



UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**Algunos problemas de control óptimo
para fluidos micropolares**

Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Mención Matemática

Exequiel Enrique Mallea Zepeda

Orientadora: Dra. Elva Eliana Ortega Torres
Co-orientador: Dr. Élder Jesús Villamizar Roa

Antofagasta, Chile.
2015



Algunos problemas de control óptimo para fluidos micropolares¹

Exequiel Enrique Mallea Zepeda

Programa de Doctorado en Ciencias Mención Matemática

Departamento de Matemáticas

Universidad Católica del Norte
Noviembre-2015

¹ Tesis financiada por Conicyt-Beca N° 21110136

*Dedicado a mi amada esposa,
Natalia.*

Contenido

Agradecimientos	iv
Introducción	1
1 Preliminares	5
1.1 Espacios de funciones	5
1.2 Definiciones y resultados de análisis funcional	7
1.3 Desigualdades, operadores diferenciales y propiedades	15
1.4 Ecuaciones de fluidos micropolares	18
1.5 Problema abstracto de control de flujo	21
2 Ecuaciones de fluidos micropolares estacionarios con condiciones de borde no homogéneas: Existencia de soluciones	25
2.1 Fluidos micropolares estacionarios con densidad constante con condiciones de borde tipo Navier	25
2.1.1 Existencia y unicidad de solución débil	27
2.2 Fluidos micropolares estacionarios con densidad variable con condiciones de borde Dirichlet no homogéneos	35
2.2.1 Existencia de solución débil	37
3 Problema de control de borde para ecuaciones de fluidos micropolares con condiciones de borde tipo mixto	48
3.1 Formulación del problema de control	49
3.2 Existencia de una solución óptima	49
3.3 Condiciones necesarias de optimalidad de primer orden	51
3.4 Sistema de optimalidad	60
3.5 Condición suficiente de segundo orden	64
4 Problema de control de borde para ecuaciones de fluidos micropolares con densidad variable	77
4.1 Formulación del problema de control	77
4.2 Existencia de solución óptima	79
4.3 Problema penalizado	80
4.3.1 Existencia de solución	80
4.3.2 Existencia de multiplicadores de Lagrange y ecuaciones adjuntas	84
4.4 Sistema de optimalidad	86

Apéndice	90
5.1 Apéndice A: Equivalencia de normas	91
5.2 Apéndice B: Derivadas	92
5.3 Apéndice C: Cotas	102
5.4 Apéndice D: Convergencias	105
Conclusiones y trabajos futuros	109
6.1 Conclusiones	110
6.2 Trabajos futuros	111
Referencias	112

Agradecimientos

Al término de este trabajo, dejo mis más sinceros agradecimientos:

A Natalia, quien siempre estuvo brindándome su amor, paciencia y compañía en este emprendimiento.

A mi orientadora, profesora Elva Ortega Torres, por aceptarme como su alumno, por su paciencia, enseñanza y por el gran apoyo brindado durante la elaboración de este trabajo.

Al mi co-orientador, profesor Élder Villamizar Roa, por sus valiosos comentarios que ayudaron a mejorar este trabajo y su hospitalidad durante mi pasantía de investigación en la Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

A la comisión de postgrado del departamento de matemáticas de la Universidad Católica del Norte, por darme la oportunidad de estudiar.

A mis amigos del postgrado de matemáticas, por su compañerismo y colaboración. Entre ellos quiero destacar a: Guillermo Guevara, Eber Lenes, Roberto Díaz, Ana Julio y Luis Medina.

A los profesores Yurilev Chalco Cano, Atilio Pacha Baptista y Sebastián Lorca Pizarro, del departamento de matemáticas de la Universidad de Tarapacá, por su ayuda durante todos estos años.

Gracias a mi familia, por estar siempre a mi lado dándome fuerzas para seguir adelante.

Gracias a CONICYT por financiar este trabajo.

En especial gracias a Dios.

Introducción

Los problemas de control óptimo de flujo han generado una importante área de investigación científica y tecnológica, debido a que la capacidad de manipular activa o pasivamente un parámetro que determina un campo de flujo, para realizar un cambio deseado, es de gran importancia en muchas aplicaciones tales como tratamientos de combustión, problemas de deslizamiento en piezas mecánicas, entre otros.

Como las ecuaciones de Navier-Stokes no pueden describir el movimiento de fluidos con microestructura, una de las teorías establecidas para este tipo de fluidos, es la teoría de fluidos micropolares introducida por Eringen en [14]. Las ecuaciones de fluidos micropolares ([14], [15], [40]) involucran las ecuaciones de Navier-Stokes y forman un sistema no lineal de ecuaciones en derivadas parciales. Las ecuaciones de fluidos micropolares físicamente pueden representar fluidos con micropartículas rígidas orientadas aleatoriamente y suspendidas en un medio viscoso, donde la deformación de las partículas es ignorada, las variables involucradas son la velocidad de traslación \mathbf{u} , la velocidad de microrotación \mathbf{w} de las partículas y la presión hidrostática p . La teoría de fluidos micropolares (fluidos con estrés o fluidos asimétricos) puede ser utilizada para analizar el comportamiento de lubricantes, fluidos coloidales exóticos, fluidos poliméricos, cristales líquidos, diversos flujos biológicos, etc.

En el presente trabajo se abordan tres problemas de control de flujo asociados a las ecuaciones que describen el movimiento de fluidos micropolares en estado estacionario, cuando el flujo ocurre en un dominio bidimensional y tridimensional. Los controles son funciones que actúan sobre una parte del borde del dominio de flujo y la restricción son las soluciones débiles de las ecuaciones de fluidos micropolares. El conjunto de controles \mathcal{U}_{ad} es considerado convexo y cerrado.

Para el primer y segundo problema, se considera el flujo en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, con borde suficientemente regular $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, donde $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ y $\Gamma_3 \cap \Gamma_4 = \emptyset$, además la parte Γ_2 del borde es dada como $\Gamma_2 = \Gamma_2^1 \cup \Gamma_2^2$ con $\Gamma_2^1 \cap \Gamma_2^2 = \emptyset$. Para la velocidad de traslación \mathbf{u} las condiciones de borde son de tipo Navier y para la velocidad microrotacional \mathbf{w} las condiciones de borde son de tipo Dirichlet no homogéneas. Considerando el conjunto de controles \mathcal{U}_{ad} convexo y cerrado, se estudia el siguiente problema de control:

Problema 1. Hallar $[\mathbf{u}, \mathbf{w}]$ y controles $[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] \in \mathcal{U}_{ad}$ que minimicen el funcional

$$\begin{aligned} J[\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] &= \frac{\beta_1}{2} \|\text{rot } \mathbf{u} - \mathbf{u}_d\|_2^2 + \frac{\beta_2 \nu}{2} \|\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}\|_2^2 + \frac{\beta_3}{p} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_b\|_p^p + \frac{\beta_4}{q} \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_d\|_q^q \\ &+ \frac{\beta_5}{2} \|\mathbf{g}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 + \frac{\beta_6}{2} \|\mathbf{g}_2\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_4)}^2, \end{aligned}$$

con la restricción que $[\mathbf{u}, \mathbf{w}]$ sea solución débil del sistema de ecuaciones de fluidos micropolares

estacionarios

$$\begin{aligned} -(\nu + \nu_r)\Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p &= 2\nu_r \text{rot } \mathbf{w} + \mathbf{f} \text{ en } \Omega, \\ -(c_a + c_d)\Delta \mathbf{w} - (c_0 + c_d - c_a)\nabla \text{div } \mathbf{w} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w} + 4\nu_r \mathbf{w} &= 2\nu_r \text{rot } \mathbf{u} + \mathbf{g} \text{ en } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0 \text{ en } \Omega, \end{aligned}$$

con condiciones de borde

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, [D(\mathbf{u})\mathbf{n} + \alpha \mathbf{u}]_{\text{tang}} = 0 \text{ sobre } \Gamma_2^2, \quad \mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{g}_1 & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \mathbf{u}_0 & \text{sobre } \Gamma_2^1, \end{cases} \quad \mathbf{w} = \begin{cases} \mathbf{w}_0 & \text{sobre } \Gamma_3, \\ \mathbf{g}_2 & \text{sobre } \Gamma_4. \end{cases}$$

La condición sobre Γ_2^2 corresponde a la condición de fricción de Navier, la cual establece que la componente tangencial del estrés viscoso en el borde Γ_2^2 debe ser proporcional a la velocidad tangencial; esta condición fue propuesta por Navier en [49], y también derivada por Maxwell en [46] a partir de la teoría cinética de los gases y rigurosamente justificada como una homogenización de la condición de no deslizamiento sobre una frontera áspera (ver [34]). El primer término del funcional J mide la distancia entre la turbulencia del flujo y una velocidad de traslación dada \mathbf{u}_d en la norma L^2 , el segundo término representa la reducción de la resistencia del fluido a la fricción viscosa, el tercer término mide la distancia entre la velocidad \mathbf{u} y una velocidad deseada \mathbf{u}_b en la norma L^p , el cuarto término representa la distancia entre la velocidad de microrotación \mathbf{w} y una velocidad deseada \mathbf{w}_d en la norma L^q , el quinto y sexto término son introducidos con el propósito de generar un balance en el funcional J . Así, el *Problema 1* consiste en minimizar la turbulencia del flujo reduciendo la resistencia del fluido a la fricción viscosa, con una velocidad cercana a una velocidad deseada \mathbf{u}_d y con una velocidad microrotacional proxima a una velocidad dada w_d .

Resultados sobre existencia de soluciones débiles para ecuaciones de Navier-Stokes con condición de fricción de tipo navier pueden ser encontrados en [4], [16], [13], [38]. Sin embargo, no se conocen resultados sobre existencia de soluciones débiles para ecuaciones de fluidos micropolares con este tipo de condición.

Para el *Problema 1* se estudia la existencia de solución óptima y aplicando el método de multiplicadores de Lagrange se obtiene condiciones necesarias de optimalidad de primer orden, desde donde se deduce un sistema de optimalidad.

Con el propósito de determinar una condición suficiente de optimalidad de segundo, haciendo una leve variación en el funcional objetivo J del *Problema 1*, se estudia el siguiente problema de control:

Problema 2. Hallar $[\mathbf{u}, \mathbf{w}]$ y controles $[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] \in \mathcal{U}_{ad}$ tal que minimicen el funcional

$$\begin{aligned} \tilde{J}[\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] &= \frac{\beta_1}{2} \|\text{rot } \mathbf{u} - \mathbf{u}_d\|_2^2 + \frac{\beta_2 \nu}{2} \|\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}\|_2^2 + \frac{\beta_3}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_b\|_2^2 + \frac{\beta_4}{2} \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_d\|_{H^1}^2 \\ &+ \frac{\beta_5}{2} \|\mathbf{g}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 + \frac{\beta_6}{2} \|\mathbf{g}_2\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_4)}^2, \end{aligned}$$

con la restricción que $[\mathbf{u}, \mathbf{w}]$ sea solución débil del sistema de ecuaciones de fluidos micropolares estacionarios dado en el *Problema 1*. La existencia de solución óptima para el *Problema 2* es demostrada de manera similar que para el *Problema 1*. Luego, usando el método de multiplicadores de Lagrange se establece condiciones suficientes de segundo orden para la existencia de un punto de mínimo local para el *Problema 2*.

