morse de sus flujos en \mathbb{P}^{d-1}

Demostración. En el Teorema 3.6 y Corolario 3.7 se caracterizan la forma corta (cero)-Lyapunov de una matriz A en $gl(d, \mathbb{R})$ son suficientes en el sentido que no son constructivos. □

3.3. Caracterización Topológica de Matrices en Variedades Flag

A continuación se caracteriza la construcción usando el flujo inducido sobre la variedad flag.

3.3.1. Sistemas Lineales sobre Grassmannianas y Variedades Flag

Para una matriz $A \in gl(d, \mathbb{R})$ su flujo lineal φ en \mathbb{R}^d induce flujos en las Grassmannianas y la variedad flag sobre \mathbb{R}^d . Primero describimos caracterizaciones topológicas de estos flujos por los resultados especificados en la sección 3 de [1] para el caso de matriz.

La k -ésima Grassmanniana \mathbb{G}_k de \mathbb{R}^d puede ser definido a través de la siguiente construcción:

Definición 3.1. Sea $F(k, d)$ el conjunto k -frame (k -estructura) en \mathbb{R}^d , donde un k -frame es un conjunto ordenado de k vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^d . Dos k -frames $X = [x_1, \dots, x_k]$ y $Y = [y_1, \dots, y_k]$ son equivalentes, $X \sim Y$, si existe $T \in GL(k, \mathbb{R})$ tal que $X^T = TY^T$, donde X y Y son matrices $d \times k$.

El espacio cociente

$$\mathbb{G}_k = \frac{F(k, d)}{\sim} \quad (3.3.1)$$

es una variedad diferenciable, compacta, $k(d - k)$ dimensional. Para $k = 1$ se obtiene el espacio proyectivo $\mathbb{P}^{d-1} = \mathbb{G}_1$ en \mathbb{R}^d .

Definición 3.2. La k -ésima Flag de \mathbb{R}^d está dado por k -sucesiones de subespacios incluidos, es decir,

$$\mathbb{F}_k = \{F_k = (V_1, \dots, V_k), V_i \subset V_{i+1} \text{ y } \dim V_i = i, \text{ para } i = 1, \dots, k\} \quad (3.3.2)$$

Para $d = k$ obtenemos la flag completa $\mathbb{F} = \mathbb{F}_d$.

Cada matriz $A \in gl(d, \mathbb{R})$ define una aplicación sobre los subespacios de \mathbb{R}^d como sigue: sea $V = Span(\{x_1, \dots, x - k\})$, entonces $AV = Span(\{Ax_1, \dots, Ax_k\})$.

Denotemos por $\mathbb{G}_k\varphi$ y $\mathbb{F}_k\varphi$ los flujos inducidos sobre la Grassmanniana y Flag, respectivamente. El siguiente resultado describe la descomposición de Morse de $\mathbb{F}_k\varphi$, compare con Teorema 5 de [1].

Teorema 3.4. Sea $A \in gl(d, \mathbb{R})$ con flujo asociado φ en \mathbb{R}^d y $\mathbb{F}_k\varphi$ sobre la k -flag.

- (i) Para cada $k \in \{1, \dots, d\}$ existe una única descomposición de Morse fina, $\{k\mathcal{M}_{i_j}\}$ de $\mathbb{F}_k\varphi$, donde $i_j \in \{1, \dots, d\}^k$ es un multiíndice, y el número de componentes de cadenas transitivas en \mathbb{F}_k es acotado por $\frac{d!}{(d-k)!}$.
- (ii) Sea \mathcal{M}_i , con $i \in \{1, \dots, d\}^k$ una componente de la cadena recurrente en \mathbb{F}_{k-1} . Consideremos el fibrado vectorial $(d - k + 1)$ -dimensional $\pi : \mathcal{W}(\mathcal{M}_i) \rightarrow \mathcal{M}_i$ con fibras

$$\mathcal{W}(\mathcal{M}_i)_{F_k} = \mathbb{R}^d / V_{k-1} \text{ para } F_k = (V_1, \dots, V_{k-1}) \in \mathcal{M}_i \subset \mathbb{F}_{k-1}.$$

