



UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Matemáticas

**ESTUDIO SOBRE COTAS PARA LA AMPLITUD DEL
ESPECTRO LAPLACIANO SIN SIGNO DE UN GRAFO**

Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias Mención Matemáticas

LAURA MAYELY LEAL CHACÓN

Profesor Tutor: Dra. María Rosario Robbiano Bustamante

Antofagasta, Chile

2017

Dedicatoria

A mis padres (Laura & Salustiano)

A mis hermanos (Tiano & Alba)

A mis sobrinos (Ian & Noham)

A mi Sol

Muy especialmente al pueblo venezolano por su constante lucha ante la grave situación que se vive. A todos aquellos que salen día a día con la clara convicción de dar su vida, si fuese necesario, por un mejor mañana. Mil gracias por hacer de mi tierra un lugar digno donde democracia, paz y amor sean la prioridad.

En memoria de mis hermanos caídos!

Debo comenzar agradeciendo a Dios por permitirme llegar hasta este punto de mi vida académica.

A mis padres por haberme brindado su incondicional y ciego apoyo.

A la Universidad Nacional Experimental del Táchira por la confianza brindada durante estos dos años.

Al Programa de Magíster en Ciencias Mención Matemática de la Universidad Católica del Norte por su financiamiento en matrícula y manutención y a su cuerpo docente, en especial a la Dra. Elva Ortega y al Dr. Mario Salas por todo el apoyo y comprensión recibido de parte de ellos durante este tiempo.

A la Dra. María Robbiano, por su apoyo a lo largo de todo el trabajo de tesis.

Un agradecimiento especial a los profesores Enide Andrade y Geir Dahl por la colaboración con el trabajo de investigación de la presente tesis, la que culminó con un trabajo presentado a una revista internacional (ver [1]).

Finalmente y no menos importante gracias a todos aquellos que de una u otra manera, sabiéndolo o no, ayudaron a la realización de este trabajo.

Tabla de contenidos

Dedicatoria	II
Agradecimientos	III
Resumen	VI
Introducción	1
1. PRELIMINARES	4
1.1. Grafos	4
1.1.1. Algunas propiedades para el índice de Zagreb	10
1.1.2. Matrices asociadas a un grafo G	11
1.2. Resultados relevantes en la Teoría de Matrices	14
2. AMPLITUD DEL ESPECTRO DE MATRICES	19
2.1. Cota superior de Mirsky para la amplitud de una matriz cuadrada	19
2.2. Cotas inferiores de Barnes y Hoffman para la amplitud de una matriz normal	23
2.3. Cotas inferiores de Jiang y Zhan para la amplitud de una matriz Hermítica	33
3. DISTINTAS AMPLITUDES ASOCIADAS A UN GRAFO G	42
3.1. Algunas propiedades de los autovalores de G	43
3.2. Relación entre los autovalores de G	45

3.3. Algunas propiedades para la amplitud del espectro Laplaciano de un grafo G	47
3.4. Algunas propiedades para la amplitud del espectro Laplaciano sin signo de un grafo G	48
4. RESULTADOS	51
4.1. Cotas superiores para la amplitud del espectro Laplaciano sin signo de un grafo G	51
4.2. Cotas inferiores para la amplitud del espectro Laplaciano sin signo de un grado G	54
4.3. Cotas inferiores basadas en el principio minimax	57
4.4. Comparación de cotas	65
Conclusiones	71
Bibliografía	72

Universidad Católica del Norte
Facultad de Ciencias
Magíster en Ciencias Mención Matemática

Estudio sobre cotas para la amplitud del espectro Laplaciano sin signo
de un grafo.

Autor: Laura Mayely Leal Chacón

Tutor: María Rosario Robbiano Bustamante

Fecha: Diciembre, 2017

Resumen

Sea G un grafo simple. La amplitud del espectro Laplaciano sin signo de G se define como la distancia máxima entre pares de autovalores distintos de la matriz Laplaciana sin signo. Este trabajo estudia antiguas y establece nuevas cotas, tanto inferiores como superiores, para la amplitud del espectro Laplaciano sin signo de un grafo. Varias de estas cotas dependen de parámetros estructurales del grafo. También se usa el principio minimax para encontrar diversas cotas inferiores para este invariante espectral.

Palabras claves: Matriz Laplaciana sin signo, amplitud de una matriz, amplitud del espectro Laplaciano sin signo.

Introducción

Un grafo $G = (V, E)$ consiste de un conjunto de puntos V , llamados vértices, y un conjunto de líneas E , llamadas aristas, tales que es posible asociar a un par de puntos una línea. Esta simple idea permite modelar escenarios de la vida real tal como lo hiciera Leonard Euler en 1736 al dar la solución al problema de encontrar un “buen recorrido” para cruzar a pie toda la ciudad de Königsberg (que era atravesada por el río Pregel y que dividía a esta en cuatro regiones unidas por siete puentes) pasando solo una vez por cada uno de los puentes, y regresando al mismo punto de inicio. Con esta solución se estableció las bases de la Teoría de Grafos y se configuró la idea de Topología.

Soluciones a problemas simples como este son planteadas a través del lenguaje de los grafos, sin embargo estas estructuras también permiten estudiar problemas más complejos tal como la detección de jerarquías y subestructuras en redes. Por ejemplo, la actividad eléctrica del cerebro puede ser estudiada usando redes neuronales, las cuales son obtenidas por señales que corresponden a registros de la actividad electroencefalográfica, con ello se pueden analizar cambios en el patrón de activación neuronal en diferentes áreas del cerebro.

La Teoría Espectral de Grafos es un área de la matemática que estudia propiedades de un grafo por medio de sus representaciones matriciales y de sus respectivos espectros. Se estudian las propiedades estructurales derivadas de las matrices que representan a los grafos, como lo puede ser la matriz de adyacencia, la matriz Laplaciana, la matriz Laplaciana sin signo u otras. Estas últimas tienen las propiedades espectrales del grafo, que es el elemento central de la Teoría Espectral de Grafos.

La Teoría Espectral de Grafos ha servido de herramienta en la actualidad para obtener grandes avances en otras áreas de la ciencia como ciencias de la computación. El origen del buscador Google es ya bien conocido, fue diseñado en 1998 por Sergei Brin y Lawrence Page. El algoritmo de búsqueda de Google, llamado PageRank

algorithm, trabaja con una matriz estocástica especial denominada Google Matrix, es la matriz de un grafo cuyas aristas representan conexiones entre las páginas web. La clave de la eficacia en la búsqueda de información en Google yace en la aplicación del Teorema de Perron-Frobenius y el cálculo del autovector de Perron-Frobenius.

Durante la elaboración de este trabajo se estudiaron las cotas para la amplitud de un grafo, la amplitud del espectro Laplaciano y Laplaciano sin signo de un grafo. Se estudiaron resultados para la amplitud de una matriz a partir del año 1956 hasta la actualidad y con estas se lograron establecer nuevas cotas, tanto inferiores como superiores, para la amplitud del espectro Laplaciano sin signo de un grafo, donde varias de estas últimas dependen de parámetros estructurales del grafo. Además se usa el principio minimax el cual permite encontrar diversas cotas inferiores para este invariante espectral. Se compararon las nuevas cotas obtenidas con las existentes y se estudió la relación entre algunos de los principales parámetros e invariantes espectrales asociados a un grafo.

En el Capítulo 1 se muestran los preliminares teóricos necesarios para estudiar las cotas asociadas a la amplitud del espectro Laplaciano sin signo de un grafo. Se comienza desde definiciones y propiedades básicas de la Teoría de Grafos que serán útiles para alcanzar los objetivos trazados. Luego se pasará a dar propiedades básicas de la Teoría de Matrices y la Teoría Espectral de Grafos que mantienen relación con los resultados de la Teoría de Grafos presentados.

En los capítulos 2 y 3 se mostrará un recuento en orden cronológico de los resultados principales que llevaron a desarrollar las técnicas actuales para el cálculo de cotas asociadas a la amplitud del espectro Laplaciano sin signo de un grafo. En el Capítulo 2 se muestran resultados relevantes sobre las cotas inferiores y superiores para la amplitud de una matriz, mientras que en el Capítulo 3 se muestran resultados relevantes sobre las cotas inferiores y superiores para la amplitud del espectro Laplaciano y Laplaciano sin signo de un grafo.

Finalmente, en el Capítulo 4 se presentan los resultados encontrados para cotas inferiores y superiores para la matriz Laplaciana sin signo de un grafo y se comparan con los resultados obtenidos anteriormente por los investigadores.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Se inicia este trabajo mostrando algunas nociones básicas sobre grafos, matrices asociadas a estos y presentando algunos de los teoremas más relevantes que serán usados durante su desarrollo.

1.1. Grafos

Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo simple, no dirigido con conjunto de vértices $V = V(G)$ de cardinalidad $|V| = n$, también llamado *orden* del grafo G y conjunto de lados o aristas $E = E(G)$ de cardinalidad $|E| = m$, que denota al *tamaño* de G . Además, también se dice que G es un (n, m) -grafo. Una arista $e \in E(G)$ conectando los vértices v_i y v_j es denotada por $v_i v_j$, en ese caso se dirá que v_i y v_j son *vértices extremos* de la arista e . Un vértice v_i es *incidente* a una arista e si v_i es un vértice extremo de e . Si $v_i v_j \in E(G)$ se dice que v_i y v_j son vértices *vecinos*. Se denotará por $N_G(v_i)$ al conjunto de vértices vecinos de v_i y su cardinalidad es el *grado* de v_i , denotado por $d(v_i)$, si $v_i, v_j \in V(G)$ se dirá que son *adyacentes*, escribiéndose $v_i \sim v_j$, cuando la arista $v_i v_j \in E(G)$. Para simplificar la notación se escribirá d_i en lugar de $d(v_i)$. Si $d_i = 0$ se dirá que el *vértice es aislado* y si $d_i = 1$ se dirá que es *vértice*

pendiente. El máximo y mínimo grado del vértice de G se denotarán por $\Delta(G)$ (o simplemente Δ) y $\delta(G)$ (o simplemente δ).

Ejemplo 1.1 Si $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ y $E = \{v_1v_2, v_1v_4, v_1v_5, v_1v_7, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7\}$, el grafo $G = (V, E)$ puede ser representado mediante la Figura 1.1:

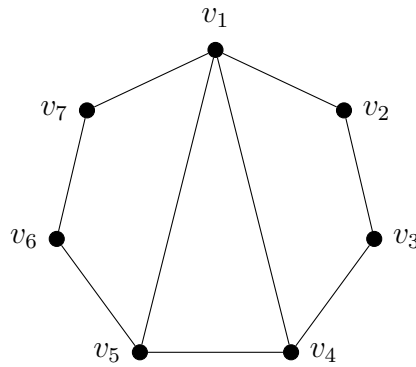


Figura 1.1: $G =$ Grafo con 7 vértices y 9 aristas.

Se puede observar lo siguiente:

- El orden del grafo G es 7.
- Los vértices v_3 y v_7 no son adyacentes, porque $v_3v_7 \notin E(G)$.
- El máximo y mínimo grado de los vértices de G son: $\Delta = 4$ y $\delta = 2$.
- El conjunto de vértices vecinos de v_1 es $N_G(v_1) = \{v_2, v_4, v_5, v_7\}$. Así el grado del vértice v_1 es 4.

Definición 1.1 Un grafo $H = (V(H), E(H))$ es un subgrafo de un grafo $G = (V(G), E(G))$ siempre y cuando $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Un subgrafo H es llamado un subgrafo generador de G si $V(H) = V(G)$. Además, si $E(H)$ se compone de todas las aristas que están en $E(G)$ que conectan a los vértices en $V(H)$, entonces el subgrafo H es llamado subgrafo inducido de G . El subgrafo inducido por

un subconjunto de vértices $S \subset V(G)$, denotado por $\langle S \rangle$, es un grafo con conjunto de vértices S y conjunto de aristas $E(\langle S \rangle) = \{ij \in E(G) : i, j \in S\}$.

Definición 1.2 Si H es un subgrafo inducido de G , entonces el complemento de H , $G \setminus H$, es el subgrafo inducido por el subconjunto $S = V(G) \setminus V(H)$.

Definición 1.3 El grafo completo de orden n , K_n , es el grafo donde cada par de vértices son adyacentes, por ejemplo:

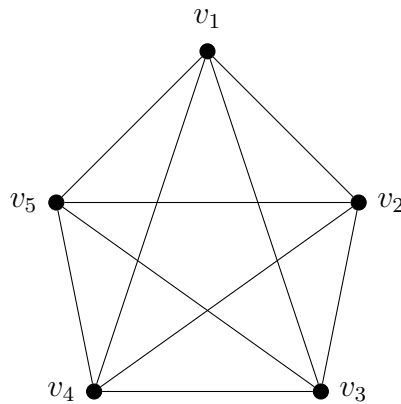


Figura 1.2: Grafo completo K_5 .

Definición 1.4 Un grafo G es llamado regular de grado k o k -regular, si todos los vértices de G tienen k vecinos, es decir, son todos los vértices de G de grado k .

Definición 1.5 Un paseo en un grafo G es una sucesión finita de vértices conectados, donde pueden repetirse vértices.

Definición 1.6 Un camino en un grafo G es un paseo sin lados repetidos. Se denota un camino con n vértices por P_n .

Definición 1.7 Un camino que comience y finalice en el mismo vértice se designa por ciclo. Un ciclo con n vértices, se denota por, C_n .

Definición 1.8 Un grafo G se dice conexo o conectado si entre cada par de vértices de G existe un camino que inicia en uno y finaliza en el otro. En caso contrario, se dice que G es desconexo o desconectado.

Definición 1.9 Un grafo $G = (V(G), E(G))$ se dice bipartito, con bipartición $\{V_1(G), V_2(G)\} := \{V_1, V_2\}$, si $V(G) = V_1 \cup V_2$ y para todo $v_i v_j \in E(G)$, $v_i \in V_1$ y $v_j \in V_2$. Además, si $|V_1| = r$ y $|V_2| = s$ y cada vértice de V_1 es conectado a todos los vértices de V_2 entonces G es llamado grafo bipartito completo y se escribe $G = K_{r,s}$.

Definición 1.10 Un grafo G se dice bipartito semiregular, si existen enteros positivos r y s , con $r \neq s$, tal que todo vértice de G puede tener grado r ó grado s y donde todo vértice de grado r está conectado a un vértice de grado s , por ejemplo:

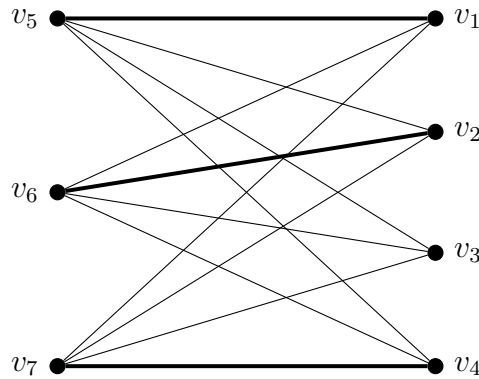


Figura 1.3: Grafo bipartito semiregular $K_{3,4}$.

Definición 1.11 Un *matching* es un subconjunto de aristas que no comparten vértices extremos. Además, es llamado *matching perfecto* si los vértices de las aristas que lo conforman es el conjunto de vértices del grafo.

Observación 1.1 En la Figura 1.3, el conjunto formado por las aristas $\{v_1v_5, v_2v_6, v_4v_7\}$, es un *matching* para este grafo. Observar que puede haber mas de un *matching*, por

ejemplo, el conjunto formado por las aristas $\{v_1v_6, v_2v_5, v_3v_7\}$, también es un matching para este grafo. Se puede observar que no hay un matching que considere todos los vértices del grafo o equivalentemente, no hay un matching perfecto.

Definición 1.12 *El grafo $K_{1,n-1}$, también denotado por S_n es llamado la estrella con n vértices, por ejemplo:*

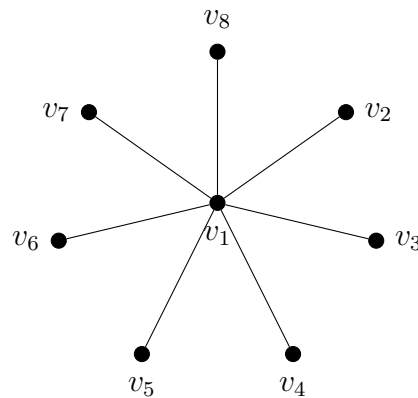


Figura 1.4: S_7 .

