



**UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**Departamento de Matemáticas**

**MATRICES NO NEGATIVAS CON AUTOVALORES Y  
ENTRADAS DIAGONALES PRESCRITAS**

Tesis para optar al grado de Magister en Ciencias Mención Matemática

**JAIME HANS ALFARO HEIMPELLER**

Profesor Tutor: Dr. Ricardo Soto Montero

**Antofagasta, Chile  
2017**

# Índice general

<b>1. El problema para matrices generales.</b>	<b>7</b>
1.1. Condiciones de Perfect. . . . .	7
1.2. Otras condiciones . . . . .	11
<b>2. El problema para el caso simétrico</b>	<b>18</b>
<b>3. El problema para matrices estructuradas.</b>	<b>27</b>
3.0.1. Matrices normales. . . . .	27
3.0.2. Matrices Persimétricas. . . . .	31
3.0.3. Matrices bisimétricas. . . . .	36
3.0.4. Matrices doblemente estocásticas generalizadas. . . . .	38
<b>Bibliografía</b>	<b>41</b>

# Agradecimientos.

Gracias a la Universidad Católica del Norte y al programa de Magister en Ciencias mención Matemática por el apoyo financiero, gracias a todas las personas que fueron partícipes de esta investigación, ya sea de manera directa o indirecta, en especial a mi profesor guía Dr. Ricardo Soto Montero por la paciencia y la dedicación que me entrego. Gracias a mi pareja y familia que son mi principal apoyo y motivación para cada día continuar.

# Introducción.

Las matrices no negativas  $A = (a_{ij})$  son aquellas que tienen todas sus entradas  $a_{ij}$  reales y mayores o iguales a cero,  $a_{ij} \geq 0$ . Las matrices no negativas aparecen en muchas áreas de las ciencias, ingeniería y economía.

El problema inverso de autovalores consiste en determinar condiciones para la existencia y construcción de una cierta matriz a partir de cierta información espectral. El problema inverso de autovalores para matrices no negativas (llamado NIEP por su sigla en inglés) es el problema de hallar condiciones necesarias y suficientes para que una lista dada de números complejos sea el espectro de alguna matriz no negativa. Este problema permanece sin solución, a la fecha solo ha sido resuelto completamente para  $n \leq 4$ . El caso  $n = 3$  fue resuelto por Lowey y London ([9], 1978). El caso  $n = 4$  fue resuelto en la tesis de E. Meehan ([10], 1998) y posteriormente de manera independiente por J. Torre-Mayo y otros ([24], 2007). Dos subproblemas del NIEP son de gran interés: el problema inverso de autovalor para matrices no negativas con autovalores reales (RNIEP) y el problema inverso de autovalor para matrices simétricas no negativas (SNIEP).

Entre las principales herramientas utilizadas para encontrar condiciones para una solución al NIEP se destacan dos resultados de perturbación matricial y de autovalores. El primero de ellos, debido a A. Brauer ([2], 1952), muestra como modificar un solo autovalor de una matriz arbitraria de orden  $n$ , via una perturbación de rango 1, sin cambiar los restantes  $n - 1$  autovalores. La demostración que presentamos aquí es debida a Reams:

**Teorema 0.1** [14] *Sea  $A$  una matriz arbitraria de orden  $n$  con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Sea  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T$  un autovector de  $A$  asociado con el autovalor  $\lambda_k$  y sea  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$  cualquier vector  $n$ -dimensional. Entonces la matriz  $A + \mathbf{v}\mathbf{q}^T$  tiene autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k + \mathbf{q}^T\mathbf{v}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ .*

**Demostración.** Sea  $U$  una matriz no singular tal que

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

es una matriz sobre triangular, donde podemos escoger la primera columna de  $U$  como  $\mathbf{v}$  ( $U$  existe

debido al Teorema de Schur ). Entonces,

$$\begin{aligned}
U^{-1}(A + \mathbf{v}\mathbf{q}^T)U &= U^{-1}AU + \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} U \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}^T \mathbf{v} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 + \mathbf{q}^T \mathbf{v} & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

■

Mediante el uso del Teorema de Brauer, Teorema 0.1, R. Soto [15] presentó una simple demostración del hecho que toda lista de números reales  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  del tipo Suleimanova, es decir,

$$\lambda_1 > 0 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n,$$

es realizable por una matriz no negativa si y solo si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$  (ver sección 1.1 del capítulo 1). En [1] los autores muestran también, mediante el resultado de Brauer, que toda lista de números complejos  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  satisfaciendo

$$\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0, \quad |\operatorname{Re} \lambda_i| \geq |\operatorname{Im} \lambda_i|, \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

es realizable por una matriz no negativa si y solo si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ .

El segundo resultado, debido a R. Rado y presentado por H. Perfect en [12], es una extensión del Teorema de Brauer que muestra como cambiar, mediante una perturbación de rango  $r$ ,  $r$  autovalores de una matriz de orden  $n$  ( $r \leq n$ ) sin cambiar los restantes  $(n - r)$  autovalores.

**Teorema 0.2** [12] Sea  $A$  una matriz arbitraria de orden  $n$  con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Sea  $X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_r \end{bmatrix}$  tal que el  $\operatorname{rank}(X) = r$  y  $A\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ ,  $r \leq n$ . Sea  $C$  una matriz arbitraria de orden  $n$ . Entonces la matriz  $A + XC$  tiene como autovalores

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$$

, donde  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$  son autovalores de la matriz  $\Omega + CX$  con  $\Omega = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ .

**Demostración.** Sea  $S = \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix}$  una matriz no singular con  $S^{-1} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$ . Entonces  $UX = I_r$ ,  $VY = I_{n-r}$  y  $VX = 0$ ,  $UY = 0$ . Sea  $C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$ ,  $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ ,  $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ . Entonces, puesto que  $AX = X\Omega$ ,

$$\begin{aligned} S^{-1}AS &= \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AX & AY \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Omega & UAY \\ 0 & VAY \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

y

$$\begin{aligned} S^{-1}XCS &= \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} XC \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} CX & CY \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} S^{-1}(A + XC)S &= S^{-1}AS + S^{-1}XCS \\ &= \begin{bmatrix} \Omega & UAY \\ 0 & VAY \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} CX & CY \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Omega + CX & UAY + CY \\ 0 & VAY \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora, de (1) tenemos que  $\sigma(VAY) = \sigma(A) - \sigma(\Omega)$  y además

$$\sigma(A + XC) = \sigma(\Omega + XC) + \sigma(A) - \sigma(\Omega).$$

■

El Teorema de Rado, Teorema 0.2, ha sido empleado con éxito para derivar condiciones suficientes para la existencia y construcción de matrices no negativas con autovalores prescritos (ver [12], [18]). Investigadores de la Universidad Católica del Norte han obtenido diversas versiones del Teorema

de Rado para distintas matrices estructuradas (ver [20], [7], [22], [6]). En todos estos casos, para aplicar el Teorema de Rado y sus distintas versiones necesitamos garantizar la existencia de una matriz  $B$  no negativa de orden  $r$  con espectro  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$  y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$ . El problema de hallar condiciones para la existencia de una matriz no negativa con autovalores y entradas diagonales prescritas, importante en sí mismo, es el tema que motiva la presente tesis, en ella estudiamos condiciones suficientes para la existencia de tales matrices. Esta tesis está organizada del siguiente modo: En el Capítulo 1, se estudia el problema para matrices generales. En particular, discutimos las condiciones de Perfect, y otras de carácter general. En el Capítulo 2, se estudia el problema para matrices simétricas. En este caso, las condiciones de Fiedler [4] juegan un rol importante. Finalmente, en el Capítulo 3 se estudia el problema para matrices no negativas con cierta estructura. En particular se estudia el problema para matrices simétricas, normales, persimétricas, bisimétricas, y doblemente estocásticas generalizadas.

# Capítulo 1

## El problema para matrices generales.

### 1.1. Condiciones de Perfect.

En 1953, Hazel Perfect [11] presentó, basada en el Teorema de Brauer, tal vez la primera condición suficiente para el problema inverso de autovalores para matrices no negativas (NIEP), es decir una condición suficiente para la existencia de una matriz no negativa con autovalores prescritos. Años después, en [15], R.L. Soto uso del Teorema de Brauer para dar una simple demostración del siguiente resultado enunciado por Suleimanova y probado por Perfect en [11].

**Teorema 1.1** Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números reales, con

$$\lambda_1 > 0 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n.$$

Entonces  $\Lambda$  es realizable por una matriz no negativa si y solo si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ .

**Demostración.** [15] Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  tal que

$$\lambda_1 > 0 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n.$$

Sea

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda_2 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda_3 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda_n & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Es claro que  $B$  tiene filas suma constantes igual a 0 y su correspondiente autovector es igual a  $\mathbf{e}^T = (1, 1, \dots, 1)$ . Así por el Teorema de Brauer (Teorema 0.1)

$$A = B + \mathbf{e}\mathbf{q}^T$$

donde

$$\mathbf{q}^T = \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i, -\lambda_2, -\lambda_3, \dots, -\lambda_n \right),$$

es no negativa con espectro  $\Lambda$ . ■

En 1955, Perfect [12] introdujo el Teorema de Rado, Teorema 0.2, el cual como sabemos es una extensión del resultado de Brauer. Basado en el resultado de Rado, Perfect probó una nueva y mas eficiente condición suficiente para una solución al NIEP. Para aplicar el resultado de Rado, es necesario garantizar la existencia de una matriz de orden  $r \leq n$ , con autovalores y entradas diagonales prescritas.

Para  $t = 1$ , el problema es trivial. Para  $t = 2$  la condición necesaria y suficiente es

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= \omega_1 + \omega_2 \\ \lambda_1 &\geq \omega_1 \geq 0 \end{aligned}$$

con matriz realizadora

$$A = \begin{bmatrix} \omega_1 & \lambda_1 - \omega_1 \\ \lambda_1 - \omega_2 & \omega_2 \end{bmatrix}.$$

El siguiente resultado, debido a Perfect [12] da una condición necesaria y suficiente para que  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , sean, respectivamente, los autovalores y entradas diagonales de una matriz  $3 \times 3$  no negativa  $B \in CS_{\lambda_1}$ , donde  $CS_{\alpha}$  denota el conjunto de las matrices de orden  $n$ , con filas suma constante igual a  $\alpha$ .