Entonces cada componente de la cadena recurrente ${}_{\mathbb{P}}\mathcal{M}_{i_j}$, $j = 1, \dots, k_i \leq d - k + 1$, del fibrado proyectivo ${}_{\mathbb{P}}\mathcal{W}(\mathcal{M}_i)$ determina una componente de la cadena recurrente ${}_k\mathcal{M}_{i_j}$ en \mathbb{F}_k a través

$${}_k\mathcal{M}_{i_j} = \{F_k = (F_{k-1}, V_k) \in \mathbb{F}_k / F_{k-1} \in \mathcal{M}_i \text{ y } \mathbb{P}(V_k / V_{k-1}) \in {}_{\mathbb{P}}\mathcal{M}_{i_j}\}.$$

Cada componente de la cadena recurrente en \mathbb{F}_k es de esta forma -esto determina los multiíndices i_j inductivamente para $k = 2, \dots, d$.

Demostración. (Ver [2]) □

Como una consecuencia del Teorema 3.4 obtenemos para Grassmannianas ([2], Proposición 2).

Corolario 3.2. En cada Grassmanniana \mathbb{G}_i existe una descomposición fina de Morse del sistema dinámico $\mathbb{G}_i\varphi$. Sus conjuntos de Morse están dados por la proyección de las componentes de la cadena recurrente de la flag completa \mathbb{F}_d . Recordar que las Grassmannianas \mathbb{G}_i es la subflag de la forma

$$\{F = V_i / \dim V_i = i\}.$$

El Teorema 3.4 describe la estructura topológica de $\mathbb{F}_k\varphi$. Su parte constructiva (ii) puede ser realizada de modo más explícito por las Grassmannianas.

Teorema 3.5. Sea $A \in gl(d, \mathbb{R})$ una matriz con flujo φ en \mathbb{R}^d . Sea L_i , $i = 1, \dots, m$ los espacios de Lyapunov de A , es decir, sus proyecciones $\mathbb{P}L_i = \mathcal{M}_i$, $i = 1, \dots, m$ es la descomposición fina de Morse de $\mathbb{P}\varphi$ en el espacio proyectivo. Para $k = 1, \dots, d$ define el conjunto de índices

$$I(k) = \{(k_1, \dots, k_m) / k_1 + \dots + k_m = k \text{ y } 0 \leq k_i \leq d_i \leq \dim L_i\}.$$

Entonces, la descomposición de Morse en las Grassmannianas \mathbb{G}_k está dado por los conjuntos

$$\mathcal{N}_{k_1, \dots, k_m}^k = \mathbb{G}_{k_1} L_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{G}_{k_m} L_m, (k_1, \dots, k_m) \in I(k).$$

Demostración. Ver [2], Teorema 6 y Observación 7 □

Este resultado define un orden (con grafo asociado) en la variedad flag \mathbb{F}_d a través de las Grassmannianas:

En cada \mathbb{G}_k , $k = 1, \dots, d$ usamos el orden \preceq_k relativo a la descomposición fina de Morse de $\mathbb{G}_k\varphi$. Y para conjuntos de Morse $\mathcal{N}^k, \mathcal{N}^{k-1}$ en \mathbb{G}_k , y en \mathbb{G}_{k-1} respectivamente, tenemos $\mathcal{N}^{k-1} \sqsubseteq_{k-1} \mathcal{N}^k$ si \mathcal{N}^k proyecta abajo de \mathcal{N}^{k-1} . Combinado, \preceq_k y \sqsubseteq_{k-1} definimos el grafo de una relación de orden.

Observación 3.2. (Sobre \sqsubseteq e índices) Teorema 3.5 describe un sistema indexado por descomposición fina de Morse en cada Grassmanniana \mathbb{G}_k y por tanto en el conjunto flag \mathbb{F}_d que corresponde a la parametrización de la forma corta de Lyapunov a través de la Observación 1.2 (i) y (iii).