Definición 1.13 *El grafo de línea \mathcal{L}_G de un grafo G considera las aristas de G como vértices, conectando dos vértices siempre y cuando los lados correspondientes en G posean un vértice en común. Observar que si G es un grafo regular de grado k entonces \mathcal{L}_G es un grafo regular de grado $2k - 2$.*

Ejemplo 1.2 *Si G es 3-regular, entonces se cumple que \mathcal{L}_G es 4-regular (ver Figura 1.5).*

Se puede apreciar que en el grafo \mathcal{L}_G :

- *El número de vértices es igual a 9.*
- *Los vértices e_1 y e_3 no son adyacentes puesto que en el grafo G los lados e_1 y e_3 no tienen vértices en común.*

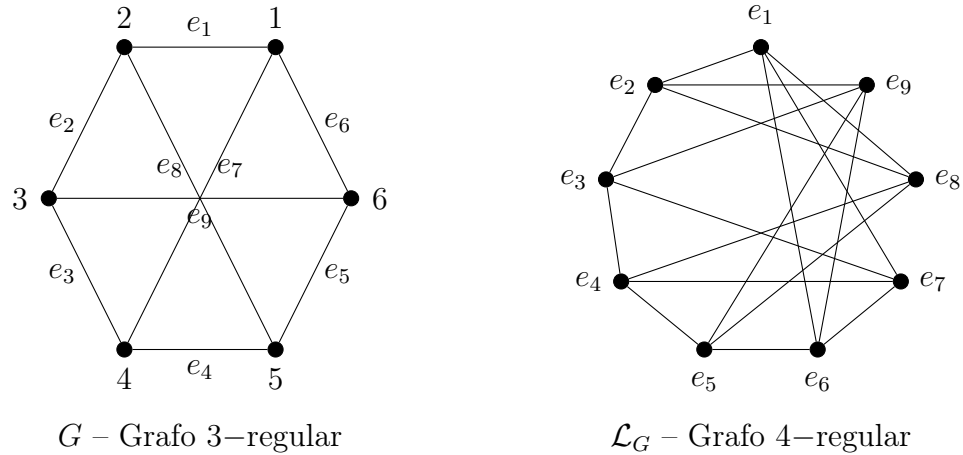


Figura 1.5: G y \mathcal{L}_G

- *Los vértices e_2 y e_8 son adyacentes puesto que en el grafo G los lados e_2 y e_8 tienen un vértice en común.*

Teorema 1.1 (Euler) ([2, Teorema 1.4.4]) *La suma de los grados de los vértices de un grafo es igual al doble del número de sus aristas, es decir*

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2m.$$

Demostración: Si $e = uv$ es una arista de G , e se cuenta una vez mientras se cuentan los grados de los vértices u y v (incluso cuando $u = v$). Es decir, cada arista contribuye 2 a la suma de los grados de los vértices. Por lo tanto, las m aristas de G contribuyen $2m$ a la suma de los grados. \diamond

Definición 1.14 ([15]) *Sea G un grafo con grados de vértices d_1, d_2, \dots, d_n , respectivamente. Sea define el índice de Zagreb como:*

$$M_1(G) = \sum_{i=1}^n d_i^2.$$

1.1.1. Algunas propiedades para el índice de Zagreb

Algunas propiedades relacionadas con este índice son las siguientes:

Lema 1.2 [10, Lema 2.4] *Sea G un grafo simple con n vértices, m aristas y grados de vértice d_1, d_2, \dots, d_n . Entonces*

$$\sum_{i=1}^n d_i^2 \leq m \max\{d_i + m_i : v_i \in V\},$$

y se cumple la igualdad si y solo si $\max\{d_i + m_i : v_i \in V\} = d_j + m_j$ para cada vértice no aislado v_j .

Lema 1.3 [10, Lema 3.2] *Sea G un grafo con n vértices, y m aristas, con máximo y mínimo grado de los vértice de G denotados por Δ y δ . Entonces*

$$d_i + m_i \leq \frac{2m}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}d_i + (\Delta - \delta) \left(1 - \frac{d_i}{n-1}\right),$$

y se cumple para cada vértice no aislado v_i . Además, se cumple la igualdad si y solo si $d_i = n - 1$ o el vértice v_i es adyacente al vértice de grado Δ y no adyacente al vértice de grado δ .

Corolario 1.4 [10, Corolario 3.3] *Sea G un grafo con n vértices, y m aristas, con máximo y mínimo grado de los vértice de G denotados por Δ y δ . Entonces*

$$d_i + m_i \leq \frac{2m}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\Delta + (\Delta - \delta) \left(1 - \frac{\Delta}{n-1}\right),$$

y se cumple para cada vértice no aislado v_i . Además, se cumple la igualdad si y solo si $d_i = n - 1$ o el vértice v_i (grado Δ) es adyacente al vértice de grado Δ y no adyacente al vértice de grado δ .

Teorema 1.5 [10, Teorema 4.1] *Sea G un (n, m) -grafo, con máximo y mínimo grado de los vértice de G denotados por Δ y δ . Entonces*

$$M_1(G) \leq m \left(\frac{2m}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\Delta + (\Delta - \delta) \left(1 - \frac{\Delta}{n-1}\right) \right),$$

y se cumple la igualdad si y solo si G es una estrella, un grafo regular o un grafo completo $K_{\Delta+1}$ con $n - \Delta - 1$ vértices aislados.

1.1.2. Matrices asociadas a un grafo G

Realizando previamente un etiquetado de sus vértices, a un grafo le pueden ser asociadas diversas matrices.

Definición 1.15 ([5, 25]) *La matriz de adyacencia de un (n, m) -grafo G , denotada por A_G , es la matriz cuadrada real simétrica de orden n , es decir, $A_G = (a_{ij})_{n \times n}$, cuyas entradas a_{ij} son:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i v_j \in E(G), \\ 0, & \text{si } v_i v_j \notin E(G). \end{cases}$$

Observación 1.2 *Sea G un grafo simple no orientado, con n vértices y m aristas, y sea $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$, la matriz de adyacencia de G , la cual por ser una matriz simétrica es, en particular, una matriz Hermítica, heredando la propiedad de que todos sus autovalores, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son reales.*

Definición 1.16 ([5, 31]) *La matriz diagonal de grados de un (n, m) -grafo G , denotada por $D_G = (d_{ij})_{n \times n}$, donde sus elementos diagonales corresponden a los grados de los vértices de G , es decir $D_G = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$.*

Definición 1.17 ([5, 8]) *La matriz de incidencia vértice-arista de un (n, m) -grafo G , denotado por R_G , cuyas entradas r_{ij} son:*

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } e_i \text{ incide en } v_j, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Además, se puede escribir como: $R_G R_G^T = A_G + D_G$ y $R_G^T R_G = 2I_m + A(\mathcal{L}_G)$.

Definición 1.18 ([5, 8, 13, 14, 31]) *La matriz Laplaciana de un (n, m) -grafo G , denotada por $L_G = (\ell_{ij})_{n \times n}$, se define como,*

$$\ell_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{si } v_i v_j \in E(G), \\ 0, & \text{si } v_i v_j \notin E(G), \\ d_i, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Además, se puede escribir como: $L_G = D_G - A_G$.

Definición 1.19 ([5, 8]) La matriz Laplaciana sin signo de un (n, m) -grafo G , denotada por $Q_G = (q_{ij})_{n \times n}$, se define como,

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i v_j \in E(G), \\ 0, & \text{si } v_i v_j \notin E(G), \\ d_i, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Además, se puede escribir como: $Q_G = D_G + A_G = R_G R_G^T$.

Ejemplo 1.3 Para el grafo de la Figura 1.1, la matriz Laplaciana sin signo es:

$$Q_G = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

Que a su vez se puede escribir como:

$$Q_G = \overbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}^{D_G} + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{A_G}$$

Observación 1.3 *Las matrices Laplaciana y Laplaciana sin signo de G son matrices semidefinidas positivas (ver [5, 9]) y sus espectros son llamados espectro Laplaciano y espectro Laplaciano sin signo de G , respectivamente. Se sabe que los espectros (conjunto de autovalores) de L_G y Q_G coinciden si y solo si G es un grafo bipartito (ver [8, 14, 13]). Considerando cualquier matriz M se denota su espectro (el conjunto de los autovalores, considerados con sus multiplicidades) de M por $\sigma(M)$, el espectro de la matriz de adyacencia de un grafo G , $\sigma(A_G)$, es simplemente denotado por $\sigma(G)$ y se designa por espectro del grafo. Usualmente, las multiplicidades de los autovalores son representadas en el conjunto $\sigma(G)$ como potencias en corchetes. Por ejemplo, $\sigma(G) = \{\lambda_1^{[m_1]}, \lambda_2^{[m_2]}, \dots, \lambda_q^{[m_q]}\}$, denota que λ_1 tiene multiplicidad m_1 , λ_2 tiene multiplicidad m_2 , etc. Si λ es un autovalor del grafo G y \mathbf{u} es su autovector asociado, el par (λ, \mathbf{u}) es llamado autopar de G .*

Definición 1.20 ([35]) *La traza de una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, denotada por $\text{tr } A$, se define como la suma de los autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A , es decir*

$$\text{tr } A = \lambda_1 + \dots + \lambda_n.$$

Además, por la ecuación del polinomio característico

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A),$$

al expandir el determinante se tiene que la traza es igual a la suma de los elementos de la diagonal principal de A , es decir

$$\text{tr } A = a_{11} + a_{12} + \dots + a_{nn},$$

y

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

Definición 1.21 ([35]) *Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se define el radio espectral de A por*

$$\rho(A) = \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \text{ es un autovalor de } A\}.$$

1.2. Resultados relevantes en la Teoría de Matrices

A continuación se presentan resultados y teoremas de la Teoría de Matrices que serán relevantes para el desarrollo de este trabajo.

Teorema 1.6 (Cauchy-Schwarz) ([35]) Sea V un espacio con producto interior sobre un cuerpo \mathbb{R} o \mathbb{C} . Entonces todos los vectores $x, y \in V$, cumplen

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle,$$

y se cumple la igualdad si y solo si x e y son linealmente dependientes. Además si $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, esta desigualdad se reescribe como

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Teorema 1.7 (Descomposición espectral) ([35]) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz normal con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Entonces existe una matriz unitaria cuadrada U , tal que

$$A = U^* \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) U.$$

Teorema 1.8 (Discos de Geršgorin) ([35, Teorema 2.12]) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y sea

$$r_i = \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Entonces todos los autovalores de A pertenecen a la unión de los n discos cerrados

$$\bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\}.$$

Además, si una unión de k de estos n discos forma una región conectada que está disjunta de los discos $n - k$ restantes, entonces hay exactamente k autovalores de A en esta región (contando las multiplicidades algebraicas).

Teorema 1.9 ([34, Teorema 1.1]) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz cualquiera y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus autovalores. Entonces existe un entero positivo $k \in \mathbb{N}$, tal que

$$|\lambda - a_{kk}| \leq r_k(A), \quad \text{con} \quad r_k(A) = \sum_{j \neq k}^n |a_{kj}|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Teorema 1.10 (Wielandt) ([35, Teorema 7.30]) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz semidefinida positiva, λ_1 y λ_n el más grande y más pequeño autovalor de A , respectivamente. Entonces para todo par de vectores ortogonales $x, y \in \mathbb{C}^{n \times 1}$, se tiene

$$|x^* A y|^2 \leq \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n} \right)^2 (x^* A x)(y^* A y).$$

Teorema 1.11 (Desigualdad de Kantorovich) ([23]) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz definida positiva, simétrica y con autovalores $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Para cualquier vector x , se tiene

$$\frac{(x^T x)^2}{(x^T A x)(x^T A^{-1} x)} \geq \frac{4\lambda_1 \lambda_n}{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}.$$

Teorema 1.12 (Rayleigh-Ritz) ([35, Teorema 8.8]) Sea $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz Hermítica. Entonces

$$\lambda_{\min}(H) = \min_{x^* x = 1} x^* H x \quad \text{y} \quad \lambda_{\max} = \max_{x^* x = 1} x^* H x.$$

Teorema 1.13 (Intercalamiento de Cauchy) ([35, Teorema 8.10]) Sea $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz Hermítica particionada como

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix},$$

con $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ una submatriz principal de H , $1 \leq m \leq n$. Entonces

$$\lambda_{k+n-m}(H) \leq \lambda_k(A) \leq \lambda_k(H), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

En particular, cuando $m = n - 1$, se tiene

$$\lambda_n(H) \leq \lambda_{n-1}(A) \leq \lambda_{n-1}(H) \leq \dots \leq \lambda_2(H) \leq \lambda_1(A) \leq \lambda_1(H).$$

Teorema 1.14 (Weyl) ([29, Teorema 10.3.1]) Sea H la matriz exacta y P una matriz de perturbación que representa la incertidumbre. Considere la matriz $M = H + P$. Sea M con autovalores $m_1 \geq \dots \geq m_n$, H con autovalores $h_1 \geq \dots \geq h_n$ y P con autovalores $p_1 \geq \dots \geq p_n$. El teorema afirma que si M, H y P son todas matrices Hermíticas de $n \times n$, entonces las siguientes desigualdades se cumplen para $i = 1, \dots, n$,

$$h_i + p_n \leq m_i \leq h_i + p_1.$$

Si P es definida positiva, entonces esto implica que

$$m_i > h_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Corolario 1.15 ([32, Corolario 3.8]) Sea $\| \cdot \|$ la norma unitaria invariante, y sea A la matriz particionada en la siguiente forma, $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$. Entonces

$$\| A_{11} \| \leq \| A \|.$$

Lema 1.16 [16, Lema 2.2] Sea A una matriz simétrica no negativa y x un vector unitario. Si $\rho(A) = x^T A x$. Entonces

$$A x = \rho(A) x.$$

Lema 1.17 (Desigualdad de Ozeki) [17] Sea $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ dos vectores con $0 < m_1 \leq a_i \leq M_1$ y $0 < m_2 \leq b_i \leq M_2$, para $i = 1, 2, \dots, n$, para algunas constantes m_1, m_2, M_1 y M_2 . Entonces

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \frac{n^2}{4} (M_1 M_2 - m_1 m_2)^2.$$

Un resultado importante y que se usará durante todo este trabajo es el siguiente:

Proposición 1.18 ([9]) *Sea $A_{n \times n}$ la matriz de adyacencia del grafo G y $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$ sus autovalores. Entonces*

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2m = \text{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

Demostración: Si $A = (a_{ij})_{n \times n}$ es la matriz de adyacencia del grafo G , entonces

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

La entrada (i, j) de la matriz A^2 es

$$a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj}.$$

En particular, dado que A es simétrica, la entrada (i, i) de A^2 es

$$a_{ii}^2 = \sum_{k=1}^n a_{ik}^2.$$

Luego, para la traza de A^2

$$\begin{aligned} \text{tr}(A^2) &= \sum a_{ii}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \\ &= a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + \cdots + a_{1n}^2 \\ &\quad + a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 + \cdots + a_{2n}^2 \\ &\quad + a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 + \cdots + a_{3n}^2 \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + a_{n3}^2 + \cdots + a_{nn}^2. \end{aligned}$$

Capítulo 1: Resultados relevantes en teoría de matrices

Como $a_{ii} = 0, \forall i = 1, \dots, n$ y $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = 1, \dots, n$, se tiene que,

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A^2) &= 2a_{12}^2 + 2a_{13}^2 + \cdots + 2a_{1n}^2 + 2a_{23}^2 + \cdots + 2a_{2n}^2 \\ &\quad + 2a_{34}^2 + \cdots + 2a_{3n}^2 + \cdots + 2a_{n-1n}^2 \\ &= 2(a_{12}^2 + a_{13}^2 + \cdots + a_{1n}^2 + a_{23}^2 + \cdots + a_{2n}^2 + a_{34}^2 + \cdots + a_{3n}^2 + \cdots + a_{n-1n}^2).\end{aligned}$$

Puesto que $a_{ij}^2 = 1$ cuando los vértices i y j son adyacentes, $a_{12}^2 + a_{13}^2 + \cdots + a_{1n}^2 + a_{23}^2 + \cdots + a_{2n}^2 + a_{34}^2 + \cdots + a_{3n}^2 + \cdots + a_{n-1n}^2 = m$, donde m es el número de aristas del grafo, lo que implica

$$\operatorname{tr}(A^2) = 2m.$$

Así, usando el Teorema 1.1 y 1.7 se tiene

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2m = \operatorname{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

◇

Capítulo 2

AMPLITUD DEL ESPECTRO DE MATRICES

En el presente capítulo se hace una revisión bibliográfica y se muestran algunos de los resultados más conocidos referentes a cotas inferiores y superiores de la amplitud del espectro de una matriz. La amplitud de una matriz A se define como la distancia máxima entre pares de autovalores distintos de la matriz A ,

$$s(A) := \max_{i,j} (\lambda_i - \lambda_j),$$

donde λ_i , con $1 \leq i \leq n$, son los autovalores de A .