En el tercer problema, se considera el flujo con densidad variable ocurriendo en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, con borde suficientemente regular $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, donde $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$

y $\Gamma_2 \cap \Gamma_3 = \emptyset$. Para la velocidad de traslación \mathbf{u} y la velocidad microrotacional w las condiciones de borde son de tipo Dirichlet no homogéneo. La densidad ρ del fluido es aproximada en la forma $\rho = \eta(\psi)$, donde η es una función escalar de clase C^1 y ψ es una función corriente ($\text{rot } \psi = \mathbf{u}$). El problema de control considerado es:

Problema 3. Hallar $[\mathbf{u}, w]$ y controles $[\mathbf{g}_1, g_2]$ en espacios apropiados, que minimicen el funcional

$$J[\mathbf{u}, w, \mathbf{g}_1, g_2] = \frac{\beta_1}{2} \|\text{rot } \mathbf{u}\|_2^2 + \frac{\beta_2}{2} \|\eta(N\mathbf{u}) - \rho_d\|_2^2 + \frac{\beta_3}{2} \|w - w_d\|_2^2 \\ + \frac{\beta_4}{2} \|\mathbf{g}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 + \frac{\beta_5}{2} \|g_2\|_{H^{1/2}(\Gamma_3)}^2,$$

restringido a que $[\mathbf{u}, w]$ sea solución débil del sistema de ecuaciones de fluidos micropolares con densidad variable,

$$\begin{aligned} -(\mu + \mu_r)\Delta \mathbf{u} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p &= 2\mu_r \text{rot } w + \rho \mathbf{f} \text{ en } \Omega, \\ -(c_a + c_d)\Delta w + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)w + 4\nu_r w &= 2\mu_r \text{rot } \mathbf{u} + \rho g \text{ en } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \nabla \rho &= 0, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega, \end{aligned}$$

con condiciones de borde

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}_0 & \text{sobre } \Gamma_0, \\ \mathbf{g}_1 & \text{sobre } \Gamma_1, \end{cases} \quad w = \begin{cases} w_0 & \text{sobre } \Gamma_2, \\ g_2 & \text{sobre } \Gamma_3, \end{cases} \quad \rho = \rho_0 > 0 \text{ sobre } \Gamma_0.$$

La parte Γ_0 del borde es un conjunto arco conexo cerrado sobre Γ con medida positiva, tal que $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} > 0$ ó $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} < 0$ sobre Γ_0 , donde \mathbf{n} es el vector normal exterior a Γ .

Así, el *Problema 3* consiste en minimizar la turbulencia del fluido con una densidad cercana a una densidad deseada ρ_d y con una velocidad microrotacional proxima a una velocidad dada w_d .

Para el *Problema 3* se demuestra la existencia de una solución óptima y mediante el método de multiplicadores de Lagrange se obtiene condiciones necesarias de optimalidad de primer orden y se deriva un sistema de optimalidad. Para garantizar la existencia de los multiplicadores de Lagrange, se aplica un método de penalización, mediante el cual se plantea un problema de control dependiendo de un parámetro $\varepsilon > 0$ y se demuestra la existencia de una solución óptima y de multiplicadores de Lagrange para el problema penalizado. Entonces, se prueba que cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ la solución del problema penalizado convergen a las solución del *Problema 3* y los multiplicadores de Lagrange asociados al problema penalizado convergen a un multiplicador de Lagrange asociado al *Problema 3*.

En relación al desarrollo matemático de la teoría de control en mecánica de fluidos, existe un amplio número de trabajos acerca de problemas de control óptimo asociadas a las ecuaciones de Navier-Stokes (ver por ejemplo [2], [11], [23], [28], [29], [30], [32], [59] y las referencias citadas en ellos); los resultados que se conocen son bastante completos y abarcan, no sólo aspectos teóricos, sino también numéricos y de aplicaciones. Sin embargo, hasta donde se conoce, sobre problemas de control óptimo asociados a las ecuaciones de fluidos micropolares, solamente se puede mencionar los trabajos de R. Stavre [60], [61] y [62], en los cuales el dominio de flujo es bidimensional y la restricción son las soluciones débiles del sistema no estacionario de ecuaciones de fluidos micropolares con condiciones de borde nulas. En [60], la viscosidad de microrotación fue considerada como variable de control con el propósito de obtener una velocidad de microrotación deseada. En [61] es aplicado un control de tipo distribuido para alcanzar una presión del fluido deseado. En [62], el problema de control estudiado consiste en hallar un control de tipo distribuido que transforme un fluido micropolar en

un fluido de Navier-Stokes, esto es, que la velocidad de microrotación w sea lo más próximo posible al $\text{rot}\mathbf{u}$ donde \mathbf{u} es la velocidad de traslación del fluido.

Por lo expuesto, se espera que este trabajo sea un aporte al estudio de problemas de control asociados a fluidos micropolares, y está organizado de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se introducen las definiciones de los espacios de funciones, notaciones, desigualdades conocidas y se enuncian algunos resultados de análisis funcional que son usados en el desarrollo de los capítulos posteriores. En este mismo capítulo, se hace una descripción de los modelos de fluidos micropolares que son considerados en el planteamiento de los problemas de control a ser estudiados, también brevemente se introduce la teoría de control de flujo necesaria para el estudio.

En el Capítulo 2, usando el método de Galerkin se estudia la existencia y unicidad de soluciones débiles para las ecuaciones de fluidos micropolares estacionarios con condiciones de borde tipo Navier en un dominio tridimensional. Para fluidos micropolares estacionarios con densidad variable con densidad en un dominio bidimensional, usando el principio de Leray-Schauder es demostrada la existencia de soluciones débiles.

En el Capítulo 3 se estudia el *Problema 1*, se prueba la existencia de una solución óptima y utilizando el principio de los multiplicadores de Lagrange, son obtenidas condiciones necesarias de optimalidad de primer orden desde donde es derivado un sistema de optimalidad. En la Sección 3.1, para el *Problema 2* se obtiene condiciones suficientes de segundo orden para un punto de mínimo.

En el Capítulo 4, se prueba la existencia de una solución óptima para el *Problema 3*. Mediante un método de penalización se demuestra la existencia de multiplicadores de Lagrange asociados al *Problema 3* y se obtienen condiciones necesarias de optimalidad de primer orden, desde donde se deduce un sistema de optimalidad. Los cálculos de las derivadas, cotas y convergencias que se utilizan en el desarrollo del Capítulo 4, se detallan en el Apéndice.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se introducen algunos conceptos y resultados relevantes que serán utilizados en el desarrollo del trabajo. Se inicia con una revisión sobre ciertos espacios de funciones, incluyendo principalmente los espacios de Sobolev y algunos resultados relacionados como las inmersiones de Sobolev, el Teorema de la traza y ciertas propiedades de convergencia de sucesiones definidas en espacios de Banach. Finalmente, se realiza una breve descripción de un problema abstracto de control de flujo.

1.1 Espacios de funciones

Considerando Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$, con borde $\Gamma := \partial\Omega$ suficientemente regular, a continuación se definen algunos espacios de funciones.

Espacios L^p

Para $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$, el espacio de Banach $L^p(\Omega)$ es definido como

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ es medible y } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty\},$$

con norma $\|\cdot\|_{L^p}$ definida por

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Si $p \geq q$, se tiene la inclusión continua $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. Por simplicidad, se denota $\|\cdot\|_{L^p} \equiv \|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_{L^2} \equiv \|\cdot\|$. Cuando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx,$$

y con norma definida por $\|u\| = (u, u)^{1/2}$.

El espacio $L^\infty(\Omega)$ es definido como

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ es medible y } |f(x)| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega\},$$

con norma definida por

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess}|u(x)|.$$

Para $1 < p < \infty$, el espacio dual de $L^p(\Omega)$, denotado por $(L^p(\Omega))'$, se identifica como

$$(L^p(\Omega))' = L^q(\Omega), \quad \text{donde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Los espacios $L^p(\Omega)$ de funciones vectoriales n -dimensionales, se se denotarán por $\mathbf{L}^p(\Omega) = (L^p(\Omega))^n$, es decir

$$\mathbf{L}^p(\Omega) := \{\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n : u_i \in L^p(\Omega) \text{ para } i = 1, \dots, n\}$$

y su norma asociada es dada por

$$\|\mathbf{u}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_p^p \right)^{1/p}.$$

Si el borde $\Gamma = \partial\Omega$ es acotado y regular, se define el espacio traza $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ como

$$\mathbf{L}^2(\Gamma) = \{\mathbf{u} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n : \mathbf{u} \text{ es medible y } \int_{\Gamma} |\mathbf{u}|^2 d\Gamma < \infty\},$$

con norma

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Gamma)} = \left(\int_{\Gamma} |\mathbf{u}|^2 d\Gamma \right)^{1/2}.$$

Espacios de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Para $m \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$, los espacios de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ son definidos por

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

donde D^α es el operador diferencial

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

con $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ y $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$.

El espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{m,p}} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}, \text{ para } 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{W^{m,\infty}} &= \sup_{|\alpha| \leq m} (\sup_{x \in \Omega} \text{ess}|D^\alpha u|), \text{ si } p = \infty. \end{aligned}$$

El espacio $W^{m,p}(\Omega)$ es separable para $1 \leq p < \infty$ y es reflexivo para $1 < p < \infty$. Además, cuando $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega) := H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx,$$

y cuya norma es definida por $\|u\|_{H^m} = (u, u)_{H^m}^{1/2}$.

El espacio $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ es definido como

$$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \in \mathcal{C}^\infty \text{ con soporte compacto contenido en } \Omega\}. \quad (1.1)$$

El espacio $H_0^m(\Omega)$ es definido como la clausura de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ en la norma $H^m(\Omega)$, el cual es un espacio de Hilbert con el producto interno $(u, v)_{H_0^1} = (\nabla u, \nabla v)$ y norma $\|u\|_{H_0^1} = \|\nabla u\|$. El espacio dual de $H_0^1(\Omega)$ es denotado por $H^{-1}(\Omega)$.

Para $1 \leq p < \infty$, el espacio dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$ es denotado por $(W_0^{m,p}(\Omega))'$ y se define como

$$W^{-m,q}(\Omega) = (W_0^{m,p}(\Omega))', \text{ donde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Los espacios de Sobolev de funciones vectoriales n-dimensionales se denotarán por $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$ y $\mathbf{H}^m(\Omega)$, esto es

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{m,p}(\Omega) &:= \{\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n : u_i \in W^{m,p}(\Omega) \text{ para } i = 1, \dots, n\}, \\ \mathbf{H}^m(\Omega) &:= \{\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n : u_i \in H^m(\Omega) \text{ para } i = 1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

y sus respectivas normas asociadas están dadas por

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}} &= \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{W^{m,p}}^p \right)^{1/p}, \\ \|\mathbf{u}\|_{H^m} &= \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{H^m}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

1.2 Definiciones y resultados de análisis funcional

En esta sección, se citan algunas definiciones y resultados de Análisis Funcional que serán utilizados en el desarrollo de los capítulos posteriores.

Proposición 1.1 ([26], [64]) *Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$) con borde Γ localmente Lipschitz. Entonces,*

1. *Existe un operador lineal y acotado γ_Γ (operador traza) tal que*

$$\begin{aligned} \gamma_\Gamma : \mathbf{H}^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbf{L}^2(\Gamma) \\ \mathbf{u} &\longmapsto \gamma_\Gamma(\mathbf{u}) = \mathbf{u}|_\Gamma, \end{aligned}$$

y verifica

- (a) *El núcleo de γ_Γ es el espacio $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$.*
- (b) *La imagen de γ_Γ , denotada $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, es un subespacio denso de $\mathbf{L}^2(\Gamma)$.*

2. *Existe un operador lineal y continuo γ_Ω (levantamiento) tal que*

$$\begin{aligned} \gamma_\Omega : \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) &\longrightarrow \mathbf{H}^1(\Omega) \\ \mathbf{v} &\longmapsto \gamma_\Omega(\mathbf{v}) = \mathbf{u}, \quad \text{donde } \mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Más aún, una constante C dependiendo de n y Ω tal que

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1} \leq C\|\mathbf{u}|_{\Gamma}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}, \quad \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \leq C\|\gamma_{\Omega}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{H}^1}. \quad (1.2)$$

Nótese que debido a la Proposición 1.1, el espacio $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ puede ser caracterizado por

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \gamma_{\Gamma}\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma\}.$$

El espacio $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ es un espacio de Hilbert (ver [26]) con norma definida por

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} = \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \mathbf{v}|_{\Gamma} = \mathbf{u}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1}.$$

El espacio dual de $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ es denotado por $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ y el producto dual entre $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ y $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ se denota por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$.