**Teorema 1.2** [12] *Los números reales  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , son autovalores y entradas diagonales, respectivamente, de una matriz  $3 \times 3$  no negativa  $B \in CS_{\lambda_1}$ , si y solo si:*

$$\begin{aligned} i) & \quad 0 \leq \omega_i \leq \lambda_1 & i = 1, 2, 3 \\ ii) & \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \\ iii) & \quad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \leq \omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_3 + \omega_2\omega_3 \\ iv) & \quad \text{máx}_k \omega_k \geq \lambda_2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

***Demostración.***

*Las condiciones i), ii), iii), son evidentes. Si  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , son las posibles entradas diagonales entonces del Teorema 11 en [2], tenemos*

$$(\lambda_1 - \omega_2)(\lambda_1 - \omega_3) \geq |\lambda_3 - \omega_2| |\lambda_3 - \omega_3|,$$

para algún  $i, j$  con  $i \neq j$ . Tomamos  $i = 2$  y  $j = 3$  entonces de la desigualdad anterior concluimos que

$$\begin{aligned}(\lambda_1^2 - \lambda_3^2) - (\lambda_1 - \lambda_3)(\omega_2 + \omega_3) &\geq 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 &\geq \omega_2 + \omega_3,\end{aligned}$$

pero por la condición ii) obtenemos

$$\begin{aligned}\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \omega_1 &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - (\omega_2 + \omega_3) \geq \lambda_2 \\ \omega_1 &\geq \lambda_2.\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\max_k \omega_k \geq \lambda_2$ , estableciendo la condición necesaria iv).

Luego, supongamos que las condiciones i) a iv) se satisfacen. Asumimos que  $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \omega_3$ , y consideramos la matriz

$$B = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \lambda_1 - \omega_1 \\ \lambda_1 - \omega_2 - p & \omega_2 & p \\ 0 & \lambda_1 - \omega_3 & \omega_3 \end{bmatrix},$$

con  $\omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_3 + \omega_2\omega_3 - p(\lambda_1 - \omega_3) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$ . Claramente los autovalores son  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ; y debido a la condición iii),  $p \geq 0$ . Además

$$\begin{aligned}\lambda_1 - \omega_2 - p &= (\lambda_1 - \omega_2) - \frac{(\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_3 + \omega_1\omega_2 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_3)}{(\lambda_1 - \omega_3)} \\ &= \frac{\lambda_1^2 - \lambda_1\omega_3 - \lambda_1\omega_2 + \omega_2\omega_3 - \omega_2\omega_3 - \omega_1\omega_3 - \omega_1\omega_2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1 - \omega_3)} \\ &= \frac{\lambda_1^2 - \lambda_1\omega_3 - \lambda_1\omega_2 - \omega_1\omega_3 - \omega_1\omega_2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1 - \omega_3)} \\ &= \frac{\lambda_1(\lambda_1 - \omega_2 - \omega_2 + \lambda_2 + \lambda_3) - \omega_1\omega_3 - \omega_1\omega_2 + \lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1 - \omega_3)} \\ &= \frac{\lambda_1\omega_1 - \omega_1\omega_3 - \omega_1\omega_2 + \lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1 - \omega_3)} \\ &= \frac{\omega_1(\lambda_1 - \omega_3 - \omega_2) + \lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1 - \omega_3)} \\ &= \frac{\omega_1^2 - \omega_1\lambda_2 - \omega_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1 - \omega_3)} \\ &= \frac{(\omega_1 - \lambda_2)(\omega_1 - \lambda_3)}{(\lambda_1 - \omega_3)} \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Entonces la matriz  $B$  es estocástica generalizada, con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ . ■

**Ejemplo 1.1** *Construiremos una matriz no negativa con espectro  $\Lambda = \{7, 4, -3\}$  y entradas diagonales  $\{4, 2, 2\}$ . Las condiciones en (1.1) se cumplen. Por tanto existe una matriz no negativa*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 5-p & 2 & p \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

para  $p = 5$ , con las propiedades requeridas.

**Observación 1.1** *Las condiciones de Perfect dan información necesaria para la existencia de una matriz con las propiedades requeridas. Por ejemplo, la lista  $\Lambda = \{6, 5, 1\}$  es realizable por la matriz persimétrica no negativa*

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sin embargo  $\Lambda$  no puede ser el espectro de una matriz Toeplitz no negativa de orden 3. Recordemos que una matriz Toeplitz es constante por diagonales, es decir tiene la forma

$$T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & a & b \\ e & d & a \end{bmatrix}.$$

Entonces, si  $\Lambda$  fuera el espectro de una Toeplitz no negativa, su diagonal debería ser 4, 4, 4. Sin embargo la condición iv) en (1.1) no se cumple ( $4 \not\geq 5$ ). Por tanto no hay una matriz no negativa con autovalores 6, 5, 1 y entradas diagonales 4, 4, 4.

Para  $n \geq 4$  solo se tienen condiciones suficientes. Perfect [12] mostró que si

$$\left. \begin{array}{ll} i) & 0 \leq \omega_k \leq \lambda_1 & k = 1, 2, \dots, t \\ ii) & \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_t = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_t \\ iii) & \omega_k \geq \lambda_k & k = 2, 3, \dots, t \\ iv) & \omega_1 \geq \lambda_k & k = 2, 3, \dots, t \end{array} \right\} \quad (1.2)$$

entonces  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$  y  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_t$ , son los autovalores y entradas diagonales, respectivamente, de una matriz  $t \times t$  no negativa  $B \in CS_{\lambda_1}$ . En este caso, Perfect en [12] presenta la siguiente matriz realizadora

$$B = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 - \lambda_2 & \dots & \dots & \omega_t - \lambda_t \\ \omega_1 - \lambda_2 & \omega_2 & \dots & \dots & \omega_t - \lambda_t \\ \omega_1 - \lambda_3 & \omega_2 - \lambda_2 & \dots & \dots & \omega_t - \lambda_t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1 - \lambda_t & \omega_2 - \lambda_2 & \dots & \dots & \omega_t \end{bmatrix}.$$

**Ejemplo 1.2** La listas  $\lambda_i : 15, 8, 3, 0, -1$  y  $\omega_i : 9, 8, 4, 3, 1$ , verifican las condiciones de Perfect en (1.2). Entonces podemos construir la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 9 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 10 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

con las propiedades requeridas.

**Observación 1.2** Observemos que las condiciones (1.2) son solo suficientes. En efecto,

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

es una matriz no negativa que tiene espectro  $\Lambda = \{7, 5, 2, 1\}$  y entradas diagonales 4, 4, 4, 3. Sin embargo  $\Lambda$  no satisface la condición iv) en (1.2) ( $\lambda_2 = 5 \not\leq 4 = \omega_1$ )

## 1.2. Otras condiciones

En [21] los autores extienden ligeramente el Teorema 1.2 al caso de una lista  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  de números complejos:

**Teorema 1.3** [21] Los números complejos  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ( donde  $\lambda_1 \geq |\lambda_i|$   $i = 2, 3$  ) y los números reales  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  son, respectivamente, los autovalores y entradas diagonales de una matriz  $B \in CS_{\lambda_1}$  no negativa de orden 3 si y solo si

$$\left. \begin{array}{ll} (i) & 0 \leq \omega_i \leq \lambda_1 \\ (ii) & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \\ (iii) & \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 \leq \omega_1 \omega_2 + \omega_1 \omega_3 + \omega_2 \omega_3 \\ (iv) & \text{máx}_k x_k \geq \text{Re } \lambda_2 \end{array} \right\} \quad (1.3) \quad i = 1, 2, 3$$

**Demostración.** Sean  $\lambda_2, \lambda_3$  números complejos ( $\overline{\lambda_2} = \lambda_3$ ). La demostración es similar a la realizada por Perfect en [12]. Las condiciones necesarias (i), (ii), (iii) son evidentes. Del resultado de Brauer [2] sobre la localización de autovalores con los ovalos de Cassini, tenemos

$$|\lambda_3 - \omega_i| |\lambda_3 - \omega_j| \leq (\lambda_1 - \omega_i)(\lambda_1 - \omega_j)$$

con  $i \neq j$ . Entonces para  $i = 2, j = 3$ , tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} (\lambda_1^2 - (\operatorname{Re} \lambda_3)^2) - (\lambda_1 - \operatorname{Re} \lambda_3)(\omega_2 + \omega_3) &\geq 0 \\ \lambda_1 + \operatorname{Re} \lambda_3 - (\omega_2 + \omega_3) &\geq 0 \\ \lambda_1 + \operatorname{Re} \lambda_3 &\geq (\omega_2 + \omega_3) \end{aligned}$$

Entonces por lo anterior y por (ii) obtenemos la última de las condiciones  $\omega_1 \geq \operatorname{Re} \lambda_3$ . Así teniendo la condición (iv), podemos verificar si estas condiciones son también suficientes. Supongamos que las condiciones (i), (ii), (iii), (iv) se satisfacen. Un cálculo directo muestra que  $B \in CS_{\lambda_1}$ ,

$$B = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \lambda_1 - \omega_1 \\ \lambda_1 - \omega_2 - p & \omega_2 & p \\ 0 & \lambda_1 - \omega_3 & \omega_3 \end{bmatrix},$$

donde

$$p = \frac{1}{(\lambda_1 - \omega_3)} [\omega_1 \omega_2 + \omega_1 \omega_3 + \omega_2 \omega_3 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3],$$

es una matriz no negativa con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ . ■

**Ejemplo 1.3** *Construiremos una matriz con espectro  $\{7, 3 + i, 3 - i\}$  y entradas diagonales 6, 5, 2. Como las condiciones en (1.3) se satisfacen, entonces existe una matriz no negativa*

$$B_p = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 2 - p & 5 & p \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix},$$

la que puesto que  $p = 0$ , da origen a

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

El corolario siguiente da condiciones suficientes para la existencia y construcción de una matriz no negativa  $M \in CS_{\lambda_1}$  de orden 4, con una espectro complejo y entradas diagonales prescritas.

**Corolario 1.1** [21] *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, a + bi, a - bi\}$  una lista de números complejos ( con  $\lambda_1 \geq |a \pm bi|, |\lambda_2|$ ). Si existen números reales  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , que satisfacen las condiciones*

$$\left. \begin{aligned} i) & \quad 0 \leq \omega_k \leq \lambda_1 & i = 1, 2, 3, 4 \\ ii) & \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \lambda_1 + 2a, \\ iii) & \quad \omega_1 \omega_2 + \omega_1 \omega_3 + \omega_2 \omega_3 \geq 2a\lambda_1 + a^2 + b^2 \\ iv) & \quad \text{máx } \omega_k \geq a & \text{máx } \omega_k \geq |\lambda_2| \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

entonces

$$M = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & \lambda_1 - \omega_1 \\ \omega_1 - \lambda_2 & \lambda_2 & 0 & \lambda_1 - \omega_1 \\ \lambda_1 - \omega_3 - p & 0 & \omega_2 & p \\ 0 & 0 & \lambda_1 - \omega_3 & \omega_3 \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda_2 \geq 0$$

o

$$M' = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & \lambda_1 - \omega_1 \\ -\lambda_2 & \omega_1 + \lambda_2 & 0 & \lambda_1 - \omega_1 \\ \lambda_1 - \omega_3 - p & 0 & \omega_2 & p \\ 0 & 0 & \lambda_1 - \omega_3 & \omega_3 \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda_2 < 0,$$

donde  $p = \frac{1}{(\lambda_1 - \omega_3)} [\omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_3 + \omega_2\omega_3 - (2a\lambda_1 + a^2 + b^2)]$ , es una matriz no negativa con espectro  $\Lambda$ .