2.1. Cota superior de Mirsky para la amplitud de una matriz cuadrada

La primera cota encontrada es un resultado de Mirsky en 1956.

Teorema 2.1 ([26, Teorema 1]) *Sea $A = (a_{ij})_{n \times n}$ cualquier matriz. Entonces*

$$s(A) \leq \sqrt{2 \|A\|_F^2 - \frac{2}{n} |\operatorname{tr}(A)|^2},$$

y se cumple la igualdad si y solo si A es normal ($AA^* = A^*A$) y los autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ cumplen la siguiente condición, dado n autovalores son tales que $n - 2$ entre ellos son iguales a la media aritmética de los otros dos. Así, diremos que los n autovalores satisfacen la condición \mathfrak{C} la cual será denotada como

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-2} = \frac{\lambda_{n-1} + \lambda_n}{2}. \quad (2.1)$$

Ejemplo 2.1 Si esta cota se aplica a la matriz de adyacencia, $A := A(G)$, de un grafo G , recordando que $\|A\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^n d_i = 2m$, entonces $s(G) \leq 2\sqrt{m}$. Si además se toma el grafo $G = K_{a,b}$, el cual tiene un conjunto de autovalores dado por $\sigma(K_{a,b}) = \{-\sqrt{ab}, 0^{[a+b-2]}, \sqrt{ab}\}$, entonces la condición \mathfrak{C} se cumple y en consecuencia, la cota es alcanzada por la amplitud de $A(K_{a,b})$.

Cuando las raíces del polinomio característico de A son reales, el siguiente resultado produce una estimación generalmente mejor que la del Teorema 2.1.

Teorema 2.2 ([26, Teorema 2]) Sea $A = (a_{ij})_{n \times n}$ una matriz Hermítica. Entonces

$$s(A) \leq \sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{tr}(A^2) - \frac{4}{n} \text{tr}_2(A)},$$

donde

$$\text{tr}_2(A) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j.$$

Para demostrar este resultado se necesita de la siguiente herramienta.

Lema 2.3 ([26, Lema]) Sean z_1, \dots, z_n , números complejos y dada la relación,

$$s = \max_{i,j} |z_i - z_j|. \text{ Entonces,}$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|^2 \geq \frac{n s^2}{2},$$

y se cumple la igualdad si y solo si z_1, \dots, z_n cumplen la condición \mathfrak{C} (2.1).

Demostración: Sin pérdida de generalidad se asume que, $s = z_n - z_{n-1} > 0$.

Se define,

$$\omega_i = \frac{2z_i - (z_{n-1} + z_n)}{s}, \quad z_i = \frac{s \omega_i}{2} + \left(\frac{z_{n-1} + z_n}{2} \right) \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.2)$$

con,

$$\omega_{n-1} = \frac{z_{n-1} - z_n}{s} = -1, \quad \omega_n = \frac{z_n - z_{n-1}}{s} = 1, \quad \text{y} \quad |z_i - z_j| = \frac{s}{2} |\omega_i - \omega_j|.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|^2 &= \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{s}{2} |\omega_i - \omega_j| \right)^2 \\ &= \frac{s^2}{4} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n-2} |\omega_i - \omega_j|^2 + \sum_{i=1}^{n-2} |\omega_i - \omega_{n-1}|^2 + \sum_{i=1}^{n-1} |\omega_i - \omega_n|^2 \right) \\ &= \frac{s^2}{4} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n-2} |\omega_i - \omega_j|^2 + \sum_{i=1}^{n-2} |\omega_i + 1|^2 + \sum_{i=1}^{n-2} |\omega_i - 1|^2 + |-2|^2 \right) \\ &= \frac{s^2}{4} \left(4 + \sum_{1 \leq i < j \leq n-2} |\omega_i - \omega_j|^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-2} (|\omega_i|^2 + 1) \right) \\ &= \frac{s^2}{4} \left(4 + 2(n-2) + \sum_{1 \leq i < j \leq n-2} |\omega_i - \omega_j|^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-2} |\omega_i|^2 \right) \\ &\geq \frac{s^2}{4} (4 + 2n - 4) \\ &= \frac{n s^2}{2}. \end{aligned}$$

Se cumple la igualdad si y solo si,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n-2} |\omega_i - \omega_j|^2 = 0, \quad \omega_1 = \dots = \omega_{n-2} = 0, \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n-2} |\omega_i|^2 = 0.$$

Sin embargo, esto ocurre si se da la relación de la ecuación (2.2)

$$|z_i - z_j|^2 = 0, \quad z_1 = \dots = z_{n-2} = \frac{z_{n-1} + z_n}{2}.$$

De esta manera se llega a la condición \mathfrak{C} (2.1). \diamond

Con este Lema previo ya se puede iniciar la demostración del Teorema 2.1.

Demostración del Teorema 2.1: Al reemplazar z_1, \dots, z_n por los autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A , en el Lema 2.3 se tiene

$$\frac{n s^2}{2} \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_i - \lambda_j|^2$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_i - \lambda_j|^2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_i|^2 - \lambda_i \bar{\lambda}_j - \lambda_j \bar{\lambda}_i + |\lambda_j|^2 \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (|\lambda_i|^2 + |\lambda_j|^2) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i \bar{\lambda}_j + \lambda_j \bar{\lambda}_i) \\ &= (n-1) \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i \bar{\lambda}_j + \lambda_j \bar{\lambda}_i) \\ &= n \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 - \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i \bar{\lambda}_j + \lambda_j \bar{\lambda}_i) + \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \right) \\ &= n \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i \bar{\lambda}_j + \bar{\lambda}_i \lambda_j) \\ &= n \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 - |\operatorname{tr}(A)|^2 \\ \frac{n s^2}{2} &\leq n \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 - |\operatorname{tr}(A)|^2 \\ s(A) &\leq \sqrt{2 \|A\|_F^2 - \frac{2}{n} |\operatorname{tr}(A)|^2}. \end{aligned}$$

Dando como resultado el hecho presentado en el Teorema 2.1. Además, si los autovalores son reales,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_i - \lambda_j|^2 &= (n-1) \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j \\ \frac{n s^2}{2} &\leq (n-1) \operatorname{tr}(A^2) - 2 \operatorname{tr}_2(A) \\ s(A) &\leq \sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \operatorname{tr}(A^2) - \frac{4}{n} \operatorname{tr}_2(A)}. \end{aligned}$$

Se tiene el resultado propuesto en el Teorema 2.2. \diamond

2.2. Cotas inferiores de Barnes y Hoffman para la amplitud de una matriz normal

En esta sección se detallan los resultados de Barnes y Hoffman, presentados en 1994 (ver [3]). Donde es de relevancia el hecho de que si A es una matriz normal por el Teorema de descomposición espectral, Teorema 1.7, A se puede descomponer como $A = UDU^*$, entonces esta representación de A muestra que las entradas de la diagonal son una combinación convexa de los autovalores de A , denotados por λ . Por el Teorema de intercalamiento de Cauchy, Teorema 1.13, y en particular si A es Hermítica se obtiene la siguiente desigualdad,

$$s(A) \geq \max_{i,j} (a_{ii} - a_{jj}). \quad (2.3)$$

Un mejoramiento de este resultado es dado por Mirsky en [27]. Donde muestra que,

$$s(A)^2 \geq \max_{i \neq j} \{(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4|a_{ij}|^2\}. \quad (2.4)$$

Nuevamente con el Teorema de intercalamiento de Cauchy, Teorema 1.13, calculan-

do los autovalores de $A = \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}$, se tiene

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda(a_{ii} + a_{jj}) + a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji}, \\ \lambda_1 &= \frac{a_{ii} + a_{jj} + \sqrt{(a_{ii} + a_{jj})^2 - 4(a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji})}}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{a_{ii} + a_{jj} - \sqrt{(a_{ii} + a_{jj})^2 - 4(a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji})}}{2}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 (\lambda_1 - \lambda_2)^2 &= (a_{ii} + a_{jj})^2 - 4(a_{ii} + a_{jj} - a_{ij}a_{ji}) \\
 &= a_{ii} + 2a_{ii}a_{jj} + a_{jj} - 4a_{ii}a_{jj} + 4a_{ij}a_{ji} \\
 &= (a_{ii} - a_{jj})^2 + 4a_{ij}a_{ji}.
 \end{aligned}$$

Finalmente, tomando el máximo se tiene la cota de Mirsky (2.4). Además, Scott en 1985 (ver [30]) da el siguiente resultado.

$$s(A) \leq \max_{i,j} \left\{ |a_{ii} - a_{jj}| + \sum_{k \neq i} |a_{ik}| + \sum_{k \neq j} |a_{jk}| \right\}. \quad (2.5)$$

El cual puede ser demostrado usando el Teorema de discos de Geršgorin, Teorema 1.9,

$$\begin{aligned}
 |\lambda_i - \lambda_j| &= |\lambda_i - a_{ii} - \lambda_j + a_{jj} + a_{ii} - a_{jj}| \\
 &\leq |\lambda_i - a_{ii}| + |\lambda_j - a_{jj}| + |a_{ii} - a_{jj}| \\
 &\leq r_i + r_j + |a_{ii} - a_{jj}| \\
 &= \sum_{k \neq i} |a_{ik}| + \sum_{k \neq j} |a_{jk}| + |a_{ii} - a_{jj}|.
 \end{aligned}$$

Luego, tomando el máximo en ambas partes de la desigualdad se tiene la cota (2.5).

Por otro lado, el siguiente resultado dado por Barnes y Hoffman da una mejora a la cota (2.4), su demostración sigue un poco la idea usada para obtener la cota (2.5).

Teorema 2.4 ([3, Corolario]) *Sea $A = (a_{ij})_{n \times n}$ una matriz Hermítica. Entonces*

$$s(A)^2 \geq \max_{i,j} \left\{ (a_{ii} - a_{jj})^2 + 2 \sum_{k \neq i} |a_{ik}|^2 + 2 \sum_{k \neq j} |a_{jk}|^2 \right\}.$$

Demostración: Sean r, d y c , el radio, el diámetro, y el centro del disco más pequeño que contiene todos los autovalores de A . Sean \mathbf{e}_i y \mathbf{e}_j el i -ésimo y j -ésimo vector

canónico unitario, $i \neq j$ y $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ un conjunto ortonormal de autovectores para A correspondiente a los autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Es decir, $A\mathbf{u}_k = \lambda_k\mathbf{u}_k$, para $1 \leq k \leq n$. Si se escribe,

$$\mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{u}_k \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbf{u}_k.$$

Los vectores de coordenadas $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ y $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ son ortonormales porque \mathbf{e}_i y \mathbf{e}_j son ortonormales. Además, si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$,

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \stackrel{\text{C-S}}{\leq} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \stackrel{\text{N-E}}{=} \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n |y_k|^2},$$

es decir,

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{j=1}^n |x_j|^2.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |a_{ii} - c|^2 + \sum_{k \neq i} |a_{ik}|^2 &= \|(A - cI)\mathbf{e}_i\|^2 = \left\| (A - cI) \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{u}_k \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{k=1}^n (A\mathbf{u}_k - cI\mathbf{u}_k) \alpha_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k (\lambda_k - c) \mathbf{u}_k \right\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 (\lambda_k - c)^2 \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 r^2 = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 r^2 = r^2. \end{aligned}$$

Similarmente se procede para, $|a_{jj} - c|^2 + \sum_{k \neq j} |a_{jk}|^2 \leq r^2$. Por lo tanto,

$$|a_{ii} - c|^2 + |a_{jj} - c|^2 + \sum_{k \neq i} |a_{ik}|^2 + \sum_{k \neq j} |a_{jk}|^2 \leq 2r^2 = \frac{1}{2}d^2. \quad (2.6)$$

Si se toma la siguiente expresión, $|a_{ii} - c|^2 + |a_{jj} - c|^2$. Desarrollando,

$$\begin{aligned} |a_{ii} - c|^2 + |a_{jj} - c|^2 &= |a_{ii}|^2 - 2ca_{ii} + c^2 + |a_{jj}|^2 - 2ca_{jj} + c^2 \\ &= |a_{ii}|^2 + |a_{jj}|^2 - a_{ii}a_{jj} + a_{ii}a_{jj} - 2ca_{ii} \\ &\quad - 2ca_{jj} + 2c^2 \\ &= \frac{1}{2}(a_{ii} - a_{jj})^2 + \frac{1}{2}(a_{ii} + a_{jj} - 2c)^2. \end{aligned}$$

La cual alcanza el mínimo cuando, $c = \frac{1}{2}(a_{ii} + a_{jj})$, y su valor es $\frac{1}{2}(a_{ii} - a_{jj})^2$, es decir,

$$\frac{1}{2}(a_{ii} - a_{jj})^2 \leq |a_{ii} - c|^2 + |a_{jj} - c|^2. \quad (2.7)$$

Entonces, sustituyendo (2.7) en (2.6),

$$\frac{1}{2}(a_{ii} - a_{jj})^2 + \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 + \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2 \leq \frac{1}{2} d^2,$$

$$d^2 \geq (a_{ii} - a_{jj})^2 + 2 \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 + 2 \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2,$$

$$s(A)^2 \geq \max_{i,j} \left\{ (a_{ii} - a_{jj})^2 + 2 \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 + 2 \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2 \right\}.$$

Se tiene la cota inferior deseada. ◇

Ejemplo 2.2 *Si esta cota se aplica a la matriz de adyacencia asociada a un grafo G de orden n , con grado vértice máximo Δ , es fácil ver que $s(G) \geq 2\sqrt{\Delta}$. Además, si $G = K_{1,n-1}$ (estrella de n vértices) se alcanza la igualdad.*

Teorema 2.5 ([3, Teorema 3.1]) *Sea $A = (a_{ij})_{n \times n}$ una matriz arbitraria con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, y teniendo como máximo $K - 1$ elementos no nulos fuera de la diagonal. Entonces*

$$s(A) \leq \sqrt{K} \max_{i,j} \left(|a_{ii} - a_{jj}|^2 + 2 \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 + 2 \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2 \right)^{1/2}.$$

Demostración: Por el Teorema de los discos de Geršgorin, Teorema 1.9,

$$|\lambda_p - a_{ii}| \leq r_i = \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}| \quad \text{y} \quad |\lambda_q - a_{jj}| \leq r_j = \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|.$$

De esto se sigue que,

$$\begin{aligned}
 |\lambda_p - \lambda_q| &\leq |\lambda_p - a_{ii}| + |a_{ii} - a_{jj}| + |a_{jj} - \lambda_q| \\
 &\leq |a_{ii} - a_{jj}| + \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}| + \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}| \\
 &= |a_{ii} - a_{jj}| + \sum_{k \neq i}^n \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2}|a_{ik}|) + \sum_{k \neq j}^n \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2}|a_{jk}|) \\
 &\stackrel{\mathbf{D-T}}{\leq} |a_{ii} - a_{jj}| + \left| \sum_{k \neq i}^n \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2}|a_{ik}|) \right| + \left| \sum_{k \neq j}^n \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2}|a_{jk}|) \right| \\
 &\stackrel{\mathbf{C-S}}{\leq} \| |a_{ii} - a_{jj}| \| + \left\| \sum_{k \neq i}^n \frac{1}{\sqrt{2}} \right\| \left\| \sum_{k \neq i}^n \sqrt{2}|a_{ik}| \right\| + \left\| \sum_{k \neq j}^n \frac{1}{\sqrt{2}} \right\| \left\| \sum_{k \neq j}^n \sqrt{2}|a_{jk}| \right\| \\
 &= \sqrt{|a_{ii} - a_{jj}|^2} + \sqrt{\sum_{k \neq i}^n \frac{1}{2}} \sqrt{\sum_{k \neq i}^n 2|a_{ik}|^2} + \sqrt{\sum_{k \neq j}^n \frac{1}{2}} \sqrt{\sum_{k \neq j}^n 2|a_{jk}|^2} \\
 &= 1 \cdot |a_{ii} - a_{jj}| + \sqrt{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\sum_{k \neq i}^n 2|a_{ik}|^2} + \sqrt{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\sum_{k \neq j}^n 2|a_{jk}|^2} \\
 &\stackrel{\mathbf{C-S}}{\leq} \sqrt{1 + \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2}} \sqrt{|a_{ii} - a_{jj}|^2 + \sum_{k \neq i}^n 2|a_{ik}|^2 + \sum_{k \neq j}^n 2|a_{jk}|^2}.
 \end{aligned}$$

Observando que ahora n puede ser cambiado por K , se tiene la cota superior deseada.

