



UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Física

**Efecto Casimir en una membrana de $2+1$
dimensiones con bordes irregulares**

Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias con
mención en Física

Lic. Byron John Droguett Parada

Profesor Guía: Dr. Juan Cristóbal Rojas Gomez-Lobo

Antofagasta, Chile

2014

Agradecimientos

Agradecer a mi familia por el apoyo que me ha brindado en este camino, al Departamento de Física, a sus profesores que me enseñaron en esta estadía de postgrado, en especial al Dr. Juan Cristóbal Rojas Gomez-Lobo, a becas Conicyt, a mis amigos y sobre todo a Dios. (Porque de tal manera amó Dios al mundo, que ha dado a su Hijo unigénito, para que todo aquel que en él cree, no se pierda, mas tenga vida eterna, Juan 3 : 16).

Resumen

En este trabajo, se calcula la energía de Casimir debida a un campo escalar en una membrana de dos dimensiones espaciales. Se supondrá que tenemos bordes no planos con condiciones de borde de Dirichlet. El problema se reparametriza, de tal manera que se obtiene una membrana de borde plano, donde la irregularidad original, se convierte en una perturbación sobre los campos. Esto aparece cuando desarrollamos el operador de Laplace-Beltrami asociado a la transformación de las coordenadas espaciales. Después, para calcular la energía de Casimir, usamos la regularización de la función zeta. Luego, comparamos los resultados que se obtienen mediante teoría de perturbaciones y la aproximación de WKB.

Abstract

In this work, we calculate the Casimir Energy originated by a scalar field in a membrane of two spatial dimensions. We assume non planar borders and Dirichlet boundary conditions. The original problem is re-parametrized in such a way that we obtain planar borders and the original irregularity becomes a perturbation on the scalar fields. The Casimir energy is calculated using the generalized zeta function regularization. Later, we compare the results which come from perturbation theory and the WKB method.

Índice general

Introducción	2
1. Regularización	5
1.1. Regularizador corte exponencial	6
1.2. Regularizador función zeta	7
1.3. Caso de dos placas paralelas lisas	8
2. Energía de Casimir	10
2.1. Energía de Casimir	12
3. Energía de Casimir de una membrana, usando teoría de perturbaciones	15
3.1. Operador de Laplace-Beltrami	16
3.2. Membrana en 2+1 dimensiones	16
3.3. Teoría de perturbaciones	18
3.4. Función zeta generalizada	19
3.5. Tipos de rugosidades	21
3.5.1. Caso I	21
3.5.2. Caso II	22
4. Energía de Casimir usando el método de WKB	25
4.1. Parte finita de la función zeta generalizada	30

4.2. Residuos	30
4.3. Forma general de la energía y fuerza de Casimir	31
4.4. Tipos de rugosidades	32
4.4.1. Caso I	32
4.4.2. Caso II	33
4.5. Límite $L \rightarrow \infty$	34
5. Conclusiones	36
A. Función zeta	40
B. Función zeta como integral de contorno	42
C. Fórmula Euler-Maclaurin	44
D. Cálculo de la integral del capítulo 3	46
E. Núcleo del calor	48

Introducción

Se llama efecto Casimir [1] a la fuerza que se produce sobre objetos de tamaño macroscópico, debido a las fluctuaciones de origen cuántico que se producen a un nivel microscópico.

La importancia de este tema radica en el hecho de que, en la última década, los avances tecnológicos han permitido una continua miniaturización de los dispositivos electrónicos. A medida que las distancias entre los componentes de los sistemas tiende hacia el rango nanométrico, hay una creciente necesidad de entender todos los detalles posibles de las fuerzas involucradas. Una de ellas es el efecto Casimir. En la tecnología actual, este efecto es el responsable de hasta el 10 % de las fuerzas encontradas en sistemas microelectromecánicos. Las fuerzas de Casimir son de relevancia práctica directa en la nanotecnología, donde, por ejemplo, la adherencia de los componentes móviles de micromáquinas puede ser causada por ellas.

El hamiltoniano para la radiación electromagnética(EM) viene dado por:

$$\hat{H} = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_k \hbar\omega_k \left(\hat{a}_{k\alpha}^\dagger \hat{a}_{k\alpha} + \frac{1}{2} \right),$$

donde $\hat{a}_{k\alpha}^\dagger$ y $\hat{a}_{k\alpha}$ son los operadores de creación y aniquilación de un fotón con momentum k y polarización α . Luego, se observa que se tiene un término constante que puede ser interpretado como la energía del punto cero:

$$E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \sum_k \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\hbar \omega_k}{2}.$$

Los modos de los campos EM, vienen determinados por las condiciones de borde del sistema que se quiere investigar. Por ejemplo, la energía de Casimir entre dos placas paralelas perfectamente conductoras, viene de la diferencia de energía entre un volumen con condiciones de borde de Dirichlet y otro vacío sin condiciones de borde. Estas dos energías tienen términos claramente divergentes, los que deben ser tratados por algún método de regularización que permita obtener información físicamente relevante [2].

En física, especialmente en teoría cuántica de campos, se entiende como regularización al método para aislar los infinitos que aparecen en los cálculos, introduciendo una variable auxiliar llamada regulador [3]. Algunos de estos métodos son el corte exponencial asociado al núcleo del calor y de la función zeta generalizada. El valor de la energía de Casimir es el mismo para las dos regularizaciones consideradas. Por el contrario, las partes divergentes dependen de la regularización.

El objetivo de este trabajo, consiste en calcular la energía y fuerza de Casimir en los bordes de una membrana de $2 + 1$ dimensiones con borde rugosos, los cuales satisfacen condiciones de borde de Dirichlet. Suponemos que las excitaciones cuánticas son debidas a un campo escalar tipo fonónico. Este trabajo fue publicado en [4].

Para tratar el problema, se hace un cambio de coordenadas para transformar el borde rugoso a un problema de una membrana con bordes lisos, donde tenemos que la dinámica del campo se ve modificada por un nuevo término que es tratado como un potencial externo que actúa sobre los campos.

Una vez parametrizados los ejes, se procede a calcular la métrica del espacio para obtener el operador de Laplace-Beltrami. La ecuación diferencial parcial fue abordada usando dos métodos: En el capítulo 3 se ocupó el método perturbativo para encontrar los autovalores modificados por la presencia de la rugosidad. En

tanto que en el capítulo 4, se aplicó el método de WKB.

La energía de Casimir se obtiene usando el método de regularización de la función zeta, a partir de los autovalores que se calculan en los capítulos 3 y 4. Por último, se hace tender el largo de la membrana al infinito y se comparan ambos métodos.

Capítulo 1

Regularización

Uno de los aspectos fundamentales de la teoría cuántica de campos es la tarea de extraer resultados físicamente significativos a partir de cantidades que, en principio están mal definidas. Tal vez el ejemplo más simple de esto sea el cálculo de la energía de punto cero de campos cuánticos. La aparición de una energía de vacío divergente es una consecuencia directa del método de cuantización canónico, lo que hace necesario imponer prescripciones adicionales para tener una teoría de campos bien definida. Al estudiar teorías de campos libres extendidas a todo el espacio tiempo, esta ambigüedad es removida mediante la prescripción de orden normal. Esto implica la substracción formal de la energía infinita de punto cero y, por lo tanto, el valor de expectación de vacío del hamiltoniano normalmente ordenado es cero. Tal substracción está justificada por el hecho de que, en la práctica, no es posible medir un valor absoluto de energía, sino sólo diferencias, permitiendo una elección arbitraria del origen sobre la escala de energía. Uno de los procedimientos usados para calcular energías de Casimir es la evaluación directa de sumas infinitas sobre los modos de punto cero del campo (autovalores del hamiltoniano). Estas sumas son formalmente divergentes, y un esquema de regularización adecuado debe emplearse para extraer un resultado físicamente significativo. Aunque existen diferencias entre los resultados obtenidos por distintos métodos de regu-

larización, las predicciones para la energía de Casimir deben ser independientes de los métodos utilizados. Resulta entonces crucial comprender la relación entre los resultados obtenidos mediante distintas técnicas de regularización. Analizaremos los casos de regularizador de corte exponencial y de función zeta generalizada.

1.1. Regularizador corte exponencial

Sea $\phi(t, x)$ un campo escalar que depende del tiempo y la posición, el cual obedece la ecuación de Klein-Fock-Gordon en $1 + 1$ dimensiones para el caso del campo escalar sin masa.