**Demostración.** Ya que  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  satisfacen las condiciones en (1.4) y por Teorema 1.3, podemos construir la matriz

$$B = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \lambda_1 - \omega_1 \\ \lambda_1 - \omega_2 - p & \omega_2 & p \\ 0 & \lambda_1 - \omega_3 & \omega_3 \end{bmatrix}.$$

Sea  $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3$  con  $\Lambda_1 = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ ,  $\Lambda_2 = \{a + bi\}$ ,  $\Lambda_3 = \{a - bi\}$ , y sea  $\Gamma_1 = \{\omega_1, \lambda_2\}$ ,  $\Gamma_2 = \{\omega_2\}$ ,  $\Gamma_3 = \{\omega_3\}$  las correspondientes listas realizables ( como en el Teorema 2.1 en [21]). Así tenemos

$$A = \left[ \begin{array}{cc|cc} \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_1 - \lambda_2 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \omega_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \omega_3 \end{array} \right] \quad y \quad A' = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ -\lambda_2 & \omega_1 + \lambda_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \omega_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \omega_3 \end{array} \right]$$

para  $\lambda_2 \geq 0$  y  $\lambda_2 < 0$ , respectivamente.

Usando el Teorema de Rado obtenemos

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_1 - \lambda_2 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \omega_1 \\ \lambda_1 - \omega_2 - p & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & \lambda_1 - \omega_3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & \lambda_1 - \omega_1 \\ \omega_1 - \lambda_2 & \lambda_2 & 0 & \lambda_1 - \omega_1 \\ \lambda_1 - p - \omega_2 & 0 & \omega_2 & p \\ 0 & 0 & \lambda_1 - \omega_3 & \omega_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
M' &= \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ -\lambda_2 & \omega_1 + \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \omega_1 \\ \lambda_1 - \omega_2 - p & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & \lambda_1 - \omega_3 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & \lambda_1 - \omega_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_2 + \omega_1 & 0 & \lambda_1 - \omega_1 \\ \lambda_1 - p - \omega_2 & 0 & \omega_2 & p \\ 0 & 0 & \lambda_1 - \omega_3 & \omega_3 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
X &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
C &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \omega_1 \\ \lambda_1 - \omega_2 - p & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & \lambda_1 - \omega_3 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

■

**Ejemplo 1.4** *Construiremos una matriz no negativa con espectro  $\Lambda = \{8, 3, -2 + i, -2 - i\}$  y entradas diagonales  $3, 3, 1, 0$ . Primero construiremos una matriz  $B$  con autovalores  $8, -2 + i, -2 - i$ , y entradas diagonales  $3, 1, 0$ . Puesto que las condiciones (1.3) se cumplen, tenemos*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ \frac{13}{4} & 1 & \frac{15}{4} \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Luego particionamos  $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3$ , con  $\Lambda_1 = \{8, 3\}$ ,  $\Lambda_2 = \{-2 + i\}$  y  $\Lambda_3 = \{-2 - i\}$  y le asociamos listas realizables  $\Gamma_1 = \{3, 3\}$ ,  $\Gamma_2 = \{1\}$ ,  $\Gamma_3 = \{0\}$ . Puesto que  $\lambda_2 \geq 0$ , tenemos*

$$A = \left[ \begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

y usando el Teorema de Rado (Teorema 0.2),

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ \frac{13}{4} & 0 & 0 & \frac{15}{4} \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ \frac{13}{4} & 0 & 1 & \frac{15}{4} \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix},$$

con las propiedades requeridas.

En 1958, Farahat y Lederman [3], muestran como construir una matriz, no necesariamente no negativa, con autovalores y entradas diagonales prescritas. En [17], los autores presentan el Teorema de Farahat y Lederman en la siguiente forma:

**Teorema 1.4** [17] Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos y sea  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  una lista de números reales tal que  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ . Sea

$$p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n)$$

y

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_1 = x - a_1, \quad \dots \quad \mu_n = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n),$$

con

$$p(x) = \mu_n + k_1 \mu_{n-1} + k_2 \mu_{n-2} + \cdots + k_{n-1} \mu_1 + k_n. \quad (1.5)$$

Si  $k_1, k_2, \dots, k_n$  son todos no positivos, entonces existe una matriz no negativa de orden  $n$ , con espectro  $\Lambda$  y con entradas diagonales  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

**Demostración.** El polinomio  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$  constituye una base para el espacio de polinomios de grado menor o igual a  $n$ . Igualando los coeficientes de  $x^{n-1}$  en ambos lados de (1.5) obtenemos que  $k_1 = 0$ . Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & \dots & -k_2 & a_n \end{bmatrix}.$$

Expandiendo el determinante de  $A - xI$  con respecto a la última fila se sigue que  $A$  tiene como polinomio característico  $p(x)$  y espectro  $\Lambda$ . Además si  $k_1, k_2, \dots, k_n$  son todos no positivos,  $A$  es no negativa. ■

**Ejemplo 1.5** *Construiremos una matriz con espectro  $\{9, 4, 0, -2\}$  y entradas diagonales  $5, 3, 2, 1$ . Aplicamos el Teorema 1.4:*

$$\begin{aligned} p(x) &= x(x-9)(x-4)(x+2) \\ &= x^4 - 11x^3 + 10x^2 + 72x. \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde  $k_1 = 0$ . Por otro lado formamos una base de polinomios con las entradas diagonales

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 & u_1 &= (x-5) & u_2 &= (x-5)(x-3) \\ u_3 &= (x-5)(x-3)(x-2) & u_4 &= (x-5)(x-3)(x-2)(x-1). \end{aligned}$$

Así tenemos

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-5)(x-3)(x-2)(x-1) + k_1 [(x-5)(x-3)(x-2)] \\ &\quad + k_2 [(x-5)(x-3)] + k_3 [(x-5)] + k_4, \end{aligned}$$

desarrollando y ordenando obtenemos

$$p(x) = x^4 - 11x^3 + x^2(k_2 + 41) + x(k_3 - 8k_2 - 61) + (k_4 - 5k_3 + 15k_2 + 30) \quad (1.7)$$

Comparando los coeficientes de los polinomios (1.6) y (1.7) tenemos

$$k_2 + 41 = 10 \quad \longrightarrow \quad k_2 = -31$$

$$k_3 - 8k_2 - 61 = 72 \quad \longrightarrow \quad k_3 = -115$$

$$k_4 - 5k_3 + 15k_2 + 30 = 0 \quad \longrightarrow \quad k_4 = -140.$$

Conocidos los valores  $k_i$ , los cuales en este ejemplo son todos negativos, construimos la matriz no negativa

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 140 & 115 & 31 & 1 \end{bmatrix},$$

con los autovalores y entradas diagonales deseadas.

Usualmente, el particionar una lista dada nos lleva a mejores soluciones. Esto es precisamente lo que hace el Teorema de Rado. Para ilustrar como este resultado se aplica a la construcción de una matriz no negativa con un espectro prescrito, consideremos el siguiente

**Ejemplo 1.6** *Sea  $\Lambda = \{6, 1, 1, -4, -4\}$  particionada como*

$$\Lambda_1 = \{6, -4\}, \quad \Lambda_2 = \{1, -4\} \quad \Lambda_3 = \{1\}$$

*Asociamos las listas realizables*

$$\Gamma_1 = \{4, -4\} \quad \Gamma_2 = \{4, -4\} \quad \Gamma_3 = \{0\}.$$

De (1.2) computamos la matriz no negativa

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & 4 & \frac{1}{2} \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

con autovalores 6, 1, 1 y entradas diagonales 4, 4, 0. Entonces aplicando Rado tenemos que

$$\begin{aligned} A &= \left[ \begin{array}{cc|cc|c} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 & 4 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & 4 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

es no negativa con espectro  $\Lambda$ .

## Capítulo 2

# El problema para el caso simétrico

En este Capítulo consideramos el estudio de condiciones necesarias y/o suficientes para la existencia y construcción de una matriz simétrica no negativa con autovalores y entradas diagonales prescritas. El siguiente resultado debido a Soto, Rojo, Moro, Borobia [20] da una versión simétrica del Teorema de Rado (Teorema 0.2):

**Teorema 2.1** [20] *Sea  $A$  una matriz simétrica de orden  $n$  con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , y, para algun  $r \leq n$ , sea  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r\}$  un conjunto ortonormal de autovectores de  $A$  generando el subespacio invariante asociado con  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ . Sea  $X$  una matriz  $n \times r$  con la  $i$ -ésima columna  $\mathbf{x}_i$ . Sea  $\Omega = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ , y  $C$  una matriz simétrica. Entonces la matriz simétrica  $A + XCX^T$  tiene autovalores  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$  donde  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$  son autovalores de la matriz  $\Omega + C$ .*

**Demostración.** Ya que las columnas de  $X$  son un conjunto ortonormal, podemos completar  $X$  a una matriz ortogonal  $W = \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix}$ , donde  $XX^T = I_r, YY^T = I_{n-r}, X^TY = 0, Y^TX = 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} W^{-1}AW &= \begin{bmatrix} X^T \\ Y^T \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X^T \\ Y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AX & AY \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Omega & X^T AY \\ 0 & Y^T AY \end{bmatrix} \\ W^{-1}(XCX^T)W &= \begin{bmatrix} X^T \\ Y^T \end{bmatrix} XCX^T \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$W^{-1}(A + XCX^T)W = \begin{bmatrix} \Omega + C & X^T AY \\ 0 & Y^T AY \end{bmatrix},$$

y  $A + XCX^T$  es una matriz simétrica con autovalores  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ . ■

Los autores en [20] prueban la siguiente condición suficiente para la existencia de una matriz simétrica no negativa con espectro prescrito.

**Teorema 2.2** [20] Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números reales con  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  y, para algún  $t \leq n$ , sea  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_t$  números reales que satisfacen  $0 \leq \omega_k \leq \lambda_i$   $k = 1, 2, \dots, t$ . Supongamos que existe:

- i) una partición  $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \dots \cup \Lambda_t$ , con  $\Lambda_k = \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}$ ,  $\lambda_{11} = \lambda_1$ ,  $\lambda_{k1} \geq 0$ ;  $\lambda_{k1} \geq \lambda_{k2} \geq \dots \geq \lambda_{kp_k}$ , tal que para cada  $k = 1, 2, \dots, t$  la lista  $\Gamma_k = \{\omega_k, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}$  es realizable por una matriz simétrica no negativa de orden  $p_k$  y,
- ii) existe una matriz simétrica no negativa de orden  $t$  con autovalores  $\lambda_{11}, \lambda_{21}, \dots, \lambda_{t1}$ , y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_t$ .