◇

Corolario 2.6 (*[3, Corolario (Scott)]*) Sea $A = (a_{ij})_{n \times n}$ una matriz Hermítica, se define:

$$G(A) = \max_{i,j} \left\{ |a_{ii} - a_{jj}| + \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}| + \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}| \right\},$$

con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, los autovalores de A . Si A tiene como máximo $K - 1$ elementos no nulos fuera de la diagonal. Entonces

$$\frac{1}{\sqrt{K}} G(A) \leq s(A) \leq G(A).$$

Demostración: Para $K \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\text{Por (2.5), } s(A) \leq G(A) \Rightarrow \sqrt{K}s(A) \leq \sqrt{K}G(A).$$

Por Teorema 2.4,

$$s(A)^2 \geq \max_{i,j} \left\{ (a_{ii} - a_{jj})^2 + 2 \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 + 2 \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2 \right\} = B(A).$$

$$B(A)^{1/2} \leq s(A) \Rightarrow \sqrt{K}B(A)^{1/2} \leq \sqrt{K}s(A).$$

$$\text{Por Teorema 2.5, } s(A) \leq G(A) \leq \sqrt{K}B(A)^{1/2}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} s(A) \leq G(A) \leq \sqrt{K}B(A)^{1/2} \leq \sqrt{K}s(A) \leq \sqrt{K}G(A), \\ \frac{1}{\sqrt{K}} G(A) \leq s(A) \leq G(A). \end{aligned}$$

◇

Con base en el Teorema 2.1, Barnes y Hoffman dan el siguiente error.

Teorema 2.7 ([3, Teorema 3.2]) *Sea $A = (a_{ij})_{n \times n}$ una matriz Hermítica ($n \geq 3$) se define:*

$$M(A) = \sqrt{2 \|A\|_F^2 - \frac{2}{n} |\text{tr}(A)|^2}.$$

Sea $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ los autovalores de A . Entonces

$$\sqrt{\frac{2}{n}} M(A) \leq s(A) \leq M(A).$$

Demostración: Sean r, c y d , radio, centro y diámetro. Por lo visto en el Teorema 2.4

$$|a_{ii} - c|^2 + \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 \leq r^2, \quad i = 1, \dots, n.$$

De esto se sigue que,

$$nr^2 \geq \sum_{i=1}^n \left(|a_{jj} - c|^2 + \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2 \right) = H(c). \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \left(|a_{ii} - c|^2 + \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 \right) &= \sum_{i=1}^n \left(|a_{ii}|^2 - 2ca_{ii} + c^2 + \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2 \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n |a_{ii}|^2 - 2c \sum_{i=1}^n a_{ii} + nc^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2 \\
 &= \|A\|_F^2 - 2c \operatorname{tr}(A) + n c^2.
 \end{aligned}$$

Si,

$$h(c) = nc^2 - 2c \operatorname{tr}(A), \quad h'(c) = 2nc - 2 \operatorname{tr}(A). \quad (2.9)$$

Entonces, (2.9) alcanza su mínimo cuando, $c = \frac{\operatorname{tr}(A)}{n}$, y este mínimo tiene el valor de:

$$\begin{aligned}
 h\left(\frac{\operatorname{tr}(A)}{n}\right) &= n \left(\frac{\operatorname{tr}(A)}{n}\right)^2 - 2 \left(\frac{\operatorname{tr}(A)}{n}\right) \operatorname{tr}(A) \\
 &= \frac{|\operatorname{tr}(A)|^2}{n} - 2 \frac{|\operatorname{tr}(A)|^2}{n} \\
 &= -\frac{1}{n} |\operatorname{tr}(A)|^2.
 \end{aligned}$$

Luego, (2.8) alcanza su mínimo en: $\|A\|^2 - \frac{1}{n} |\operatorname{tr}(A)|^2$. Si,

$$nr^2 = n \left(\frac{d}{2}\right)^2 = n \frac{s(A)^2}{4}. \quad (2.10)$$

Relacionando (2.8) con (2.10),

$$\begin{aligned}
 n \frac{s(A)^2}{4} &\geq \|A\|^2 - \frac{1}{n} |\operatorname{tr}(A)|^2 \\
 s(A)^2 &\geq \frac{2}{n} \left(2\|A\|^2 - \frac{2}{n} |\operatorname{tr}(A)|^2 \right).
 \end{aligned}$$

Se tiene el error propuesto. ◇

Además, los autores obtienen dos cotas usando el siguiente cociente, $\frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n}$, el cual surge en [23] mientras se calcula el radio de convergencia del método del descenso más rápido (ver detalles del método en [6]). El cálculo de dicha convergencia se basa en usar la desigualdad de Kantorovich 1.11.

Teorema 2.8 ([3, Teorema 4.1]) Sea $A = (a_{ij})_{n \times n}$ una matriz Hermítica, definida positiva y con autovalores $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Entonces, para todo i y j se cumple

$$\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n} \right)^2 \geq \frac{(a_{ii} - a_{jj})^2 + \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 + \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2}{(a_{ii} + a_{jj})^2 + \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 + \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2}. \quad (2.11)$$

Demostración: Al resolver los cuadrados, hacer las multiplicaciones y agrupaciones correspondientes en (2.11), se observa que es equivalente a

$$\frac{\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 + \sum_{k=1}^n |a_{jk}|^2}{4 a_{ii} a_{jj}} \leq \frac{\lambda_1^2 + \lambda_n^2}{4 \lambda_1 \lambda_n}. \quad (2.12)$$

Al usar la notación introducida en la demostración del Teorema 2.4,

$$a_{ii} = \mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \lambda_k, \quad \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 = \|A \mathbf{e}_i\|^2 = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \lambda_k^2,$$

donde $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es un vector unitario. Dado que $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, se tiene

$$\begin{aligned} \lambda_k^2 - \lambda_n^2 &= (\lambda_k + \lambda_n)(\lambda_k - \lambda_n) \\ &\leq (\lambda_1 + \lambda_n)(\lambda_k - \lambda_n) \\ \alpha_k^2 \lambda_k^2 &\leq \alpha_k^2 \lambda_n^2 + \alpha_k^2 \lambda_k (\lambda_1 + \lambda_n) - \alpha_k^2 \lambda_n (\lambda_1 + \lambda_n) \\ \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \lambda_k^2 &\leq \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \lambda_n^2 + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \lambda_k (\lambda_1 + \lambda_n) - \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \lambda_n (\lambda_1 + \lambda_n) \\ \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 &\leq \lambda_n^2 + (\lambda_1 + \lambda_n)(a_{ii} - \lambda_n). \end{aligned}$$

Similarmente, $\sum_{k=1}^n |a_{jk}|^2 \leq \lambda_n^2 + (\lambda_1 + \lambda_n)(a_{jj} - \lambda_n)$. Usando estas desigualdades en el lado izquierdo de la ecuación (2.12), se observa que

$$\begin{aligned}
 \frac{\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 + \sum_{k=1}^n |a_{jk}|^2}{4 a_{ii} a_{jj}} &\leq \frac{2\lambda_n^2 + (\lambda_1 + \lambda_n)(a_{ii} - \lambda_n) + (\lambda_1 + \lambda_n)(a_{jj} - \lambda_n)}{4 a_{ii} a_{jj}} \\
 &= \frac{2\lambda_n^2 + (\lambda_1 + \lambda_n)[(a_{ii} + a_{jj}) - 2\lambda_n]}{4 a_{ii} a_{jj}} \\
 &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)(a_{ii} + a_{jj}) - 2\lambda_1 \lambda_n}{4 a_{ii} a_{jj}} \\
 &= \frac{\lambda_1 \lambda_n}{2} \left[\frac{(\lambda_1 + \lambda_n)(a_{ii} + a_{jj})}{2\lambda_1 \lambda_n a_{ii} a_{jj}} - \frac{2}{2a_{ii} a_{jj}} \right].
 \end{aligned}$$

Definiendo $x = \frac{1}{a_{ii}}$ e $y = \frac{1}{a_{jj}}$, se tiene

$$\frac{\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 + \sum_{k=1}^n |a_{jk}|^2}{4 a_{ii} a_{jj}} \leq \frac{\lambda_1 \lambda_n}{2} \left[\frac{(\lambda_1 + \lambda_n)}{2\lambda_1 \lambda_n} (x + y) - xy \right]. \quad (2.13)$$

Por (2.3) se puede afirmar que las entradas de la diagonal de A están contenidas en el intervalo $\subseteq [\lambda_n, \lambda_1]$, es decir $x, y \in [1/\lambda_1, 1/\lambda_n]$. Con esto se puede maximizar (2.13). Sin pérdida de generalidad, si se supone que este máximo se alcanza cuando,

$$x = y = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_1} \right) = \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{2\lambda_1 \lambda_n}. \quad (2.14)$$

Al reemplazar (2.14) en (2.13), da lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \frac{\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 + \sum_{k=1}^n |a_{jk}|^2}{4 a_{ii} a_{jj}} &\leq \frac{\lambda_1 \lambda_n}{2} \left[\frac{(\lambda_1 + \lambda_n)}{2\lambda_1 \lambda_n} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_n}{\lambda_1 \lambda_n} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_n}{\lambda_1 \lambda_n} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{8\lambda_1 \lambda_n} \leq \frac{2(\lambda_1^2 + \lambda_n^2)}{8\lambda_1 \lambda_n} = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_n^2}{4\lambda_1 \lambda_n}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene (2.12). ◇

Teorema 2.9 ([3, Teorema 4.2]) Sea $A = (a_{ij})_{n \times n}$ una matriz Hermítica, definida positiva y con autovalores $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Entonces

$$\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n} \right)^2 \geq \frac{|a_{ii} - a_{jj}|^2 + 2 \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 + 2 \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2}{(a_{ii} + a_{jj})^2 + |a_{ii} - a_{jj}|^2 + 2 \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 + 2 \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2}. \quad (2.15)$$

Demostración: Si se define $r = \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{2}$, $c = \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{2}$ y se usa la relación de (2.6). Entonces el lado izquierdo de (2.15) queda como

$$\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n} \right)^2 = \frac{2r^2}{2c^2} \geq \frac{|a_{ii} - c|^2 + |a_{jj} - c|^2 + \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 + \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2}{2c^2}. \quad (2.16)$$

Para buscar cuándo el lado derecho de (2.16) alcanza su valor mínimo, se define:

$$f(x) = \frac{|a - x|^2 + |b - x|^2 + d}{2x^2},$$

$$f'(x) = -\frac{a^2 + b^2 - ax - bx + d}{x^3}, \quad \text{con } x = \frac{a^2 + b^2 + d}{a + b}.$$

Al aplicar lo anterior a (2.16), se tiene que el lado derecho de esta desigualdad alcanza su valor mínimo cuando

$$c = \frac{\sum_{k=1}^n (|a_{ik}|^2 + |a_{jk}|^2)}{a_{ii} + a_{jj}}. \quad (2.17)$$

Sustituyendo (2.17) en (2.16) se tiene (2.15). \diamond

2.3. Cotas inferiores de Jiang y Zhan para la amplitud de una matriz Hermítica

Finalmente, las cotas presentadas en esta sección, de los autores Jiang y Zhan, fueron obtenidas en 1997 (ver [20]). Para la demostración de dichas cotas es necesario la presentación de los dos siguientes lemas.

Lema 2.10 ([20, Lema 1]) *Sea $A = (a_{ij})_{n \times n}$ una matriz Hermítica. Entonces*

$$s(A) = 2 \min_{c \in \mathbb{R}} \|A - cI\|.$$

El mínimo se alcanza con $c_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{2}$.

Demostración: Sean $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ los autovalores de A , por el Teorema de descomposición espectral, Teorema 1.7, $A = U^*DU$. Además si se define:

$$s(A) = \lambda_1 - \lambda_n = 2 \min_{c \in \mathbb{R}} \max_i |\lambda_i - c| \tag{2.18}$$

Dado que,

$$\begin{aligned} T &= 2 \min_{c \in \mathbb{R}} \max_i |\lambda_i - c| \\ &\leq 2 \max_i |\lambda_i - c_0| \\ &= 2 \max \left\{ \left| \lambda_1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{2} \right|, \left| \lambda_n - \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{2} \right| \right\} \\ &= 2 \max \left\{ \left| \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{2} \right|, \left| \frac{\lambda_n - \lambda_1}{2} \right| \right\} \\ &= \max |\lambda_1 - \lambda_n| \end{aligned}$$

$$T \leq |\lambda_1 - \lambda_n|. \tag{2.19}$$

Además,

$$\begin{aligned}
 |\lambda_1 - \lambda_n| &\leq |\lambda_1 - c| + |c - \lambda_n| \\
 &\leq \max_i |\lambda_i - c| + \max_i |c - \lambda_i| \\
 &= 2 \max_i |\lambda_i - c| \\
 &\leq 2 \min_{c \in \mathbb{R}} \max_i |\lambda_i - c|. \\
 T &\geq |\lambda_1 - \lambda_n|. \tag{2.20}
 \end{aligned}$$

Por (2.19) y (2.20) se tiene la igualdad de (2.18).

Ahora, al usar la igualdad (2.18),

$$\begin{aligned}
 s(A) &= \lambda_1 - \lambda_n \\
 &= 2 \min_{c \in \mathbb{R}} \max_i |\lambda_i - c| \\
 &= 2 \min_c \| D - cI \| \\
 &= 2 \min_c \| U^*(D - cI)U \| \\
 &= 2 \min_c \| U^*DU - cI \| \\
 &= 2 \min_c \| A - cI \|.
 \end{aligned}$$

Se tiene así, la prueba del lema. ◇

Del Colorario 1.15 resulta natural el siguiente Lema.

Lema 2.11 ([20, Lema 2]) *Sea $\| \cdot \|$ la norma unitariamente invariante, y A_0 cualquier submatriz de una matriz arbitraria A . Entonces*

$$\| A_0 \| \leq \| A \| .$$

Las cotas inferiores que presentan Jiang y Zhan son las siguientes:

Teorema 2.12 ([20, Teorema 5]) *Sea $A = (a_{ij})_{n \times n}$ una matriz Hermítica. Entonces*

$$s(A)^2 \geq \max_{i \neq j} \left\{ (a_{ii} - a_{jj})^2 + 2 \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 + 2 \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2 + e_{ij} \right\} ,$$

donde

$$e_{ij} = \begin{cases} 2f_{ij}, & \text{si } a_{ii} = a_{jj}, \\ \text{mín} \left\{ (a_{ii} - a_{jj})^2 + 2|(a_{ii} - a_{jj})^2 - f_{ij}|, \frac{f_{ij}^2}{(a_{ii} - a_{jj})^2} \right\}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y

$$f_{ij} = \left| \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 - \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2 \right|.$$

Demostración: Sea $A = (a_{ij})_{n \times n}$ con $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ y $c \in \mathbb{R}$. Por el Lema 2.11,

$$\|A - cI\| \geq \left\| \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} - c & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{ji} & a_{jj} - c & \cdots & a_{jn} \end{pmatrix} \right\| \quad (2.21)$$

Si x e y son vectores fila,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} xx^* & xy^* \\ yx^* & yy^* \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Al calcular los autovalores de la matriz (2.22), y tomar $\|\cdot\|^2 := \lambda_{\max}(A)$,

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^* \right\|^2 = \frac{1}{2} \left[xx^* + yy^* + \sqrt{(xx^* - yy^*)^2 + 4|xy^*|^2} \right]. \quad (2.23)$$

Donde,

$$2 \cdot \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^* \right\|^2 \geq xx^* + yy^* + |xx^* - yy^*|. \quad (2.24)$$

Al desarrollar (2.24),

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^* \right\|^2 &\geq \frac{1}{2} (a_{ii} - a_{jj})^2 + \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 + \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2 + \frac{t^2}{2} \\ &+ \left| (a_{ii} - a_{jj})t + \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 - \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2 \right|, \end{aligned}$$

Si se define la siguiente función:

$$\Psi(t) = \frac{t^2}{2} + |at + b|, \quad a \neq 0, \quad a, b, t \in \mathbb{R},$$

donde $a = (a_{ii} - a_{jj})$, $b = \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 - \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2$ y $t = a_{ii} + a_{jj} - 2c$.

Esta función alcanza su mínimo cuando, $t = \{\pm a, -b/a\}$,

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \Psi(t) = \min_{t \in \mathbb{R}} \left(\frac{a^2}{2} + |a^2 - |b||, \frac{b^2}{2a^2} \right) = \frac{1}{2} \min_{t \in \mathbb{R}} \left(a^2 + 2|a^2 - |b||, \frac{b^2}{a^2} \right). \quad (2.25)$$

Luego, al sustituir (2.25) en el desarrollo de (2.24),

$$2 \cdot \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^* \right\|^2 \geq \frac{1}{2} (a_{ii} - a_{jj})^2 + \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 + \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2 + \frac{1}{2} e_{ij}, \quad (2.26)$$

con e_{ij} cumpliendo las condiciones del teorema.