Observación 1.2 *De aquí en adelante hasta el final de la tesis, la letra C denotará una constante genérica que tomará diferentes valores según sea el caso.*

Definición 1.3 *Sean X e Y dos espacios de Banach. Un operador lineal $T : X \rightarrow Y$ se dice que es acotado si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Observación 1.4 ([6]) *El operador lineal T es continuo si y sólo si es acotado.*

Notación: $\mathcal{B}(X, Y)$ denota el conjunto de todos los operadores lineales y acotados de X en Y .

Lema 1.5 ([64], pág. 110) *Sea X un espacio de Hilbert de dimensión finita con producto interno (\cdot, \cdot) y norma $\|\cdot\|_X$, y sea $P : X \rightarrow X$ una aplicación continua tal que*

$$(P(\phi), \phi) > 0 \quad \text{para } \|\phi\|_X = K > 0.$$

Entonces, existe $\phi \in X$, $\|\phi\|_X \leq K$ tal que $P(\phi) = 0$.

Definición 1.6 (Rudin [56]) *Sean X e Y dos espacios de Banach con duales X' e Y' respectivamente y $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Se dice que $T^* \in \mathcal{B}(Y', X')$ es el operador adjunto de T , si verifica la siguiente igualdad*

$$\langle Tx, y \rangle_{Y'} = \langle x, T^*y \rangle_{X'} \quad \forall x \in X, y \in Y'.$$

Además, se satisface $\|T\| = \|T^\|$. Si $T = T^*$ se dice que el operador T es autoadjunto.*

Definición 1.7 (Convergencia débil y fuerte, Brézis [6]) *Sea X un espacio normado y $\{x_m\}_{m \geq 1}$ una sucesión en X .*

1. *Se dice que $\{x_m\}_{m \geq 1}$ converge débilmente a $x \in X$, si*

$$\langle f, x_m \rangle_{X'} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \langle f, x \rangle_{X'} \quad \forall f \in X',$$

y se denota por $x_m \rightharpoonup x$.

2. Se dice que $\{x_m\}_{m \geq 1}$ converge fuertemente (o en norma) a x , si

$$\|x_m - x\|_X \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

y se denota por $x_m \rightarrow x$.

Proposición 1.8 ([6]) Sea X un espacio de Banach y $\{x_m\}_{m \geq 1}$ una sucesión débilmente convergente a $x \in X$. Entonces, $\|x_m\|_X$ es acotada en X y

$$\|x\|_X \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|x_m\|_X. \quad (1.3)$$

Lema 1.9 Sea $\{x_m\}_{m \geq 1}$ una sucesión en \mathbb{R} , tal que $x_m \geq 0$ para todo m . Entonces, se verifica la siguiente igualdad

$$\left(\liminf_{m \rightarrow \infty} x_m \right)^2 = \liminf_{m \rightarrow \infty} x_m^2. \quad (1.4)$$

Demostración: Usando la definición de límite inferior, se tiene

$$\left(\liminf_{m \rightarrow \infty} x_m \right)^2 = \left(\sup_m \inf_{k \geq m} x_k \right)^2,$$

y observando que

$$\left(\sup_m \inf_{k \geq m} x_k \right)^2 = \sup_m \left(\inf_{k \geq m} x_k \right)^2 = \sup_m \inf_{k \geq m} x_k^2 = \liminf_{m \rightarrow \infty} x_m^2,$$

se obtiene (1.4). ◇

Definición 1.10 ([6]) Sea X un espacio de Banach y $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional. Se dice que Φ es débilmente semicontinuo inferior sobre X , si

$$\Phi(x) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \Phi(x_m),$$

para toda sucesión $\{x_m\}_{m \geq 1} \subset X$ tal que $x_m \rightharpoonup x$.

Ejemplo 1.11 Sea $u_d \in H^1(\Omega)$ un elemento fijo. El funcional $J : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) = \|u - u_d\|_{H^1}^2 + \|\operatorname{rot} u\|^2$$

es débilmente semicontinuo inferior sobre $H^1(\Omega)$. En efecto, sea $\{u^m\}_{m \geq 1} \subset H^1(\Omega)$ una sucesión débilmente convergente a un elemento $u \in H^1(\Omega)$. Entonces

$$u^m - u_d \rightharpoonup u - u_d \text{ débilmente en } H^1(\Omega) \quad \text{y} \quad \operatorname{rot} u^m \rightharpoonup \operatorname{rot} u \text{ débilmente en } L^2(\Omega).$$

Así, de (1.3) se tiene

$$\|u - u_d\|_{H^1} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u^m - u_d\|_{H^1}, \quad \|\operatorname{rot} u\| \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\operatorname{rot} u^m\|. \quad (1.5)$$

Por lo tanto, usando la igualdad (1.4) en (1.5) se obtiene

$$\begin{aligned} \|u - u_d\|_{H^1}^2 &\leq \left(\liminf_{m \rightarrow \infty} \|u^m - u_d\|_{H^1} \right)^2 = \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u^m - u_d\|_{H^1}^2, \\ \|\operatorname{rot} u\| &\leq \left(\liminf_{m \rightarrow \infty} \|\operatorname{rot} u^m\| \right)^2 = \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\operatorname{rot} u^m\|^2, \end{aligned}$$

de donde se concluye que J es débilmente semicontinuo inferior sobre $H^1(\Omega)$. ◇

Definición 1.12 (Brézis [6]) Sean X e Y espacios de Banach y $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Se dice que T es un operador compacto, si T transforma una sucesión débilmente convergente en X en una sucesión fuertemente convergente en Y , esto es, si $\{x_m\}_{m \geq 1} \subset X$ es tal que $x_m \rightharpoonup x$, entonces

$$\|Tx_m - Tx\|_Y \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Notación: $\mathcal{K}(X, Y)$ denota el conjunto de todos los operadores compactos de X en Y .

Definición 1.13 (Brézis [6]) Sea X un espacio de Banach. Se dice que X es uniformemente convexo si $\forall \varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$(x, y \in X, \|x\|_X \leq 1, \|y\|_X \leq 1 \text{ y } \|x - y\|_X > \varepsilon) \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\|_X < 1 - \delta.$$

Para espacios uniformemente convexos se tienen los siguientes resultados; los detalles pueden ser encontrados en [6].

Lema 1.14 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) un dominio acotado. El espacio $L^p(\Omega)$ es uniformemente convexo, para $1 < p < \infty$. En general, todo espacio de Hilbert es uniformemente convexo.

Lema 1.15 Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo y $\{x_m\}_{m \geq 1}$ una sucesión débilmente convergente a $x \in X$. Si

$$\limsup \|x_m\|_X \leq \|x\|_X,$$

entonces $x_m \rightarrow x$ fuertemente.

Proposición 1.16 ([9], [56]) Sean X, Y y Z espacios de Banach, $S \in \mathcal{K}(X, Y)$, $T_1 \in \mathcal{B}(Y, Z)$ y $T_2 \in \mathcal{B}(Z, X)$, entonces $T_1 \circ S \in \mathcal{K}(X, Z)$ y $S \circ T_2 \in \mathcal{K}(Z, Y)$.

Definición 1.17 (Adams [1]) (Inmersión compacta) Sean X e Y dos espacios de Banach tales que X es un subespacio vectorial de Y . Se dice que X es compactamente inmerso en Y , y se denota $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$, si la inclusión de X en Y es un operador compacto.

En los siguientes teoremas se dan algunos resultados de inmersión de los espacios de Sobolev.

Teorema 1.18 ([1]) Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$) con frontera de clase C^1 . Sea $m \geq 1$ un entero y $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$. Las siguientes inmersiones son continuas

$$\text{Si } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0 \Rightarrow \mathbf{W}^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*], \text{ donde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}.$$

$$\text{Si } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0 \Rightarrow \mathbf{W}^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, \infty).$$

$$\text{Si } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0 \Rightarrow \mathbf{W}^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{C}(\bar{\Omega}).$$

Teorema 1.19 ([1]) Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$) con frontera de clase C^1 . Sean $m \geq 1$ y $j \geq 0$ números enteros y sea $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$. Las siguientes inmersiones son compactas

$$\begin{aligned} \text{Si } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0 &\Rightarrow \mathbf{W}^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{W}^{j,q}(\Omega) \quad \forall q \in [p, p^*], \text{ donde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}. \\ \text{Si } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0 &\Rightarrow \mathbf{W}^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{W}^{j,q}(\Omega) \quad \forall q \in [p, \infty). \\ \text{Si } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0 &\Rightarrow \mathbf{W}^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{W}^{j,q}(\Omega) \quad \forall q \in [p, \infty] \text{ y } \mathbf{W}^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{C}^j(\Omega). \end{aligned}$$

Teorema 1.20 (Rellich-Kondrachov, [1]) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) un dominio acotado con frontera de clase C^1 y $1 \leq p < \infty$. Las siguientes inmersiones son compactas

$$\begin{aligned} \text{Si } p < n &\Rightarrow \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*], \text{ donde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}. \\ \text{Si } p = n &\Rightarrow \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, \infty). \\ \text{Si } p > n &\Rightarrow \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{C}(\bar{\Omega}). \end{aligned}$$

Observación 1.21 En el estudio de las ecuaciones de fluidos micropolares, los espacios de funciones que se utilizarán con mayor frecuencia son $\mathbf{H}^1(\Omega)$ y $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Desde Teorema 1.18 y Teorema 1.19, se deduce las siguientes inmersiones:

$$\begin{aligned} \text{Si } n = 2, \mathbf{H}^1(\Omega) &\hookrightarrow \mathbf{L}^q(\Omega) \text{ es continua para } 2 \leq q < \infty. \\ \text{Si } n = 3, \mathbf{H}^1(\Omega) &\hookrightarrow \mathbf{L}^q(\Omega) \text{ es continua para } 1 \leq q \leq 6 \text{ y compacta para } 1 \leq q < 6. \end{aligned}$$

Lema 1.22 ([3]) La inmersión de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ en $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ es compacta.

Teorema 1.23 (Teorema de Lax-Milgram, [40], [55]) Sea H un espacio de Hilbert y $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coerciva, esto es, existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$|a(u, v)| \leq \alpha \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H$$

y

$$a(u, u) \geq \beta \|u\|_H^2 \quad \forall u \in H.$$

Entonces, para cada $f \in H'$ existe un único elemento $u \in H$ tal que

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle_{H'} \quad \forall v \in H.$$

Teorema 1.24 (Teorema del punto fijo de Leray-Schauder, [40]) Sea X un espacio de Banach y $T : X \rightarrow X$ un operador compacto y continuo. Si el conjunto

$$\bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} \{x \in X : x = \lambda T x\}$$

es acotado en X . Entonces T tiene un punto fijo.

Definición 1.25 (Coleman [7]) Sean X e Y dos espacios de Banach, y S un subconjunto abierto no vacío de X . Se dice que un operador $f : S \rightarrow Y$ es Fréchet diferenciable con respecto a x , en un punto arbitrario $\tilde{x} \in S$ en la dirección $h \in X$, si existe un operador lineal y acotado $A_x : X \rightarrow Y$ tal que

$$\lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \frac{\|f(\tilde{x} + h) - f(\tilde{x}) - A_x(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0,$$

y la derivada de Fréchet del operador f , con respecto a x en el punto arbitrario \tilde{x} es el operador $A_x := f_x(\tilde{x})$.

Ejemplo 1.26 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y las funciones reales $u, u_d \in L^p(\Omega)$ con $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Para u_d un elemento fijo, el funcional $J : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) = \|u - u_d\|_p^p$$

es Fréchet diferenciable con respecto a u en un punto arbitrario $\tilde{u} \in L^p(\Omega)$ en la dirección $\varphi \in L^p(\Omega)$. Además, la derivada de Fréchet de J es el funcional lineal y acotado $J_u(\tilde{u}) : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J_u(\tilde{u})\varphi = p(|\tilde{u} - u_d|^{p-1} \text{sgn}(\tilde{u} - u_d), \varphi), \quad (1.6)$$

donde $\text{sgn}(\tilde{u} - u_d)$ denota el signo de $(\tilde{u} - u_d)$.