Primero consideraremos un campo libre a lo largo del eje x . En este caso se tiene la relación de dispersión

$$\omega_k = ck. \quad (1.1)$$

Entonces, la energía del estado fundamental viene dada por

$$E_0^L = \frac{\hbar L}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_k dk = \frac{\hbar c L}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k dk. \quad (1.2)$$

Dicha integral es divergente. Para regularizarlo, se introduce un factor exponencial que dependa de un término α , que eventualmente lo podemos hacer tender a cero

$$E_{0,\alpha}^L = \frac{\hbar c L}{2\pi} \int_0^{\infty} k e^{-\alpha k} dk = \frac{\hbar c L}{2\pi \alpha^2}. \quad (1.3)$$

Ahora, vamos a comparar la energía fundamental regularizada de (1.3) con el caso de un sistema finito de largo a a lo largo del eje x y de condiciones de borde (C.B.) de Dirichlet en cuyo caso, el número de onda es $k_n = \pi n/a$ y cuya relación de dispersión viene dada por $\omega_n = ck_n$. Luego, la energía fundamental regularizada viene expresada por

$$E_{0,\alpha}(a) = \frac{\hbar c}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{a} e^{-\alpha n\pi/a} = \frac{\hbar c a}{2\pi\alpha^2} - \frac{\pi\hbar c}{24a}. \quad (1.4)$$

El primer término de la energía (1.4) multiplicado por el factor a/L es el mismo que se obtuvo en la ecuación (1.3). Entonces, la energía de un sistema con C.B. de Dirichlet y tamaño finito a tiene una diferencia finita con respecto al sistema libre sin condiciones de borde. Dicha diferencia, cuando el regulador α tiende a cero, se le llama energía de Casimir:

$$E_{cas} = E_{0,\alpha}(a) - E_{0,\alpha}^L \frac{a}{L} = -\frac{\pi\hbar c}{24a}. \quad (1.5)$$

1.2. Regularizador función zeta

Si consideramos el ejemplo de la sección anterior, donde $k_n = n\pi/a$ y $\omega_n = k_n c$. La energía del vacío es la suma de todos los modos normales

$$E = \frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n, \quad (1.6)$$

donde esta serie, como claramente ya sabemos, es divergente. Ahora vamos a introducir un regularizado que consiste en reemplazar los n de la suma por n^{-s} , de tal manera que recuperamos la suma original cuando $s = -1$ (ver apéndice **A**). Luego, tenemos que la ecuación (1.6) se convierte en

$$E(s) = \frac{\pi\hbar c}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}. \quad (1.7)$$

Cuando $s = -1$, tenemos la función zeta de Riemann

$$E(-1) = \frac{\pi\hbar c}{2a} \zeta_R(-1) = -\frac{\pi\hbar c}{24a}. \quad (1.8)$$

El resultado de la energía es la misma por el método de regularización de corte exponencial, diferenciándose solo en los términos divergentes.

1.3. Caso de dos placas paralelas lisas

A continuación utilizaremos el método de la regularización de función zeta para el ejemplo de dos placas paralelas cuadradas de ancho L separadas una distancia constante a , considerando fluctuaciones cuánticas debidas a un campo escalar. Si asumimos C.B. de Dirichlet en las placas, la función de onda que resuelve el problema viene dada por

$$\psi(t, x, y, z) = e^{-i\omega_n t} e^{ik_x x} e^{ik_y y} \sin(k_n z), \quad (1.9)$$

$$\omega_n = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2}, \quad k_x = \frac{\pi m_x}{L}, \quad k_y = \frac{\pi m_y}{L}, \quad (1.10)$$

donde ω_k es la frecuencia y k_x y k_y son los vectores de onda perpendicular a la dirección de propagación. La función zeta asociada a los autovalores es

$$\zeta(s) = \sum_{m_x=-\infty}^{\infty} \sum_{m_y=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\pi m_x}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi m_y}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \right]^{-s}. \quad (1.11)$$

Dada la condición $a \ll L$, podemos transformar las sumas asociadas a las coordenadas x e y al continuo, y las resolvemos por cambio de coordenadas polares

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= L^2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \left[k^2 + \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \right]^{-s} k dk d\theta \\ &= \frac{L^2}{(1-s)\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[k^2 + \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \right]^{-s+1} \Big|_0^{\infty}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

solo nos quedamos con la parte convergente

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= -\frac{L^2}{(1-s)\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2(1-s)} \\ &= -\frac{L^2}{(1-s)\pi} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{2(1-s)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2(1-s)}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Expresando la sumatoria como función zeta

$$\zeta(s) = -\frac{L^2}{(1-s)\pi} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{2(1-s)} \zeta_R(2s-2),$$

y evaluando en $s = -1/2$, tenemos que

$$\zeta\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2L^2}{3\pi} \left(\frac{\pi}{a}\right)^3 \zeta_R(-3) = -\frac{L^2\pi^2}{180a^3}.$$

La energía de Casimir es

$$E_{cas} = -\frac{L^2\pi^2\hbar c}{720a^3},$$

y la fuerza de Casimir tiene la forma

$$F_{cas} = -\frac{L^2\pi^2\hbar c}{240a^4}.$$

La fuerza es negativa indicando el caracter atractivo de las placas.

Capítulo 2

Energía de Casimir

La acción de un campo cuántico escalar sometido a una interacción externa, sin términos no-lineales, viene dada por

$$S(\phi) = -\frac{1}{2} \int_M \phi(x)(\Delta - V(x))\phi(x) dx, \quad (2.1)$$

donde $\phi(x)$ es el campo escalar, $V(x)$ el potencial externo y Δ es un operador diferencial elíptico de segundo orden. El dominio M corresponde a un espacio euclídeo que involucra tanto la parte espacial como la temporal y que corresponde al inverso de la temperatura. En este trabajo se va a trabajar en el formalismo de Matsubara, también llamado “de tiempo imaginario”.

El campo $\phi(x)$ obedece la ecuación de movimiento

$$(\Delta - V(x))\phi(x) = 0. \quad (2.2)$$

Obtenemos la energía libre de Helmholtz a través de la función partición del sistema, la cual puede ser expresada mediante el formalismo de integral de camino

$$Z = \exp[-\beta F] = \text{Tr} [e^{-\beta \hat{H}}] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S(\phi)}. \quad (2.3)$$

Como la acción es cuadrática en los campos, se puede integrar sin problema, quedando la función partición expresada como la traza del kernel de la acción

$$Z = \left[\det \left(\frac{\Delta - V(x)}{\mu^2} \right) \right]^{-1/2}, \quad (2.4)$$

donde ha sido necesario introducir un parámetro de masa arbitrario μ , de tal manera que el argumento del determinante quede sin dimensiones.

Por otra parte tenemos que, para el operador hermítico $P = \Delta - V(x)$, se tiene un conjunto infinito de auto funciones $\varphi_n(x)$, que obedecen

$$(\Delta - V(x)) \varphi_n = \lambda_n \varphi_n.$$

Eso significa que la función partición se puede expresar como

$$Z = \det \left[\frac{P}{\mu^2} \right]^{-1/2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda_n}{\mu^2} \right]^{-1/2}.$$

La energía libre entonces viene dada por

$$\beta F = -\ln Z = -\ln \det \left[\frac{P}{\mu^2} \right]^{-1/2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left[\frac{\lambda_n}{\mu^2} \right].$$

Ahora observemos que, si definimos una función zeta generalizada

$$\zeta_P(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s},$$

se tiene que

$$\left. \frac{d}{ds} \zeta_P(s) \right|_{s=0} = - \sum_n \ln \lambda_n.$$

Por lo tanto, la energía libre viene dada por

$$\beta F = -\ln Z = -\frac{1}{2} \left. \frac{d}{ds} \zeta_{P/\mu^2}(s) \right|_{s=0}. \quad (2.5)$$

Para obtener la energía de Casimir, primero obtenemos la energía promedio a través de la función partición

$$E_p = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{\partial (\beta F)}{\partial \beta}. \quad (2.6)$$

Usando el término de energía libre (2.5), tenemos

$$E_p = -\frac{1}{2} \frac{\partial \zeta'_{P/\mu^2}(0)}{\partial \beta}. \quad (2.7)$$

La energía a temperatura zero, la cual interpretamos como energía fundamental del vacío, la obtenemos en dicho límite

$$E_{cas} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} E_p. \quad (2.8)$$

2.1. Energía de Casimir

Como dijimos anteriormente, vamos a utilizar el formalismo de tiempo imaginario, el cual aparece naturalmente al expresar la función partición como una integral funcional, tal como se ve en la ecuación (2.3).

Primero nos preocuparemos del caso de un campo libre, sin potenciales externos. En dicho caso, el operador P viene dado por

$$P = -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \Delta_{\vec{r}}, \quad (2.9)$$

donde τ es el tiempo imaginario y $\Delta_{\vec{r}}$ es el operador cuadrático asociado a las coordenadas espaciales. El operador P actúa sobre autofunciones con C.B. periódicas en el tiempo β y generales en las coordenadas espaciales. Una solución general del problema de autovalores toma la forma

$$\phi_{n,j}(\tau, \vec{r}) = \frac{1}{\beta} e^{\frac{2\pi i n \tau}{\beta}} \varphi_j(\vec{r}). \quad (2.10)$$

La autofunción $\varphi_j(\vec{r})$, obedece

$$-\Delta_{\vec{r}} \varphi_j(\vec{r}) = E_j \varphi_j(\vec{r}).$$

Luego el autovalor asociado al operador P , viene dado por

$$\lambda_{n,j} = \left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + E_j^2, \quad (n \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}). \quad (2.11)$$

Ahora podemos construir una función zeta asociada a los autovalores del operador P :

$$\zeta_P(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + E_j^2 \right]^{-s}. \quad (2.12)$$

Podemos expresar la función zeta (2.12), mediante la expresión (ver apéndice **A**)

$$\zeta_P(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 t} K_{P_{\vec{r}}}(t) dt, \quad (2.13)$$

donde

$$K_{P_{\vec{r}}}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-E_j t}, \quad (2.14)$$

se le denomina “núcleo del calor” (heat kernel), (ver apéndice **E**).