Entonces (2.26), se convierte en

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^* \right\|^2 \geq \frac{1}{4} (a_{ii} - a_{jj})^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2 + \frac{1}{4} e_{ij}. \quad (2.27)$$

Finalmente, al usar (2.21), (2.27) y el Lema 2.10, se tiene

$$\begin{aligned} s(A) &= 2 \min_{c \in \mathbb{R}} \|A - cI\| \\ &\geq 2 \min_{c \in \mathbb{R}} \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^* \right\| \\ s(A)^2 &= 4 \min_{c \in \mathbb{R}} \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^* \right\|^2 \\ &\geq 4 \min_{c \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{4} (a_{ii} - a_{jj})^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2 + \frac{1}{4} e_{ij} \right\} \\ s(A)^2 &\geq \max_{i \neq j} \left\{ (a_{ii} - a_{jj})^2 + 2 \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 + 2 \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2 + e_{ij} \right\}. \end{aligned}$$

Así, se obtiene la cota inferior propuesta. \diamond

Teorema 2.13 ([20, Teorema 3]) Sea $A = (a_{ij})_{n \times n}$ una matriz Hermítica. Entonces

$$s^2(A) \geq \max_{i \neq j} \left\{ (a_{ii} - a_{jj})^2 + 2 \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 + 2 \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2 + 4e_{ij} \right\},$$

donde

$$e_{ij} = \begin{cases} \left| \sum_{k \neq i, j}^n \bar{a}_{ik} a_{jk} \right|, & \text{si } a_{ij} = 0, \\ \frac{\left| \operatorname{Im} \left(a_{ij} \sum_{k \neq i, j}^n \bar{a}_{ik} a_{jk} \right) \right|}{|a_{ij}|}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración: De la igualdad (2.23),

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^* \right\|^2 \geq \frac{1}{2} (xx^* + yy^* + 2|xy^*|) \quad (2.28)$$

Al desarrollar (2.28),

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^* \right\|^2 &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(a_{ii} - a_{jj})^2 + \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 + \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2 + \frac{t^2}{2} + 2 \left| a_{ij} t + \sum_{k \neq ij}^n a_{ik} \bar{a}_{jk} \right| \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(a_{ii} - a_{jj})^2 + \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 + \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2 + 2 \left| a_{ij} t + \sum_{k \neq ij}^n a_{ik} \bar{a}_{jk} \right| \right). \end{aligned}$$

Si se define la siguiente función:

$$\Upsilon(t) = |at + b| \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0 \text{ y } t \in \mathbb{R},$$

donde $a = a_{ij}$, $b = \sum_{k \neq ij}^n a_{ik} \bar{a}_{jk}$ y $t = a_{ii} + a_{jj} - 2c$.

Esta función alcanza su mínimo en,

$$\min_{t \in \mathbb{R}} |at + b| = \frac{\operatorname{Im}(a \bar{b})}{|a|}. \quad (2.29)$$

Luego, al sustituir (2.29) en el desarrollo de (2.28), se tiene

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^* \right\|^2 \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(a_{ii} - a_{jj})^2 + \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 + \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2 + 2e_{ij} \right). \quad (2.30)$$

con e_{ij} cumpliendo las condiciones del teorema. Entonces (2.30), se convierte en

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^* \right\|^2 \geq \frac{1}{4}(a_{ii} - a_{jj})^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2 + e_{ij}. \quad (2.31)$$

Finalmente, al usar (2.21), (2.31) y el Lema 2.10, se tiene

$$\begin{aligned}
 s(A) &= 2 \min_{c \in \mathbb{R}} \| A - cI \| \\
 &\geq 2 \min_{c \in \mathbb{R}} \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^* \right\| \\
 s(A)^2 &\geq 4 \min_{c \in \mathbb{R}} \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^* \right\|^2 \\
 &\geq 4 \min_{c \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{4}(a_{ii} - a_{jj})^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2 + e_{ij} \right\} \\
 s(A)^2 &\geq \max_{i \neq j} \left\{ (a_{ii} - a_{jj})^2 + 2 \sum_{k \neq i}^n |a_{ik}|^2 + 2 \sum_{k \neq j}^n |a_{jk}|^2 + 4e_{ij} \right\}.
 \end{aligned}$$

Así, se obtiene la cota inferior propuesta. \diamond

Teorema 2.14 ([20, Teorema 4]) Sea $A = (a_{ij})_{n \times n}$ una matriz real y simétrica.

Entonces

$$s^2(A) \geq \max_{i \neq j} \left\{ (a_{ii} - a_{jj})^2 + 2 \sum_{k \neq i}^n a_{ik}^2 + 2 \sum_{k \neq j}^n a_{jk}^2 + 4e_{ij} \right\},$$

donde

$$e_{ij} = \begin{cases} \left| \sum_{k \neq i, j}^n a_{ik} a_{jk} \right|, & \text{si } a_{ij} = 0, \\ \min \left\{ a_{ij}^2 + \left| 2a_{ij}^2 - \sum_{k \neq i, j}^n a_{ik} a_{jk} \right|, \frac{\left(\sum_{k \neq i, j}^n a_{ik} a_{jk} \right)^2}{(2a_{ij})^2} \right\}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración: Si se toma de nuevo el desarrollo de (2.28),

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^* \right\|^2 \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(a_{ii} - a_{jj})^2 + \sum_{k \neq i}^n a_{ik}^2 + \sum_{k \neq j}^n a_{jk}^2 + \frac{t^2}{2} + 2 \left| a_{ij}t + \sum_{k \neq i, j}^n a_{ik} a_{jk} \right| \right),$$

y se define la siguiente función:

$$\Phi(t) = \frac{t^2}{2} + 2|at + b|, \quad a \neq 0, \quad a, b, t \in \mathbb{R},$$

donde $a = a_{ij}$, $b = \sum_{k \neq ij}^n a_{ik} \bar{a}_{jk}$ y $t = a_{ii} + a_{jj} - 2c$.

Esta función alcanza su mínimo cuando, $t = \{\pm 2a, -b/a\}$,

$$\min_t \Phi(t) = \min_{c \in \mathbb{R}} \left\{ 2(a^2 + |2a^2 - |b||), \frac{b^2}{2a^2} \right\} = 2 \min_{c \in \mathbb{R}} \left\{ a^2 + |2a^2 - |b||, \frac{b^2}{4a^2} \right\}. \quad (2.32)$$

Al sustituir (2.32) en el desarrollo de (2.28), se tiene

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^* \right\|^2 \geq \frac{1}{4}(a_{ii} - a_{jj})^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \neq i}^n a_{ik}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j}^n a_{jk}^2 + e_{ij}. \quad (2.33)$$

con e_{ij} cumpliendo las condiciones del teorema. Luego, al usar (2.21), (2.33) y el Lema 2.10,

$$\begin{aligned} s(A) &= 2 \min_{c \in \mathbb{R}} \|A - cI\| \\ &\geq 2 \min_{c \in \mathbb{R}} \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^* \right\| \\ s(A)^2 &\geq 4 \min_{c \in \mathbb{R}} \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^* \right\|^2 \\ &\geq 4 \min_{c \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{4}(a_{ii} - a_{jj})^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \neq i}^n a_{ik}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j}^n a_{jk}^2 + e_{i,j} \right\} \\ s(A)^2 &\geq \max_{i \neq j} \left\{ (a_{ii} - a_{jj})^2 + 2 \sum_{k \neq i}^n a_{ik}^2 + 2 \sum_{k \neq j}^n a_{jk}^2 + 4e_{ij} \right\}. \end{aligned}$$

Se obtiene la cota inferior propuesta. \diamond

En el mismo orden de ideas, Johnson, Kumar y Wolkowicz en 1985 (ver [21]), probaron que si $|\alpha|$ y $|\beta|$ son la cardinalidad de los conjuntos finitos α y β . Entonces

$$s(A) \geq \frac{2}{\sqrt{|\alpha| |\beta|}} \left| \sum_{\substack{i \in \alpha \\ j \in \beta}} a_{ij} \right|,$$

donde $\alpha, \beta \neq \emptyset$, $\alpha, \beta \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, $\alpha \cup \beta = \{1, 2, \dots, n\}$ y $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

Observación 2.1 *El ajuste de esta cota depende de la partición que se haga de los conjuntos α y β . El teorema siguiente establece una relación para esta partición.*

Teorema 2.15 ([20, Teorema 6]) Sea $A = (a_{ij})_{n \times n}$ una matriz Hermítica. Entonces

$$s(A) \geq \max_{\alpha} \frac{2}{\sqrt{|\alpha|}} \sqrt{\sum_{\substack{i \in \alpha \\ j \notin \alpha}} |a_{ij}|^2}$$

donde $\emptyset \neq \alpha \subset \{1, 2, \dots, n\}$ y $|\alpha| \leq \frac{n}{2}$.

Demostración: Por teoría de normas, se tiene que

$$\begin{aligned} \|A\|_F &= (\text{tr}(A^*A))^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\min\{s,t\}} \sigma_i^2(A) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Entonces, para cualquier matriz $A = (a_{ij})_{s \times t}$

$$\sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)} = \|A\| \geq \frac{1}{\sqrt{\min\{s, t\}}} \|A\|_F.$$

Haciendo una partición ($i \in \alpha$) filas y ($j \in \beta$) columnas, donde $\alpha, \beta \neq \emptyset$; $\alpha, \beta \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, $\alpha \cup \beta = \{1, 2, \dots, n\}$, $\alpha \cap \beta = \emptyset$ y aplicando el Lema 2.11, se observa que

$$\begin{aligned} \|A - cI\| &\geq \|(A - cI)[\alpha|\beta]\| \\ &= \|A[\alpha|\beta]\| \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{\min\{|\alpha|, |\beta|\}}} \|A[\alpha|\beta]\|_F \\ &= \frac{1}{\sqrt{\min\{|\alpha|, |\beta|\}}} \sqrt{\sum_{\substack{i \in \alpha \\ j \in \beta}} |a_{ij}|^2}. \end{aligned}$$

Al ajustar $\beta = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \alpha$, restringir $|\alpha| \leq \frac{n}{2}$ y aplicar el Lema 2.10, se tiene

$$\begin{aligned} s(A) &= 2 \min_{c \in \mathbb{R}} \|A - cI\| \\ &\geq 2 \frac{1}{\sqrt{\min\{|\alpha|, |\beta|\}}} \sqrt{\sum_{\substack{i \in \alpha \\ j \in \beta}} |a_{ij}|^2} \\ &\geq \max_{\alpha} \frac{2}{\sqrt{|\alpha|}} \sqrt{\sum_{\substack{i \in \alpha \\ j \notin \alpha}} |a_{ij}|^2} \end{aligned}$$

donde $\emptyset \neq \alpha \subset \{1, 2, \dots, n\}$ y $|\alpha| \leq \frac{n}{2}$. ◇

Hasta este punto, estas cotas fueron las más óptimas encontradas para matrices Hermíticas.

Capítulo 3

DISTINTAS AMPLITUDES ASOCIADAS A UN GRAFO G

Uno de los temas más estudiados sobre matrices M , asociadas a un grafo es el espectro de estas matrices, que no es más que el conjunto de los valores λ para el cual el operador $(\lambda I - M)$ no tiene inversa. A continuación se define la amplitud asociada a un grafo G y se muestran algunas de sus propiedades.

Notación 3.1 ([5, 12]) *El espectro de la matriz de adyacencia del grafo G o espectro del grafo G , A_G se ordena en forma no creciente y se denota como,*

$$\sigma(G) : \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n.$$

Notación 3.2 ([5, 37]) *Para el espectro de la matriz Laplaciana del grafo G , L_G se ordena en forma no creciente y se denota como,*

$$\sigma(L_G) : \mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n = 0.$$

Notación 3.3 ([5, 22, 28]) *El espectro de la matriz Laplaciana sin signo de G , Q_G se ordena en forma no creciente y se denota como,*

$$\sigma(Q_G) : q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_n.$$

Definición 3.1 ([12]) *La amplitud del grafo G se define como,*

$$s(G) = \lambda_1 - \lambda_n.$$

Definición 3.2 ([37]) *Se define la amplitud Laplaciana de G como*

$$s_L(G) = \mu_1 - \mu_{n-1}.$$

Definición 3.3 ([22, 28]) *La amplitud Laplaciana sin signo de Q_G se define como,*

$$s_Q(G) = q_1 - q_n.$$

3.1. Algunas propiedades de los autovalores de G

A continuación se exhiben algunas propiedades básicas relacionadas con las definiciones dadas.

Proposición 3.1 ([8, Proposición 2.1]) *Si G es un grafo conectado, entonces $q_n = 0$ si y solo si G es bipartito.*

Proposición 3.2 ([22, Proposición 1.1]) *Si G es un grafo conectado, entonces $q_n = 0$ si y solo si G es bipartito. Además, si G es bipartito, entonces Q_G y L_G comparten los mismos autovalores.*

De este resultado se sigue inmediatamente que:

Proposición 3.3 ([22, Proposición 1.2]) *Si G es un grafo bipartito, entonces $\mu_1 = q_1 = s_Q(G)$.*

Un grafo G es llamado k -regular si $d_1 = d_2 = \dots = d_n = k$. Si G es k -regular, es fácil ver que $q_1 = \lambda_1 + k$ y $q_n = \lambda_n + k$. Por lo tanto, cumple la siguiente proposición

Proposición 3.4 ([22, Proposición 1.3]) *Si G es un grafo regular, entonces $s(G) = s_Q(G)$.*

Capítulo 3: Algunas propiedades de los autovalores de G

Además, como se puede observar de la definición 1.18, la matriz $L_G = D_G - A_G$ y de la definición 1.19, la matriz $Q_G = D_G + A_G$. Se tiene

$$Q_G = 2A_G + L_G.$$

De esto se sigue el siguiente lema.

Lema 3.5 ([11, Lema 2.2]) *Sea G un grafo conectado, entonces $2\lambda_1 \leq q_1$, y se cumple la igualdad si y solo si G es regular.*

Observación 3.1 *El Teorema de Weyl, Teorema 1.14, establece una desigualdad la cual se usará en lo que sigue. Si se consideran dos matrices de dimensión n y Hermíticas, siendo ellas W y U con autovalores $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n$ y $u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n$, respectivamente, y la matriz Hermítica $T = W + U$ con autovalores $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau_n$. Entonces las siguientes desigualdades se cumplen*

$$w_n + u_i \leq \tau_i \leq w_1 + u_i, \quad (i \leq n).$$

Así,

$$w_n + u_1 \leq \tau_1 \leq w_1 + u_1 \quad y \quad w_n + u_n \leq \tau_n \leq w_1 + u_n.$$

Por lo tanto,

$$u_1 - u_n + w_n - w_1 \leq \tau_1 - \tau_n \leq w_1 - w_n + u_1 - u_n,$$

lo que da las siguientes desigualdades para la amplitud de estas matrices

$$|s(U) - s(W)| \leq s(T) \leq s(W) + s(U).$$

Observación 3.2 *Sea G un grafo con grado de vértice más pequeño y más grande δ y Δ , respectivamente. Por la observación anterior, como $Q_G = D_G + A_G$,*

$$|\Delta - \delta - s(G)| \leq s_Q(G) \leq s(G) + \Delta - \delta.$$

3.2. Relación entre los autovalores de G

La siguiente desigualdad establece una relación entre el autovalor Laplaciano más grande y el autovalor Laplaciano sin signo más grande.

Lema 3.6 ([36, Lema 2.1]) *Sea G un grafo. Entonces*

$$\mu_1 \leq q_1.$$

Además, si G es conectado, se cumple la igualdad si y solo si G es un grafo bipartito.

Observación 3.3 ([36]) *Si G es bipartito y no está conectado, la igualdad del Lema 3.6 se cumple.*

Ejemplo 3.1 *La figura a continuación presenta un grafo no conectado y no bipartito, pero donde se da la igualdad de $\mu_1 = q_1$:*

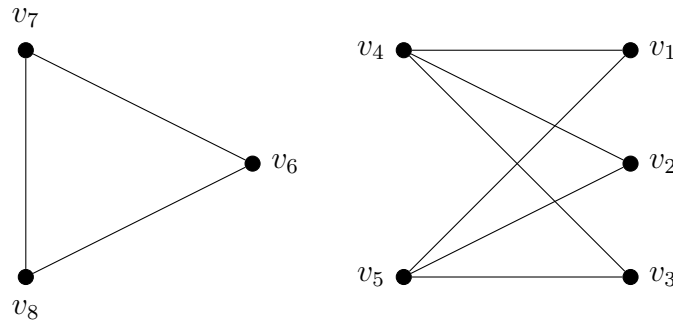


Figura 3.1: $G = K_3 \cup K_{2,3}$.