En efecto, consideremos el operador $g : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, definido por

$$g(u) = \begin{cases} \frac{|u - u_d|^p - |\hat{u} - u_d|^p}{u - \hat{u}} & \text{si } u \neq \hat{u}, \\ p|\hat{u} - u_d|^{p-1} \text{sgn}(\hat{u} - u_d) & \text{si } u = \hat{u}, \end{cases}$$

para cada $u \in L^p(\Omega)$. Obsérvese que $\lim_{u \rightarrow \hat{u}} g(u) = p|\hat{u} - u_d|^{p-1} \text{sgn}(\hat{u} - u_d)$, de modo que g es continuo en \hat{u} . Además, para cada $u \in L^p(\Omega)$, se tiene $g(u) \in L^q(\Omega)$. De hecho, notemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |g(u)|^q d\Omega &= \int_{\Omega} \left| \frac{|u - u_d|^p - |\hat{u} - u_d|^p}{u - \hat{u}} \right|^q d\Omega \\ &\leq C \int_{\Omega} \frac{(|u - u_d| - |\hat{u} - u_d|)(|u - u_d|^{p-1} + |\hat{u} - u_d|^{p-1})^q}{|u - \hat{u}|^q} d\Omega \\ &\leq C \int_{\Omega} \frac{|u - u_d - (\hat{u} - u_d)|^q (|u - u_d|^{p-1} + |\hat{u} - u_d|^{p-1})^q}{|u - \hat{u}|^q} d\Omega \\ &= C \int_{\Omega} (|u - u_d|^{p-1} + |\hat{u} - u_d|^{p-1})^q d\Omega \\ &\leq C_q \int_{\Omega} (|u - u_d|^{(p-1)q} + |\hat{u} - u_d|^{(p-1)q}) d\Omega \\ &= C_q \int_{\Omega} |u - u_d|^p d\Omega + C_q \int_{\Omega} |\hat{u} - u_d|^p d\Omega < \infty, \end{aligned}$$

pues las funciones u, \hat{u} y u_d pertenecen al espacio $L^p(\Omega)$. Consecuentemente, se tiene que $g(u) \in L^q(\Omega)$ para toda $u \in L^p(\Omega)$.

Por otro lado, observemos que para cada $h \in L^p(\Omega)$, con $h \neq 0$, se tiene

$$\begin{aligned} J(u+h) - J(u) - \langle g(\hat{u}+h), h \rangle &= \int_{\Omega} (|\hat{u}+h-u_d|^p - |\hat{u}-u_d|^p) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \left(\frac{|\hat{u}+h-u_d|^p - |\hat{u}-u_d|^p}{\hat{u}+h-\hat{u}} \right) h d\Omega \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Definiendo $\varphi : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ por

$$\varphi(h) = g(\hat{u}+h) - g(\hat{u}) \quad \forall h \in L^p(\Omega), \quad (1.8)$$

se concluye

$$\begin{aligned} \langle \varphi(h), h \rangle &= \langle g(\hat{u}+h) - g(\hat{u}), h \rangle \\ &= \langle g(\hat{u}+h), h \rangle - \langle g(\hat{u}), h \rangle. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Al sustituir (1.9) en (1.7), se obtiene

$$J(\hat{u}+h) - J(\hat{u}) - \langle g(\hat{u}), h \rangle = \langle \varphi(h), h \rangle \quad \forall h \in L^p(\Omega), h \neq 0,$$

lo cual implica

$$\frac{|J(\hat{u}+h) - J(\hat{u}) - \langle g(\hat{u}), h \rangle|}{\|h\|_p} = \frac{|\langle \varphi(h), h \rangle|}{\|h\|_p} \quad \forall h \in L^p(\Omega), h \neq 0. \quad (1.10)$$

Finalmente, observe que debido a la continuidad de g en \hat{u} , se tiene

$$g(\hat{u}+h) \rightarrow g(\hat{u}), \quad \text{cuando } h \rightarrow 0,$$

así, teniendo en cuenta (1.8), se concluye

$$\varphi(h) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } h \rightarrow 0.$$

Por lo tanto, debido a que $\varphi(h) \in L^q(\Omega)$ para cada $h \in L^p(\Omega)$, se tiene

$$\frac{|\langle \varphi(h), h \rangle|}{\|h\|_p} \leq \frac{\|\varphi(h)\|_q \|h\|_p}{\|h\|_p} = \|\varphi(h)\|_q \rightarrow 0, \quad \text{cuando } h \rightarrow 0. \quad (1.11)$$

En consecuencia, al emplear (1.11) en (1.10), se obtiene

$$\lim_{\|h\|_p \rightarrow 0} \frac{|J(u+h) - J(\hat{u}) - \langle g(\hat{u}), h \rangle|}{\|h\|_p} = \lim_{\|h\|_p \rightarrow 0} \frac{|\langle \varphi(h), h \rangle|}{\|h\|_p} = 0,$$

donde $\langle g(\hat{u}), h \rangle = \langle p|\hat{u}-u_d|^{p-1} \text{sgn}(\hat{u}-u_d), h \rangle$, de esto último y la definición de derivada en el sentido de Fréchet se concluye (1.6). \diamond

Definición 1.27 (Iofee [33]) Sean Z, Y dos espacios de Banach y sea $F : Z \rightarrow Y$ una aplicación Fréchet diferenciable. Se dice que la aplicación F es regular en el punto x_0 si:

- i) F es Fréchet diferenciable en el punto x_0 , es decir, existe el operador lineal y continuo $F_x(x_0) : Z \rightarrow Y$,
- ii) $\text{Im}(F_x(x_0)) = Y$.

Definición 1.28 (Iofee [33]) Sea X un espacio de Banach y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional. Se dice que un punto $x_0 \in X$ es un punto estacionario de f si $f_x(x_0) = 0$.

Sea M un subconjunto del espacio de Banach Z . Se dice que un vector $x \in Z$ es *tangente* al conjunto M en el punto x_0 si existe $\varepsilon > 0$ y una aplicación $r : [0, \varepsilon] \rightarrow Z$ tal que $\forall t \in [0, \varepsilon]$,

$$x_0 + tx + r(t) = \phi(t) \in M \quad , \quad \frac{\|r(t)\|}{t} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow 0.$$

El conjunto de vectores tangentes al conjunto M en el punto x_0 es un cono cerrado (no vacío pues contiene al cero), el cual es llamado *cono tangente* al conjunto M en el punto x_0 . Si este cono es un subespacio, es llamado *el espacio tangente* al conjunto M en el punto x_0 y es denotado por $TM(x_0)$.

Definición 1.29 (Conway [9]) Sean X e Y dos espacios de Hilbert y un operador $F \in \mathcal{B}(X, Y)$.

i) Se dice que F es un operador semi-Fredholm por la izquierda si existe un operador $B \in \mathcal{B}(Y, X)$ y un operador $K \in \mathcal{K}(X, X)$ tal que

$$B \circ F = id_X + K. \quad (1.12)$$

ii) Se dice que F es un operador semi-Fredholm por la derecha si existe un operador $B \in \mathcal{B}(Y, X)$ y un operador $K \in \mathcal{K}(Y, Y)$ tal que

$$F \circ B = id_Y + K. \quad (1.13)$$

iii) Se dice que F es un operador de Fredholm si es semi-Fredholm por la derecha y por la izquierda simultáneamente.

Lema 1.30 Sean X e Y dos espacios de Hilbert y F un operador en $\mathcal{B}(X, Y)$ tal que

$$F = T + K, \quad (1.14)$$

donde el operador $T : X \rightarrow Y$ es un isomorfismo y el operador $K \in \mathcal{K}(X, Y)$. Entonces, F es un operador de Fredholm.

Demostración: Como el operador $T : X \rightarrow Y$ es un isomorfismo, existe el operador inverso $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$ y entonces aplicando T^{-1} por la izquierda en (1.14) se tiene

$$T^{-1} \circ F = id_X + T^{-1} \circ K, \quad (1.15)$$

donde por Proposición 1.16, $T^{-1} \circ K \in \mathcal{K}(X, X)$.

Similarmente, aplicando T^{-1} por la derecha en (1.14) se obtiene

$$F \circ T^{-1} = id_Y + K \circ T^{-1}, \quad (1.16)$$

con $K \circ T^{-1} \in \mathcal{K}(Y, Y)$.

Por lo tanto, de (1.15), (1.16) y la Definición 1.29, se concluye que F es un operador de Fredholm. \diamond

Proposición 1.31 ([9]) Sean X e Y espacios de Banach y $F \in \mathcal{B}(X, Y)$. Entonces, F es un operador de Fredholm si y sólo si

i) El núcleo de F , denotado por $\ker(F)$, es de dimensión finita.

ii) El rango de F , denotado por $R(F)$, es cerrado y de codimensión finita, esto es, $\dim(Y/R(F)) < \infty$.

Teorema 1.32 ([6]) Sea X un espacio de Hilbert y $G \subset X$ un subespacio convexo, cerrado y no vacío. Entonces, para todo $v \in X$, existe un único $u \in G$ tal que

$$\|v - u\|_X = \min_{w \in G} \|v - w\|_X. \quad (1.17)$$

Además, u es caracterizada por la propiedad

$$(u - v, w - u)_X \geq 0 \quad \forall w \in G, \quad (1.18)$$

y se tiene que u es la proyección de v sobre G , esto es, $u = \text{Proy}_G v$.

1.3 Desigualdades, operadores diferenciales y propiedades

Las dos desigualdades que se citan a continuación son usadas frecuentemente y sus respectivas demostraciones se encuentran en Brézis [6].

Lema 1.33 (Desigualdad de Young) Sean a, b, p, q números reales positivos tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces, se verifica la siguiente desigualdad

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Lema 1.34 (Desigualdad de Hölder generalizada) Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n y sean las funciones $\mathbf{f}_i \in \mathbf{L}^{p_i}(\Omega)$ para $i = 1, 2, \dots, k$, con $p_i, p \geq 1$ satisfaciendo $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p} \leq 1$. Entonces, para $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 \dots \mathbf{f}_{k-1} \mathbf{f}_k \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ se tiene la siguiente desigualdad

$$\|\mathbf{f}\|_p \leq \|\mathbf{f}_1\|_{p_1} \|\mathbf{f}_2\|_{p_2} \dots \|\mathbf{f}_k\|_{p_k}.$$

A continuación se definen algunos operadores diferenciales que serán utilizados en el análisis de las ecuaciones de fluidos micropolares. Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n con borde Γ suficientemente regular.

Para $\mathbf{u} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se definen los operadores

$$\begin{aligned} \text{Gradiente: } \nabla \mathbf{u}(x) &= \begin{pmatrix} \nabla u_1(x) \\ \nabla u_2(x) \\ \vdots \\ \nabla u_n(x) \end{pmatrix}, & \text{Convección: } \mathbf{u}(x) \cdot \nabla \mathbf{u}(x) &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}(x) \cdot \nabla u_1(x) \\ \mathbf{u}(x) \cdot \nabla u_2(x) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(x) \cdot \nabla u_n(x) \end{pmatrix}, \\ \text{Laplaciano: } \Delta \mathbf{u}(x) &= \begin{pmatrix} \Delta u_1(x) \\ \Delta u_2(x) \\ \vdots \\ \Delta u_n(x) \end{pmatrix}, & \text{Divergente: } \text{div} \mathbf{u}(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

El operador rotacional es denotado por rot y su definición depende de la dimensión del dominio Ω :

- Si $n = 2$ y $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, se tiene $\text{rot } u(x) = \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}, -\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right)$.
- Si $n = 2$ y $\mathbf{u} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, se tiene $\text{rot } \mathbf{u}(x) = \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}$.
- Si $n = 3$ y $\mathbf{u} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, se tiene

$$\text{rot } \mathbf{u}(x) = \left(\frac{\partial u_3(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2} \right).$$

Lema 1.35 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$), un dominio acotado. Si el campo $\mathbf{u} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ pertenece a $\mathbf{H}^1(\Omega)$, entonces se verifica la desigualdad

$$\|\text{rot } \mathbf{u}\| \leq \sqrt{2} \|\nabla \mathbf{u}\|. \quad (1.19)$$

La función $w : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en $H^1(\Omega)$, satisface la igualdad

$$\|\text{rot } w\| = \|\nabla w\|. \quad (1.20)$$

Demostración: Por la definición de $\text{rot } \mathbf{u}$, la desigualdad de Young y la definición de $\nabla \mathbf{u}$, se tiene

$$\begin{aligned} |\text{rot } \mathbf{u}(x)|^2 &= \left| \frac{\partial u_3(x)}{\partial x_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_3} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial u_3(x)}{\partial x_2} \right| \left| \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_3} \right| + \left| \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_3} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3(x)}{\partial x_1} \right|^2 \\ &\quad + 2 \left| \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_3} \right| \left| \frac{\partial u_3(x)}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_1} \right| \left| \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2} \right| \\ &\leq 2 \left(\left| \frac{\partial u_3(x)}{\partial x_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_3} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_3} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3(x)}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2} \right|^2 \right) \\ &\leq 2 \|\nabla \mathbf{u}(x)\|^2, \end{aligned}$$

lo cual implica que $\|\text{rot } \mathbf{u}\|^2 \leq 2 \|\nabla \mathbf{u}\|^2$, desde donde se sigue (1.19).