Para los siguientes ejemplos usaremos un sistema diferente indexado que es un poco más intuitivo:

Sea $A \in gl(d, \mathbb{R})$ que tiene la forma corta de Lyapunov (m, d_1, \dots, d_m) con $\sum_{i=1}^m d_i = d$. Entonces, la descomposición fina de Morse asociado al flujo $\mathbb{P}\varphi$ en \mathbb{P}^{d-1} tiene m conjuntos de Morse $\{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_m\}$ que son linealmente ordenados. Asociamos la base canónica $\{e_1, \dots, e_m\}$ en \mathbb{R}^d con conjuntos de Morse de tal manera que a cada conjunto de Morse \mathcal{M}_i le corresponde d_i vectores básicos (en el respectivo orden), es decir,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &\sim \{e_1, \dots, e_{d_1}\} \\ \mathcal{M}_i &\sim \{e_{\alpha_i}, \dots, e_{\beta_i}\}, \text{ donde } \alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} d_j + 1, \beta_i = \sum_{j=1}^i d_j \end{aligned}$$

Sobre $\mathbb{G}_1 = \mathbb{P}^{d-1}$ indexamos la descomposición de Morse simplemente como \mathcal{M}_i . Cada conjunto de Morse sobre \mathbb{G}_2 tiene dos índices (j_1, j_2) y $\mathcal{M}_i \sqsubseteq \mathcal{M}_{j_1, j_2}$ si y sólo si $i \in \{j_1, j_2\}$. Varios de los conjuntos \mathcal{M}_{j_1, j_2} sobre \mathbb{G}_2 pueden ser idénticos. En este caso usamos el par de índices con números pequeños. Continuando para $\mathbb{G}_2, \dots, \mathbb{G}_d$ obtenemos únicos índices para todos los conjuntos de Morse en \mathbb{G}_k , y por tanto sobre el flag \mathbb{F} .

Como describimos arriba, el orden \sqsubseteq_k puede ser leído uno por uno los índices inmediatamente y \sqsubseteq_k puede ser construido explícitamente. Además, tenemos para los ordenes \preceq_k sobre G_k :

$$\mathcal{M}_{(j_1, \dots, j_k)} \preceq_k \mathcal{M}_{(j'_1, \dots, j'_k)} \Leftrightarrow j_i \leq j'_i \text{ para todo } i = 1, \dots, k$$

El siguiente ejemplo simple ilustra algunas propiedades de los \mathbb{G} -grafos. En particular, el primer ejemplo muestra que uno no puede esperar determinar la dimensión de los espacios de Lyapunov de los conjuntos de Morse sobre todo el flag. Es esta la razón por la que introducimos \mathbb{G} -grafos (en lugar de grafos obtenidos de los conjuntos de Morse sobre todo el flag).

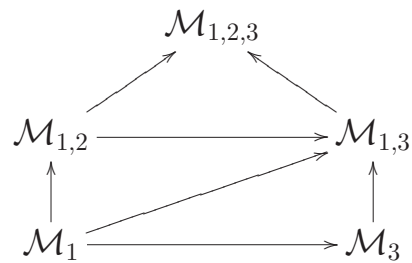
Ejemplo 3.5. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

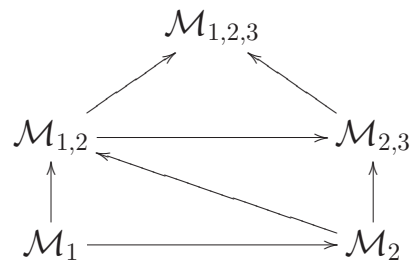
Obtenemos la siguiente estructura para la descomposición de Morse fina para A :

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_1 & : \mathcal{M}_1 = \{Span(e_1, e_2)\} \\ & : \mathcal{M}_3 = \{Span(e_3)\} \\ \mathbb{G}_2 & : \mathcal{M}_{1,2} = \{Span(e_1, e_2)\} \\ & : \mathcal{M}_{1,3} = \{Span(x, e_3)\}, x \in \{Span(e_1, e_2)\} \\ \mathbb{G}_3 & : \mathcal{M}_{1,2,3} = \{Span(e_1, e_2, e_3)\} \end{aligned}$$

Esto deja al \mathbb{G} -grafo de A como:



De manera análoga obtenemos el \mathbb{G} -grafo de B



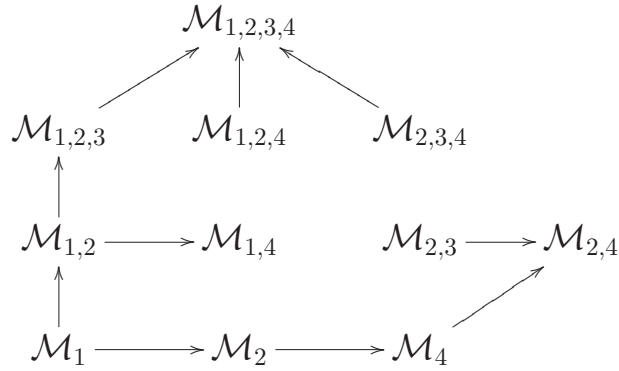
Ejemplo 3.6. Considere la matriz

$$C = \begin{pmatrix} -2 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

La descomposición fina de Morse está dado por

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_1 & : \mathcal{M}_1 = \{Span(e_1)\} \\
& : \mathcal{M}_2 = \{Span(e_2, e_3)\} \\
& : \mathcal{M}_4 = \{Span(e_4)\} \\
\mathbb{G}_2 & : \mathcal{M}_{1,2} = \{Span(e_1, x)\}, x \in \{Span(e_2, e_3)\} \\
& : \mathcal{M}_{1,4} = \{Span(e_1, e_4)\}, \\
& : \mathcal{M}_{2,3} = \{Span(e_2, e_3)\}, \\
& : \mathcal{M}_{2,4} = \{Span(x, e_4)\}, x \in \{Span(e_2, e_3)\} \\
\mathbb{G}_3 & : \mathcal{M}_{1,2,3} = \{Span(e_1, e_2, e_3)\} \\
& : \mathcal{M}_{1,2,4} = \{Span(e_1, x, e_4)\}, x \in \{Span(e_2, e_3)\} \\
& : \mathcal{M}_{2,3,4} = \{Span(e_2, e_3, e_4)\} \\
\mathbb{G}_4 & : \mathcal{M}_{1,2,3,4} = \{Span(e_1, e_2, e_3, e_4)\}
\end{aligned}$$

Esto deja al \mathbb{G} -grafo de C como



Definición 3.3. Sea G el \mathbb{G} – grafo de una matriz $A \in gl(d, \mathbb{R})$. Un camino creciente p en G es un camino desde el nivel \mathbb{G}_1 al nivel \mathbb{G}_d que sigue el orden, $\sqsubseteq_1, \dots, \sqsubseteq_{d-1}$. El orden en un nodo $\mathcal{N} \in G$ es el número de lados que terminan en \mathcal{N} . Para un camino creciente $p = (\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_d)$ en G definimos su longitud simple

$$sl(p) = \text{máx}\{k : \text{orden en } (\mathcal{N}_k) \leq 1\}.$$

Para un nodo \mathcal{M}_i en el nivel $\mathbb{G}_1 = \mathbb{P}^{d-1}$ definimos su multiplicidad como

$$mult(\mathcal{M}_i) = \text{máx}\{sl(p)\},$$

donde p es un camino creciente con nodo inicial \mathcal{M}_i .

Lema 3.4. Dados una matriz $A \in gl(d, \mathbb{R})$ y una exponente de Lyapunov λ_i de A con espacio de Lyapunov $L_i \subset \mathbb{R}^d$. Denote el correspondiente conjunto de Morse del flujo $\mathbb{P}\varphi$ por $\mathcal{M}_i = \mathbb{P}L_i \subset \mathbb{P}^{d-1}$. Entonces la multiplicidad $mult(\mathcal{M}_i)$ de \mathcal{M}_i en el \mathbb{G} -grafo de A es igual a la dimensión(lineal) de L_i .

Demostración. Se sigue directamente del Teorema 3.5. □

El lema anterior dice que uno puede recuperar la dimensión del espacio de Lyapunov desde el orden \sqsubseteq_k en el \mathbb{G} -grafo de una matriz. Además, el orden del exponente de Lyapunov (y por tanto de los espacios de Lyapunov) pueden ser recuperados del orden \preceq_1 en el nivel \mathbb{G}_1 del grafo, compare con el Teorema 3.1. Por tanto, podemos esperar usar \mathbb{G} -grafos para la caracterización de la forma corta de Lyapunov de una matriz.

Definición 3.4. Sean G y G' grafos directos finitos. Una función $h : G \rightarrow G'$ es llamado un homeomorfismo de grafos si para todo lado (n_1, n_2) en G , $(h(n_1), h(n_2))$ es un lado en G' : Además, h es un isomorfismo de grafos si h es biyectivo, h y h^{-1} son \mathbb{G} -grafos homeomorfos.

Teorema 3.6. La forma corta de Lyapunov $SL(A)$ y $SL(B)$ son idénticos para dos matrices $A, B \in gl(d, \mathbb{R})$ si y sólo si los \mathbb{G} -grafos de A y B son isomorfos.