Los autovalores Laplacianos de K_3 son $\{3^{[2]}, 0\}$ y los de $K_{2,3}$ son $\{5, 3, 2^{[2]}, 0\}$, entonces $\sigma(L_G) = \{5, 3^{[3]}, 2^{[2]}, 0\}$. Ahora, los autovalores Laplacianos sin signo de K_3 son $\{4, 1^{[2]}\}$ y los de $K_{2,3}$ son $\{5, 3, 2^{[2]}\}$, entonces $\sigma(Q_G) = \{5, 4, 3, 2^{[2]}, 1^{[2]}, 0\}$. Por lo tanto, se da la igualdad referida: $\mu_1 = q_1 = 5$. Ampliando la observación anterior.

Observación 3.4 *Si G es un (n, m) -grafo conectado tal que $m \leq n - 1$, entonces G no tiene ciclos y por lo tanto es bipartito. Acá no está de más recordar que, un grafo*

Capítulo 3: Relación entre los autovalores de G

es bipartito si y solo si no posee ciclos impares. Además, $s_Q(G) = q_1 = \mu_1$. Existen en la literatura muchas cotas inferiores y superiores conocidas para este autovalor, por esta razón, a partir de ahora solo se trata el caso $m \geq n$.

3.3. Algunas propiedades para la amplitud del espectro Laplaciano de un grafo G

A continuación se exhibe un resultado similar a la cota superior de Mirsky, Teorema 2.1.

Teorema 3.7 [7, Teorema 3.1] *Sea G un grafo con $n \geq 5$ vértices y $m \geq 1$ aristas. Entonces*

$$s_L(G) \leq \sqrt{2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n-1}},$$

y se cumple la igualdad si y solo si G es uno de los grafos: $K_n, G(\frac{n}{4}, \frac{n}{4}), K_1 \cup 2K_{\frac{n-1}{2}}, \overline{K}_{\frac{n}{3}} \cup 2K_{\frac{n}{3}}, K_1 \cup K_{\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}}, K_{\frac{n}{3}} \cup K_{\frac{n}{3}, \frac{n}{3}}$.

Para un grafo k -regular con n vértices y m aristas, se tiene $2m = nk$ y $M_1(G) = nk^2$. Por lo tanto, el siguiente resultado se sigue directamente del teorema anterior.

Corolario 3.8 [7, Corolario 3.2] *Sea G un grafo k -regular con n vértices. Entonces*

$$s_L(G) \leq \sqrt{\frac{2nk(n-k-1)}{n-1}},$$

y se cumple la igualdad si y solo si $G \cong K_n$.

3.4. Algunas propiedades para la amplitud del espectro Laplaciano sin signo de un grafo G

A continuación se exhiben resultados sobre $s_Q(G)$.

Proposición 3.9 ([28, Proposición 2]) *Para cualquier grafo bipartito conectado G con n vértices*

$$s_Q(P_n) = 2 + 2 \cos \frac{\pi}{n} \leq s_Q(G).$$

Corolario 3.10 ([28, Corolario 13]) *Sea G un grafo con vértices $n \geq 5$. Entonces*

$$s_Q(G) \leq 2n - 4,$$

y se cumple la igualdad si y solo si $G = K_{n-1} \cup K_1$.

En la misma línea de ideas, se tiene el Teorema 3.14 que da cotas para $s_Q(G)$ cuando G es un grafo conectado, pero para ello se necesitan los siguientes resultados.

Corolario 3.11 ([22, Corolario 2.1]) *Si δ es el grado mínimo de los vértices de un grafo G , entonces $q_n \leq \delta$.*

Sea $m(v) = \sum_{u \in N(v)} \frac{d(u)}{d(v)}$. Los siguientes resultados dan cotas superiores e inferiores para $q_1(G)$.

Proposición 3.12 ([22, Proposición 2.2]) *Sea G un grafo conectado con n ($n \geq 2$) vértices. Entonces*

$$\min\{d(v) + m(v) : v \in V(G)\} \leq q_1(G) \leq \max\{d(v) + m(v) : v \in V(G)\},$$

donde se cumple la igualdad en cualquiera de estas desigualdades si y solo si G es regular o semiregular bipartito.

Observación 3.5 Si G es un grafo bipartito conectado, por la Proposición 3.3 se puede concluir que las cotas para $q_1(G)$ en la Proposición 3.12 son también cotas para $s_Q(G)$. Así, la Proposición 3.12 también da cotas para $s_Q(G)$ cuando G es un grafo bipartito conectado.

Lema 3.13 ([22, Lema 2.1]) Si G es un grafo con al menos una arista, entonces $q_1 \geq \mu_1 \geq \Delta + 1$. Si G es conectado, la primera igualdad se cumple si y solo si G es bipartito, la segunda igualdad se cumple si y solo si $\Delta = n - 1$.

Teorema 3.14 ([22, Teorema 2.1]) Si G es un grafo conectado. Entonces

$$\Delta + 1 - \delta < s_Q(G) \leq \max \left\{ d_v + \frac{1}{d_v} \sum_{u \in E} d_u : v \in V, \right\} = \max \{ d(v) + m(v) : v \in V(G) \}$$

y se cumple la igualdad si y solo si G es regular o semiregular bipartito.

Teorema 3.15 ([22, Teorema 2.2]) Si G es un (n, m) -grafo conectado y $n \geq 2$. Entonces

$$s_Q(G) \geq \frac{M_1(G)}{m} - \sqrt{\frac{2m^3 + m^2 M_1(G) - M_1^2(G)}{(n-1)m^2}},$$

y se cumple la igualdad si y solo si $G \cong K_n$.

Teorema 3.16 ([22, Teorema 2.3]) Sea G un (n, m) -grafo conectado y $n \geq 2$. Suponiendo que G tiene un conjunto T no vacío de t vértices independientes, el grado promedio de los vértices es d_0 . Entonces

$$s_Q(G) \geq \frac{1}{n-t} \sqrt{(nd_0)^2 + 8(m - td_0)(2m - nd_0)}.$$

Se sigue inmediatamente que:

Corolario 3.17 ([22, Corolario 2.2]) Sea p el número de vértices pendientes del grafo G . Si G es un (n, m) -grafo conectado con $n > p \geq 1$. Entonces

$$s_Q(G) \geq \frac{1}{n-p} \sqrt{n^2 + 8(m-p)(2m-n)},$$

y se cumple la igualdad si y solo si $G \cong K_{1,n-1}$ y $p = n - 1$.

Si $d(u) = \Delta$, entonces u es también un conjunto independiente de G . Por el Teorema 3.16 se tiene

Corolario 3.18 ([22, Corolario 2.3]) *Sea G un (n, m) -grafo conectado y $n \geq 2$. Entonces*

$$s_Q(G) \geq \frac{1}{n-1} \sqrt{(n\Delta)^2 + 8(m - \Delta)(2m - n\Delta)},$$

y se cumple la igualdad si y solo si $G \cong K_n$.

Capítulo 4

RESULTADOS

Las cotas mostradas en el capítulo 2 y los resultados del capítulo anterior serán usados en el presente capítulo para demostrar nuevas cotas y por medio de comparaciones, verificar su ajuste.

4.1. Cotas superiores para la amplitud del espectro

Laplaciano sin signo de un grafo G

Utilizando la cota superior de Mirsky, Teorema 2.1, que es dada para $s(G)$, se demostró el Teorema 3.7, que es una cota dada para $s_L(G)$, ahora se usarán estas ideas para dar una cota superior para $s_Q(G)$.

Teorema 4.1 *Sea G un (n, m) -grafo conectado. Entonces,*

$$s_Q(G) \leq \sqrt{2 \left(\sum_{i=1}^n d_i^2 + 2m \right) - \frac{8m^2}{n}} = \sqrt{2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n}},$$

y se cumple la igualdad si y solo si $G \cong K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$.

Demostración: Dado que Q_G es una matriz normal, aplicando el Teorema 2.1, se tiene

$$s_Q(G) \leq \sqrt{2\|Q_G\|_F^2 - \frac{2}{n}|\operatorname{tr}(Q_G)|^2},$$

y se cumple la igualdad si y solo si los autovalores satisfacen la condición \mathfrak{C} .

Como $\|Q_G\|_F^2 = M_1(G) + 2m$ y $\operatorname{tr}(Q_G) = 2m$, el resultado se sigue.

Si la condición \mathfrak{C} se cumple,

$$\begin{aligned} 2m &= \operatorname{tr}(Q_G) \\ &= q_1 + (n-2)\left(\frac{q_1 + q_n}{2}\right) + q_n \\ &= (q_1 + q_n)\left(\frac{n}{2}\right) = nq_2 \\ q_2 &= \frac{2m}{n}. \end{aligned}$$

Luego, si se aplica el Lema 1.16 y el cociente de Rayleigh, Teorema 1.12. Se tiene,

$$q_2 = \frac{2m}{n} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{e}^T Q_G \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \mathbf{e}} \leq \frac{1}{2} q_1.$$

Entonces, $q_2 = \frac{q_1 + q_n}{2} \leq \frac{1}{2} q_1 \Rightarrow 2q_2 = q_1 + q_n \leq q_1$.

Así, $q_n = 0$ y $q_2 = \frac{1}{2}q_1$.

Obteniendo, $q_1 = 2q_2 = \frac{4m}{n} \Rightarrow G$ es regular con regularidad $\frac{n}{2}$. ◇

Corolario 4.2 *Sea G_k un grafo k -regular con n vertices. Entonces*

$$s_Q(G) \leq \sqrt{2nk},$$

y se cumple la igualdad si y solo si $G \cong K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$.

Demostración: Como el grafo es k -regular. Entonces

$$\begin{aligned} M_1(G) &= \sum_{i=1}^n d_i^2 = nk^2. \\ 2m &= kn \Rightarrow m = \frac{kn}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 2M_1(G) + 4m - \frac{8m^2}{n} &= 2nk^2 + 4 \binom{kn}{2} - \left(\frac{8}{n}\right) \left(\frac{kn}{2}\right)^2 \\ &= 2nk^2 + 2nk - 2nk^2 \\ &= 2nk. \end{aligned}$$

Por el Teorema 4.1, el resultado se sigue.

Si $G \cong K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$, entonces G es un grafo regular bipartito con $k = \frac{n}{2}$.

Así,

$$\sqrt{2nk} = \sqrt{2n \binom{\frac{n}{2}}{2}} = n = \mu_1(K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}) = s_Q(K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}).$$

◇

Corolario 4.3 *Sea G un (n, m) -grafo conectado. Entonces*

$$s_Q(G) \leq \sqrt{2m \left(\frac{2m}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \Delta + (\Delta - \delta) \left(1 - \frac{\Delta}{n-1} \right) \right) + 4m - \frac{8m^2}{n}},$$

y se cumple la igualdad si y solo si $G \cong K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$.

Demostración: En el Teorema 1.5 demostró que:

$$M_1(G) \leq m \left(\frac{2m}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \Delta + (\Delta - \delta) \left(1 - \frac{\Delta}{n-1} \right) \right). \quad (4.1)$$

Reemplazando $M_1(G)$ en el Teorema 4.1 por su cota superior en (4.1) el resultado se sigue.

Se cumple la igualdad si y solo si se cumple en Teorema 4.1 y (4.1), o equivalentemente $G \cong K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$. ◇

4.2. Cotas inferiores para la amplitud del espectro Laplaciano sin signo de un grado G

Ahora, usando los Teoremas 2.4 y 2.12 se dan las siguientes cotas inferiores.

Teorema 4.4 *Sea G un grafo de orden n con vértice de mayor grado Δ y vértice de menor grado δ . Si $\Delta - \delta \geq 2$. Entonces*

$$s_Q(G) \geq \sqrt{(\Delta - \delta)^2 + 2\Delta + 2\delta},$$

y de lo contrario (cuando $\Delta - \delta \leq 1$)

$$s_Q(G) \geq 2\sqrt{\Delta},$$

y la igualdad se cumple para $G \cong K_2$.

Demostración: Sea $Q_G = (q_{ij})_{n \times n}$ la matriz Laplaciana sin signo de G , entonces Q_G es una matriz normal y por el Teorema 2.4

$$s_Q(G) \geq \Upsilon,$$

donde

$$\begin{aligned} \Upsilon &= \max_{i,j} \sqrt{(q_{ii} - q_{jj})^2 + 2 \sum_{s \neq i} |q_{is}|^2 + 2 \sum_{s \neq j} |q_{js}|^2} \\ &= \max_{i,j} \sqrt{(d_i - d_j)^2 + 2(d_i + d_j)}. \end{aligned}$$

En esta maximización se puede asumir (por simetría) que $d_j \geq d_i$. Además, al fijar $d_j - d_i$ a algún número $k \in \{0, 1, \dots, \Delta - \delta\}$, se tiene

$$\begin{aligned} \Upsilon &= \max_k \max_{d_j - d_i = k} \sqrt{(d_j - d_i)^2 + 2(d_j + d_i)} \\ &= \max_k \max_{d_j - d_i = k} \sqrt{k^2 + 2(2d_i + k)} \\ &= \max_k \sqrt{k^2 + 2((2\Delta - k) + k)}, \end{aligned}$$

como $k^2 + 2(2d_i + k)$ es creciente en d_i . Así $\Upsilon = \max_k \sqrt{k^2 + 4\Delta - 2k}$. Pero $k^2 + 4\Delta - 2k$ es un polinomio cuadrático convexo en k , se tiene que su máximo sobre $k \in \{0, 1, \dots, \Delta - \delta\}$, se produce en uno de los dos extremos. Por lo tanto, con

$$\Upsilon = \max\{2\sqrt{\Delta}, \sqrt{(\Delta - \delta)^2 + 2(\Delta + \delta)}\},$$

se da el resultado deseado. ◇

Sea $V(\Delta) = \{v \in V(G) : d(v) = \Delta\}$ y $V(\delta) = \{v \in V(G) : d(v) = \delta\}$.

Teorema 4.5 *Sea G un grafo de orden n con vértice de mayor grado Δ y vértice de menor grado δ . Entonces*

$$s_Q(G) \geq \sqrt{(\Delta - \delta)^2 + 2\Delta + 2\delta + 4},$$

ya la igualdad se cumple para $G \cong K_2$ y $G \cong K_{1,3}$.

Demostración: Sea $Q_G = (q_{ij})_{n \times n}$ la matriz Laplaciana sin signo de G , entonces Q_G es una matriz simétrica y por el Teorema 2.12, se tiene

$$s_Q(G) \geq \Gamma,$$

donde

$$\Gamma = \max_{i \neq j} \sqrt{(q_{ii} - q_{jj})^2 + 2 \sum_{s \neq i} |q_{is}|^2 + 2 \sum_{s \neq j} |q_{js}|^2 + e_{ij}},$$

e_{ij} y f_{ij} son los dados en el Teorema 2.12.

Sea $v_{i_0} \in V(\Delta)$ y $v_{j_0} \in V(\delta)$. Si $q_{j_0 j_0} = q_{i_0 i_0}$, entonces $e_{i_0 j_0} = 2f_{i_0 j_0}$; de otra manera

$$e_{i_0 j_0} = \min \left\{ (q_{i_0 i_0} - q_{j_0 j_0})^2 + 2|(q_{i_0 i_0} - q_{j_0 j_0})^2 - f_{i_0 j_0}|, \frac{f_{i_0 j_0}^2}{(q_{i_0 i_0} - q_{j_0 j_0})^2} \right\},$$

con

$$f_{i_0 j_0} = \left| \sum_{k \neq i_0} |q_{i_0 k}|^2 - \sum_{k \neq j_0} |q_{j_0 k}|^2 \right| = |d(v_{i_0}) - d(v_{j_0})| = \Delta - \delta.$$

Así,

$$e_{i_0j_0} = \min\{(\Delta - \delta)^2 + 2|(\Delta - \delta)^2 - (\Delta - \delta)|, 1\} = 1.$$

Por lo tanto,

$$\Gamma \geq \sqrt{(\Delta - \delta)^2 + 2\Delta + 2\delta + 1}.$$

◇

El corolario siguiente es una consecuencia directa del teorema anterior.

Corolario 4.6 *Sea G un grafo k -regular. Entonces $s(G) = s_Q(G) \geq \sqrt{4k + 1}$.*

Usando el Lema 1.17, se obtendrá una cota inferior para el $s_Q(G)$ en términos de $M_1(G)$, n y m .