Aplicando la fórmula de resumación de Poisson (A.4), obtenemos

$$\begin{aligned} \zeta_P(s) &= \frac{\beta}{\sqrt{4\pi}} \frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)} \zeta_{P_{\vec{r}}}(s-1/2) \\ &+ \frac{\beta}{\sqrt{\pi}\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} t^{s-3/2} e^{-\frac{n^2\beta^2}{4t}} K_{P_{\vec{r}}}(t) dt. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Por otra parte, podemos construir una función zeta asociada a los autovalores E_j del operador $\Delta_{\vec{r}}$

$$\zeta_{P_{\bar{r}}}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} E_j^{-2s}. \quad (2.16)$$

Para calcular la energía de Casimir debemos considerar la escala arbitraria μ^2 , que tenemos en (2.7)

$$\zeta'_{P/\mu^2}(0) = \zeta_P(0)' + \zeta_P(0) \ln(\mu^2), \quad (2.17)$$

reemplazando la ecuación (2.15) en la ecuación (2.17), obtenemos

$$\begin{aligned} \zeta'_{P/\mu^2}(0) = & -\beta[\text{FP } \zeta_{P_{\bar{r}}}(-1/2) + 2(1 - \ln(2))\text{Res } \zeta_{P_{\bar{r}}}(-1/2) \\ & - \frac{1}{\beta}\zeta_P(0) \ln(\mu^2)] + \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} t^{-3/2} e^{-\frac{n^2\beta^2}{4t}} K_{P_{\bar{r}}}(t) dt, \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde FP denota parte finita y Res corresponde a residuo.

Ahora, haciendo $\beta \rightarrow \infty$ en (2.18) y usando (2.7), tenemos que la energía de Casimir es

$$\begin{aligned} E_{cas} = & \left(\frac{1}{2}(\text{FP } \zeta_{P_{\bar{r}}}(-1/2) + 2(1 - \ln(2))\text{Res } \zeta_{P_{\bar{r}}}(-1/2)) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \zeta_P(0) \ln(\mu^2) \right)_{\beta \rightarrow \infty}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Capítulo 3

Energía de Casimir de una membrana, usando teoría de perturbaciones

En nuestro trabajo, estudiamos la energía de Casimir debida a las fluctuaciones cuánticas de un campo escalar sin masa en una membrana de dos dimensiones espaciales con bordes no planos. Vamos a considerar una membrana larga pero finita.

Como se menciona en la introducción, se reparametrizan las coordenadas del problema original, donde los campos obedecen una ecuación de campo libre, considerando que el operador que actúa sobre ellos es el operador usual de Laplace.

Luego, reparametrizamos las coordenadas de tal manera que los bordes pasan a ser lisos en las nuevas coordenadas. Como consecuencia, se tiene que el operador de Laplace es reemplazado por un operador de Laplace-Beltrami, esto es debido al cambio de coordenadas que acabamos de comentar. Entonces, reordenamos los términos de la ecuación resultante, identificando una parte no perturbada (operador de Laplace) más una perturbación que será tratada de acuerdo al método

estándar.

Al obtener los autovalores, calculamos las funciones zeta pertinentes y utilizamos la expresión (2.19) para obtener la energía de Casimir.

3.1. Operador de Laplace-Beltrami

El operador de Laplace-Beltrami es la versión generalizada de la divergencia de un gradiente en coordenadas generalizadas

$$\Delta_{\vec{r}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \right), \quad (3.1)$$

donde $g = |\det(g_{ik})|$ es el valor absoluto del determinante del tensor métrico covariante g_{ik} . El tensor contravariante g^{ik} obedece la condición de normalización $g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$.

3.2. Membrana en 2+1 dimensiones

Sabemos que la energía de Casimir viene dada por la ecuación (2.19), por lo tanto, debemos encontrar los autovalores del operador

$$-\Delta_{\vec{r}} \phi = \lambda \phi. \quad (3.2)$$

Originalmente, suponemos una membrana de dos dimensiones espaciales, en el plano $x - y$. Suponemos que su forma original es aproximadamente rectangular, con el largo en dirección x mide L . En tanto que en la dirección y , tenemos un borde dado por la expresión

$$y(x) = a + h(x), \quad (3.3)$$

donde se cumple que $a \ll L$ y $\text{Max}[h(x)] \ll a$.

Se hace la siguiente reparametrización de coordenadas

$$x = x, \quad y = t(1 + h(x)/a), \quad (3.4)$$

donde tenemos que $0 \leq t \leq a$. Luego, la diferencial dy queda como

$$dy = \left(1 + \frac{h(x)}{a}\right) dt + \frac{th'(x)}{a} dx. \quad (3.5)$$

Al calcular el elemento de longitud espacial, tenemos el tensor métrico covariante (recuerde que no estamos incluyendo la variable temporal)

$$g_{ik} = \begin{bmatrix} 1 + t^2 h'(x)^2/a^2 & th'(x)/a + th(x)h'(x)/a^2 \\ th'(x)/a + th(x)h'(x)/a^2 & 1 + th(x)/a + h(x)^2/a^2 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Luego, el operador de Laplace-Beltrami (3.1) queda expresado como

$$\begin{aligned} -\Delta_{\vec{r}} \phi &= -\partial_x^2 \phi - \frac{1 + t(h'(u)/a)^2}{(1 + h(u)/a)^2} \partial_t^2 \phi + \left(\frac{th''(u)}{a + h(u)} - \frac{2t(h'(u)/a)^2}{(1 + h(u)/a)^2} \right) \partial_t \phi \\ &\quad + \frac{2th'(u)}{a + h(u)} \partial_{tx} \phi. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Como $h(u)/a \ll 1$ la ecuación (3.7) se expande en términos de h/a . Usaremos una aproximación donde se descartan los términos no-diagonales y los términos con derivadas en u , ya que son los de menor orden.

A continuación, reescalamos los parámetros en términos de las cantidades físicas del problema: $x = uL$ y $t = av$, de tal manera de tener coordenadas adimensionales u y v , cuyos dominios son

$$0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1. \quad (3.8)$$

Entonces la ecuación (3.7) queda como

$$-\frac{1}{L^2} \partial_u^2 \phi - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{2\tilde{h}(u)}{a^3} + \frac{3\tilde{h}^2(u)}{a^4} \right) \partial_v^2 \phi \quad (3.9)$$

donde $\tilde{h}(u) = h(uL)$.

A continuación, de la ecuación (3.9), distinguimos una parte que llamaremos “parte no perturbada” que tiene la forma

$$-\frac{1}{L^2}\partial_u^2\phi - \frac{1}{a^2}\partial_v^2\phi = \lambda^0\phi.$$

Mientras que el resto, es considerado como una perturbación:

$$V(u, v)\phi = \left(\frac{2\tilde{h}(u)}{a^3} - \frac{3\tilde{h}(u)^2}{a^4} \right) \partial_v^2\phi. \quad (3.10)$$

La función de onda debe cumplir las C.B. de Dirichlet:

$$\phi_{n,m}(0, v) = \phi_{n,m}(1, v) = 0, \quad \phi_{n,m}(u, 0) = \phi_{n,m}(u, 1) = 0. \quad (3.11)$$

3.3. Teoría de perturbaciones

Usando el método de separación de variables, debemos considerar los autovalores y autofunciones de la ecuación diferencial no perturbada

$$-\Delta_s \phi^0 = -\frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \phi^0}{\partial u^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi^0}{\partial v^2} = \lambda^0 \phi^0. \quad (3.12)$$

Las autofunciones y autovalores para las condiciones de borde dadas, son los siguientes

$$\phi_{n,m}^0(u, v) = 2 \sin(m\pi u) \sin(n\pi v), \quad (3.13)$$

$$\lambda_{n,m}^0 = \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2, \quad (3.14)$$

con $1 \leq n, m < \infty$.

La corrección a primer orden es

$$\lambda_{n,m}^p = \int_0^1 \int_0^1 (\phi_{n,m}^0)^* V(u,v) \phi_{n,m}^0 du dv. \quad (3.15)$$

Ocupando (3.10), tenemos

$$\lambda_{n,m}^p = -\pi^2 n^2 \int_0^1 \left(\frac{2\tilde{h}(u)}{a^3} - \frac{3\tilde{h}(u)^2}{a^4} \right) du. \quad (3.16)$$

Entonces, el autovalor corregido tiene la forma

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 - \pi^2 n^2 \int_0^1 \left(\frac{2\tilde{h}(u)}{a^3} - \frac{3\tilde{h}(u)^2}{a^4} \right) du. \quad (3.17)$$

3.4. Función zeta generalizada

La función zeta asociada a los autovalores (3.17), expresada como la ecuación (A.3), toma la forma

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\alpha m^2 t - \beta n^2 t} dt, \quad (3.18)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{\pi}{L} \right)^2, \\ \beta &= \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 - \pi^2 \int_0^1 \left(\frac{2\tilde{h}(u)}{a^3} - \frac{3\tilde{h}(u)^2}{a^4} \right) du. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Utilizando la fórmula de resumación de Poisson (A.4), para aislar los términos singulares, obtenemos

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{4\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \left[\sqrt{\frac{\pi}{\alpha t}} \left(2 \sum_{m=1}^\infty e^{-\frac{\pi^2 m^2}{\alpha t}} + 1 \right) - 1 \right] \\ &\quad \times \left[\sqrt{\frac{\pi}{\beta t}} \left(2 \sum_{n=1}^\infty e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\beta t}} + 1 \right) - 1 \right] dt. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Como nos interesa el caso $s = -1/2$, podemos sustraer de la ecuación (3.20) los términos divergentes. Por lo cual, nos quedamos con los términos convergentes de la función zeta

$$\begin{aligned}
\text{FP } \zeta(-1/2) &= \frac{1}{4} \int_0^\infty t^{-2} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{n=1}^\infty e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\beta t}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{m=1}^\infty e^{-\frac{\pi^2 m^2}{\alpha t}} \right) dt \\
&\quad - \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\alpha\beta}} \int_0^\infty t^{-5/2} \left(\sum_{m=1}^\infty e^{-\frac{\pi^2 m^2}{\alpha t}} + \sum_{n=1}^\infty e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\beta t}} \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_{n=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\beta t} - \frac{\pi^2 m^2}{\alpha t}} \right) dt. \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Al integrar la variable t de la ecuación (3.21), obtenemos

$$\begin{aligned}
\zeta(-1/2) &= \frac{1}{24}(\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}) - \frac{\zeta_R(3)}{8\sqrt{\alpha\beta}\pi^2}(\beta^{3/2} + \alpha^{3/2}) \\
&\quad - \frac{\pi}{4\sqrt{\alpha\beta}} \sum_{n=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{\pi^2 n^2}{\beta} + \frac{\pi^2 m^2}{\alpha} \right)^{-3/2}. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

La doble sumatoria de la ecuación (3.22) es resuelta aproximando por la fórmula generalizada de Euler-Maclaurin en dos dimensiones, su contribución es muy poca (ver apéndice C).