La igualdad (1.20) se deduce directamente de la definición del rotacional. \diamond

Consideremos un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) con borde Γ , se define el siguiente espacio

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{u} \in C_0^\infty(\Omega) : \text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega\}.$$

Asociados al espacio \mathcal{V} , los espacios de Hilbert que usualmente se considerarán en el estudio de las ecuaciones de fluidos micropolares son

$$\mathbf{H} = \text{clausura de } \mathcal{V} \text{ en } \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ y } \mathbf{V} = \text{clausura de } \mathcal{V} \text{ en } \mathbf{H}_0^1(\Omega),$$

los cuales son caracterizados (ver [64]) por

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma\}, \\ \mathbf{V} &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega\}, \end{aligned}$$

donde \mathbf{n} es el vector normal exterior a Γ .

Usando integración por partes sobre Ω se obtienen las siguientes propiedades (ver [64])

$$-(\Delta \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad (1.21)$$

$$(\nabla p, \mathbf{v}) = -(p, \operatorname{div} \mathbf{v}) = 0 \quad \forall p \in H^1(\Omega) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}. \quad (1.22)$$

Se introduce la forma trilineal, $b : \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{w}). \quad (1.23)$$

Propiedades de la forma trilineal b son dadas en el siguiente lema.

Lema 1.36 *Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$). Entonces, la forma trilineal b satisface*

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (1.24)$$

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (1.25)$$

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -((\nabla \mathbf{w})^T \cdot \mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega). \quad (1.26)$$

Demostración: Para la prueba de (1.24), se aplica la siguiente igualdad de integración

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\Gamma} u v n_i d\Gamma \quad \forall u, v \in H^1(\Omega), \quad (1.27)$$

donde n_i es la i -ésima componente del vector normal exterior a Ω (ver [26]).

Entonces, para $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$ y $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, aplicando (1.27) se tiene

$$\begin{aligned} b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i \left(w_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + v_j \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) dx = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i \frac{\partial (v_j w_j)}{\partial x_i} dx \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} v_j w_j dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma} (v_j w_j) u_i n_i d\Gamma. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Como $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$ se tiene que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, así la igualdad (1.28) implica

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} v_j w_j dx = -((\operatorname{div} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0,$$

desde donde se sigue (1.24).

La igualdad (1.25) es una consecuencia de (1.24). Para la identidad (1.26), usando integración por partes sobre Ω se obtiene

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} v_i d\Omega = - \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_j} \mathbf{v} u_j d\Omega = -((\nabla \mathbf{w})^T \cdot \mathbf{v}, \mathbf{u}).$$

◇

Lema 1.37 *(Desigualdad de Poincaré, [26], [64]) Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) es un dominio acotado en alguna dirección, entonces existe una constante C_{Ω} tal que*

$$\|\mathbf{u}\| \leq C_{\Omega} \|\nabla \mathbf{u}\| \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \quad (1.29)$$

Observación 1.38 Como consecuencia del Lema 1.37, las siguientes equivalencias de normas son evidentes $\|\mathbf{u}\|_{H_0^1} \equiv \|\nabla \mathbf{u}\|$ y $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} \equiv \|\nabla \mathbf{u}\|$.

Debido a las inclusiones en espacios de Sobolev, se tienen las siguientes desigualdades, las cuales serán usadas en el desarrollo de los capítulos posteriores.

Lema 1.39 ([5], [31]) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) un dominio acotado con borde Γ . Si $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ es suficientemente regular, tal que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sobre algún subconjunto de medida de Lebesgue positiva de Γ . Entonces, las siguientes desigualdades son satisfechas

$$\|\mathbf{u}\|_4 \leq C\|\nabla \mathbf{u}\|, \quad \|\mathbf{u}\|_6 \leq C\|\nabla \mathbf{u}\|, \quad \|\mathbf{u}\|_3 \leq C\|\nabla \mathbf{u}\|, \quad (1.30)$$

donde la constante C sólo depende del dominio Ω .

Un resultado importante para la prueba de la existencia de soluciones del problema de control de borde que será estudiado más adelante, es dado en el siguiente lema.

Lema 1.40 ([64], pág. 174-178) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con borde Γ y sea $\phi \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una función $\mathbf{u}^\varepsilon \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ con $\operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon = 0$ en Ω y $\mathbf{u}^\varepsilon = \phi$ sobre Γ , satisfaciendo la desigualdad

$$|(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v})| \leq \varepsilon \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (1.31)$$

Lema 1.41 (Desigualdad de Korn, [55]) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) un dominio acotado con borde Γ de clase \mathcal{C}^1 por tramos. Entonces, existe una constante real positiva C_k que depende sólo de Ω , tal que

$$\|D(\mathbf{u})\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 \geq C_k \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1}^2, \quad (1.32)$$

donde $D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})$.

Observación 1.42 Observando que $\|\nabla \mathbf{u}\| = \|\nabla^T \mathbf{u}\|$ se deduce que $\|D(\mathbf{u})\| \leq \|\nabla \mathbf{u}\|$, entonces de (1.32) se tiene que $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1}^2 \geq \|\mathbf{u}\|^2 + \|D(\mathbf{u})\|^2 \geq C_k \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1}^2$ y se concluye que $0 < C_k < 1$. Además, existe una constante $\tilde{C} > 1$ dependiendo sólo de Ω tal que

$$\|\nabla \mathbf{u}\| \leq \tilde{C} \|D(\mathbf{u})\| \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega). \quad (1.33)$$

1.4 Ecuaciones de fluidos micropolares

Las ecuaciones de Navier-Stokes no pueden describir el movimiento de fluidos con microestructura los cuales tienen importantes aplicaciones. En efecto, para describir el comportamiento de este tipo de fluidos es necesario una teoría que considere la geometría, la deformación y el movimiento de partículas de material individuales. Una de las teorías establecidas para fluidos con microestructura es la teoría de fluidos micropolares de Eringen presentada en [14], [15]. Los fluidos micropolares tienen aplicaciones en los fenómenos de lubricación, en la teoría de medios porosos, así como también en el comportamiento del flujo sanguíneo (ver [40], [47], [48]), entre otros. Las ecuaciones de fluidos micropolares constituyen un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales y describen el movimiento de fluidos viscosos e incompresibles constituidos por partículas rígidas, orientadas

aleatoriamente y suspendidas en un medio viscoso, donde la deformación de las partículas del fluido es ignorada.

El modelo de fluidos micropolares es una generalización del sistema de Navier-Stokes, en el cual es introducido un nuevo campo vectorial, que corresponde a la ley de conservación del momento angular y que es acoplado a las ecuaciones de Navier-Stokes a través de un términos viscosos y de fuentes. También, son consideradas tres viscosidades angulares y una viscosidad de microrotación. Si la viscosidad de microrotación llega a ser cero, la ecuación de conservación de momento lineal es independiente de la presencia de la microestructura, con lo cual el modelo se reduce a las ecuaciones de Navier-Stokes. Además, muchos experimentos han mostrado, que los fluidos micropolares representan el comportamiento de numerosos fluidos reales, especialmente cuando la dimensión que caracteriza el dominio donde ocurre el flujo es pequeño, debido a que la influencia de la estructura interna del fluido es mayor.

Para describir el modelo de fluidos micropolares, se considera como dominio de flujo un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) con borde Γ suficientemente regular y un intervalo de tiempo $(0, T)$, $T > 0$. Denotando $Q = \Omega \times (0, T)$, el movimiento de fluidos micropolares es descrito el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 \text{ en } Q, \quad (1.34)$$

$$\rho \mathbf{u}_t - (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = 2\mu_r \text{rot } \mathbf{w} + \rho \mathbf{f} \text{ en } Q, \quad (1.35)$$

$$\rho \mathbf{w}_t - (c_a + c_d) \Delta \mathbf{w} - (c_0 + c_d - c_a) \nabla \text{div } \mathbf{w} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} + 4\mu_r \mathbf{w} = 2\mu_r \text{rot } \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \text{ en } Q, \quad (1.36)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ en } Q. \quad (1.37)$$

El sistema (1.34)-(1.36) es acoplado con las condiciones iniciales

$$\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega \quad (1.38)$$

y con las condiciones de borde, que son de tipo Dirichlet

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, t) \quad \text{sobre } \Gamma \times (0, T), \quad (1.39)$$

donde $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n$ es la velocidad de traslación del fluido, $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n$ es la velocidad de microrotación, $p(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$ es la presión hidrostática y $\rho(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$ es la densidad del fluido, las funciones dadas $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n$ son fuerzas externas actuando sobre el fluido, $\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ y $\rho_0(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ son funciones dadas definidas en Ω y $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t), \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n$ son funciones dadas definidas sobre el borde del dominio. Las constantes positivas $\mu, \mu_r, c_a, c_d, c_0$ caracterizan propiedades isotrópicas del fluido¹, donde μ es la viscosidad dinámica del fluido, μ_r es la viscosidad dinámica de microrotación y c_0, c_a, c_d son los coeficientes de viscosidades angulares los cuales satisfacen $c_0 + c_d > c_a$.

Observemos que cuando la viscosidad de microrotación $\mu_r = 0$, la ley de conservación de momento lineal (1.35) es independiente de la presencia de la microestructura. Cuando $\mu_r = 0$, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ y ρ es constante, el sistema (1.34)-(1.39) se reduce a las clásicas ecuaciones de Navier-Stokes (ver [26], [64]). Si el flujo no depende del tiempo y ρ es constante, el sistema (1.35)-(1.39) se reduce al sistema de las ecuaciones estacionarias de fluidos micropolares, dadas por

$$-(\nu + \nu_r) \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = 2\nu_r \text{rot } \mathbf{w} + \mathbf{f} \text{ en } \Omega, \quad (1.40)$$

$$-(c_a + c_d) \Delta \mathbf{w} - (c_0 + c_d - c_a) \nabla \text{div } \mathbf{w} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} + 4\nu_r \mathbf{w} = 2\nu_r \text{rot } \mathbf{u} + \mathbf{g} \text{ en } \Omega, \quad (1.41)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega, \quad (1.42)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 \text{ sobre } \Gamma, \quad (1.43)$$

¹El fluido conserva su propiedades físicas en cualquier dirección.

donde $\nu = \mu/\rho$ y $\nu_r = \mu_r/\rho$ representan la viscosidad cinemática del fluido y la viscosidad cinemática de microrotación, respectivamente.