Entonces  $\Lambda$  es realizable por una matriz simétrica no negativa de orden  $n$ .

**Demostración.** De i) para cada  $k = 1, 2, \dots, t$ , denotemos por  $A_k$  la matriz simétrica no negativa de orden  $p_k$  que realiza  $\Gamma_k$ . Entonces la matriz  $A = \text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_t\}$  es simétrica no negativa con espectro  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_t$ . Sea  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_t\}$  un conjunto ortonormal de autovectores de  $A$  asociados, respectivamente, con  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_t$ . Entonces, la matriz  $X$  de  $n \times r$  con la  $i$ -ésima columna  $\mathbf{x}_i$  satisface  $AX = X\Omega$ , donde  $\Omega = \text{diag}\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_t\}$ . Además,  $X$  es no negativa, ya que cada  $\mathbf{x}_i$  contiene el autovalor de Perrón de  $A_i$  y sus restantes entradas son ceros. Sea  $B$  una matriz simétrica no negativa de orden  $t$  con espectro  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t\}$  y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_t$ . Si tomamos  $C = B - \Omega$ , la matriz  $C$  es simétrica no negativa, y  $B = \Omega + C$  tiene autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ . Por Teorema 2.1, la matriz  $A + XCX^T$  es simétrica con espectro  $\Lambda$ . Además es no negativa, ya que todas las entradas de  $A, X,$  y  $C$  son no negativas. ■

Para aplicar la versión simétrica de Rado, es decir el Teorema 2.1, como también para aplicar la condición suficiente dada por el Teorema 2.2, necesitamos garantizar la existencia de una matriz simétrica no negativa  $r \times r$ ,  $r \leq n$ , con autovalores y entradas diagonales prescritas. Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de matriz simétrica (no necesariamente no negativa) son conocidas. Ellas son debidas a Horn [5]: Existe una matriz simétrica real con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$  y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_t$  si y solo si el vector  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t)$  de autovalores mayoriza al vector  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_t)$  de entradas diagonales, es decir, si y solo si

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^k \lambda_i &\geq \sum_{i=1}^k \omega_i && \text{para } k = 1, 2, \dots, t-1 \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i &= \sum_{i=1}^n \omega_i. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Las primeras condiciones para la existencia de una matriz simétrica **no negativa** con autovalores y entradas diagonales prescritas son debidas a Fiedler ([4], 1974). Empezamos con el siguiente resultado de Fiedler:

**Teorema 2.3** [4] Si  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  y  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , son los autovalores y las entradas diagonales, respectivamente, de una matriz simétrica no negativa entonces:

$$\begin{aligned} i) & \quad \lambda_1 \geq \omega_1 \\ ii) & \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \omega_i \\ iii) & \quad \sum_{i=1}^s \lambda_i + \lambda_k \geq \sum_{i=1}^{s-1} \omega_i + \omega_{k-1} + \omega_k \end{aligned} \tag{2.2}$$

para todo  $s$  y  $k$ , con  $1 \leq s < k \leq n$ .

Para probar el Teorema 2.3 necesitamos el siguiente resultado:

**Lema 2.1** [4] Sean los números reales  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  y  $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \dots \geq \omega_n$ , con  $n \geq 2$ . Si  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  y  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  son autovalores y entradas diagonales, respectivamente, de una matriz simétrica no negativa, entonces

$$\lambda_1 + \lambda_n \geq a_{n-1} + a_n.$$

Prueba del Teorema 2.3

**Demostración.**

Las condiciones *i*), *ii*) y *iii*) para  $k = s + 1$  se cumplen por (2.1) y la condiciones *iii*) en (2.2) para  $s = 1$  y  $k = n$  se cumplen por el Lema 2.1. Probaremos las condiciones restante *iii*) en (2.2) por inducción con respecto a  $n$ .

Para  $n = 1, 2$ , no hay nada que probar.

Sea  $n \geq 3$  y supongamos que todas las condiciones *iii*) se satisfacen para matrices de orden  $(n - 1)$ .

Si  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  son autovalores de una matriz simétrica  $A$  de orden  $n$  y  $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_{n-1}$  son autovalores de una submatriz principal  $\hat{A}$  de orden  $(n - 1)$  de  $A$ , entonces

$$\lambda_i \geq \hat{\lambda}_i \geq \lambda_{i+1} \quad i = 1, 2, \dots, n - 1. \tag{2.3}$$

Primero, sea un par  $(s, k)$  tal que  $k < n$ . Sea  $\hat{A}$  la submatriz principal de  $A$  obtenida eliminando la fila y columna de  $A$  que contenga al elemento diagonal  $\omega_n$ .

Los autovalores  $\hat{\lambda}_i$  de  $\hat{A}_i$  satisfacen, por hipótesis de inducción, la desigualdad

$$\sum_{i=1}^s \hat{\lambda}_i + \hat{\lambda}_k \geq \sum_{i=1}^{s-1} \omega_i + \omega_{k-1} + \omega_k$$

y por (2.3) obtenemos

$$\sum_{i=1}^s \lambda_i + \lambda_k \geq \sum_{i=1}^{s-1} \omega_i + \omega_{k-1} + \omega_k.$$

Ahora sea  $k = n$  y  $s > 1$ .

Sea  $\widehat{A}$  esta vez la submatriz principal de  $A$  obtenida eliminando la fila y columna que contenga a  $\omega_1$ .

Los autovalores  $\widehat{\lambda}_i$  de  $\widehat{A}$  satisfacen, por hipótesis de inducción, la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{s-1} \widehat{\lambda}_i + \widehat{\lambda}_{n-1} \geq \sum_{i=2}^{s-1} \omega_i + \omega_{n-1} + \omega_n.$$

Puesto que  $\sum_{i=1}^{n-1} \widehat{\lambda}_i = \sum_{i=2}^n \omega_i$ , entonces

$$\sum_{i=s}^{n-2} \widehat{\lambda}_i \leq \sum_{i=s}^{n-2} \omega_i.$$

Por (2.3) esto implica

$$\sum_{i=s+1}^{n-1} \lambda_i \leq \sum_{i=s}^{n-2} \omega_i,$$

lo cual es equivalente a

$$\sum_{i=1}^s \lambda_i + \lambda_n \geq \sum_{i=1}^{s-1} \omega_i + \omega_{n-1} + \omega_n.$$

Esto completa la demostración del Teorema.. ■

Fiedler señala que para  $t = 1, 2, 3$ , las condiciones (2.2) son también suficientes. En efecto, para  $t = 1$  es trivial. Para  $t = 2$  las condiciones (2.2) se convierten en

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 \geq \omega_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \omega_1 + \omega_2 \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

y ellas son también suficientes para la existencia de una matriz  $B$  simétrica no negativa de orden 2 con autovalores  $\lambda_1 \geq \lambda_2$  y entradas diagonales  $\omega_1 \geq \omega_2 \geq 0$ , donde

$$B = \begin{bmatrix} \omega_1 & \sqrt{(\lambda_1 - \omega_1)(\lambda_1 - \omega_2)} \\ \sqrt{(\lambda_1 - \omega_1)(\lambda_1 - \omega_2)} & \omega_2 \end{bmatrix}.$$

Para  $t = 3$  las condiciones (2.2) son necesarias y suficientes:

**Lema 2.2** [4] *Las condiciones*

$$\left. \begin{array}{l} i) \quad \lambda_1 \geq \omega_1 \\ ii) \quad \lambda_1 + \lambda_2 \geq \omega_1 + \omega_2 \\ iii) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \\ iv) \quad \lambda_2 \leq \omega_1 \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

son suficientes para la existencia de una matriz simétrica no negativa de orden 3 con autovalores  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$  y entradas diagonales  $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \omega_3 \geq 0$ .

**Demostración.** En virtud del Teorema 2.1 solo resta probar la suficiencia. La demostración que aquí se pone no es la misma de Fiedler. En efecto nosotros aplicamos el Teorema de Rado.

Suponemos que  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  satisfacen las condiciones (2.5). Definimos

$$\hat{\lambda}_2 = \lambda_1 + \lambda_2 - \omega_1.$$

Entonces los números  $\hat{\lambda}_2, \lambda_3$  y  $\omega_2, \omega_3$  satisfacen las condiciones (2.4). Así construimos

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \omega_2 & \tau \\ \tau & \omega_3 \end{bmatrix},$$

que tiene como autovalores  $\hat{\lambda}_2, \lambda_3$  y entradas diagonales  $\omega_2, \omega_3$ .

Por otro lado como

$$\begin{aligned} \lambda_1 \geq \lambda_2 \quad y \quad \lambda_1 \geq \omega_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \hat{\lambda}_2 + \omega_1 \quad , \end{aligned}$$

por las condiciones (2.4) construimos

$$B = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_2 & \sigma \\ \sigma & \omega_1 \end{bmatrix}.$$

Luego aplicando el Teorema 2.1 la matriz

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & \tau \\ 0 & \tau & \omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu_1 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \omega_1 & \mu_1\sigma & \mu_2\sigma \\ \mu_1\sigma & \omega_2 & \tau \\ \mu_2\sigma & \tau & \omega_3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde  $\mu^T = (\mu_1, \mu_2)$  es un autovector normalizado correspondiente  $\hat{\lambda}_2$  de  $\hat{A}$  y

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu_1 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

es simétrica no negativa con las propiedades requeridas. ■

**Observación 2.1** En [20], siguiendo los resultados de Fiedler [4], los autores establecen un procedimiento para la construcción de una matriz  $B$  simétrica no negativa de orden 3 con autovalores y entradas diagonales prescritas, el cual presentamos a continuación:

1. Definimos  $\mu = \lambda_1 + \lambda_2 - \omega_1$

2. Construimos la matriz simétrica no negativa

$$T = \begin{bmatrix} \omega_2 & \tau \\ \tau & \omega_3 \end{bmatrix}, \quad \tau = \sqrt{(\mu - \omega_2)(\mu - \omega_3)}$$

con autovalores  $\mu$  y  $\lambda_3$ . Observemos que, utilizando (2.5), tenemos

$$\mu = \lambda_1 + \lambda_2 - \omega_1 \geq \omega_1 + \omega_2 - \omega_1 = \omega_1.$$

3. Encontramos el autovector de Perron normalizado  $\mathbf{u}$  de  $T$

$$T\mathbf{u} = \mu\mathbf{u} \quad \mathbf{u}^T\mathbf{u} = \mathbf{1}.$$

4. Construimos una matriz simétrica no negativa de orden 2

$$S = \begin{bmatrix} \mu & s \\ s & \omega_1 \end{bmatrix}, \quad s = \sqrt{(\lambda_1 - \mu)(\lambda_1 - \omega_1)}$$

con autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . Se deduce de (2.5) que  $\lambda_1 - \mu = \omega_1 - \lambda_2 \geq 0$ .