Por lo tanto, la función zeta generalizada para nuestro caso de estudio, tiene la forma

$$\zeta(-1/2) \simeq \frac{1}{24}(\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}) - \frac{\zeta_R(3)}{8\sqrt{\alpha\beta}\pi^2}(\beta^{3/2} + \alpha^{3/2}). \tag{3.23}$$

Ahora, utilizando el resultado anterior en la expresión para la energía de Casimir (2.19), obtenemos

$$E_{cas} \simeq \frac{1}{48}(\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}) - \frac{\zeta_R(3)}{16\sqrt{\alpha\beta}\pi^2}(\beta^{3/2} + \alpha^{3/2}).$$

Observemos que si tomamos el límite $h \rightarrow 0$, obtenemos el resultado usual de la energía de Casimir para bordes lisos

$$E_{cas} = -\frac{\zeta_R(3)L}{16\pi a^2}. \quad (3.24)$$

3.5. Tipos de rugosidades

3.5.1. Caso I

Primero, consideraremos un borde ondulante, mientras que el otro permanece liso, tal como se muestra en la figura (3.1) y se desarrolló al principio del capítulo.

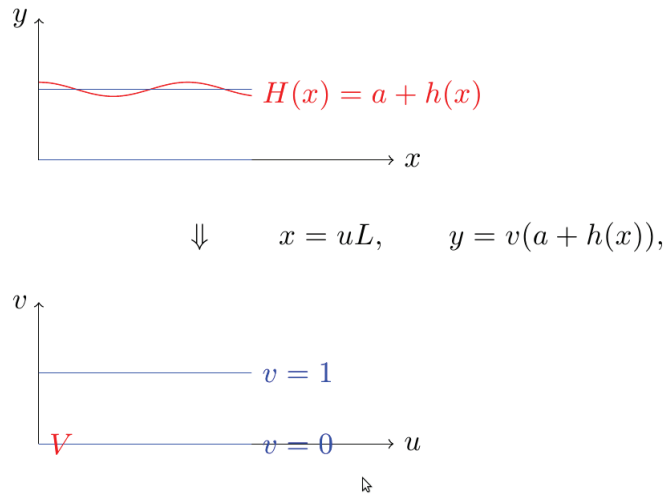


Figura 3.1: Membrana con borde superior rugoso e inferior liso.

Tomaremos, por simplicidad, una forma sinusoidal para la función $h(x)$ en (3.3)

$$h(x) = \epsilon \cos(\omega x + \theta), \quad \epsilon \ll a, \quad (3.25)$$

donde θ es una fase y ω la frecuencia. La energía de Casimir (3.24), para este caso particular tiene la forma

$$\begin{aligned}
E_{cas} &= -\frac{a\zeta_R(3)}{16\pi L^2} + \frac{\pi}{48L} - \frac{\zeta_R(3)L}{16\pi a^2} + \frac{\pi}{48a} \\
&+ \left(-\frac{\zeta_R(3) \sin(\omega L) \cos(\theta)}{16\omega\pi L^3} + \frac{\pi \sin(\theta)}{48a^2 L\omega} + \dots \right) \epsilon \\
&+ \left(\frac{\pi}{64a^3} - \frac{3\zeta_R(3)L}{32\pi a^4} + \dots \right) \epsilon^2.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

3.5.2. Caso II

En nuestro segundo caso, consideramos una membrana rectangular con rugosidad en ambos bordes, como se muestra en la figura (3.2).

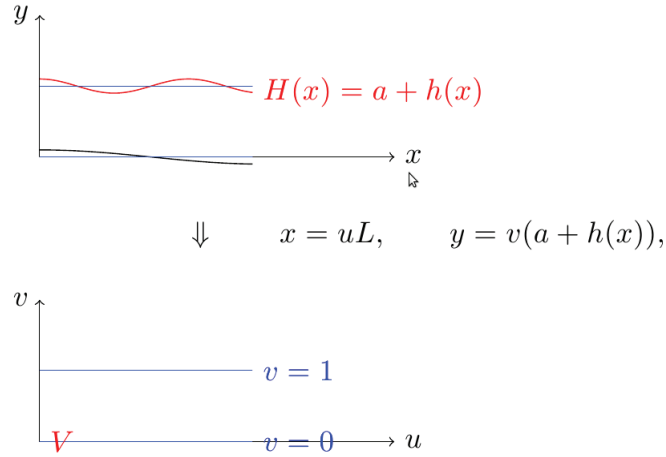


Figura 3.2: *membrana con bordes rugosos, distinta fase y amplitud.*

La separación de los contorno de la membrana está dada por la ecuación (3.3), por lo tanto, podemos expresar ambas rugosidades como

$$h(x) = \epsilon_2 \cos(\omega x + \theta) - \epsilon_1 \cos(\omega x), \quad \epsilon_1, \epsilon_2 \ll a. \tag{3.27}$$

Obtenemos la siguiente energía de Casimir

$$\begin{aligned}
E_{cas} = & -\frac{a \zeta_R(3)}{16\pi L^2} + \frac{\pi}{48L} - \frac{\zeta_R(3) L}{16\pi a^2} + \frac{\pi}{48a} \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\omega L)\zeta_R(3)}{8\omega\pi L^3} + \frac{\sin(\omega L)\pi}{24\omega a^2 L} + \dots \right) (\epsilon_1 - \cos(\theta)\epsilon_2) + \dots \\
& + \frac{1}{2} \left(-\frac{3\zeta_R(3) \cos^2(\omega L) \sin(\theta)}{16\omega\pi a L^3} - \frac{3\zeta_R(3) \sin(\omega L) \sin(\theta)}{8\omega^2\pi L^4 a} \right. \\
& \left. + \frac{3\zeta_R(3) \cos(\theta)L}{16\pi a^4} + \dots \right) \epsilon_1 \epsilon_2 \\
& + \left(-\frac{3\zeta_R(3)L}{32\pi a^4} + \frac{3 \zeta_R(3)}{64 \pi a L^2} + \dots \right) \epsilon_1^2 \\
& + \left(-\frac{3\zeta_R(3)L}{32\pi a^4} + \frac{3 \zeta_R(3)}{64 \pi a L^2} + \dots \right) \epsilon_2^2.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

La energía obtenida dada por la ecuación (3.24) es para una membrana de largo finito. Estamos interesados en saber que términos contribuyen si hacemos tender L , el largo de la membrana a infinito. Si tomamos la densidad lineal de energía E/L y luego tomamos el limite, obtenemos para el caso I

$$\xi_{cas} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{E_{cas}}{L} = -\frac{\zeta_R(3)}{16\pi a^2} - \frac{3\zeta_R(3)\epsilon^2}{32\pi a^4}. \tag{3.29}$$

La fuerza de Casimir por unidad de largo, viene dada por

$$F_{cas} = -\frac{\zeta_R(3)}{8\pi a^3} - \frac{3\zeta_R(3)\epsilon^2}{8\pi a^5}. \tag{3.30}$$

Para el caso II los términos de la ecuación (3.28) que contribuyen a la densidad de energía son

$$\xi_{cas} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{E_{cas}}{L} = -\frac{\zeta_R(3)}{16\pi a^2} - \frac{3\zeta_R(3)}{32\pi a^4} (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 - 2\epsilon_1\epsilon_2 \cos(\theta)), \tag{3.31}$$

dando una fuerza

$$F_{cas} = -\frac{\zeta_R(3)}{16\pi a^3} - \frac{3\zeta_R(3)}{8\pi a^5}(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 - 2\epsilon_1\epsilon_2 \cos(\theta)). \quad (3.32)$$

La contribución a la energía y fuerza de Casimir se encuentra en las amplitudes ϵ_1^2 , $\epsilon_2^2, \epsilon_1\epsilon_2$, aumentando la atracción para el caso I, y para el caso II dependerá de la fase.