Una formulación débil del problema (1.40)-(1.43) es: hallar $[\mathbf{u}, \mathbf{w}] \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$ con $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ tal que satisface el sistema

$$(\nu + \nu_r)(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\nu_r(\operatorname{rot} \mathbf{w}, \mathbf{v}) + (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad (1.44)$$

$$\nu_2(\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{v}) + \nu_3(\operatorname{div} \mathbf{w}, \operatorname{div} \mathbf{z}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{z}) + 4\nu_r(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = 2\nu_r(\operatorname{rot} \mathbf{u}, \mathbf{z}) + (\mathbf{g}, \mathbf{z}), \quad (1.45)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (1.46)$$

para todo $[\mathbf{v}, \mathbf{z}] \in \mathbf{V} \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ y donde $\nu_2 = c_a + c_d$, $\nu_3 = c_0 + c_d - c_a$.

Definición 1.43 *Dados $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ y $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, una solución débil del sistema (1.40)-(1.43) es un par de funciones $[\mathbf{u}, \mathbf{w}] \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$ con $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ y tal que $[\mathbf{u}, \mathbf{w}]$ satisface el sistema (1.44)-(1.46).*

Resultados sobre existencia, unicidad y regularidad de soluciones débiles para el sistema (1.35)-(1.39), cuando ρ es constante, pueden ser encontrados en [12], [24], [35], [37], [39], [41], [44], [51], [52]. Para el sistema (1.34)-(1.39), cuando la densidad inicial $\rho_0 \geq 0$ y las condiciones de borde $\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0$ son nulas, la existencia de soluciones débiles locales en tiempo fueron probadas en [40], [43].

Para el caso estacionario (1.40)-(1.43) con condiciones de borde $\mathbf{u}_0 = 0 = \mathbf{w}_0$, el estudio de soluciones débiles fueron hechos en [19], [20], [40], [42], [58]; cuando las condiciones de borde son no nulas se tiene el trabajo [45], el cual estudia la existencia de soluciones ultra débiles. Si las condiciones sobre el borde son de tipo Navier, no se conocen resultados acerca de existencia de soluciones débiles.

Si el flujo no depende del tiempo y la densidad ρ del fluido es no constante, se dice que el fluido es no homogéneo. Entonces, cuando el dominio de flujo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, observando (1.34)-(1.37) se deduce que las ecuaciones estacionarias de fluidos micropolares con densidad variable son dadas por el sistema

$$-(\mu + \mu_r)\Delta \mathbf{u} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w} + \rho \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega, \quad (1.47)$$

$$-(c_a + c_d)\Delta \mathbf{w} - (c_0 + c_d - c_a)\nabla \operatorname{div} \mathbf{w} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w} + 4\mu_r \mathbf{w} = 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \quad \text{en } \Omega, \quad (1.48)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (1.49)$$

con las condiciones de borde

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad \rho = \rho_0 > 0 \quad \text{sobre } \Gamma_0, \quad \int_{\Gamma} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0, \quad (1.50)$$

donde $\Gamma_0 \subset \Gamma$ es un conjunto arco conexo sobre el cual $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} > 0$ (flujo hacia el exterior) o $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} < 0$ (flujo hacia el interior). La constante $\mu > 0$ denota la viscosidad dinámica del fluido y μ_r representa la viscosidad dinámica de microrotación.

Cuando el dominio de flujo es $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, el flujo puede ser interpretado como un flujo en una sección transversal $x_3 = c$ del dominio tridimensional cuando las fuerzas externas, la densidad y el flujo no dependen del eje x_3 de coordenadas, se asume que la componente u_3 de la velocidad \mathbf{u} en la dirección x_3 es cero y los ejes de rotación de partículas son paralelos al eje x_3 , esto es, para $x = (x_1, x_2) \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (u_1(x), u_2(x), 0), & \mathbf{w} &= (0, 0, w_3(x)), & p &= p(x), & \rho &= \rho(x), \\ \mathbf{f} &= (f_1(x), f_2(x), 0), & \mathbf{g} &= (0, 0, g_3(x)). \end{aligned}$$

Entonces, asumiendo $\mathbf{u} = (u_1(x), u_2(x))$, $w = w_3(x)$, $p = p(x)$, $\rho = \rho(x)$, $\mathbf{f} = (f_1(x), f_2(x))$ y $\mathbf{g} = \mathbf{g}_3(x)$, se tiene

$$\text{rot } \mathbf{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad \text{rot } w = \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}, -\frac{\partial w}{\partial x_1} \right), \quad \text{div } \mathbf{w} = 0.$$

Por lo tanto, desde (1.47)-(1.50), para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ las ecuaciones estacionarias de fluidos micropolares con densidad variable son dadas por el sistema

$$-(\mu + \mu_r)\Delta \mathbf{u} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = 2\mu_r \text{rot } w + \rho \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega, \quad (1.51)$$

$$-(c_a + c_d)\Delta w + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)w + 4\mu_r w = 2\mu_r \text{rot } \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \quad \text{en } \Omega, \quad (1.52)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (1.53)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad w = w_0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad \rho = \rho_0 > 0 \quad \text{sobre } \Gamma_0, \quad \int_{\Gamma} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0. \quad (1.54)$$

Una formulación débil del problema (1.51)-(1.54) es: hallar (\mathbf{u}, w, ρ) con $\text{div } \mathbf{u} = 0$ tal que satisfice el sistema

$$(\mu + \mu_r)(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\mu_r (\text{rot } w, \mathbf{v}) + (\rho \mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (1.55)$$

$$(c_a + c_d)(\nabla w, \nabla z) + (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla w, z) + 4\mu_r (w, z) = 2\mu_r (\text{rot } \mathbf{u}, z) + (\rho \mathbf{g}, z) \quad \forall z \in H_0^1(\Omega), \quad (1.56)$$

$$(\rho \mathbf{u}, \nabla \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad (1.57)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad w = w_0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad \rho = \rho_0 > 0 \quad \text{sobre } \Gamma_0, \quad \int_{\Gamma} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0. \quad (1.58)$$

Usando el método de Galerkin, la existencia de solución débil para (1.47)-(1.50) fue probada en [66], el cual hasta ahora es el único trabajo que se conoce. En el caso de Navier-Stokes, esto es cuando $\mu_r = 0$ y $w = 0$, la existencia de de soluciones débiles ha sido estudiada en [21], [32], [57].

1.5 Problema abstracto de control de flujo

Un problema de control de flujo consta de tres partes: un *objetivo*, razón por la que se quiere controlar el flujo (por ejemplo minimizar la turbulencia); *controles*, parámetros de los cuales se dispone para alcanzar el objetivo (control de borde, control distributivo, etc.) y *restricciones*, las cuales determinan el tipo de flujo que se desea controlar, matemáticamente son expresadas como un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales (por ejemplo las ecuaciones de Navier-Stokes), cuyas variables involucradas son llamadas variables de estado. Para representar matemáticamente un problema de control se considera X, Y, Z espacios de Banach reflexivos, un conjunto de *controles* $\Theta \subset Z$ convexo, cerrado y no vacío, el *objetivo* se representa por un funcional $J : X \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ y la *restricción* es dada por el operador $F : X \times \Theta \rightarrow Y$. Entonces, la formulación del problema de control consiste en: Hallar un estado $\tilde{u} \in X$ y un control $\tilde{g} \in \Theta$, tal que

$$J[\tilde{u}, \tilde{g}] = \min_{[u, g] \in X \times \Theta} J[u, g] \quad \text{sujeto a } F[u, g] = 0. \quad (1.59)$$

El conjunto de soluciones admisibles del problema de control (1.59) es definido por

$$\mathcal{S}_{ad} = \{[u, g] \in X \times \Theta : J[u, g] < \infty, F[u, g] = 0\}.$$

Se tiene la siguiente definición.

Definición 1.44 (Solución óptima) Un par $[\hat{u}, \hat{g}] \in \mathcal{S}_{ad}$ es llamado solución óptima del problema (1.59), si

$$J[\hat{u}, \hat{g}] = \min J[u, g] \quad \forall [u, g] \in \mathcal{S}_{ad}.$$

Multiplicadores de Lagrange

El principio de Lagrange es un método que permite derivar un sistema de optimalidad para el problema de control (1.59), desde el cual estados y controles óptimos pueden ser obtenidos. Este método reduce el problema de minimizar un funcional de m variables sujeto a k restricciones a un problema de minimizar un funcional auxiliar (funcional de Lagrange) sin restricciones de $m+k$ variables. Estas nuevas k variables desconocidas, una para cada restricción, son llamadas multiplicadores de Lagrange o variables adjuntas.

Con las notaciones anteriores sobre los espacios X , Y y el conjunto Θ , el siguiente teorema establece las condiciones necesarias que garantizan la existencia de multiplicadores de Lagrange.

Teorema 1.45 ([27], [33]) Sea $[\hat{u}, \hat{g}] \in \mathcal{S}_{ad}$ una solución óptima de (1.59). Además, asuma que existe una vecindad $U \subset X$ de \hat{u} tal que

(a) Para cada $g \in \Theta$ y $u \in U$, las aplicaciones $u \mapsto J[u, g]$ y $\mathbf{u} \mapsto F[u, g]$ son Fréchet diferenciables en $u = \hat{u}$.

(b) Para cada $u \in U$, las aplicaciones $u \mapsto J[u, g]$ y $\mathbf{u} \mapsto F[u, g]$ satisfacen la siguiente condición de convexidad: para cada $g_1, g_2 \in \Theta$ y $\gamma \in [0, 1]$ existe $g \in \Theta$ tal que

$$\begin{aligned} F[u, g] &= \gamma F[u, g_1] + (1 - \gamma)F[u, g_2], \\ J[u, g] &\leq \gamma J[u, g_1] + (1 - \gamma)J[u, g_2]. \end{aligned}$$

(c) El rango del operador $F_u[\hat{u}, \hat{g}] : X \rightarrow Y$ es cerrado y de codimensión finita, donde $F_u[\hat{u}, \hat{g}]$ denota la derivada de Fréchet de F con respecto a u en el punto $[\hat{u}, \hat{g}]$.

Entonces, existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y $\lambda \in Y'$ no simultáneamente nulos tal que

$$\mathcal{L}[\hat{u}, \hat{g}, \lambda_0, \lambda]h = \lambda_0 J_u[\hat{u}, \hat{g}]h - \langle \lambda, F_u[\hat{u}, \hat{g}]h \rangle = 0 \quad \forall h \in X \quad (1.60)$$

y se satisface el principio del mínimo

$$\mathcal{L}[\hat{u}, \hat{g}, \lambda_0, \lambda] = \min_{g \in \Theta} \mathcal{L}[\hat{u}, g, \lambda_0, \lambda], \quad (1.61)$$

donde

$$\mathcal{L}[u, g, \lambda_0, \lambda] = \lambda_0 J[u, g] - \langle \lambda, F[u, g] \rangle \quad (1.62)$$

es el funcional de Lagrange asociado al problema (1.59) y $J_u[u, g]$, $F_u[u, g]$, $\mathcal{L}_u[u, g, \lambda_0, \lambda]$ denotan respectivamente la derivada de Fréchet de J , F y \mathcal{L} con respecto a u .

(d) Además, si la suma algebraica $R(F_u[\hat{u}, \hat{g}]) + F[\hat{u}, \Theta]$ contiene al $0 \in Y$ como un punto interior y si existe un punto $[u, g] \in X \times \Theta$ tal que

$$F_u[\hat{u}, \hat{g}]\mathbf{u} + F[\hat{u}, g] = 0,$$

entonces en (1.60)-(1.61) es posible tomar $\lambda_0 = 1$. ◇

Observación 1.46 El principio del mínimo (1.61) es equivalente a la desigualdad

$$\mathcal{L}_g[\hat{u}, \hat{g}, \lambda_0, \lambda](g - \hat{g}) \geq 0 \quad \forall g \in \Theta.$$

Observación 1.47 Si $\lambda_0 = 0$, de (1.62) se tiene que

$$\mathcal{L}[u, g, 0, \lambda] = -\langle \lambda, F[u, g] \rangle,$$

es decir, el funcional J que representa el objetivo del problema (1.59) desaparece, lo que hace que el caso $\lambda_0 = 0$ sea de poco interés.