Teorema 4.7 *Sea G un grafo conectado con $n \geq 2$ vértices. Entonces*

$$s_Q(G) \geq \frac{2}{n} \sqrt{nM_1(G) - 4m^2 + 2mn}.$$

Demostración: Para esta demostración se usará el Lema 1.17 con $a_i = 1$ y $b_i = q_i$, para $1 \leq i \leq n$. Donde $0 < 1 \leq a_i \leq 1$, y $0 < q_n \leq b_i \leq q_1$, $1 \leq i \leq n$. Entonces $M_1M_2 = 1q_1$ y $m_1m_2 = 1q_n$. Por el Lema 1.17, se tiene

$$\sum_{i=1}^n 1 \sum_{i=1}^n q_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n q_i \right)^2 \leq \frac{1}{4} n^2 (q_1 - q_n)^2.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} n(2m + M_1(G)) - 4m^2 &\leq \frac{1}{4} n^2 (q_1 - q_n)^2 \\ \frac{8m + 4M_1(G)}{n} - \frac{16m^2}{n^2} &\leq s_Q^2(G) \\ s_Q(G) &\geq 2\sqrt{\frac{nM_1(G) - 4m^2 + 2mn}{n^2}}. \end{aligned}$$

◇

Observación 4.1 *Obsérvese que para un grafo G k -regular la cota inferior dada por el Teorema 4.7 es $2\sqrt{k}$. Por lo tanto, para los grafos regulares, es peor que la dada por el Corolario 4.6.*

4.3. Cotas inferiores basadas en el principio minimax

En esta sección se introduce un principio para encontrar varias cotas inferiores para la amplitud Laplaciana sin signo de un grafo.

Sea B_n la bola unitaria en \mathbb{R}^n . El siguiente teorema da un cota inferior para la amplitud de una matriz simétrica real $A = (a_{ij})_{n \times n}$. El resultado se conoce realmente en una forma ligeramente diferente, más adelante se muestra como hacer esto, pero se da una nueva prueba de esta desigualdad, usando ideas de la teoría de minimax.

Teorema 4.8 *Sea $A = (a_{ij})_{n \times n}$ una matriz simétrica real. Entonces*

$$s(A) \geq 2\|A\mathbf{x} - (\mathbf{x}^T A\mathbf{x})\mathbf{x}\|, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B_n.$$

Demostración: Por el Lema 2.10 se tiene que $s(A) = 2\min_{t \in \mathbb{R}} \|A - tI_n\|$ donde el mínimo está sobre todo $t \in \mathbb{R}$ (esto se sigue fácilmente del Teorema Espectral, Teorema 1.7). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}s(A) &= \min_{t \in \mathbb{R}} \|A - tI_n\| \\ &= \min_{t \in \mathbb{R}} \max_{\mathbf{x} \in B_n} \|(A - tI_n)\mathbf{x}\| \\ &\geq \max_{\mathbf{x} \in B_n} \min_{t \in \mathbb{R}} \|A\mathbf{x} - t\mathbf{x}\| \\ &= \max_{\mathbf{x} \in B_n} \|A\mathbf{x} - (\mathbf{x}^T A\mathbf{x})\mathbf{x}\|. \end{aligned} \tag{4.2}$$

La desigualdad anterior se deriva de los argumentos minimax estándar. De hecho, para cualquier función $f = f(\mathbf{x}, t)$ definida en los conjuntos X y T , se tiene claramente $\inf_{t' \in T} f(\mathbf{x}, t') \leq f(\mathbf{x}, t) \leq \sup_{\mathbf{x}' \in X} f(\mathbf{x}', t)$, para todo $\mathbf{x} \in X$ y $t \in T$. La desigualdad deseada es entonces obtenida tomando el infimo sobre t en la última desigualdad y luego, el supremo sobre \mathbf{x} . La igualdad final en (4.2) se sigue ya que este es un problema de mínimos cuadrados en una variable t , para $\mathbf{x} \in B_n$, así geoméricamente

t se elige de modo que $t\mathbf{x}$ es la proyección ortogonal de $A\mathbf{x}$ sobre la línea extendida por \mathbf{x} . El resultado deseado se sigue de (4.2). \diamond

A continuación, se reescriben las cotas del teorema anterior. En primer lugar observe que la demostración de que la cota (4.2) expresa lo siguiente: *para cualquier vector unitario \mathbf{x} , la distancia desde $A\mathbf{x}$ a la línea extendida por \mathbf{x} es una cota inferior para la amplitud*. Así, la cota tiene una interpretación geométrica simple. Esto puede ser útil, en situaciones específicas, para obtener un \mathbf{x} que da una buena cota inferior. Ahora, un cálculo sencillo muestra que

$$\|A\mathbf{x} - (\mathbf{x}^T A\mathbf{x})\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T A^2 \mathbf{x} - (\mathbf{x}^T A\mathbf{x})^2.$$

Así, el Teorema 4.8 dice que

$$s(A) \geq 2 \max_{\mathbf{x} \in B_n} \sqrt{\mathbf{x}^T A^2 \mathbf{x} - (\mathbf{x}^T A\mathbf{x})^2}. \quad (4.3)$$

Por lo tanto, este resultado es en realidad el resultado presentado en [24, Teorema 4]. En [24] los autores afirman que este resultado se remonta a Bloomfield y Watson en 1975 (ver [4]), y fue redescubierto por Styan ([33, Teorema 1], [18, Sección 5.4] y [19]).

El resultado del Teorema 4.8 también puede ser reformulado en términos de un vector no nulo $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Entonces $\mathbf{x} = \frac{1}{\|\mathbf{y}\|}\mathbf{y}$, es un vector unitario, y un cálculo simple, usando 4.3, da

$$s(A) \geq 2 \frac{\sqrt{\sum_i y_i^2 \sum_i \tau_i^2 - \left(\sum_i y_i \tau_i\right)^2}}{\sum_i y_i^2}, \quad (4.4)$$

donde

$$\boldsymbol{\tau} = A\mathbf{y} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n).$$

Observación 4.2 *Del caso de igualdad del Teorema de Cauchy-Schwarz, la cota en (4.4) es igual a cero cuando el vector $\boldsymbol{\tau}$ y \mathbf{y} son una combinación lineal del vector \mathbf{e} .*

Ahora, se puede obtener diferentes cotas inferiores para la amplitud Laplaciana sin signo $s_Q(G)$, para un grafo G , aplicando el Teorema 4.8 a la matriz Laplaciana sin signo Q_G y eligiendo un vector unitario específico \mathbf{x} , o un vector no nulo \mathbf{y} , y usando (4.4).

Por ejemplo, considere la elección simple $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$, la coordenada i -ésima vector. Entonces $Q_G \mathbf{e}_i - (\mathbf{e}_i^T Q_G \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i = Q_G^{(i)} - d_i \mathbf{e}_i$ (donde $Q_G^{(i)}$ es la i -ésima columna de Q_G), entonces $\eta(G, \mathbf{e}_i) = 2\sqrt{d_i}$. Esto da

$$s_Q = s(G) \geq 2 \max_i \sqrt{d_i} = 2\sqrt{\Delta},$$

una breve prueba de la segunda cota (cuando $\Delta - \delta \leq 1$) en el Teorema 4.4. Otra aplicación de este principio se obtiene utilizando \mathbf{x} como el vector normalizado con todos los elementos unos, lo que da la siguiente cota inferior

Corolario 4.9 *Sea G un grafo de orden n . Entonces*

$$s_Q(G) \geq \frac{4}{n} \sqrt{nM_1(G) - 4m^2}.$$

Demostración: Al usar (4.3) con $A = Q_G$ y $\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{e}$, donde \mathbf{e} representa el vector de todos unos. Entonces $\mathbf{x}^T A^2 \mathbf{x} = \frac{1}{n} \mathbf{e}^T Q_G^2 \mathbf{e}$. Sea $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ el vector cuyas componentes son los grados del vértice. Así, $A_G \mathbf{e} = \mathbf{d}$ y se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^T Q_G^2 \mathbf{e} &= \mathbf{e}^T (D_G + A_G)^2 \mathbf{e} \\ &= \mathbf{e}^T D_G^2 \mathbf{e} + \mathbf{e}^T A_G^2 \mathbf{e} + \mathbf{e}^T A_G D_G \mathbf{e} + \mathbf{e}^T D_G A_G \mathbf{e} \\ &= M_1(G) + \|A_G \mathbf{e}\|^2 + (A_G \mathbf{e})^T \mathbf{d} + (D_G \mathbf{e})^T A_G \mathbf{e} \\ &= 4M_1(G). \end{aligned}$$

Por lo tanto, (4.3) da

$$\begin{aligned} s_Q(G) &\geq 2\sqrt{\frac{4M_1(G)}{n} - \left(\frac{4m}{n}\right)^2} \\ &= \frac{4}{n}\sqrt{nM_1(G) - 4m^2}. \end{aligned}$$

◇

A continuación, al aplicar el Teorema 4.8 usando el vector de grados $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$. Esto da el siguiente resultado, que se deduce directamente de (4.4).

Corolario 4.10 *Sea G un grafo G . Entonces*

$$s_Q(G) \geq 2 \frac{\sqrt{\sum_i d_i^2 \sum_i \alpha_i^2 - \left(\sum_i d_i \alpha_i\right)^2}}{\sum_i d_i^2},$$

donde $\alpha_i = d_i^2 + \sum_{v_i v_j \in E(G)} d_j$ para $i \leq n$.

Para el próximo, se dará un grafo G sin vértices aislados. Se puede usar (4.4) con, $\mathbf{y} = (d_1^{-1}, d_2^{-1}, \dots, d_n^{-1})$, la n -tupla del recíproco de los grados de vértice de G .

Corolario 4.11 *Sea G un grafo sin vértices aislados. Entonces*

$$s_Q^2(G) \geq \frac{4}{\left(\sum_i d_i^{-1}\right)^2} \left\{ \sum_i d_i^{-2} \sum_j \left(\sum_{v_j v_k \in E(G)} d_k^{-1} + 1 \right) - \left[\sum_i \left(\sum_{v_i v_k \in E(G)} (d_i d_k)^{-1} + d_i^{-1} \right) \right]^2 \right\}.$$

Demostración: El vector $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = Q\mathbf{y}$, entonces satisface

$$\tau_i = 1 + \sum_{v_i v_j \in E(G)} d_j^{-1}.$$

Además,

1. $\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i^2}\right)^2.$

$$2. \sum_{i=1}^n \tau_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(1 + \sum_{v_i v_j \in E(G)} \frac{1}{d_j} \right)^2.$$

$$3. \left(\sum_{i=1}^n y_i \tau_i \right)^2 = \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{d_i} + \sum_{v_i v_j \in E(G)} \frac{1}{d_k d_i} \right) \right]^2.$$

Entonces, considerando $\mathbf{x} = \frac{1}{\|\mathbf{y}\|} \mathbf{y}$ en (4.4), el resultado se vale. \diamond

Ahora, se establecen nuevas cotas inferiores sobre $s_Q(G)$ basadas en otros principios.

Teorema 4.12 *Sea G un grafo con vector de grados $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$. Además, si se considera $\mathbf{d}^{(2)} = (d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \dots, d_n^{(2)})$ Como el vector de los segundos grados de G , que es*

$$\mathbf{d}^{(2)} = A\mathbf{d},$$

donde A es la matriz de adyacencia de G . Entonces

$$s_Q(G) \geq \left| \frac{\sum_{i=1}^n d_i^3 + \sum_{i=1}^n d_i d_i^{(2)}}{M_1(G)} - \Upsilon \right|, \quad (4.5)$$

con

$$\Upsilon = \min_{\substack{v_p v_q \in E(G) \\ d(v_q) = \Delta}} \left\{ \frac{\Delta + d_p}{2} - \sqrt{\left(\frac{\Delta + d_p}{2} \right)^2 + 1 - \Delta d_p} \right\}.$$

Note que si G es un grafo bipartito entonces $\Upsilon = 0 = q_n(G)$.

Demostración: En la siguiente cota inferior para la amplitud $s(B)$ de una matriz de Hermítica $B = (b_{ij})_{n \times n}$, se mostró

$$s(B) \geq \max_{p \neq q} \left| \frac{\mathbf{e}^T B^3 \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T B^2 \mathbf{e}} - \frac{b_{pp} + b_{qq} \pm \sqrt{(b_{pp} - b_{qq})^2 + 4|b_{pq}|^2}}{2} \right|.$$

Reemplazando B por $Q = Q_G$ se tiene

$$\mathbf{e}^T Q^3 \mathbf{e} = 4 \left(\sum_{i=1}^n d_i^3 + \sum_{i=1}^n d_i d_i^{(2)} \right).$$

Por la demostración del Corolario 4.9

$$\mathbf{e}^T Q_G^2 \mathbf{e} = 4M_1(G).$$

Entonces

$$\frac{\mathbf{e}^T B^3 \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T B^2 \mathbf{e}} = \frac{\mathbf{e}^T Q^3 \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T Q^2 \mathbf{e}} = \frac{4 \left(\sum_{i=1}^n d_i^3 + \sum_{i=1}^n d_i d_i^{(2)} \right)}{4M_1(G)}.$$

Además, a partir de la prueba del teorema se ve que

$$\frac{b_{pp} + b_{qq} \pm \sqrt{(b_{pp} - b_{qq})^2 + 4|b_{pq}|^2}}{2},$$

corresponde al autovalor más pequeño de la submatrix 2×2 de B ,

$$\begin{pmatrix} b_{pp} & b_{pq} \\ b_{pq} & b_{qq} \end{pmatrix},$$

donde este mínimo (para el caso de Q) corresponde al autovalor más pequeño de la submatrix 2×2 de Q con la forma $\begin{pmatrix} d_p & 1 \\ 1 & d_q \end{pmatrix}$.

Hay que considerar dos casos:

1. La submatriz es $\begin{pmatrix} d_p & 1 \\ 1 & d_q \end{pmatrix}$. Por un cómputo sencillo, del autovalor mencionado, se tiene

$$\lambda_- = \frac{d_p + d_q}{2} - \sqrt{\left(\frac{d_p + d_q}{2}\right)^2 + 1 - d_p d_q}.$$

Sea $x = \frac{d_p + d_q}{2}$ y al considerar la función

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 + \alpha}, \quad x \in (0, \infty),$$

con $\alpha < 0$. Donde la derivada $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + \alpha}}$, se ve fácilmente que $f'(x) < 0$, así $f(x)$ es estrictamente decreciente, por lo tanto el mínimo

$$\Upsilon = \min_{v_p v_q \in E(G)} \left\{ \frac{d_p + d_q}{2} - \sqrt{\left(\frac{d_p + d_q}{2}\right)^2 + 1 - d_p d_q} \right\},$$

no puede ser obtenida para grados pequeños. Recuerde que el grado máximo de vértice se denota por Δ . Se concluye que

$$\Upsilon = \min_{\substack{v_p v_q \in E(G) \\ d(v_q) = \Delta}} \left\{ \frac{\Delta + d_p}{2} - \sqrt{\left(\frac{\Delta + d_p}{2}\right)^2 + 1 - \Delta d_p} \right\},$$

2. La submatriz es $\begin{pmatrix} d_p & 1 \\ 1 & d_q \end{pmatrix}$.

Es claro que el autovalor mas pequeño es $\min\{d_p, d_q\}$, por lo tanto $\Upsilon = \delta$ es el mínimo vector de grados de G . La función anterior $f(x) = x - \sqrt{x^2 + \alpha}$, $x \in (0, \infty)$ con $\alpha < 0$. Si $x = \delta$, entonces $\delta \leq \frac{d_p + d_q}{2}$, implica

$$f(\delta) = \delta - \sqrt{\delta^2 + \alpha} \geq f\left(\frac{d_p + d_q}{2}\right) = \frac{d_p + d_q}{2} - \sqrt{\left(\frac{d_p + d_q}{2}\right)^2 + \alpha}.$$

Como la constante α en la función f es igual al número negativo $\alpha = 1 - d_p d_q$, se tiene

$$f(\delta) = \delta - \sqrt{\delta^2 + \alpha} \geq \frac{d_p + d_q}{2} - \sqrt{\left(\frac{d_p + d_q}{2}\right)^2 + 1 - d_p d_q}.$$

Además, como

$$\delta \geq \delta - \sqrt{\delta^2 + \alpha} \geq \frac{d_p + d_q}{2} - \sqrt{\left(\frac{d_p + d_q}{2}\right)^2 + 1 - d_p d_q}.$$

el resultado se sigue.

◇

Observación 4.3 Si $G = K_{r,s}$, el grafo completo bipartito, la cota inferior en (4.5) se convierte en $\frac{s^2 + r^2 + s + r}{s + r}$.