5. Por el Lema 2.2 en [4], la matriz

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} T & s\mathbf{u} \\ s\mathbf{u}^T & \omega_1 \end{bmatrix},$$

es simétrica no negativa con autovalores y entradas diagonales prescritas. Finalmente, la matriz

$$B = \begin{bmatrix} \omega_1 & s\mathbf{u}^T \\ s\mathbf{u} & T \end{bmatrix},$$

similar a  $\tilde{B}$ , tiene las entradas diagonales en orden  $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \omega_3$ . Así tenemos la matriz

$$B = \begin{bmatrix} \omega_1 & \sqrt{\frac{\mu - \omega_3}{2\mu - \omega_2 - \omega_3}}s & \sqrt{\frac{\mu - \omega_2}{2\mu - \omega_2 - \omega_3}}s \\ \sqrt{\frac{\mu - \omega_3}{2\mu - \omega_2 - \omega_3}}s & \omega_2 & \sqrt{(\mu - \omega_2)(\mu - \omega_3)} \\ \sqrt{\frac{\mu - \omega_2}{2\mu - \omega_2 - \omega_3}}s & \sqrt{(\mu - \omega_2)(\mu - \omega_3)} & \omega_3 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

**Ejemplo 2.1** Construiremos una matriz simétrica no negativa con espectro  $\{8, 4, 3\}$  y entradas diagonales 6, 5, 4. Estas listas satisfacen las condiciones del Lema 2.2. Entonces construimos la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 2\sqrt{\frac{2}{3}} & 2\sqrt{\frac{1}{3}} \\ 2\sqrt{\frac{2}{3}} & 5 & \sqrt{2} \\ 2\sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{2} & 4 \end{bmatrix},$$

con los autovalores y entradas diagonales prescritas.

Para  $t \geq 4$  solo tenemos condiciones suficientes:

**Teorema 2.4** [4] Si  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_t$  y  $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \dots \geq \omega_t$  son tales que

$$\left. \begin{array}{l} i) \quad \sum_{i=1}^s \lambda_i \geq \sum_{i=1}^s \omega_i, \quad 1 \leq s \leq t-1 \\ ii) \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \omega_i \\ iii) \quad \lambda_k \leq \omega_{k-1}, \quad 2 \leq k \leq t-1 \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

entonces existe una matriz simétrica no negativa de orden  $t$  con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$  y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_t$ .

**Demostración.** Sea  $n \geq 4$ , supongamos que las condiciones (2.7) son verdaderas para  $k < n$ . Sea  $\lambda_i, \omega_i$  con  $i = 1, 2, \dots, n$ ; tales que satisfacen las condiciones . Definimos

$$\hat{\lambda}_2 = \lambda_1 + \lambda_2 - \omega_1.$$

Entonces  $\{\hat{\lambda}_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$  y  $\{\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}$  satisfacen (2.7). Existe una matriz  $\hat{A}$  simétrica no negativa de orden  $(n-1)$  con autovalores  $\hat{\lambda}_2, \lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_n$  y entradas diagonales  $\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$ . Puesto que

$$\lambda_1 \geq \hat{\lambda}_2 \quad \text{y} \quad \lambda_1 \geq \omega_1 \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \hat{\lambda}_2 + \omega_1,$$

por las condiciones (2.4) existe una matriz

$$B = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_2 & \sigma \\ \sigma & \omega_1 \end{bmatrix}$$

simétrica no negativa de orden 2 con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$ . Aplicando Teorema 2.1 tenemos

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \omega_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{A} & \sigma \mathbf{u} \\ \sigma \mathbf{u}^T & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{u}$  es un autovector no negativo normalizado de  $\hat{A}$ , correspondiente a  $\hat{\lambda}_2$  y

$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{bmatrix},$$

es simétrica no negativa con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . ■

**Observación 2.2** Las condiciones del Teorema 2.4 son solo suficientes. En efecto, la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 5 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 5 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

tiene autovalores 8, 6, 3, 3 y entradas diagonales 5, 5, 5, 5. Sin embargo la condición iii) en (2.7) no se satisface ( $\lambda_2 = 6 \not\leq 5 = \omega_1$ ).

**Observación 2.3** De aquí en adelante, emplearemos la así llamada "nueva partición"[19]. Esta partición, aunque similiar a la usada anteriormente, tiene importantes diferencias: Como antes, trabajamos con la listas particionadas  $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_r$ , donde  $\Lambda_k = \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, r$ . Ahora sin embargo, el primer elemento  $\lambda_{k1}$  de la sublista  $\Lambda_k$ , no necesita ser no negativo y las listas realizables  $\Gamma_k = \{\omega_k, \lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}$  contienen un elemento más,  $\omega_k$ , el cual no reemplaza a  $\lambda_{k1}$ . Además, el número de sublistas de la partición depende de la cardinalidad de la lista  $\Lambda_0$ , la cual debe ser realizable.

**Ejemplo 2.2** Consideremos la lista  $\Lambda = \{12, 2, -2, -4, -4, -4, \}$ . Definimos la partición  $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3$  con

$$\Lambda_0 = \{12, 2, -2\} \quad \Lambda_1 = \{-4\} \quad \Lambda_2 = \{-4\} \quad \Lambda_3 = \{-4\} .$$

A las listas  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$  le asociamos listas realizables

$$\Gamma_1 = \{4, -4\} \quad \Gamma_2 = \{4, -4\} \quad \Gamma_3 = \{4, -4\},$$

con matrices realizadoras

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = A_2 = A_3,$$

respectivamente. Las listas  $\Lambda_0$  y  $\{4, 4, 4\}$  satisfacen las condiciones 2.2. Entonces, mediante 2.6 construimos la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4 & 6 \\ 2\sqrt{2} & 6 & 4 \end{bmatrix},$$

con espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales 4, 4, 4. Ahora aplicando el Teorema 2.1, la matriz

$$\begin{aligned}
 A &= \left[ \begin{array}{cc|cc|cc}
 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0
 \end{array} \right] + X C X^T \\
 &= \begin{bmatrix}
 0 & 4 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\
 4 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\
 \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 4 & 3 & 3 \\
 \sqrt{2} & \sqrt{2} & 4 & 0 & 3 & 3 \\
 \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3 & 3 & 0 & 4 \\
 \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3 & 3 & 4 & 0
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 X &= \begin{bmatrix}
 \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix}
 0 & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\
 2\sqrt{2} & 0 & 6 \\
 2\sqrt{2} & 6 & 0
 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

es simétrica no negativa con espectro  $\Lambda$ .

## Capítulo 3

# El problema para matrices estructuradas.

En este capítulo consideramos el problema de hallar condiciones para la existencia y construcción de una matriz estructurada no negativa con autovalores y entradas diagonales prescritas. Las estructuras matriciales que estudiamos son matrices normales, persimétricas, bisimétricas y doblemente estocásticas.

### 3.0.1. Matrices normales.

**Definición 3.1** Sea  $A$  una matriz de orden  $n$ . Decimos que  $A$  es normal si y solo si

$$AA^* = A^*A,$$

donde  $A^*$  es la traspuesta conjugada de  $A$ .

El siguiente resultado en [6], debido a A.I. Julio, C.B. Manzaneda y R.L. Soto, da una versión normal para el Teorema de Rado.

**Teorema 3.1** [6] Sea  $A$  una matriz normal de orden  $n$  con espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , y para un  $r \leq n$ , sea  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r\}$  un conjunto ortonormal de autovectores de  $A$  correspondiente a  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ , respectivamente. Sea  $X$  la matriz  $n \times r$ , con  $i$ -ésima columna  $\mathbf{x}_i$ . Sea  $\Omega = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ , y sea  $C = (c_{ij})_{i,j=1}^r$ , una matriz de orden  $r$  con  $c_{ii} = 0$ ,  $i = 1, \dots, r$ , tal que  $\Omega + C = B$  es una matriz normal. Entonces  $A + XCX^*$  es normal con autovalores  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ , donde  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$  son autovalores de  $B$ .

**Demostración.** Puesto que  $A$  es una matriz normal, entonces existe una matriz unitaria  $Z = \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix}$ , donde  $X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_r \end{bmatrix}$ ,  $Y = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{r+1} & \mathbf{x}_{r+2} & \dots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix}$ , con  $A\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$ ,

$i = 1, \dots, n$ , tal que  $Z^*AZ = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ . Sea  $D = \text{diag}\{\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n\}$ . Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
Z^*(A + XCX^*)Z &= Z^*AZ + Z^*XCX^*Z \\
&= \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X^* \\ Y^* \end{bmatrix} XCX^* \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Puesto que  $B$  y  $D$  son matrices normales, entonces por ([26], Teorema 14),  $A + XCX^*$  es normal y por Teorema 0.2 tiene como autovalores  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ , donde  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$  son autovalores de la matriz  $B$ . ■

Basados en el Teorema 3.1, los autores en [6] establecen las siguientes condiciones suficientes para la existencia de una matriz normal no negativa con espectro dado:

**Teorema 3.2** [6] Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos con  $\bar{\Lambda} = \Lambda$ ,  $\lambda_1 \geq \max |\lambda_i|$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$  y sea  $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_{p_0}$  una partición con

$$\begin{aligned}
\Lambda_0 &= \{\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0p_0}\}, & \lambda_{01} &= \lambda_1 \\
\Lambda_k &= \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, & k &= 1, \dots, p_0,
\end{aligned}$$

donde algunas listas  $\Lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, p_0$ , pueden ser vacías. Supongamos que las siguientes condiciones se satisfacen:

i) Para cada  $k = 1, \dots, p_0$ , existe una matriz normal no negativa con espectro

$$\Gamma_k = \{\omega_k, \lambda_{k1}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, \quad 0 \leq \omega_k \leq \lambda_1.$$

ii) Existe una matriz  $B$  normal no negativa de orden  $p_0$  con espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{p_0}$ .

Entonces  $\Lambda$  es realizable por una matriz normal no negativa.

Este resultado genera un procedimiento algorítmico para computar una matriz normal no negativa con espectro prescrito, y él mejora significativamente las condiciones de Xu ([25], 1996).

Para aplicar el Teorema 3.1, así como para aplicar las condiciones del Teorema 3.2, necesitamos garantizar la existencia de una matriz normal no negativa de orden  $r$ ,  $r \leq n$ , con autovalores y

entradas diagonales prescritas. Observemos que si  $A$  es una matriz real normal (no negativa en nuestro caso) con todos sus autovalores reales, entonces  $A$  es necesariamente simétrica. En este caso, podemos aplicar las condiciones estudiadas en el Capitulo 2. Por esta razón, consideraremos aquí solo listas de números complejos.