Capítulo 4

Energía de Casimir usando el método de WKB

Vamos a volver a considerar la ecuación (3.9), la cual tiene la forma

$$-\Delta_s \phi = -\frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} - Q(u) \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} = \lambda \phi, \quad (4.1)$$

donde

$$Q(u) = \frac{1}{a^2} - \frac{2\tilde{h}(u)}{a^3} + \frac{3\tilde{h}(u)^2}{a^4}. \quad (4.2)$$

Utilizamos el método de separación de variables en (4.1),

$$\phi(u, v) = M_{k,\lambda}(u) N_{\lambda_1}(v),$$

esto nos lleva a dos ecuaciones diferenciales desacopladas

$$\begin{aligned} N''_{\lambda_1}(v) + \lambda_1^2 N_{\lambda_1}(v) &= 0, \\ M''_{k,\lambda}(u) + (\lambda - \lambda_1^2 Q(u)) L^2 M_{k,\lambda}(u) &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Claramente, la solución para $N(v)$ es inmediata

$$N_{\lambda_1}(v) = \sin(\lambda_1 v), \quad \lambda_1 = k\pi, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.4)$$

Como la ecuación (2.19) requiere de la función zeta asociada a los autovalores λ que tenemos en (4.1) y (4.3), podemos expresar una función zeta como una integral de contorno (ver apéndice B):

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{-s} \frac{d \ln D_k(\lambda)}{d\lambda} d\lambda, \quad (4.5)$$

donde Γ es la curva en el plano complejo del espacio de la variable λ , que encierra los autovalores de (4.3) para las condiciones de borde apropiadas (en nuestro caso de Dirichlet). En tanto que $D_k(\lambda)$, es una función meromórfica, que se hace cero cuando λ corresponde a alguno de los autovalores del sistema:

$$D_k(\lambda) = \frac{M_{k,\lambda}(1)}{M_{k,0}(1)}. \quad (4.6)$$

Note que se excluye la solución $\lambda = 0$ (C.B. Dirichlet).

Para calcular la integral (4.5), se toma un contorno rodeando el semi eje real negativo. Al hacer el cambio de variable $\lambda = -k^2 z \pi^2$. La ecuación (4.3) queda como,

$$M_{k,\lambda}''(u) - k^2 L^2 \pi^2 (z + Q(u)) M_{k,\lambda}(u) = 0, \quad (4.7)$$

y por lo tanto

$$\zeta(s) = \frac{\sin(\pi s)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (\pi k)^{-2s} \int_0^{\infty} z^{-s} \frac{d \ln D_k(z)}{dz} dz. \quad (4.8)$$

Buscaremos las soluciones de la ecuación (4.3), usando el método WKB, el cual consiste en buscar soluciones asintóticas en términos del inverso de alguna componente del autovalor. Para ese objetivo, nos damos el siguiente ansatz

$$M_{k,z}(u) = e^{\int_0^u S(\sigma,z,k) d\sigma}. \quad (4.9)$$

Al reemplazar la ecuación (4.9) en (4.7), obtenemos

$$S^2(u, z, k) + \frac{\partial S(u, z, k)}{\partial u} = k^2 L^2 \pi^2 (z + Q(u)). \quad (4.10)$$

A continuación, expresamos la función $S(u, z, k)$ como una expansión asintótica en términos de $1/k$

$$S(u, z, k) = \sum_{i=-1}^N a_i(u, z) k^{-i}. \quad (4.11)$$

Los coeficientes $a_i(u, z)$ son obtenidos por recurrencia, la forma de los primeros términos de la serie son,

$$a_{-1}(u, z) = \pm \pi L \sqrt{z + Q(u)}, \quad (4.12)$$

$$a_0(u, z) = -\frac{1}{2a_{-1}(u)} \frac{\partial a_{-1}(u, z)}{\partial u}, \quad (4.13)$$

$$a_1(u, z) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_0(u, z)}{\partial u} + a_0^2(u, z) \right) / a_{-1}(u, z). \quad (4.14)$$

debido a que tenemos dos soluciones en (4.12), los términos con subíndice impar también tendrán dos soluciones, en cambio los términos con subíndice par, no cambian. Entonces, tendremos dos posibles soluciones para (4.11), tal como uno esperaría de una ecuación diferencial de segundo orden:

$$S_{\pm}(u, z, k) = \pm S_1 + S_2, \quad (4.15)$$

$$S_1(u, z, k) = a_{-1}(u, z)k + \frac{a_1(u, z)}{k} + \frac{a_3(u, z)}{k^3} + \dots, \quad (4.16)$$

$$S_2(u, z, k) = a_0(u, z) + \frac{a_2(u, z)}{k^2} + \frac{a_4(u, z)}{k^4} + \dots, \quad (4.17)$$

donde S_1 representan los términos de subíndice impar y S_2 representa los términos con subíndice par, por lo tanto la solución de la ecuación (4.3) viene dada por

$$M_{k,z}(u) = A e^{\int_0^u S_+(\sigma, z, k) d\sigma} + B e^{\int_0^u S_-(\sigma, z, k) d\sigma}. \quad (4.18)$$

Como tenemos C.B. de Dirichlet y excluimos el autovalor cero, la función $M_{k,z}$ debe tomar la forma

$$M_{k,z}(0) = M_{k,z}(1) = 0, \quad M'_{k,z}(0) = 1, \quad (4.19)$$

donde $M'_{k,z}(0) = 1$ es una normalización para no incluir $z = 0$. Entonces, nuestra solución es

$$M_{k,z}(u) = \frac{e^{\int_0^u S_1(\sigma, z, k) d\sigma}}{2\sqrt{S_1(1, z, k)S_1(0, z, k)}} \left(1 - e^{-2\int_0^u S_1(\sigma, z, k) d\sigma}\right). \quad (4.20)$$

Como se observa en (4.8), debemos utilizar (4.20) en

$$\ln D_k(-k^2 z) = \ln \left(\frac{M_k(1, z)}{M_k(1, 0)} \right),$$

obteniendo

$$\begin{aligned} \ln D_k(-k^2 z) &= \int_0^1 S_1(\sigma, z, k) d\sigma - \frac{\ln(S_1(0, z, k)) + \ln(S_1(1, z, k))}{2} \\ &\quad + \ln \left(1 - e^{-2\int_0^1 S_1(\sigma, z, k) d\sigma}\right) - \ln(2M_k(1, 0)). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Si ahora expandimos los término logarítmico de (4.21) en términos de $1/k$, tenemos

$$\ln(S_1(u, z, k)) = \ln(a_{-1}k) + \frac{a_1}{a_{-1}k^2} + \frac{a_3}{a_{-1}k^4} - \frac{1}{2} \left(\frac{a_1}{a_{-1}k^2} + \frac{a_3}{a_{-1}k^4} \right)^2 + \dots, \quad (4.22)$$

cuya derivada asume la forma

$$\frac{\partial \ln S_1(u, z, k)}{\partial z} = \sum_{i=0}^{\infty} b_{2i}(u, z) k^{-2i}. \quad (4.23)$$

Una vez hecha la expansión, se introduce el término (4.21) dentro de (4.8) y obtenemos la función zeta asociada a los autovalores

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \frac{\sin(\pi s)}{\pi} \int_0^\infty z^{-s} \int_0^1 \sum_{i=0}^\infty \pi^{-2s} \zeta_R(2s+2i-1) \frac{\partial a_{2i-1}(\sigma, z)}{\partial z} d\sigma dz \\
&\quad - \frac{\sin(\pi s)}{2\pi} \int_0^\infty z^{-s} \sum_{i=0}^\infty (b_{2i}(1, z) + b_{2i}(0, z)) \pi^{-2s} \zeta_R(2s+2i) dz \\
&\quad + \frac{\sin(\pi s)}{\pi} \sum_{k=1}^\infty (k\pi)^{-2s} \\
&\quad \times \int_0^\infty dz z^{-s} \frac{2e^{-2 \int_0^1 S_1(\sigma, z, k) d\sigma}}{1 - e^{-2 \int_0^1 S_1(\sigma, z, k) d\sigma}} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^1 S_1(\sigma, z, k) d\sigma.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Donde ζ_R es la función zeta de Riemann. El último término de la ecuación (4.24) no contribuye a los residuos para valores de s enteros o semi enteros.

Al integrar en la variable z , se obtiene

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \frac{\zeta_R(2s-1)\Gamma(s-1/2)\pi^{1-2s}L}{2\Gamma(1/2)\Gamma(s)} \int_0^1 Q(u)^{-s+1/2} du \\
&\quad - \frac{15 \zeta_R(2s+1)\pi^{-1-2s}}{64 \Gamma(s)L} \int_0^1 \left(\frac{dQ(u)}{du} \right)^2 Q(u)^{-s-5/2} \frac{\Gamma(s+5/2)}{\Gamma(7/2)} du + \dots \\
&\quad + \frac{3 \zeta_R(2s+1)\pi^{-1-2s}}{16 \Gamma(s)L} \int_0^1 \frac{d^2Q(u)}{du^2} Q(u)^{-s-3/2} \frac{\Gamma(s+3/2)}{\Gamma(5/2)} du + \dots \\
&\quad - \frac{1}{4} \zeta(2s) \pi^{-2s} (Q(1)^{-s} + Q(0)^{-s}) \\
&\quad - \frac{\zeta_R(2s+2)\pi^{-2-2s}}{2\Gamma(s)L^2} \left(\left[-\frac{18}{64} \left(\frac{dQ(u)}{du} \right)^2 Q(u)^{-s-3} \frac{\Gamma(s+3)}{\Gamma(4)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{4} \frac{d^2Q(u)}{du^2} \frac{\Gamma(s+2)}{\Gamma(3)} Q(u)^{-s-2} \right]_{u=1} \right) \\
&\quad + \left[-\frac{18}{64} \left(\frac{dQ(u)}{du} \right)^2 Q(u)^{-s-3} \frac{\Gamma(s+3)}{\Gamma(4)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \frac{d^2Q(u)}{du^2} \frac{\Gamma(s+2)}{\Gamma(3)} Q(u)^{-s-2} \right]_{u=0} \\
&\quad + \frac{\sin(\pi s)}{\pi} \sum_{k=1}^\infty (\pi k)^{-2s} \int_0^\infty dz z^{-s} \frac{2e^{-2 \int_0^1 S_1(\sigma, z, k) d\sigma}}{1 - e^{-2 \int_0^1 S_1(\sigma, z, k) d\sigma}} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^1 S_1 d\sigma. \tag{4.25}
\end{aligned}$$

4.1. Parte finita de la función zeta generalizada

Como hemos visto, la función zeta esta compuesta por una parte convergente y otra divergente para ciertos valores de s . La parte divergente contribuye a los residuos, estos términos son debidos a los ceros de las funciones $\Gamma(s)$ y $\zeta_R(s)$.