Condiciones necesarias de primer orden y sistema de optimalidad

Las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden asociadas al problema de control (1.59) se obtienen desde las ecuaciones (1.60) y (1.61). El sistema de ecuaciones que satisface una solución óptima del problema de control (1.59) es llamado *sistema de optimalidad*, el cual está constituido por las *ecuaciones de estado*, las *ecuaciones adjuntas* y la *condición de optimalidad*.

Así, la solución óptima $[\hat{u}, \hat{g}] \in \mathcal{S}_{ad}$ del problema de control (1.59) satisface el siguiente sistema de optimalidad:

Ecuaciones de estado

$$F[\hat{u}, \hat{g}] = 0.$$

Ecuaciones adjuntas

$$\mathcal{L}_u[\hat{u}, \hat{g}, \lambda_0, \lambda]h = \lambda_0 J_u[\hat{u}, \hat{g}]h - \langle \lambda, F_u[\hat{u}, \hat{g}]h \rangle = 0 \quad \forall h \in X.$$

Condición de optimalidad

$$\mathcal{L}[\hat{u}, \hat{g}, \lambda_0, \lambda] = \min_{g \in \Theta} \mathcal{L}[\hat{u}, g, \lambda_0, \lambda] \Rightarrow \mathcal{L}_g[\hat{u}, \hat{g}, \lambda_0, \lambda](g - \hat{g}) \geq 0 \quad \forall g \in \Theta.$$

Una condición suficiente de segundo orden para un mínimo

Los siguientes resultados permiten establecer una condición suficiente para la existencia de un punto de mínimo local para el problema (1.59).

Teorema 1.48 (Teorema de Ljusternik, [33]) Sean Z, Y espacios de Banach, U una vecindad del punto $x_0 \in Z$ y $F : U \rightarrow Y$ una aplicación Fréchet diferenciable. Asumamos que F es regular en el punto x_0 y que su derivada es continua en el punto x_0 (en la topología del espacio de los operadores lineales y continuos de Z en Y , $\mathcal{L}(Z, Y)$). Entonces, el espacio tangente al conjunto

$$M = \{x \in U : F(x) = F(x_0)\}$$

en el punto x_0 coincide con el núcleo del operador $F_x(x_0)$, esto es,

$$TM(x_0) = \text{Ker } F_x(x_0),$$

donde $TM(x_0)$ es el espacio tangente al conjunto M en el punto x_0 .

Proposición 1.49 ([33]) Sea $\hat{s} = [\hat{u}, \hat{g}] \in \mathcal{S}_{ad}$ una solución admisible para el problema (1.59) y sean el funcional J y el operador F de clase C^2 en el punto \hat{s} . Además, asumamos que F es regular en el punto \hat{s} y que para un multiplicador de Lagrange $\lambda \in Y'$ el funcional de Lagrange asociado al problema (1.59) satisface las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_s[\hat{u}, \hat{g}, 1, \lambda] &= 0, \\ \mathcal{L}_{ss}[\hat{u}, \hat{g}, 1, \lambda](\xi, \xi) &\geq \alpha \|\xi\|_Z^2, \quad \xi \in \text{Ker } F_s[\hat{u}, \hat{g}], \quad \alpha > 0.\end{aligned}$$

Entonces, $[\hat{u}, \hat{g}]$ es un punto de mínimo local para el problema (1.59).

Capítulo 2

Ecuaciones de fluidos micropolares estacionarios con condiciones de borde no homogéneas: Existencia de soluciones

En este capítulo se estudia la existencia de soluciones débiles para las ecuaciones de fluidos micropolares estacionarios con condiciones de borde mixta sobre una parte del borde del dominio de flujo, incluyendo una condición de deslizamiento de tipo Navier para la velocidad de traslación del fluido y condición de Dirichlet sobre una parte del borde para la velocidad de microrotación.

2.1 Fluidos micropolares estacionarios con densidad constante con condiciones de borde tipo Navier

Sea el dominio de flujo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio acotado con frontera Γ suficientemente regular. Las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido micropolar viscoso e incompresible con densidad constante son dadas por:

$$-(\nu + \nu_r)\Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = 2\nu_r \text{rot } \mathbf{w} + \mathbf{f} \text{ en } \Omega, \quad (2.1)$$

$$-(c_a + c_d)\Delta \mathbf{w} - (c_0 + c_d - c_a)\nabla \text{div } \mathbf{w} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w} + 4\nu_r \mathbf{w} = 2\nu_r \text{rot } \mathbf{u} + \mathbf{g} \text{ en } \Omega, \quad (2.2)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega, \quad (2.3)$$

donde las funciones \mathbf{u} , p y \mathbf{w} denotan la velocidad traslacional, la presión hidrostática y la velocidad de microrotación del fluido; las funciones \mathbf{f} y \mathbf{g} representan fuerzas externas actuando sobre el fluido.

El borde Γ del dominio de flujo Ω es dividido en regiones simplemente conexas, de la forma $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, donde $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\Gamma_3 \cap \Gamma_4 = \emptyset$ y $\Gamma_2 = \Gamma_2^1 \cup \Gamma_2^2$ con $\Gamma_2^1 \cap \Gamma_2^2 = \emptyset$, la parte Γ_2^1 debe tener interior no vacío y la medida de Lebesgue de Γ_2^2 debe ser positiva. Además, Γ_1 y Γ_4 pueden coincidir o diferir, pero ambas deben tener interior no vacío.

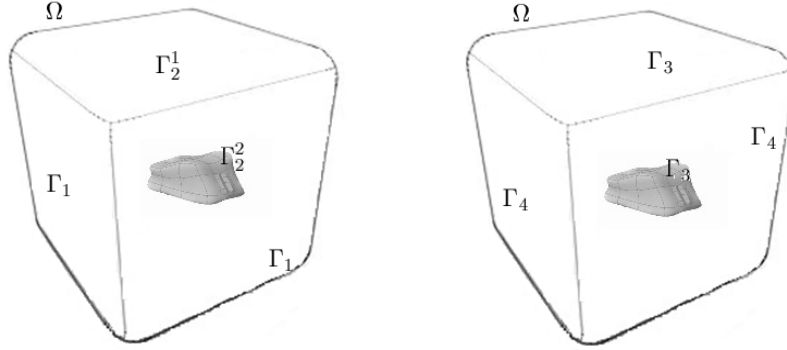


Fig. 1 Dominio Ω y su borde

Con las consideraciones sobre Γ , se asocia a las ecuaciones (2.1)-(2.3) las siguientes condiciones de borde:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}_1 \text{ sobre } \Gamma_1, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ sobre } \Gamma_2^1, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad [D(\mathbf{u})\mathbf{n} + \alpha\mathbf{u}]_{\text{tang}} = 0 \text{ sobre } \Gamma_2^2, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 \text{ sobre } \Gamma_3, \quad \mathbf{w} = \mathbf{g}_2 \text{ sobre } \Gamma_4, \quad (2.6)$$

donde \mathbf{n} es el vector normal exterior a Γ , la constante $\alpha \geq 0$ representa el coeficiente de fricción que mide la tendencia del fluido a deslizarse sobre Γ_2^2 , $[D(\mathbf{u})\mathbf{n} + \alpha\mathbf{u}]_{\text{tang}} := D(\mathbf{u})\mathbf{n} + \alpha\mathbf{u} - [(D(\mathbf{u})\mathbf{n} + \alpha\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}]\mathbf{n}$ representa la componente tangencial del vector $D(\mathbf{u})\mathbf{n} + \alpha\mathbf{u}$, donde $D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u})$ es el tensor de deformación. La condición (2.5) corresponde a la condición de fricción de tipo Navier sobre Γ_2^2 , la cual fue propuesta por Navier en [49] y establece que la componente tangencial de la tensión viscosa sobre la frontera es proporcional a la velocidad tangencial. La condición (2.5) también fue derivada por Maxwell en [46] a partir de la teoría cinética de los gases y rigurosamente justificada como una homogenización de la condición de no deslizamiento sobre una frontera áspera (ver [34]). Estudios realizados sobre existencia de soluciones débiles para ecuaciones de Navier-Stokes con condición de fricción de tipo navier pueden ser encontrados en [4], [16], [13], [38]; para ecuaciones de fluidos micropolares, con este tipo de condición, no se conocen resultados.

Con las notaciones dadas y los espacios definidos en el Capítulo 1, se consideran los siguientes espacios de divergencia nula: El espacio

$$\mathbf{H}_\sigma^1 = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega, \text{ y } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_2^2\},$$

dotado con la norma usual de $\mathbf{H}^1(\Omega)$. El espacio de Hilbert

$$\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1 = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\sigma^1 : \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma \setminus \Gamma_2^2\},$$

con producto interno $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} = (D(\mathbf{u}), D(\mathbf{v}))$ y norma $\|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} := \|D(\mathbf{u})\|$. El espacio dual de $\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1$ es denotado por \mathbf{H}'_σ .

Se definen los espacios producto $\mathbb{H} = \mathbf{H}'_\sigma \times \mathbf{H}^1(\Omega)$, $\mathbb{X} = \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1 \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ con producto interno y normas usuales, esto es, $[[\mathbf{u}, \mathbf{w}], [\mathbf{v}, \mathbf{z}]]_{\mathbb{X}} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} + [\mathbf{w}, \mathbf{z}]_{\mathbf{H}_0^1}$ y $\|[\mathbf{u}, \mathbf{w}]\|_{\mathbb{X}}^2 = \|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}^2 + \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}_0^1}^2$. Además el espacio dual de \mathbb{X} es denotado por $\mathbb{X}' = \mathbf{H}'_\sigma \times \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ con norma $\|[\mathbf{f}, \mathbf{g}]\|_{\mathbb{X}'}^2 = \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}'_\sigma}^2 + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{H}^{-1}}^2$.

Si Γ_0 es un subconjunto conexo del borde Γ , la restricción de las funciones de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ a Γ_0 es definida por $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_0) = \{\mathbf{u}|_{\Gamma_0} : \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)\}$, y se considera los espacios

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_0) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Gamma_0) : \text{existe } \hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \text{ satisfaciendo } \hat{\mathbf{u}}|_{\Gamma \setminus \Gamma_0} = \mathbf{0}, \hat{\mathbf{u}}|_{\Gamma_0} = \mathbf{u}\}, \\ \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_0) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_0) : \int_{\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0\},\end{aligned}$$

con norma inducida por la norma de $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$. El dual de $\tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_0)$ es denotado por $\tilde{\mathbf{H}}_{00}^{-1/2}(\Gamma_0)$. Además, se verifica que $\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_0)$ es un subespacio cerrado de $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_0)$ y $\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_0) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Gamma_0)$ (ver [10], [11]). También, de la Observación 1.21 y del Lema 1.22, se tiene que las inmersiones $\tilde{\mathbf{H}}_{\sigma}^1 \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$, $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ y $\tilde{\mathbf{H}}_{\sigma}^1 \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Gamma)$ son compactas.

Observación 2.1 Si $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\sigma}^1$, $\mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_{\sigma}^1$, $\varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, entonces

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi, \mathbf{v}) = -(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \varphi). \quad (2.7)$$

En efecto,

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi, \mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} v_j dx = - \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \varphi_j \frac{\partial (v_j u_i)}{\partial x_i} dx + \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Gamma} \varphi_j (v_j u_i) n_i d\Gamma.$$

Como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre Γ_2^2 y $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sobre $\Gamma \setminus \Gamma_2^2$, se tiene

$$\sum_{i,j=1}^3 \int_{\Gamma} \varphi_j (v_j u_i) n_i d\Gamma = \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma} \varphi_j v_j \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma \setminus \Gamma_2^2} \varphi_j v_j \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0.$$

De las dos últimas igualdades se deduce

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi, \mathbf{v}) &= - \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \varphi_j \frac{\partial (v_j u_i)}{\partial x_i} dx = - \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \varphi_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} u_i dx - \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \varphi_j \frac{\partial u_i}{\partial x_i} v_j dx \\ &= - \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \varphi_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} u_i dx - \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \varphi_j v_j \operatorname{div} \mathbf{u} dx = -(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \varphi).\end{aligned}$$

2.1.1 Existencia y unicidad de solución débil

Para estudiar la existencia de una solución débil del sistema (2.1)-(2.6) es preciso obtener una formulación variacional (formulación débil) del problema, para lo cual usaremos el siguiente resultado.