Recíprocamente, formas cortas de Lyapunov determinan \mathbb{G} -grafos por sus construcciones (basado en el Teorema 3.4 y Teorema 3.5).

Observación 3.3 (El Conjunto de \mathbb{G} -grafos). . Dado un grafo finito directo G sin lazos, existe un algoritmo constructivo para decir si G es el \mathbb{G} -grafo de una matriz: G necesita tener un único borde n_l con orden fuera 0 (y único borde con orden en 0, estos bordes corresponde al conjunto de Morse \mathcal{M}_1). Comenzando desde el borde maximal g_l , procedemos como en los pasos (i) – (iii) de la prueba del Teorema 3.6 para identificar nodos en los diferentes niveles, así como la multiplicidad de cada borde en el nivel mas bajo 1. Dentro de cada nivel construimos la versión elemental. Con esta información usamos el Teorema 3.4 para construir el \mathbb{G} -grafo basado en el orden sobre el nivel 1 y la multiplicidad de los nodos. El grafo así construido es comparado al grafo G para decidir si es en realidad el \mathbb{G} -grafo de una matriz. Isomorfismos de grafos definen una relación de equivalencia en el

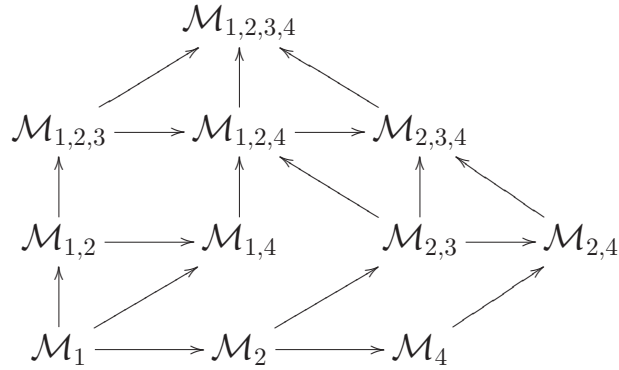
conjunto de todos los grafos. (También consideramos completación de \mathbb{G} -grafos para ser equivalentes.) La correspondiente clase de equivalencia de \mathbb{G} -grafo puede ser parametrizado como en la Observación 1.3 (i) y (iii). Esta parametrización corresponde a la construcción de la descomposición de Morse más fina en las Grassmannianas \mathbb{G}_k como en el teorema 3.4.

Ejemplo 3.7. Consideremos las dos matrices

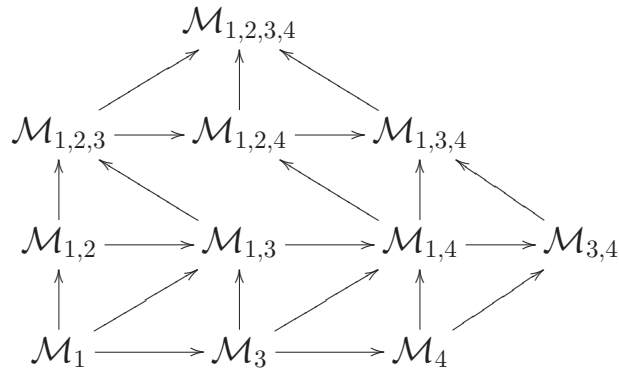
$$A = \begin{pmatrix} -2 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ -1 & -2 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Sus formas cortas de Lyapunov son $SL(A) = (3, 1, 2, 1)$ y $SL(B) = (3, 2, 1, 1)$. Por tanto las matrices no son Lyapunov equivalentes. En sus \mathbb{G} -grafos esto es reflejado de la siguiente manera.

El \mathbb{G} -grafo $G(A)$ está dado por:



Por otra parte el \mathbb{G} -grafo $G(B)$ está dado por:



Estos grafos tienen que ser completados. Obviamente $G(A)$ y $G(B)$ no son isomorfos, por ejemplo, los ordenes fuera de \mathcal{M}_1 en $G(A)$ y $G(B)$ son diferentes.