La parte finita de la función zeta, es el término convergente, el cual es obtenido al aislar la parte singular cuando nos damos ciertos valores de s . La energía de Casimir depende de la parte finita de la función zeta cuando $s = -1/2$, como podemos recordar de (2.19). Por lo tanto, reemplazando en (4.25), nos queda

$$\begin{aligned} \text{FP}\zeta\left(-\frac{1}{2}\right) &= -\frac{\zeta_R(3)L}{8\pi} \int_0^1 Q(u) du - \frac{1}{32\pi L} \int_0^1 \left[\left(\frac{dQ(u)}{du} \right)^2 Q(u)^{-2} \right] du \\ &\quad - 2 \sum_{k=1}^{\infty} k \int_0^{\infty} dz z^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2(n+1) \int_0^1 S_1(\sigma, z, k) d\sigma} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^1 S_1(\sigma, z, k) d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{16\pi L} \int_0^1 \frac{d^2 Q(u)}{du^2} Q^{-1}(u) du + \frac{\pi}{48} \left(Q(1)^{1/2} + Q(0)^{1/2} \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

(ver Apéndice D).

4.2. Residuos

En general, un núcleo de calor puede ser expandido cuando t es pequeño, de la siguiente forma

$$K(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i/2-1} t^{i/2-1}. \quad (4.27)$$

Los coeficientes a_j reciben el nombre de “coeficientes de Seeley”.

Es sabido que los polos de la función zeta, están directamente relacionados con la expansión en términos de coeficientes de Seeley del núcleo del calor, dichos coeficientes guardan información sobre la geometría del sistema [3].

Al reemplazar (4.27) en (2.13), se comprueba que los coeficientes de Seeley están relacionados con los residuos de la función zeta.

Algunos residuos de nuestra función zeta, para diferentes valores de s , vienen dados por

$$\begin{aligned} \text{Res}\zeta\left(-\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{2\pi L^2} \left(\left[\frac{54}{1024\Gamma(4)} \left(\frac{dQ(u)}{du} \right)^2 Q(u)^{-5/2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{32\Gamma(3)} \frac{d^2Q(u)}{du^2} Q(u)^{-3/2} \right]_{u=1} \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{54}{1024\Gamma(4)} \left(\frac{dQ(u)}{du} \right)^2 Q(u)^{-5/2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{32\Gamma(3)} \frac{d^2Q(u)}{du^2} Q(u)^{-3/2} \right]_{u=0} \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\text{Res}\zeta(1) = \frac{L}{4\pi} \int_0^1 Q(u)^{-1/2} du, \quad (4.29)$$

$$\text{Res}\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{L}{4\pi} - \frac{1}{8\pi} (Q(1)^{-1/2} + Q(0)^{-1/2}). \quad (4.30)$$

La relación entre los coeficientes de la ecuación (4.27) con los residuos, es la siguiente (ver [3])

$$\begin{aligned} \text{Res}\zeta(1) &= a_{-1}, \\ \text{Res}\zeta(1/2) &= a_{-1/2}/\sqrt{\pi}, \\ \text{Res}\zeta(-1/2) &= -a_{1/2}/2\sqrt{\pi}, \\ \zeta(0) &= a_0. \end{aligned}$$

4.3. Forma general de la energía y fuerza de Casimir

La forma general de la energía de Casimir viene dada por la ecuación (2.19)

$$E_{cas} = \frac{1}{2}(\text{FP } \zeta_{P_{\bar{r}}}(-1/2) + 2(1 - \ln(2))\text{Res } \zeta_{P_{\bar{r}}}(-1/2)) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \zeta_P(0) \ln(\mu^2).$$

Donde la parte entera y el residuo están expresadas en (4.26) y (4.28), respectivamente. Por lo tanto, tenemos una expresión para la energía de Casimir

$$\begin{aligned} E_{cas} = & -\frac{\zeta_R(3)L}{16\pi} \int_0^1 Q(u) du - \frac{1}{64\pi L} \int_0^1 \left(\frac{dQ(u)}{du} \right)^2 Q(u)^{-2} du \\ & \frac{1}{32\pi L} \int_0^1 \frac{d^2Q(u)}{du^2} Q^{-1}(u) du + \frac{\pi}{96} (Q(1)^{1/2} + Q(0)^{1/2}) \\ & -2 \sum_{k=1}^{\infty} k \int_0^{\infty} dz z^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2(n+1) \int_0^1 S_1(\sigma, z, k) d\sigma} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^1 S_1(\sigma, z, k) d\sigma \\ & - \frac{\ln(\tilde{\mu})}{4\pi L^2} \left(\left[\frac{54}{1024\Gamma(4)} \left(\frac{dQ(u)}{du} \right)^2 Q(u)^{-5/2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{32\Gamma(3)} \frac{d^2Q(u)}{du^2} Q(u)^{-3/2} \right]_{u=1} \right. \\ & \left. + \left[\frac{54}{1024\Gamma(4)} \left(\frac{dQ(u)}{du} \right)^2 Q(u)^{-5/2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{32\Gamma(3)} \frac{d^2Q(u)}{du^2} Q(u)^{-3/2} \right]_{u=0} \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

4.4. Tipos de rugosidades

Nos daremos las mismas expresiones que en el capítulo anterior, con el objeto de comparar los métodos utilizados.

4.4.1. Caso I

Primero consideramos el caso que se muestra en la figura (3.1), con $h(x)$ dado en la ecuación (3.25), obtenemos que (4.26), viene dada por

$$\begin{aligned}
\text{FP}\zeta(-1/2) &= -\frac{1}{8} \frac{\zeta_R(3) L}{a^2 \pi} + \frac{\pi}{24a} + \frac{\pi}{24L} + \dots \\
&+ \left(\frac{\zeta_R(3) \sin(\omega L) \cos(\theta)}{4\omega\pi a^3} - \frac{\pi \cos(\theta)}{48a^2} + \frac{\omega \sin(\omega L) \cos(\theta)}{a\pi} + \dots \right) \epsilon \\
&+ \left(-\frac{3\zeta_R(3)L}{16\pi a^4} + \frac{3\omega \cos(\theta) \sin(\theta)}{16\pi a^2} + \dots \right) \epsilon^2. \tag{4.32}
\end{aligned}$$

En tanto que el residuo (4.28), toma la forma

$$\begin{aligned}
\text{Res}\zeta(-1/2) &= \left(\frac{\omega^2 \cos(\omega L + \theta)}{64 \pi} + \dots \right) \epsilon + \frac{15\omega^2}{1024 \pi a} (\sin(2\omega L) \sin(2\theta) \\
&- 2 \cos^2(\omega L) \cos^2(\theta) + \dots) \epsilon^2. \tag{4.33}
\end{aligned}$$

Una vez encontrados los términos, la energía de Casimir es expresada por la ecuación (2.19).

$$\begin{aligned}
E_{cas} &= -\frac{1}{16} \frac{\zeta_R(3) L}{a^2 \pi} + \frac{\pi}{48a} + \frac{\pi}{48L} + \dots \\
&+ \left(\frac{\zeta_R(3) \sin(\omega L) \cos(\theta)}{4\omega\pi a^3} - \frac{\pi \cos(\theta)}{48a^2} + \frac{\omega \sin(\omega L) \cos(\theta)}{a\pi} + \dots \right) \frac{\epsilon}{2} \\
&+ \left(-\frac{3\zeta_R(3)L}{16\pi a^4} + \frac{3\omega \cos(\theta) \sin(\theta)}{16\pi a^2} + \dots \right) \frac{\epsilon^2}{2} \\
&- \frac{\ln(\tilde{\mu})}{2} \left(\frac{1}{64} \frac{\omega^2 \cos(\omega L) \cos(\theta)}{\pi} - \frac{1}{64} \frac{\omega^2 \sin(\omega L) \sin(\theta)}{\pi} + \dots \right) \epsilon \\
&- \frac{\ln(\tilde{\mu})}{2} \left(-\frac{15}{512} \frac{\omega^2 \cos^2(\omega L) \cos^2(\theta)}{a\pi} \right. \\
&\left. + \frac{15}{256} \frac{\omega^2 \cos(\omega L) \cos(\theta) \sin(\omega L) \sin(\theta)}{a\pi} + \dots \right) \epsilon^2. \tag{4.34}
\end{aligned}$$