El problema de construir una matriz normal no negativa no simétrica no circulante con espectro y entradas diagonales prescritas es difícil, incluso para dimensiones pequeñas. Siguiendo el patrón de signos de matrices normales no negativas en [8], podemos construir algunas matrices normales no negativas con autovalores y entradas diagonales prescritas para  $n = 3$  y  $n = 4$ . Para ilustrar el procedimiento, sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, a + bi, a - bi\}$  una lista dada con  $\lambda_2 < 0$  y  $\lambda_1 + \lambda_2 + 2a \geq 0$ . Supongamos que existe una partición  $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3$ , donde

$$\Lambda_0 = \{\lambda_1, a + bi, a - bi\}, \quad \Lambda_1 = \{\lambda_2\} \quad \Lambda_2 = \Lambda_3 = \phi,$$

con  $\Lambda_0$  siendo realizada por una matriz normal no negativa con ciertas entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ .

Definimos listas realizables

$$\Gamma_1 = \{\omega_1, \lambda_2\} \quad \Gamma_2 = \{\omega_2\} \quad \Gamma_3 = \{\omega_3\},$$

con matrices realizadoras

$$A_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega_1 + \lambda_2 & \omega_1 - \lambda_2 \\ \omega_1 - \lambda_2 & \omega_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = [\omega_2] \quad A_3 = [\omega_3],$$

respectivamente. Entonces por Teorema 3.2

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \omega_2 & \\ & & \omega_3 \end{bmatrix} + X C X^T$$

es normal no negativa con espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, a + bi, a - bi\}$  y entradas diagonales  $\frac{1}{2}(\omega_1 + \lambda_2), \frac{1}{2}(\omega_1 + \lambda_2), \omega_2, \omega_3$

**Ejemplo 3.1** *Queremos construir una matriz normal no negativa con espectro*

$$\Lambda = \{7, -3, -3, 1 + 3i, 1 - 3i, 1 + i, 1 - i\}.$$

*Aplicamos el Teorema 3.2: Definimos la partición*

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3, & \text{donde} \\ \Lambda_0 &= \{7, -3, 1 + 3i, 1 - 3i\}, & \Lambda_1 &= \{1 + i, 1 - i\} \\ \Lambda_2 &= \{-3\} & \Lambda_3 &= \Lambda_4 = \phi. \end{aligned}$$

*Asociamos las listas realizables*

$$\Gamma_1 = \{3, 1 + i, 1 - i\}, \quad \Gamma_2 = \{3, -3\} \quad \Gamma_3 = \Gamma_4 = \{0\},$$

con matrices realizadoras

$$A_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & 2 - \sqrt{3} & 2 + \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3} & 5 & 2 - \sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{3} & 2 + \sqrt{3} & 5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = A_4 = [0],$$

respectivamente. Por otro lado, particionando la lista  $\Lambda_0$

$$\Lambda_0 = \Lambda'_0 \cup \Lambda'_1 \cup \Lambda'_2 \cup \Lambda'_3$$

con

$$\Lambda'_0 = \{7, 1 + 3i, 1 - 3i\} \quad \Lambda'_1 = \{-3\} \quad \Lambda'_2 = \Lambda'_3 = \phi,$$

y listas asociadas

$$\begin{aligned} \Gamma'_1 &= \{3, -3\} \rightarrow B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \\ \Gamma'_2 &= \Gamma'_3 = \{3\} \rightarrow B_2 = B_3 = [3], \end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} B &= \left[ \begin{array}{ccc|cc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \end{array} \right] \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 + \sqrt{3} & 2 - \sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{3} & 0 & 2 + \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3} & 2 - \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} + 2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3} - 2) & -\frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3} - 2) \\ 2 - \sqrt{3} & 3 & \frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3} + 2) & \frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3} + 2) \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3} + 2) & -\frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3} - 2) & 0 & 3 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3} + 2) & -\frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3} - 2) & 3 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

es normal no negativa con espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales 3, 3, 0, 0. Observemos que

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 + \sqrt{3} & 2 - \sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{3} & 3 & 2 + \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3} & 2 - \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$$

es la matriz circulante construida como se indica en [13], con espectro  $\Lambda'_0$  y entradas diagonales 3, 3, 3.

**Ejemplo 3.2** Sea  $\Omega = \text{diag}\{3, 3, 0, 0\}$ . Entonces la matriz

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|cc|cc} \frac{5}{3} & \frac{1}{3}(2 - \sqrt{3}) & \frac{1}{3}(2 - \sqrt{3}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}(2 - \sqrt{3}) & \frac{5}{3} & \frac{1}{3}(2 - \sqrt{3}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}(2 - \sqrt{3}) & \frac{1}{3}(2 - \sqrt{3}) & \frac{5}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + X C X^*$$

donde

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} + 2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3} - 2) & -\frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3} - 2) \\ 2 - \sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3} + 2) & \frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3} + 2) \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3} + 2) & -\frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3} - 2) & 0 & 3 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3} + 2) & -\frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3} - 2) & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

es normal no negativa con espectro  $\Lambda$ .

### 3.0.2. Matrices Persimétricas.

**Definición 3.2** Sea  $A = (a_{ij})$  una matriz de orden  $n \times n$ . La matriz flip- traspuesta de  $A$ , denotada por  $A^F$ , es definida como

$$A^F = (a_{n-j+1, n-i+1}),$$

es decir

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A^F = \begin{bmatrix} a_{n,n} & a_{n-1,n} & \dots & a_{3,n} & a_{2,n} & a_{1,n} \\ a_{n,n-1} & a_{n-1,n-1} & \dots & a_{3,n-1} & a_{2,n-1} & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,3} & a_{n-1,3} & \dots & a_{3,3} & a_{2,3} & a_{1,3} \\ a_{n,2} & a_{n-1,2} & \dots & a_{3,2} & a_{2,2} & a_{1,2} \\ a_{n,1} & a_{n-1,1} & \dots & a_{3,1} & a_{2,1} & a_{1,1} \end{bmatrix}.$$

Algunas propiedades básicas de la flip-traspuesta son:

1.  $(A^F)^F = A$
2.  $(A^T)^F = (A^F)^T$
3.  $(A + B)^F = A^F + B^F$
4.  $(AB)^F = B^F A^F$

**Definición 3.3** Sea  $A = (a_{ij})$  una matriz de orden  $n$ . Decimos que  $A$  es persimétrica si  $a_{i,j} = a_{n-j+1,n-i+1}$  para todo  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , es decir, si  $A^F = A$ .

**Ejemplo 3.3** La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 11 & 9 & -6 & 3 \\ -4 & 3 & 9 & -2 \\ 2 & -4 & 11 & 1 \end{bmatrix}.$$

es persimétrica pues  $A^F = A$ .

El siguiente resultado, debido a A.I. Julio y R.L. Soto en [7], da una versión persimétrica del Teorema de Rado (Teorema 0.2).

**Teorema 3.3** [7] Sea  $A$  una matriz persimétrica de orden  $n$  con espectro  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , y para algún  $r \leq n$ , sea  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r\}$  un conjunto de autovectores de  $A$  correspondientes a  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ , respectivamente. Sea  $X$  una matriz  $n \times r$  con la  $i$ -ésima columna  $\mathbf{x}_i$  y el  $\text{rank}(X) = r$ . Sea  $\Omega = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ , y  $C$  una matriz persimétrica de orden  $r$ . Entonces la matriz  $A + X C X^F$  es persimétrica, con autovalores  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$  donde  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$  son autovalores de la matriz  $B = \Omega + C X^F X$ .

**Demostración.** Sea  $S = \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix}$  una matriz no singular con  $S^{-1} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$ . Entonces  $UX = I_r, VY = I_{n-r}, VX = 0, UY = 0$ . Además, puesto que,  $AX = X\Omega$ , tenemos

$$\begin{aligned} S^{-1}AS &= \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AX & AY \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Omega & UAY \\ 0 & VAY \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} S^{-1}XCX^FS &= \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} XCX^F \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} CX^FX & CX^FY \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$S^{-1}(A + XCX^F)S = \begin{bmatrix} \Omega + CX^FX & UAY + CX^FY \\ 0 & VAY \end{bmatrix}.$$

Si  $\sigma(A)$  denota el espectro de  $A$ , entonces

$$\begin{aligned} \sigma(A + XCX^F) &= \sigma(\Omega + CX^FX) \cup \sigma(VAY) \\ &= \sigma(\Omega + CX^FX) \cup \sigma(A) - \sigma(\Omega). \end{aligned}$$

Además, puesto que  $(A + XCX^F)^F = A + XCX^F$ , la matriz  $A + XCX^F$  es persimétrica. ■

Los autores en [7] dan condiciones suficientes para la existencia de una matriz persimétrica no negativa con espectro dado. Primero consideramos el caso par:

**Teorema 3.4** [7] *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos con  $\Lambda = \bar{\Lambda}$ ,  $\lambda_1 \geq |\lambda_i|$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , y  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ . Supongamos que existe una partición de  $\Lambda$*

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_{\frac{p_0}{2}} \cup \Lambda_{\frac{p_0}{2}} \cup \dots \cup \Lambda_1, & \text{con} \\ \Lambda_0 &= \{\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0p_0}\}, & \lambda_{01} = \lambda_1, \\ \Lambda_k &= \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, & k = 1, 2, \dots, \frac{p_0}{2}, \end{aligned}$$

donde algunas de las listas  $\Lambda_k$  pueden ser vacías, tal que las siguientes condiciones se satisfacen:

i) Para cada  $k = 1, 2, \dots, \frac{p_0}{2}$ , existe una matriz no negativa con espectro

$$\Gamma_k = \{\omega_k, \lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, \quad 0 \leq \omega_k \leq \lambda_1.$$

ii) Existe una matriz persimétrica no negativa de orden  $p_0$ , con espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \dots, \omega_2, \omega_1.$$

Entonces  $\Lambda$  es realizable por una matriz persimétrica no negativa de orden  $n$ .

Ahora consideramos el caso impar:

**Teorema 3.5** [7] Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos con  $\Lambda = \bar{\Lambda}$ ,  $\lambda_1 \geq |\lambda_i|$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , y  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ . Supongamos que existe una partición de  $\Lambda$

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor} \cup \Lambda_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil} \cup \Lambda_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor} \cup \dots \cup \Lambda_1, & \text{con} \\ \Lambda_0 &= \{\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0p_0}\}, & \lambda_{01} = \lambda_1, \\ \Lambda_k &= \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, & k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor, \end{aligned}$$

donde algunas de las listas  $\Lambda_k$  pueden ser vacías, tal que las siguientes condiciones se satisfacen:

i) Para cada  $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor$ , existe una matriz no negativa con espectro

$$\Gamma_k = \{\omega_k, \lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, \quad 0 \leq \omega_k \leq \lambda_1$$

y para  $k = \lceil \frac{p_0}{2} \rceil$ , existe una matriz persimétrica no negativa con espectro  $\Lambda_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}$  y autovector de Perron  $\mathbf{y}_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil} \geq 0$ , satisfaciendo  $\mathbf{y}_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}^F \mathbf{y}_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil} > 0$ .

ii) Existe una matriz persimétrica no negativa de orden  $p_0$ , con espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \omega_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \dots, \omega_2, \omega_1.$$

Entonces  $\Lambda$  es realizable por una matriz persimétrica no negativa de orden  $n$ .