Bibliografía

- [1] V. Ayala, F. Colonius, W. Kliemann, On Topological Equivalence of Linear Flows with Aplicación to Bilinear Control Systems, , Journal of Dynamic and Control Systems, Vol 13, N° 3, pp. 337 - 362, July 2007.
- [2] V. Ayala, F. Colonius, W. Kliemann, Dynamic Characterization of the Lyapunov Form of Matrices, Linear Algebra and its Application, Vol 402 , pp. 272-290, 2005.
- [3] J. Ayala, P Corbin, K. Mc Conville, F. Colonius, W. Kliemann, J. Peters, Morse Descomposition, Attractors ans Chain Recurrence, Proyecciones Journal of Mathematics, Vol 25, N° 1, pp. 79-99, May 2006.
- [4] F. Colonius y W. Kliemann, The Dynamics of Control, *Birkhäuser*, 2000.
- [5] F. Colonius y W. Kliemann, Dynamical Systems and Lineal Algebra, Linear Algebra Handbook, 2006.
- [6] F. Colonius y W. Kliemann, Morse Descomposition ans Spectra on Flag Bundles, Mathematics Subject Classification. 1991.
- [7] C. Conley, Isolated Invariant Sets and Morse Index, Regional Conference Series in Mathematics, N° 83, American Mathematics Society, Providence, Rhode Island, 1978.
- [8] M. Rasmussen, All-Time Morse Descompositions of Linear Nonautonomous Dynamical Systems, 2000 Mathematics Subject Classification, Department of Mathematics, University of Augsburg, D-86135 Augsburg, Germany, pp. 1-10, 2006.
- [9] E. Akin, The General Topology of Dynamical Systems, Graduate Studies in Mathematics 1, American Mathematics Society, Providence RI, (1993).

- [10] Vladimir I. Arnol'd, Ordinary Differential Equations , Steklov Mathematical Institute, 3rd edition, Publisher Nauka, Moscow 1984.
- [11] D. K. Arrowsmith and C. M. Place, An Introduction to Dynamical Systems, Cambridge University Press, 1990.
- [12] M. W. Hirsch and S. Smale, Differential Equation, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press, 1974.
- [13] E. A. Coddington and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equation, McGraw-Hill, 1955.
- [14] H. L. Royden, Real Analysis, Second Edition, MacMillan Publishing Co., 1986.
- [15] Tood Moller, Conley - Morse Chain Maps, A Thesis for Degree Doctor of Philosophy ,Georgia Institute of Technology, 2005.
- [16] Li Desheng, Morse Decomposition ans its Stability of Strong Attractors for General Dynamical Systems,Chern Institute of Mathematics, Tianjin - China 2006.
- [17] J. F. Selgrade, Isolated Invariant Sets for Flows on Vector Bundles, Transactions of the American Society pp. 359-390, 1975.
- [18] C. Conley, The Gradiante Estructure of a Flow, Ergodic Theory Dyn. Syst. 8, 1988, pp. 11-26. Original: IBM Reserch, RC 3939, Yorktown Heights, N.Y., 1972.
- [19] C. Robinson, Dynamical systems. Stability, Symbolic Dynamical and Chaos, 2nd edition, CRC Press, Boca Raton, 1999.
- [20] E. Catsigeras, Introducción a la Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales, Universidad de la República, Montevideo - Uruguay 1990.
- [21] Juan E. Nápoles Valdes, Un siglo de Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales, Lecturas Matematicas Volumen 25, pp. 55-111, Universidad de la Cuenca del Plata, Argentina 2004.
- [22] Andrés Abella, Operadores en espacio de dimensión finita, Universidad de la Republica, Montevideo - Uruguay 2004.

- [23] J. Billeke, Bases de la Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales, Jornadas de Matemáticas, Universidad Católica del Norte, 1996.
- [24] R. L. Devaney, A first course in chaotic dynamical system, Addison-Wesley, Redwood City, California (1992).
- [25] M. Romera, Técnicas de los Sistemas Dinámicos Discretos, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid (1997).
- [26] G. Calandin, L. Ignacio, C. Perez, Modelo de Sistemas Dinámicos, 1era edición San Vicente, Club Universitario Madrid (2005).
- [27] M. A. Martín, M. Morán, M. Reyes, Iniciación al Caos. Sistemas Dinámicos, Editorial Síntesis, Madrid (1995).
- [28] A. Giraldo, M. A. Sastre, Sistemas Dinámicos y Caos. Teoría, Ejemplos y Algoritmos, Fundación General de la Universidad Politécnica de Madrid, Madrid (2002).