4.4.2. Caso II

Para el caso de la figura (3.2), cuyo $h(x)$, viene dado por (3.27), tenemos

$$\begin{aligned}
\text{FP}\zeta(-1/2) &= -\frac{\zeta_R(3)L}{8\pi a^2} + \frac{\pi}{24a} + \frac{\pi}{24L} \\
&+ \left(-\frac{\zeta_R(3)\sin(\omega L)}{4\omega\pi a^3} - \frac{\omega\sin(\omega L)}{8\pi a} + \dots \right) (\epsilon_1 - \epsilon_2 \cos(\theta)) + \dots \\
&+ \left(-\frac{3\zeta_R(3)\sin(\theta)}{\omega\pi a^4} - \frac{3\omega\sin(\theta)}{\pi a^2} + \dots \right) \epsilon_1 \epsilon_2 \\
&+ \left(-\frac{3\zeta_R(3)L}{16a^4\pi} - \frac{3}{16} \frac{\zeta_R(3)\sin(\omega L)\cos(\omega L)}{\omega a^4\pi} + \dots \right) \epsilon_1^2 \\
&+ \left(-\frac{3\zeta_R(3)L}{16a^4\pi} + \frac{3}{16} \frac{\zeta_R(3)\sin(\omega L)\cos(\omega L)}{\omega a^4\pi} + \dots \right) \epsilon_2^2. \quad (4.35)
\end{aligned}$$

el residuo

$$\begin{aligned}
\text{Res}\zeta(-1/2) &= -\frac{1}{64} \frac{\omega^2 \cos(\omega L)}{\pi} \epsilon_1 + \frac{1}{64} \frac{\omega^2 \cos(\omega L) \cos(\theta)}{\pi} \epsilon_2 \\
&- \frac{15}{256} \frac{\omega^2 \cos(\omega L) \sin(\omega L) \sin(\theta)}{a\pi} \epsilon_1 \epsilon_2 - \frac{15}{512} \frac{\omega^2 \cos^2(\omega L)}{a\pi} \epsilon_1^2 \\
&- \frac{15}{512} \frac{\omega^2 \cos^2(\omega L) \cos^2(\theta)}{a\pi} \epsilon_2^2 + \dots. \quad (4.36)
\end{aligned}$$

Como la energía de Casimir tiene muchos términos, vamos a considerar solamente el límite $L \rightarrow \infty$.

4.5. Límite $L \rightarrow \infty$

Para el caso I de la sección 4.2.1, la densidad de energía de Casimir viene dada por

$$\zeta_{cas} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{E_{cas}}{L} = -\frac{1}{16} \frac{\zeta_R(3)}{a^2\pi} - \frac{3\zeta_R(3)\epsilon^2}{32\pi a^4} + \frac{\omega^2\epsilon^2}{32\pi a^2}, \quad (4.37)$$

por lo tanto la fuerza fuerza por unidad de largo es

$$F_{cas} = -\frac{\zeta_R(3)}{8\pi a^3} - \frac{3\zeta_R(3)\epsilon^2}{8\pi a^5} + \frac{\omega^2\epsilon^2}{16\pi a^3}. \quad (4.38)$$

Podemos concluir que la energía no depende de la fase y la nueva contribución está en la segunda potencia de ϵ , si ω tiende a cero recuperamos el caso I obtenido por teoría de perturbaciones en el capítulo 3. El error relativo de la ecuación (4.37) es

$$\left| \frac{E_{cas} - E_0}{E_0} \right| = \frac{3}{2} \left(\frac{\epsilon}{a} \right)^2. \quad (4.39)$$

Para el caso II de la sección 4.2.1, la densidad de energía de Casimir viene dada por

$$\begin{aligned} \xi_{cas} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{E_{cas}}{L} &= -\frac{\zeta_R(3)}{16\pi a^2} - \frac{3\zeta_R(3)}{32\pi a^4} (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 - 2\epsilon_1\epsilon_2 \cos(\theta)) \\ &+ \frac{1}{32} \frac{\omega^2}{a^2\pi} (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 - 2\epsilon_1\epsilon_2 \cos(\theta)) + \dots. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Con una fuerza por unidad de largo

$$\begin{aligned} F_{cas} &= -\frac{\zeta_R(3)L}{8\pi a^3} - \frac{3\zeta_R(3)}{8\pi a^5} (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 - 2\epsilon_1\epsilon_2 \cos(\theta)) \\ &+ \frac{1}{16} \frac{\omega^2}{a^3\pi} (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 - 2\epsilon_1\epsilon_2 \cos(\theta)) + \dots. \end{aligned} \quad (4.41)$$

La contribución a la energía y fuerza de Casimir se encuentran en los términos ϵ_1^2 , ϵ_2^2 , $\epsilon_1\epsilon_2$, además depende de la fase. Si ω tiende a cero obtenemos el caso II encontrado por teoría de perturbaciones del capítulo 3.

El error relativo de la energía (4.40) es

$$\left| \frac{E_{cas} - E_0}{E_0} \right| = \left| -\frac{3}{2} a^{-2} + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\zeta_R(3)} \right| \left| \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 - 2\epsilon_1\epsilon_2 \cos(\theta) \right|. \quad (4.42)$$

Si $\theta = 2n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$, el error relativo es mínimo. Si $\theta = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, el error relativo es máximo.

Capítulo 5

Conclusiones

Se ha considerado el problema de las fluctuaciones cuánticas de un campo escalar libre en una membrana de dos dimensiones espaciales con bordes rugosos. El problema original se ha modificado mediante una reparametrización de las coordenadas espaciales, de tal manera que se obtiene la ecuación de un campo escalar sometido a un potencial externo efectivo, pero con bordes lisos. Luego, se utilizan dos métodos diferentes para obtener los autovalores de la ecuación y así comparar su efectividad.

Primero, se utilizó teoría de perturbaciones, obteniendo los autovalores corregidos hasta primer orden, los cuales utilizados en una función zeta de Epstein (A.2). La energía de Casimir dada por la ecuación (3.24), corresponde a la parte finita de la ecuación (2.19). Como se puede ver, este método no permite obtener información con respecto a la contribución de los residuos de la función zeta, los cuales podrían contribuir a la energía de Casimir.

En el capítulo 4, se abordó el mismo problema, usando el método de WKB. Este método permite encontrar una función, que cuando es evaluada en los bordes, sus ceros corresponden a los autovalores del sistema. Luego, ocupando las propiedades del teorema del residuo, se usa una representación integral estandar de la función zeta (4.8). Al integrar, usando $s = -1/2$, se obtuvo la información de la parte

finita junto con la contribución de los residuos. Por tanto, a nuestro juicio, éste método da una mayor información sobre la energía de Casimir que la entregada por teoría de perturbaciones.

Por último, se tomó el límite de largo infinito, donde se constata que el método de WKB contribuye con nuevos términos a la energía de Casimir, con respecto a lo que contribuye teoría de perturbaciones.

Bibliografía

- [1] H. B. G. Casimir, *On the attraction between two perfectly conducting plates*, Proc. K. Ned. Acad. Wet. Proc. **51**, 793–795 (1948).
- [2] M. Bordag, U. Mohideen y V.M. Mostepanenko, *New developments in the Casimir effect*, Phys. Rept. **353**, 1 (2001).
- [3] K. Kirsten, *Basic Zeta Functions and Some Applications in Physics A Window into Zeta and Modular Physics*, Cambridge University Press, 2010.
- [4] B. Droguett y J. C. Rojas, *Casimir energy of non-flat bordered membrane*, Modern Physics Letters A **29**, 1450127 (2014).
- [5] K. A. Milton, *The Casimir Effect: Physical Manifestations of Zero-point Energy*, World Scientific, Singapore, 2001.
- [6] T. Jeffres, *Zeta Function on Surfaces of Revolution*, Cambridge University Press, 2012.
- [7] E. Abdalla, *Non-perturbative Methods in two Dimensional Quantum Field Theory*, World scientific, Singapore, 1991.
- [8] K. Kirsten y A. McKane, *Functional determinants by contour integration methods*, Annals of Physics **308**, 502–527 (2003).
- [9] D. V. Vassilevich, *Heat kernel expansion: User's manual*, Phys. Rept. **388**, 279 (2003).

- [10] M. Abramowitz y I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, 1970.
- [11] C. D. Fosco, F. C. Lombardob y F. D. Mazzitelli, *Casimir effect with dynamical matter on thin mirrors*, arxiv:0807.3539v2, 2008.
- [12] A. A. Saharia, *Dynamical Casimir effect on surface waves*, arxiv: 1010.6065v1, 2010.
- [13] D. T. Alves, C. Farina y P. A. Maia Neto, *Dynamical Casimir effect with Dirichlet and Neumann boundary conditions*, arxiv:hrp-th/0308157v1, 2008.
- [14] E. Elizalde, *Ten physical applications of spectral zeta functions. Lecture Notes in Physics*, Springer, Berlin, 1995.
- [15] M. Bordag, K. Kirsten y J. S. Dowker, *Heat kernels and functional determinants on the generalized cone*, Commun. Math. Phys. **182**, 371–394 (1996).
- [16] R. P. Feynman y A. R. Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals*, McGraw- Hill, New York, 1965.
- [17] L. S. Schulman, *Techniques and applications of path integration*, Wiley, New York, 1981.