Para aplicar el Teorema 3.3, así como para aplicar las condiciones suficientes dadas por el Teorema 3.4 si  $p_0$  es par, y el Teorema 3.5 si  $p_0$  es impar, necesitamos garantizar la existencia de una matriz persimétrica no negativa de orden  $r$ ,  $r \leq n$ , con autovalores y entradas diagonales prescritas. Este es un problema difícil, que se encuentra abierto y para el cual sólo se conocen respuestas parciales. En [7] los autores dan condiciones suficientes para  $r = 2, 3$ :

Para  $r = 2$  tenemos la condición

$$\omega_1^2 \geq \lambda_1 \lambda_2.$$

Una matriz persimétrica con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_1$  es

$$A = \begin{bmatrix} \omega_1 & 1 \\ \omega_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 & \omega_1 \end{bmatrix}, \quad \omega_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

La matriz

$$B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix},$$

la cual es bisimétrica, cumple también con las propiedades deseadas.

Para  $r = 3$  tenemos lo siguiente:

**Lema 3.1** *Los números  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y  $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \geq 0$ , son respectivamente, autovalores y entradas diagonales de una matriz persimétrica no negativa si*

- i)  $\omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2 \geq \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$
- ii)  $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + 2\omega_1\omega_2^2 \geq \omega_2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)$

**Demostración.** Supongamos que las condiciones i) y ii) se cumplen. Entonces

$$B = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 1 \\ b & \omega_2 & 0 \\ d & b & \omega_1 \end{bmatrix},$$

con

$$d = \omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2 - (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3),$$

$$b = \sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + 2\omega_1\omega_2^2 - \omega_2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)},$$

es persimétrica no negativa con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . ■

**Ejemplo 3.4** *Consideremos la lista  $\Lambda = \{5, -1, -2 + 3i, -2 - 3i\}$ . Definimos la partición  $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3$  con*

$$\Lambda_0 = \{5, -2 + 3i, -2 - 3i\} \quad \Lambda_1 = \emptyset \quad \Lambda_2 = \{-1\} \quad \Lambda_3 = \emptyset.$$

Entonces definimos las listas realizables

$$\Gamma_1 = \{0\} \quad \Gamma_2 = \{1, -1\} \quad \Gamma_3 = \{0\},$$

respectivamente, por las matrices

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &\rightarrow A_1 = [0] \\ \Gamma_2 &\rightarrow A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \Gamma_3 &\rightarrow A_3 = [0]. \end{aligned}$$

A partir del Teorema 3.1 construimos la matriz persimétrica no negativa

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 7 & 6\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix},$$

con espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales 0, 1, 0. Entonces, aplicando el Teorema 3.3, la matriz  $M = A + XCX^F$ ,

$$\begin{aligned}
M &= \left[ \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 6\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 7 & 6\sqrt{2} & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
&= \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 6 & 0 \end{array} \right],
\end{aligned}$$

es persimétrica no negativa con espectro  $\Lambda$ .

### 3.0.3. Matrices bisimétricas.

**Definición 3.4** Sea  $A = (a_{ij})$  una matriz de orden  $n$ . Decimos que  $A$  es bisimétrica si es simétrica y persimétrica.

**Ejemplo 3.5** La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -3 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

es bisimétrica.

Diferente al caso persimétrico, para el cual tenemos una versión persimétrica del Teorema de Rado (Teorema 0.2), en el caso bisimétrico nos basta con la versión simétrica del Teorema de Rado (Teorema 2.1) para establecer condiciones suficientes. Primero consideramos el caso par:

**Teorema 3.6** [7] Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números reales con  $\lambda_1 \geq |\lambda_i|$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , y  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ . Supongamos que existe una partición de  $\Lambda$

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_{\frac{p_0}{2}} \cup \Lambda_{\frac{p_0}{2}} \cup \dots \cup \Lambda_1, & \text{con} \\
\Lambda_0 &= \{\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0p_0}\}, & \lambda_{01} = \lambda_1, \\
\Lambda_k &= \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, & k = 1, 2, \dots, \frac{p_0}{2},
\end{aligned}$$

donde algunas de las listas  $\Lambda_k$  pueden ser vacías, tal que las siguientes condiciones se satisfacen:

i) Para cada  $k = 1, 2, \dots, \frac{p_0}{2}$ , existe una matriz simétrica no negativa con espectro

$$\Gamma_k = \{\omega_k, \lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, \quad 0 \leq \omega_k \leq \lambda_1.$$

ii) Existe una matriz bisimétrica no negativa de orden  $p_0$ , con espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \dots, \omega_2, \omega_1$ .

Entonces  $\Lambda$  es realizable por una matriz bisimétrica no negativa de orden  $n$ .

Para el caso impar tenemos:

**Teorema 3.7** [7] Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números reales con  $\lambda_1 \geq |\lambda_i|$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , y  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$ . Supongamos que existe una partición de  $\Lambda$

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor} \cup \Lambda_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil} \cup \Lambda_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor} \dots \cup \Lambda_1, & \text{con} \\ \Lambda_o &= \{\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0p_0}\}, & \lambda_{01} &= \lambda_1, \\ \Lambda_k &= \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, & k &= 1, 2, \dots, \lceil \frac{p_0}{2} \rceil, \end{aligned}$$

donde algunas de las listas  $\Lambda_k$  pueden ser vacías, tal que las siguientes condiciones se satisfacen:

i) Para cada  $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor$ , existe una matriz simétrica no negativa con espectro  $\Gamma_k = \{\omega_k, \lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}$ ,  $0 \leq \omega_k \leq \lambda_1$ , y para  $k = \lceil \frac{p_0}{2} \rceil$ , existe una matriz bisimétrica no negativa con espectro  $\Gamma_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}$ .

ii) Existe una matriz bisimétrica no negativa de orden  $p_0$ , con espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \omega_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \dots, \omega_2, \omega_1$ .

Entonces  $\Lambda$  es realizable por una matriz bisimétrica no negativa de orden  $n$ .

Para el uso de los teoremas 3.6 y 3.7, es necesario garantizar la existencia de una matriz bisimétrica no negativa con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p_0}$ , y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \omega_{\frac{p_0}{2}}, \dots, \omega_2, \omega_1$  para  $p_0$  par, o  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \omega_{\lceil \frac{p_0}{2} \rceil}, \omega_{\lfloor \frac{p_0}{2} \rfloor}, \dots, \omega_2, \omega_1$ , para  $p_0$  impar. Este es también un problema difícil, para el que hasta ahora, sólo tenemos respuesta parciales.

Para  $p_0 = 2$ , es necesario y suficiente que  $\lambda_1 \geq \omega_1 = \omega_2$  y  $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\omega_1$ . Entonces la matriz

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}$$

es bisimétrica no negativa con las propiedades requeridas.

Para  $p_0 = 3$ , usaremos las condiciones de Fiedler (Lema 2.2).

Para las condiciones 2.5 en [7], los autores construyen una matriz simétrica no negativa para  $\omega_2 = \omega_3$ ,

$$B = \begin{bmatrix} \omega_1 & \frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{s}{\sqrt{2}} \\ \frac{s}{\sqrt{2}} & \omega_2 & \alpha - \omega_2 \\ \frac{s}{\sqrt{2}} & \alpha - \omega_2 & \omega_2 \end{bmatrix}$$

con  $s = \sqrt{(\lambda_1 - \alpha)(\lambda_1 - \omega_1)}$ ,  $\alpha = \lambda_1 + \lambda_2 - \omega_1$ . Entonces, por una permutación sobre  $B$ , obtenemos

$$B = \begin{bmatrix} \omega_2 & \frac{s}{\sqrt{2}} & \alpha - \omega_2 \\ \frac{s}{\sqrt{2}} & \omega_1 & \frac{s}{\sqrt{2}} \\ \alpha - \omega_2 & \frac{s}{\sqrt{2}} & \omega_2 \end{bmatrix},$$

la cual es bisimétrica no negativa con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , y entradas diagonal  $\omega_2, \omega_1, \omega_2$ .

De la misma manera para las condiciones 2.5 en [7], con  $\omega_1 = \omega_2$ , podemos contruir una matriz simétrica no negativa

$$B' = \begin{bmatrix} \omega_1 & \beta - \omega_1 & \frac{t}{\sqrt{2}} \\ \beta - \omega_1 & \omega_1 & \frac{t}{\sqrt{2}} \\ \frac{t}{\sqrt{2}} & \frac{t}{\sqrt{2}} & \omega_3 \end{bmatrix},$$

con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , donde  $t = \sqrt{(\lambda_1 - \beta)(\lambda_1 - \omega_3)}$ ,  $\beta = \lambda_1 + \lambda_3 - \omega_3$ . Entonces por una permutación sobre  $B'$ , obtenemos

$$B = \begin{bmatrix} \omega_1 & \frac{t}{\sqrt{2}} & \beta - \omega_1 \\ \frac{t}{\sqrt{2}} & \omega_3 & \frac{t}{\sqrt{2}} \\ \beta - \omega_1 & \frac{t}{\sqrt{2}} & \omega_1 \end{bmatrix},$$

que es bisimétrica no negativa con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_3, \omega_1$ .

**Ejemplo 3.6** *Construiremos una matriz bisimétrica no negativa con espectro  $\{7, 3, -4\}$  y entradas diagonales  $\{3, 3, 0\}$ . Como las condiciones (2.5) se satisfacen y además  $\omega_1 = \omega_2$*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{14} & 0 \\ \sqrt{14} & 0 & \sqrt{14} \\ 0 & \sqrt{14} & 3 \end{bmatrix},$$

*es una matriz bisimétrica no negativa con las propiedades deseadas.*

### 3.0.4. Matrices doblemente estocásticas generalizadas.

En esta sección los autores en [22] aplicaron el Teorema de Rado, Teorema 0.2, para la obtención de condiciones suficientes para la existencia de matrices doblemente estocásticas generalizadas no negativas:

**Teorema 3.8** [22] *Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  una lista de números complejos con  $\bar{\Lambda} = \Lambda$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$ ,  $\lambda_1 \geq |\lambda_i|$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ . Supongamos que existe una partición  $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_{p_0}$  con*

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \{\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0p_0}\}, & \lambda_{01} &= \lambda_1 \\ \Lambda_k &= \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, & p_k &= p, \quad k = 1, \dots, p_0, \end{aligned}$$

*donde las listas  $\Lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, p_0$ , tienen cardinalidad  $p$ , de tal manera que :*

i) Para cada  $i = 1, \dots, p_0$ , exista una lista

$$\Gamma_k = \{\omega_k, \lambda_{k1}, \dots, \lambda_{kp_k}\}, \quad 0 < \omega_k < \lambda_1$$

realizable por una matriz  $A_k$  no negativa (positiva), con  $A_k^T \in CS_{\omega_k}$ .

ii) Existe una matriz  $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$  no negativa (positiva) de orden  $p_0$ , tal que  $B, B^T \in CS_{\lambda_1}$ , con espectro  $\Lambda_0$  y entradas diagonales  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{p_0}$ .