Teorema 4.13 Sea G un grafo k -regular. Entonces

$$s(G) = s_Q(G) \geq k + 1.$$

Demostración: Sea G un grafo k -regular entonces: $A\mathbf{e} = k\mathbf{e}$, $\mathbf{d}^{(2)} = k^2\mathbf{e}$, $\sum_{i=1}^n d_i^3 = nk^3$, $\sum_{i=1}^n d_i d_i^{(2)} = nk^2$, y $M_1(G) = nk^2$.

$$\Upsilon = \min_{\substack{v_p v_q \in E(G) \\ d(v_q) = \Delta}} \left\{ \frac{k+k}{2} - \sqrt{\left(\frac{k+k}{2}\right)^2 + 1 - k^2} \right\}.$$

Por la desigualdad dada en (4.5), se tiene

$$\begin{aligned} s_Q(G) &\geq \left| \frac{nk^3 + nk^3}{nk^2} - (k-1) \right| \\ &= |2k - (k-1)| = k+1. \end{aligned}$$

Así, la afirmación se sigue. ◇

Observación 4.4 Para $k > 3$, la cota inferior anterior mejora la cota inferior dada en el Corolario 4.6.

4.4. Comparación de cotas

Esta sección se realiza una comparación de algunas de las cotas presentadas en este trabajo. Primero se compara la cota inferior del Teorema 4.5 con la cota inferior del Corolario 3.18.

Sea $L_1(G)$ y $L_2(G)$ denotadas como las cotas inferiores del Teorema 4.5 y del Corolario 3.18. Así

$$L_1(G) = \sqrt{(\Delta - \delta)^2 + 2\Delta + 2\delta + 4},$$

$$L_2(G) = \frac{1}{n-1} \sqrt{(n\Delta)^2 + 8(m - \Delta)(2m - n\Delta)}.$$

Se observa s que $L_1(G)$ solo depende del menor y mayor grado, y no de n y m . Sea $\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i = \frac{2m}{n}$ denotado como el grado promedio en G . Entonces

$$L_2(G) = \frac{n}{n-1} \sqrt{\Delta^2 + \frac{8(m - \Delta)(2m - n\Delta)}{n^2}}$$

$$= \frac{n}{n-1} \sqrt{\Delta^2 + \left(4\bar{d} - \frac{8\Delta}{n}\right) (\bar{d} - \Delta)},$$

lo cual muestra que $L_2(G)$ está determinada por el grado máximo y promedio, así como por n . Aquí, $\bar{d} - \Delta \leq 0$, y $\bar{d} - \Delta = 0$, precisamente cuando G es regular.

El siguiente resultado relaciona las cotas inferiores como una función de ciertas propiedades del grafo.

Teorema 4.14 *Sea G un (n, m) -grafo con $n > 2$.*

1. *Si G es un grafo k -regular. Entonces $L_1(G) = 2\sqrt{k+1}$ y $L_2(G) = \frac{n}{n-1}k$. Por lo tanto, $L_2(G) > L_1(G)$ excepto cuando $k \leq 3$ (y n arbitrario) o $k = 4$ y $n \geq 10$.*
2. *Si G es conectado y contiene un vertice pendiente. Entonces $L_2(G) \leq \frac{n}{n-1}\Delta$ y $L_1(G) = \sqrt{\Delta^2 + 7}$. En particular, $L_2(G) < L_1(G)$ se cumple si $\frac{2n-1}{(n-1)^2}\Delta^2 < 7$.*

Demostración: 1. Las dos expresiones seguidas del cálculo anterior como $\bar{d} = \delta = \Delta = k$.

Considere el caso cuando G es regular con grado k . Entonces $L_2(G) \leq L_1(G)$ dado que $\frac{n}{n-1}k \leq 2\sqrt{k+1}$ o $1 - \frac{1}{n} \geq \frac{k}{2\sqrt{k+1}}$. Aquí el lado derecho es mayor que 1 precisamente cuando $k \geq 5$, y la conclusión se sigue.

2. Dado que hay un vértice pendiente, $\delta = 1$. Eso hace que

$$L_1(G) = \sqrt{(\Delta - 1)^2 + 2\Delta + 2 + 4} = \sqrt{\Delta^2 + 7}.$$

Se tiene $\Delta > \delta = 1$, por si $\Delta = 1$, G sería una coincidencia perfecta, contradiciendo que G es conectado y $n > 2$. Por lo tanto, $\bar{d} - \Delta < 0$. Además, cuando G es conectado, $m \geq n - 1 \geq \Delta$. Así que $m \geq \Delta$, y utilizando que $2m = \sum_{i=1}^n d_i$, fácilmente se ve que, $4\bar{d} \geq \frac{8\Delta}{n}$. Así

$$L_2(G) = \frac{n}{n-1} \sqrt{\Delta^2 + \left(4\bar{d} - \frac{8\Delta}{n}\right) (\bar{d} - \Delta)} \leq \frac{n}{n-1} \sqrt{\Delta^2} = \frac{n\Delta}{n-1}.$$

Por lo tanto si, $\frac{n\Delta}{n-1} < \sqrt{\Delta^2 + 7}$, entonces $L_2(G) < L_1(G)$. De esto se sigue la última afirmación. \diamond

Observación 4.5 *La cota inferior $L_1(G)$ para el caso regular es peor que la cota inferior del Teorema 4.13.*

Observación 4.6 *Al considerar nuevamente la cota inferior sobre la amplitud Laplaciana sin signo $s_Q(G)$, Teorema 4.8,*

$$\eta(G) := 2 \max_{\mathbf{x} \in B_n} \|\mathbf{Q}\mathbf{x} - (\mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x})\mathbf{x}\|.$$

En la prueba se obtuvo la cota de algunos cálculos en los que se implicaba una única desigualdad, es decir, cuando se usa que “minimax” es al menos tan grande como “maximin”, para la función involucrada. Desafortunadamente, no se puede

mostrar que la igualdad se cumple aquí. La razón de esto es básicamente que no es una función cóncava de \mathbf{x} , y también, B_n no es un conjunto convexo, así que los teoremas minimax generales no pueden aplicarse a la situación.

Sin embargo, es interesante explorar aún más la calidad de la mejor cota obtenida del principio minimax. Para ello, considere la función

$$f(\mathbf{x}) = 2\|Q\mathbf{x} - (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x})\mathbf{x}\|,$$

de modo que $\eta(G) = \max_{\mathbf{x} \in B_n} f(\mathbf{x})$. Obsérvese que f es una función complicada, obtenida a partir de un polinomio multivariado de grado seis (tomando la raíz cuadrada, aunque se puede eliminar para la maximización). Si se considera una función extremadamente simple para maximizar aproximadamente f sobre la bola unitaria; se realizan algunas iteraciones K del siguiente método del gradiente con una longitud de paso $s > 0$:

Algoritmo: simple gradiente de búsqueda.

1. Sea $\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{e}$ y $\eta = f(\mathbf{x})$.
2. Para $k = 1, 2, \dots, K$.
 - a) calcule una aproximación numérica \mathbf{g} al gradiente de f en \mathbf{x} ,
 - b) paso de gradiente y proyección: sea $\mathbf{y} := \mathbf{x} + s\mathbf{g}$ y $\mathbf{y} := \frac{1}{\|\mathbf{y}\|}\mathbf{y}$,
 - c) actualización: $\eta := \max\{\eta, f(\mathbf{y})\}$ y $\mathbf{x} := \mathbf{y}$.
3. Actualización η .

En cada iteración, se hace un paso en la dirección del gradiente (numéricamente), incluso si el nuevo valor de la función podría ser menor. Así se evita la búsqueda de líneas. La desventaja es que no puede aproximarse a un máximo local muy bien, pero la ventaja es que se puede escapar de un máximo local e ir hacia otros valores

críticos de la función. El procedimiento es muy simple, y heurístico, y típicamente solo se realizan unas pocas iteraciones K (alrededor de 10 o 20). Se ha utilizado la longitud de paso constante s , pero también la longitud de paso variable (siendo una función decreciente del número de iteración).

En la Tabla 4.2 se da algunos resultados computacionales para 5 grafos aleatorios conectados, mostrando todas las cotas inferiores anteriormente discutidas y la nueva cota η . La notación en la tabla es la siguiente:

$liu_{2,2}$	=	cota del Teorema 3.15
$liu_{2,3}$	=	cota del Corolario 3.18, dada anteriormente como $L_2(G)$
meg_1	=	cota del Teorema 4.7
meg_2	=	cota del Teorema 4.5
$Ncon$	=	cota del Corolario 4.9
$Z1$	=	del Teorema 4.8 (principio minimax), usando el inverso de grados
$Z2$	=	del Teorema 4.8, usando el vector de d_i^{-3}
η	=	mejor cota del método del gradiente simple para la función $\eta(\mathbf{x})$, 10 iteraciones
Amplitud	=	amplitud exacta de $s_Q(G)$

Capítulo 4: Comparación de cotas

n	m	Δ	δ	$liu_{2,2}$	$liu_{2,3}$	meg_1	meg_2	$Ncon$	Z1	Z2	η	Amplitud
40	634	36	27	32.60	28.68	11.91	14.53	7.76	11.76	19.31	38.39	39.19
40	519	32	20	26.99	21.38	11.81	15.87	11.96	17.75	26.68	31.07	36.03
40	322	23	9	17.07	11.06	9.97	16.25	11.83	17.79	23.16	25.14	26.34
40	273	19	9	14.42	9.69	8.98	12.65	10.22	14.87	18.41	20.48	22.50
40	346	22	12	18.01	13.74	9.66	13.11	9.81	15.00	21.82	23.94	26.33

Tabla 4.1: Tabla comparativa

Para el último ejemplo de la tabla el valor de η durante la 10^{ma} iteración del algoritmo de búsqueda de gradientes, se ve que el máximo, que en este caso, se encontró en la iteración 4:

Iteración	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	9.80	21.77	23.41	23.94	22.81	18.77	22.34	17.32	23.20	19.34

Tabla 4.2: Tabla de iteraciones

Estos experimentos muestran claramente que $\eta(G)$ es una muy *buen*a cota inferior de la amplitud Laplaciana sin signo $s_Q(G)$. Aunque el cálculo exacto de $\eta(G)$ puede ser difícil, se ve que el algoritmo da muy buenas aproximaciones y cotas inferiores a $s_Q(G)$, en unas pocas iteraciones. Por supuesto, el resultado de tal algoritmo no es un cota analítica en términos de parámetros de grafos naturales. Pero cualquier cota necesita ser calculada, y, en la práctica, su esfuerzo computacional siempre debe ser comparado con el trabajo de la utilización de un algoritmo de autovalores para calcular el autovalor mayor y menor de Q , y encontrar $s(G)$ de ese modo.

Finalmente, se destaca que es posible el uso de los resultados dados anteriormente para encontrar una cota analítica que sea bastante buena.

Conclusiones

En este trabajo de tesis se estudió la amplitud del espectro Laplaciano sin signo de un grafo G , para ello se vio la definición de un grafo, sus propiedades, algunas de sus clasificaciones, las diversas matrices asociadas a este y diversos resultados clásicos necesarios para el desarrollo de los objetivos trazados. Se realizaron revisiones bibliográficas para la amplitud de una matriz, amplitud del espectro Laplaciano y Laplaciano sin signo de un grafo y se mostraron resultados relevantes sobre las cotas inferiores y superiores de la amplitud del espectro Laplaciano sin signo de un grafo y se observó el ajuste que tenían. Por ello se propone seguir trabajando en cotas inferiores y superiores que den mejores aproximaciones y cumplan la igualdad para una gran cantidad de grafos.

Bibliografía

- [1] E. Andrade, G. Dahl, L. Leal, and M. Robbiano. New bounds for the signless Laplacian spread. *Submitted to Linear Algebra and its Applications*, 2017.
- [2] R. Balakrishnan and K. Ranganathan. *A Textbook of Graphs Theory*. Springer, New York, 2012.
- [3] E.R. Barnes and A.J. Hoffman. Bounds for the spectrum of normal matrices. *Linear Algebra Appl*, 201:79–90, 1994.
- [4] P. Bloomfield and G.S. Watson. The inefficiency of least squares. *Biometrika*, 62:121–128, 1975.
- [5] A.E. Brouwer and W.H. Haemers. *Spectra of Graphs*. Springer, New York, 2012.
- [6] R.L. Burden and J.D. Faires. *Análisis numérico*. Thomson Learning, México, 2002.
- [7] X. Chen and K.Ch. Das. Some results on the Laplacian spread of a graph,. *Linear Algebra Appl*, 505:245–260, 2016.
- [8] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. Signless Laplacians of finite graphs. *Linear Algebra Appl*, 43:155–171, 2007.
- [9] D.M. Cvetković, M. Doob, and H. Sachs. *Spectra of Graphs Theory and Application*. Springer, New York, 2012.

-
- [10] K.Ch. Das. Maximizing the sum of the squares of the degrees of a graph. *Discrete Mathematics*, 285:57–66, 2004.
- [11] L. Feng, Q. Li, and X.D. Zhang. Some sharp upper bounds on the spectral radius. *Taiwanese J. Math*, 11:989–997, 2007.
- [12] D. Gregory, D. Heshkowitz, and S. Kirkland. The spread of the spectrum of a graph. *Linear Algebra Appl*, 332-334:23–25, 2001.
- [13] R. Grone and Merris R. The Laplacian spectrum of a graph. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 11:218–238, 1990.
- [14] R. Grone and Merris R. The Laplacian spectrum of a graph II. *SIAM J. Discr. Math*, 7:221–229, 1994.
- [15] I. Gutman and K.Ch. Das. The first Zagreb index 30 years after. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 50:83–92, 2004.
- [16] Y. Hong and X.D Zhang. Sharp upper and lower bounds for largest eigenvalue of the Laplacian matrices of trees. *Discrete Math*, 296:187–197, 2005.
- [17] S. Izumino and Y. Seo. Ozeki’s inequality and noncommutative covariance. *Nihonkai Math. J.*, 8:55–58, 1997.
- [18] S.T. Jensen. *The Laguerre-Samuelson inequality with extensions and applications in statistics and matrix theory*. Master’s thesis, McGill University, Montreal, 1999.
- [19] Z. Jia. An extension of Styan’s inequality, Gongcheng Shuxue Xuebao. *Chinese, English summary*, 13:122–126, 1996.
- [20] E. Jiang and X. Zhan. Lower bounds for the spread of a Hermitian matrix. *Linear Algebra Appl*, 256:153–163, 1997.

-
- [21] C.R. Johnson, R. Kumar, and H. Wolkowicz. Lower bounds for the spread of a matrix. *Linear Algebra Appl*, 71:161–173, 1985.
- [22] M. Liu and B. Liu. The signless Laplacian spread. *Linear Algebra Appl*, 432:505–514, 2010.
- [23] D.G. Luenberger and Yinyu Ye. *Linear and nonlinear programming*. Springer, New York, 2008.
- [24] J.K. Merikoski and R. Kumar. Characterizations and lower bounds for the spread of a normal matrix. *Linear Algebra Appl*, 364:13–31, 2003.
- [25] C. Meyer. *Matrix analysis and applied linear algebra*. Siam, 2000.
- [26] L. Mirsky. The spread of a matrix. *Mathematika*, 3:127–130, 1956.
- [27] L. Mirsky. Inequalities for normal and Hermitian matrices. *Duke Math. J.*, 24:591–598, 1957.
- [28] C.S. Oliveira, L. Silva de Lima, N. Maia de Abreu, and S. Kirkland. Bounds on the Q-spread of a graph. *Linear Algebra Appl*, 432:2342–2351, 2010.
- [29] B.N. Parlett. *The symmetric eigenvalue problem*. SIAM, New Jersey, 1998.
- [30] D.S. Scott. On the accuracy of the Gerschgorin circle theorem for bounding the spread of a real symmetric matrix. *Linear Algebra Appl*, 65:147–155, 1985.
- [31] Z. Stanić. *Inequalities for Graph Eigenvalues*. Cambridge University Press, Serbias, 2015.
- [32] G. Stewart and J-G. Sun. *Matrix perturbation theory*. Springer, New York, London, 1990.
- [33] G.P.H. Styan. On some inequalities associated with ordinary least squares and the Kantorovich inequality. *Acta Univ. Tamper. Ser*, 153:158–166, 1983.

- [34] R.S. Vargas. *Geršgorin and his circles*. Springer, New York, Berlin Heidelberg, 2004.
- [35] F. Zhang. *Matrix theory*. Springer, New York, London, 2010.
- [36] X.D. Zhang and R. Luo. The spectral radius of triangle-free graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, 26:33–39, 2002.
- [37] Y. Zheng Fan, X. Jing, Y. Wang, and D. Liang. The Laplacian spread of a tree, discrete mathematics and theoretical computer science. *DMTCS*, 10:1:79–86, 2008.