Apéndice A

Función zeta

En esta sección mostraremos algunas definiciones matemáticas de la función zeta .

Función zeta de Riemann:

La función zeta de Riemann esta definida en la región, $s \in \mathbb{C}$, $\Re s > 1$, donde es analítica y convergente. Esta función puede ser extendida por continuación analítica a una función meromorfa (función analítica excepto en algunos puntos llamados polos), en todo el plano complejo con un polo único $s = 1$, la forma de la función zeta de Riemann es,

$$\zeta_R(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \quad (\text{A.1})$$

Función zeta de Epstein

Sea $s \in \mathbb{C}$ con $\Re s > \frac{d}{2}$ y $c \in \mathbb{R}_+$, $\vec{r} \in \mathbb{R}_+^d$. La función zeta Epstein se define por

$$\zeta_\epsilon(s, c|\vec{r}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{(c + r_1 m_1^2 + r_2 m_2^2 + \dots + r_d m_d^2)^s}. \quad (\text{A.2})$$

Relación de la función zeta con la función Gamma

Para $\Re s > \frac{d}{2}$, tenemos

$$\zeta_\varepsilon(s, c|\vec{r}) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^d} e^{-t(c+r_1 m_1^2 + r_2 m_2^2 + \dots + r_d m_d^2)}. \quad (\text{A.3})$$

Resumaci3n de Poisson

Sea $r \in \mathbb{C}$ con $\Re r > 0$ y $t \in \mathbb{R}_+$, entonces

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-tr l^2} = \sqrt{\frac{\pi}{tr}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 l^2}{rt}}. \quad (\text{A.4})$$

Apéndice B

Función zeta como integral de contorno

La función zeta asociada con una secuencia de números reales $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$, autovalores del operador P obtenidos al resolver $P\phi_k = \lambda_k\phi_k$, se puede generalizar de la función zeta de Riemann como

$$\zeta_P(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s}, \quad (\text{B.1})$$

donde la parte real del parámetro complejo s es asumida lo suficientemente grande para que converja. Denotamos los autovalores de P , por λ_k , luego

$$\det P = \prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k. \quad (\text{B.2})$$

Podemos expresar el determinante del operador como una función exponencial como

$$\frac{d\zeta_P(0)}{ds} = - \sum_{k=1}^{\infty} \ln(\lambda_k) = - \ln \left(\prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k \right),$$

ocupando la ecuación (B.2) nos queda

$$\det P = e^{-\zeta'(0)}. \quad (\text{B.3})$$

Se tiene que crear un operador que contenga los autovalores de P , y será de la forma

$$D(\lambda) = \frac{\phi(\lambda)}{\phi(0)}, \quad (\text{B.4})$$

de tal manera que la derivada con respecto a λ del logaritmo de (B.4) posea los polos y sean los mismos autovalores, es decir,

$$\frac{d \ln D(\lambda)}{d\lambda} = \frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} \approx \frac{1}{\lambda - \lambda_k} + \dots \quad (\text{B.5})$$

Dada la ecuación (B.5) y por el teorema del residuo de Cauchy la expresión de la función zeta asociada al operador P posee la forma

$$\zeta_P(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} d\lambda \lambda^{-s} \frac{d}{d\lambda} \ln D(\lambda). \quad (\text{B.6})$$

Apéndice C

Fórmula Euler-Maclaurin

La fórmula de Euler-Maclaurin relaciona a integrales con series. Esta fórmula puede ser usada para aproximar integrales por sumas finitas o, de forma inversa, para evaluar series (finitas o infinitas) resolviendo integrales.

Cuando se quiere calcular la expansión asintótica de series, la forma más cómoda de la fórmula de Euler-Maclaurin es:

$$\sum_{n=a}^b f(n) \sim \int_a^b f(x) dx + \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{k!} (f^{2k-1}(b) - f^{2k-1}(a)), \quad (\text{C.1})$$

donde B_{2k} son los números de Bernoulli.

Los polinomios de Bernoulli se pueden obtener recursivamente como sigue

$$B_0(x) = 1, \quad B'_n(x) = nB_{n-1}(x) \quad y \quad \int_0^1 B_n(x) dx = 0, \quad n \geq 1.$$

Los números de Bernoulli son obtenidos $B_n(1) = B_n$.

Haciendo una extensión de la fórmula Euler-Maclaurin a dos dimensiones para

$$F(n, m) = \left(\frac{\pi^2 n^2}{\beta} + \frac{\pi^2 m^2}{\alpha} \right)^{-3/2}, \quad (\text{C.2})$$

la doble sumatoria es representada por

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} F(n, m) &= \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} F(n, m) dm dn + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} F(n, 1) dn \\
&+ \frac{1}{2} \int_1^{\infty} F(1, m) dm - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left[F^{(2k-1)}(1, m)|_{m=1} \right. \\
&+ F^{(2k-1)}(n, 1)|_{n=1} - 2 \sum_{k'=1}^{\infty} \frac{B_{2k'}}{(2k')!} \left. \left(F^{2k-1}(n, m) \right)_{n=1, m=1}^{2k'-1} \right] \\
&- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left[\int_1^{\infty} F^{(2k-1)}(n, m)|_{m=1} dn \right. \\
&+ \left. \int_1^{\infty} F^{(2k-1)}(n, m)|_{n=1} dm \right]. \tag{C.3}
\end{aligned}$$

No se muestra paso a paso la resolución de esta fórmula, solo el resultado final.

Apéndice D

Cálculo de la integral del capítulo

3

Resolveremos la integral

$$I = \frac{\sin(\pi s)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (\pi k)^{-2s} \int_0^{\infty} dz z^{-s} \frac{2e^{-2 \int_0^1 S_1(\sigma, z, k) d\sigma}}{1 - e^{-2 \int_0^1 S_1(\sigma, z, k) d\sigma}} \times \frac{\partial}{\partial z} \int_0^1 S_1(\sigma, z, k) d\sigma, \quad (\text{D.1})$$

el término

$$\frac{1}{1 - e^{-2 \int_0^1 S_1(\sigma, z, k) d\sigma}}, \quad (\text{D.2})$$

es la suma geométrica si

$$e^{-2 \int_0^1 S_1(\sigma, z, k) d\sigma} < 1, \quad (\text{D.3})$$

entonces podemos expresar la integral como

$$I = 2 \frac{\sin(\pi s)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (\pi k)^{-2s} \int_0^{\infty} dz z^{-s} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2(n+1) \int_0^1 S_1(\sigma, z, k) d\sigma} \times \frac{\partial}{\partial z} \int_0^1 S_1(\sigma, z, k) d\sigma. \quad (\text{D.4})$$

Considerando algunos términos de S_1

$$S_1 = \frac{\pi L \sqrt{za^2 + 1} k}{a} - \frac{\pi L \epsilon \cos(\omega u + \phi) k}{a^2 \sqrt{za^2 + 1}} + \dots, \quad (\text{D.5})$$

solo consideraremos en el orden k , ya que para k grandes los términos inversos no contribuyen. Integrando S_1

$$\int_0^\infty S_1 du = \frac{\pi L \sqrt{za^2 + 1} k}{a} - \frac{\pi L \epsilon (\sin(\omega + \phi) - \sin(\phi)) k}{a^2 \omega \sqrt{za^2 + 1}} + \dots, \quad (\text{D.6})$$

expandiendo asintóticamente

$$\int_0^\infty S_1 du \simeq \pi L k \sqrt{z} - \frac{\pi L \epsilon k \cos(\omega u + \phi)}{a^3 \omega \sqrt{z}} + \dots, \quad (\text{D.7})$$

derivando en la variable z

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty S_1 du \simeq \frac{\pi L k}{2\sqrt{z}} + \frac{\pi L \epsilon k \cos(\omega u + \phi)}{2a^3 \omega z^{3/2}} + \dots, \quad (\text{D.8})$$

consideraremos los primeros términos, los cuales contribuyen en el infinito

$$\int_0^\infty S_1 du \simeq \pi L k \sqrt{z} + \dots, \quad (\text{D.9})$$

reemplazando

$$I \simeq \sin(\pi s) \pi^{-2s-1} L \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k^{-2s+1} \int_0^\infty dz z^{-s} \frac{e^{-2(n+1)\pi L k \sqrt{z}}}{\sqrt{z}} + \dots, \quad (\text{D.10})$$

cuando $s = -1/2$

$$\begin{aligned} I &\simeq -\frac{\zeta_R(0)\zeta_R(2)}{\pi L} + \dots \\ &\simeq \frac{\pi}{24L}, \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

cuando L tiende al infinito no contribuye.

Apéndice E

Núcleo del calor

Si el operador P posee un conjunto ortonormal completo de autofunciones, $-P\phi_j = \lambda_j\phi_j$, el núcleo del calor asociado al operador es

$$K(x, y, t) = \sum_j e^{-\lambda_j t} \phi_j(x) \phi_j^\dagger(y). \quad (\text{E.1})$$

Tomando $x = y$, e integrando sobre el espacio euclidiano obtenemos la traza del núcleo del calor que viene dada por

$$K(t) = \sum_j e^{-\lambda_j t}. \quad (\text{E.2})$$

El núcleo del calor satisface las siguientes propiedades

- $K(x, y, t) = K(y, x, t)$.
- $(\nabla - \frac{\partial}{\partial t}) K = 0$.
- $\lim_{t \rightarrow 0^+} K(x, y, t) = \delta_x(y)$.