Entonces existe una matriz  $A$  no negativa (positiva), tal que  $A, A^T \in CS_{\lambda_1}$  con espectro  $\Lambda$ .

**Demostración.** A partir de i) tenemos

$$G = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{p_0} \end{bmatrix},$$

donde  $A_k$  con  $A_k, A_k^T \in CS_{\omega_k}$  es no negativa (positiva), con espectro  $\Gamma_k$ . Desde ii)  $C = B - \Omega$ , donde  $\Omega = \text{diag}\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{p_0}\}$ , y sea  $X = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{p_0}]$  una matriz donde sus columnas son autovectores normalizados de  $G$  correspondientes a los autovalores  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{p_0}$ , respectivamente. Observemos que  $\mathbf{x}_k$ ,  $k = 1, \dots, p_0$ , es no negativo con entradas  $\frac{1}{\sqrt{p}}$  y ceros

$$\left( \mathbf{x}_k^T = 0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{p}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{p}}, 0, \dots, 0 \right).$$

Sea  $\tilde{C} = CX^T$ . Por tanto

$$X\tilde{C} = XCX^T = \frac{1}{p} \begin{bmatrix} 0 & B_{12} & \dots & B_{1p_0} \\ B_{12} & 0 & \ddots & B_{2p_0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ B_{p_01} & \dots & B_{p_0,p_0-1} & 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} b_{ij} & b_{ij} & \dots & b_{ij} \\ b_{ij} & b_{ij} & \ddots & b_{ij} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ b_{ij} & b_{ij} & \dots & b_{ij} \end{bmatrix}$$

es positiva con  $\frac{1}{p}B_{ij} \in CS_{b_{ij}}$ . Entonces por el Teorema 0.2,  $A = G + X\tilde{C}$  es no negativa (positiva) con espectro  $\Lambda$ . Además

$$A\mathbf{e} = (G + X\tilde{C})\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_{p_0} \\ \vdots \\ \omega_{p_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 - \omega_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 - \omega_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 - \omega_{p_0} \\ \vdots \\ \lambda_1 - \omega_{p_0} \end{bmatrix} = A^T\mathbf{e} = \lambda_1\mathbf{e}.$$

Entonces  $A$  es doblemente estocástica generalizada no negativa (positiva) con espectro  $\Lambda$ . ■

Para la aplicar el Teorema 3.8 necesitamos garantizar la existencia de una matriz  $B$  doblemente estocástica generalizada no negativa de orden  $r$ ,  $r \leq n$ , con espectro y entradas diagonales prescritas. La existencia y la construcción de la matriz es un problema difícil que se encuentra abierto, con solamente respuestas parciales.

Para  $r = 2$ , la matriz no negativa (positiva) doblemente estocástica generalizada es necesariamente simétrica, con  $\omega_1 = \omega_2$  y autovalores  $\lambda_1, \lambda_2 = 2\omega_1 - \lambda_1$ ,

$$B = \begin{bmatrix} \omega_1 & \lambda_1 - \omega_1 \\ \lambda_1 - \omega_1 & \omega_1 \end{bmatrix}.$$

Para el caso  $t = 3$ , tenemos la siguiente condición suficiente:

**Lema 3.2** [22] Sea  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  y  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  con  $\lambda_1 > |\lambda_i|$ ,  $i = 2, 3$ , y  $\lambda_1 \geq \omega_1 \geq \omega_2 \geq \omega_3 \geq 0$ .

Si

$$\begin{aligned} i) \quad & (\lambda_2 - \lambda_3) \leq 4 \left[ (\omega_1 - \omega_2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)(\omega_2 - \omega_3) + (\omega_2 - \omega_3)^2 \right] \\ ii) \quad & \lambda_1 - \omega_1 - y \geq 0 \\ iii) \quad & \omega_3 - \omega_2 + y \geq 0, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(\lambda_1 - \omega_1 + \omega_2 - \omega_3) + \frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{\alpha - (\lambda_2 - \lambda_3)^2}, \\ \alpha &= 4 \left[ (\omega_1 - \omega_2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)(\omega_2 - \omega_3) + (\omega_2 - \omega_3)^2 \right], \end{aligned}$$

entonces existe una matriz no negativa doblemente estocástica generalizada de orden 3 con espectro  $\Lambda$  y entradas diagonales  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ .

**Demostración.** Consideramos la matriz

$$B = \begin{bmatrix} \omega_1 & \lambda_1 - \omega_1 - y & y \\ \omega_3 - \omega_2 + y & \omega_2 & \lambda_1 - \omega_3 - y \\ \lambda_1 - \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - y & \omega_1 - \omega_2 + y & \omega_3 \end{bmatrix}.$$

Claramente  $B, B^T \in CS_{\lambda_1}$  con entradas diagonales prescritas. De *ii*) se sigue que  $\lambda_1 - \omega_3 - y \geq 0$  y  $\lambda_1 - \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - y \geq 0$ . De *iii*)  $\omega_3 - \omega_2 + y \geq 0$ , y de *i*)  $y \geq 0$  y entonces  $\omega_1 - \omega_2 + y \geq 0$ . Así,  $B$  es no negativa. Finalmente con un simple cálculo algebraico se muestra que  $B$  tiene los autovalores requeridos. ■

**Ejemplo 3.7** *Construiremos una matriz doblemente estocástica generalizada no negativa con espectro  $\{7, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$  y entradas diagonales 4, 2, 2. Como las condiciones del Teorema 3.2 se satisfacen, construimos*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & \frac{3}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{3}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{3}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} & 2 & \frac{7}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{3}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{7}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} & 2 \end{bmatrix}$$

*tiene las propiedades deseadas. Además  $Be = 7$  y  $B^T e = 7$  es doblemente estocástica generalizada no negativa.*

# Bibliografía

- [1] A. Borobia, J. Moro, R. Soto. Negativity compensation in the nonnegative inverse eigenvalue problem. In: *Linear Algebra Appl*, 393;73-89, 2007.
- [2] A. Brauer. Limits for the characteristic roots of a matrix IV. In: *Applications to stochastic matrices. Duke Math. J.* 19:75-91, 1952.
- [3] H. K. Farahat and W. Lederman. Matrices with Prescribed Characteristic Polynomials In: *Proc. Edinburg Mat. Soc* 11 143-146, 1958
- [4] M. Fiedler. Eigenvalues of nonnegative symmetric matrices. In: *Linear Algebra Appl.*, 9:119-142, 1974.
- [5] A.Horn. Doubly stochastic matrices and the diagonal of a rotation matrix. In: *Amer. J. Math.*, 76:620-630, 1954.
- [6] A.I. Julio, C.R. Manzaneda, R.L. Soto. Normal nonnegative realization of spectra. In: *Linear and Multilinear Algebra*, 63:6, 1204-1215, 2015.
- [7] A.I. Julio, R.L. Soto, Persymmetric and bisymmetric nonnegative inverse eigenvalue problem. In: *Linear Algebra Appl.*, 469: 130-152, 2015.
- [8] Z. Li, F. Hall, F, Zhang Sign patterns of nonnegative normal matrices. In: *Linear Algebra Appl.*, 254: 335-354, 1997.
- [9] R. Lowey, D. London. A note on an inverse problem for nonnegative matrices. In: *Linear and Multilinear Algebra*, 6:83-90, 1978.
- [10] M.E. Meegan. Some results on matrix spectra, PH. D. Thesis, National University of Ireland, Dublyn, 1998.
- [11] H. Perfect *Methods of constructing certain stochastic matrices I.* In: *Duke Math. J.* 20 395-404. 1953.

- [12] H. Perfect. *Methods of constructing certain stochastic matrices II*. In: *Duke Math J.* 22:305-311-1955.
- [13] O. Rojo, R.L. Soto. Existence and construction of nonnegative matrices with complex spectrum. In: *Linear Algebra Appl.*, 368:52-69, 2000.
- [14] R. Reams. An inequality for nonnegative matrices and the inverse eigenvalue problem. In: *Linear Multilinear Algebra*, 41:367-375, 1996.
- [15] R.L. Soto, *Existence and construction of nonnegative matrices with prescribed spectrum*. In: *Linear Algebra Appl.* 369:169-184, 2003.
- [16] R.L. Soto, R.C. Diaz, H. Nina, M. Salas. Nonnegative matrices with prescribed spectrum and elementary divisors. In: *Linear Algebra Appl.* 439: 3591-3604; 2013.
- [17] R.L. Soto, Ana i. Julio, Mario Salas. *Nonnegative persymmetric matrices with prescribed elementary divisors*. In: *Linear Algebra Appl.* 483:139-157, 2015.
- [18] R.L. Soto, O. Rojo. Applications of Brauer theorem in the nonnegative inverse eigenvalue problem. In: *Linear Algebra Appl.* 416(2-3):844,856, 2006.
- [19] R.L. Soto, O. Rojo, C. Manzaneda. On nonnegative realization of partitioned spectra. In: *Electronic Journal of Linear Algebra*, 22, 557-572, 2011.
- [20] R.L. Soto, O. Rojo, J. Moro, A. Borobia. Symmetric nonnegative realization of spectra. In: *Electronic Journal of Linear Algebra*. 16; 1-18, 2007.
- [21] R.L. Soto, M. Salas and Cristina Manzaneda. *Nonnegative realization of complex spectra*. In: *Electronic Journal of Linear Algebra* 20:595-609, 2010.
- [22] R.L. Soto, Elvis Valero, Mario Salas, Hans Nina. *Nonnegative Generalized Doubly Stochastic matrices with prescribed elementary divisors*. In: *Electronic Journal of Linear Algebra*; 30:704-720, 2015.
- [23] H.R. Suleimanova. *Stochastic matrices with real characteristic numbers*. In: *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 66:343-345, 1949.
- [24] J. Torre-Mayo, M.R. Abril-Raymundo, E. Alarcia-Estévez, C. Marijuán, M. Pisionero. The nonnegative inverse eigenvalue problem from the coefficients of the characteristic polynomial. EBL digraphs. In: *Linear Algebra Appl.* 426:729-773, 2007
- [25] S. Xu, On inverse spectrum problems for normal nonnegative matrices. *Linear Multilinear Algebra*, 34; 353-364, 1993.
- [26] F. Zhang. *Matrix theory. Basic results and techniques*. New York (NY): Springer-Verlag; 1999.