Lema 2.2 ([13], [65]) Sean \mathbf{u} y \mathbf{v} dos campos de vectores con divergente nulo tal que $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ satisface la condición de fricción de Navier sobre el borde Γ y $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ es tangente al borde Γ . Entonces,

$$- \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx = 2 \int_{\Omega} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) dx - 2 \int_{\Gamma} [D(\mathbf{u})\mathbf{n}]_{\text{tang}} \cdot \mathbf{v} d\Gamma. \quad (2.8)$$

Observación 2.3 Como $\mathbf{u} = [\mathbf{u}]_{\text{tang}} + [\mathbf{u}]_n = [\mathbf{u}]_{\text{tang}} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$, entonces

$$[D(\mathbf{u})\mathbf{n} + \alpha\mathbf{u}]_{\text{tang}} = D(\mathbf{u})\mathbf{n} + \alpha\mathbf{u} - [(D(\mathbf{u})\mathbf{n} + \alpha\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}]\mathbf{n} = [D(\mathbf{u})\mathbf{n}]_{\text{tang}} + \alpha\mathbf{u} - \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}.$$

Así, de (2.5), siendo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre Γ_2^2 , se obtiene que

$$[D(\mathbf{u})\mathbf{n}]_{\text{tang}} = -\alpha\mathbf{u} \text{ sobre } \Gamma_2^2.$$

Para $\mathbf{f} \in \mathbf{H}'_\sigma(\Omega)$, haciendo el producto interno de (2.1) con una función $\mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1$, se tiene

$$-(\nu + \nu_r)(\Delta\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\nabla p, \mathbf{v}) = 2\nu_r(\text{rot } \mathbf{w}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma}. \quad (2.9)$$

Como $\mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1$ de (2.8) se deduce que

$$-(\nu + \nu_r)(\Delta\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2(\nu + \nu_r) \int_\Omega D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \, dx - 2(\nu + \nu_r) \int_{\Gamma_2^2} [D(\mathbf{u})\mathbf{n}]_{\text{tang}} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma,$$

y teniendo en cuenta Observación 2.3 se obtiene

$$-(\nu + \nu_r)(\Delta\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2(\nu + \nu_r)(D(\mathbf{u}), D(\mathbf{v})) + 2\alpha(\nu + \nu_r) \int_{\Gamma_2^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma.$$

Teniendo en cuenta (1.22) y (2.9), de la última igualdad se concluye

$$2(\nu + \nu_r)(D(\mathbf{u}), D(\mathbf{v})) + 2\alpha(\nu + \nu_r) \int_{\Gamma_2^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + (\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\nu_r(\text{rot } \mathbf{w}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma}. \quad (2.10)$$

Para $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, haciendo el producto interno de (2.2) con una función $\mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ y teniendo en cuenta (1.21), se obtiene

$$\begin{aligned} (c_a + c_d)(\nabla\mathbf{w}, \nabla\mathbf{z}) + (c_0 + c_d - c_a)(\text{div } \mathbf{w}, \text{div } \mathbf{z}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{w}, \mathbf{z}) + 4\nu_r(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \\ = 2\nu_r(\text{rot } \mathbf{u}, \mathbf{z}) + \langle \mathbf{g}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Por lo tanto, denotando $\nu_1 = \nu + \nu_r$, $\nu_2 = c_a + c_d$, $\nu_3 = c_0 + c_d - c_a$, de (2.10) y (2.11), se obtiene una **formulación débil** del problema (2.1)-(2.6): Hallar $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \in \mathbb{H}$ tal que

$$2\nu_1(D(\mathbf{u}), D(\mathbf{v})) + 2\alpha\nu_1 \int_{\Gamma_2^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + (\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\nu_r(\text{rot } \mathbf{w}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma}, \quad (2.12)$$

$$\nu_2(\nabla\mathbf{w}, \nabla\mathbf{z}) + \nu_3(\text{div } \mathbf{w}, \text{div } \mathbf{z}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{w}, \mathbf{z}) + 4\nu_r(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = 2\nu_r(\text{rot } \mathbf{u}, \mathbf{z}) + \langle \mathbf{g}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}}, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}g_1 \quad \text{sobre } \Gamma \setminus \Gamma_2^2, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}g_2 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (2.15)$$

para todo $[\mathbf{v}, \mathbf{z}] \in \mathbb{X}$ y donde

$$\mathbf{u}g_1 = \begin{cases} \mathbf{g}_1 & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \mathbf{u}_0 & \text{sobre } \Gamma_2^1, \end{cases} \quad \mathbf{w}g_2 = \begin{cases} \mathbf{w}_0 & \text{sobre } \Gamma_3, \\ \mathbf{g}_2 & \text{sobre } \Gamma_4. \end{cases}$$

A seguir se enuncia la definición de solución débil del problema (2.1)-(2.6).

Definición 2.4 (Solución débil) Sean $[\mathbf{f}, \mathbf{g}] \in \mathbb{X}'$, $\mathbf{g}_1 \in \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_1)$, $\mathbf{u}_0 \in \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_2^1)$, $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_3)$, $\mathbf{g}_2 \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_4)$. Una solución débil del sistema (2.1)-(2.6) es un par de funciones $[\mathbf{u}, \mathbf{w}] \in \mathbb{H}$ satisfaciendo (2.12)-(2.15).

Para probar la existencia de una solución débil para el sistema (2.1)-(2.6), el problema no homogéneo (2.12)-(2.15) (esto es, $\mathbf{u}_0 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{w}_0 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{g}_1 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{g}_2 \neq \mathbf{0}$) será reducido a un nuevo problema con condiciones de borde nulas en términos de nuevas variables $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{w}}$. Para este propósito, similar al Lema 1.40, se introduce el siguiente resultado.

Lema 2.5 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con borde $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2^1 \cup \Gamma_2^2$. Suponga que $\mathbf{g}_1 \in \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_1)$, $\mathbf{u}_0 \in \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_2^1)$. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\mathbf{u}^\varepsilon \in \mathbf{H}_\sigma^1$ con $\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{g}_1$ sobre Γ_1 , $\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{u}_0$ sobre Γ_2^1 y $\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{0}$ sobre Γ_2^2 , tal que

$$|(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v})| \leq \varepsilon \|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1. \quad (2.16)$$

Además, si $\Gamma = \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_3)$, $\mathbf{g}_2 \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_4)$, entonces existe $\mathbf{w}^e \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ tal que $\mathbf{w}^e = \mathbf{w}_0$ sobre Γ_3 , $\mathbf{w}^e = \mathbf{g}_2$ sobre Γ_4 , y la siguiente estimativa es satisfecha

$$\|\mathbf{w}^e\|_{\mathbf{H}^1} \leq C \|\mathbf{w} \mathbf{g}_2\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}, \quad (2.17)$$

donde C es una constante que depende sólo de n y el dominio Ω .

Demostración: Como $\mathbf{g}_1 \in \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_1)$, $\mathbf{u}_0 \in \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_2^1)$, existen $\hat{\mathbf{g}}_1 \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, $\hat{\mathbf{u}}_0 \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, tales que $\hat{\mathbf{g}}_1|_{\Gamma \setminus \Gamma_1} = \mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{g}}_1|_{\Gamma_1} = \mathbf{g}_1$, $\hat{\mathbf{u}}_0|_{\Gamma \setminus \Gamma_2^1} = \mathbf{0}$ y $\hat{\mathbf{u}}_0|_{\Gamma_2^1} = \mathbf{u}_0$. Así, $\hat{\mathbf{g}}_1 + \hat{\mathbf{u}}_0 \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ y $\int_\Gamma (\hat{\mathbf{g}}_1 + \hat{\mathbf{u}}_0) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0$. Entonces, por el Lema 1.40, existe $\mathbf{u}^\varepsilon \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ con $\mathbf{u}^\varepsilon = \hat{\mathbf{g}}_1 + \hat{\mathbf{u}}_0$ sobre Γ verificando (2.16). En particular, $\mathbf{u}^\varepsilon|_{\Gamma_1} = \mathbf{g}_1$, $\mathbf{u}^\varepsilon|_{\Gamma_2^1} = \mathbf{u}_0$ y $\mathbf{u}^\varepsilon|_{\Gamma_2^2} = \mathbf{0}$. La existencia de $\mathbf{w}^e \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ es una consecuencia de la Proposición 1.1. \diamond

Por la definición de las funciones $\mathbf{u} \mathbf{g}_1$, $\mathbf{w} \mathbf{g}_2$ y Lema 2.5, se tiene que existen funciones $\mathbf{u}^\varepsilon \in \mathbf{H}_\sigma^1$ y $\mathbf{w}^e \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ tales que $\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{u} \mathbf{g}_1$ sobre $\Gamma \setminus \Gamma_2^2$, $\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{0}$ sobre Γ_2^2 y $\mathbf{w}^e = \mathbf{w} \mathbf{g}_2$ sobre Γ , entonces si $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^\varepsilon$ y $\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{w} - \mathbf{w}^e$ se deduce que $[\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{w}}] \in \mathbb{X}$.

Reescribiendo las variables $[\mathbf{u}, \mathbf{w}] \in \mathbb{H}$ de (2.12)-(2.15) en la forma $\mathbf{u} = \mathbf{u}^\varepsilon + \hat{\mathbf{u}}$ y $\mathbf{w} = \mathbf{w}^e + \hat{\mathbf{w}}$ con $[\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{w}}] \in \mathbb{X}$ siendo nuevas funciones desconocidas, de (2.12)-(2.15) se obtiene el siguiente problema: Hallar $[\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{w}}] \in \mathbb{X}$ tal que

$$\begin{aligned} & 2\nu_1(D(\hat{\mathbf{u}}), D(\mathbf{v})) + 2\alpha\nu_1 \int_{\Gamma_2^2} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \\ & = 2\nu_r(\text{rot } \hat{\mathbf{w}}, \mathbf{v}) + \langle \hat{\mathbf{f}}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}_\sigma'}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} & \nu_2(\nabla \hat{\mathbf{w}}, \nabla \mathbf{z}) + \nu_3(\text{div } \hat{\mathbf{w}}, \text{div } \mathbf{z}) + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{w}}, \mathbf{z}) + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{w}^e, \mathbf{z}) + (\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla \hat{\mathbf{w}}, \mathbf{z}) + 4\nu_r(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{z}) \\ & = 2\nu_r(\text{rot } \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{z}) + \langle \hat{\mathbf{g}}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

para todo $[\mathbf{v}, \mathbf{z}] \in \mathbb{X}$, donde

$$\langle \hat{\mathbf{f}}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}_\sigma'} = \langle \nu_1 \Delta \mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{u}^\varepsilon + 2\nu_r \text{rot } \mathbf{w}^e + \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}_\sigma'}, \quad (2.20)$$

$$\langle \hat{\mathbf{g}}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}} = \langle \nu_2 \Delta \mathbf{w}^e + \nu_3 \nabla \text{div } \mathbf{w}^e - \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{w}^e - 4\nu_r \mathbf{w}^e + 2\nu_r \text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon + \mathbf{g}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}}. \quad (2.21)$$

Observar que $[\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{g}}] \in \mathbb{X}'$. En efecto, aplicando la desigualdad de Hölder y teniendo en cuenta las desigualdades (1.19), (1.30) y (1.33), de (2.20) se tiene

$$\begin{aligned} |\langle \hat{\mathbf{f}}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma}| &\leq \nu_1 \|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\| \|\nabla \mathbf{v}\| + \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_3 \|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\| \|\mathbf{v}\|_6 + 2\nu_r \|\operatorname{rot} \mathbf{w}^\varepsilon\| \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}'_\sigma} \|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}^1_\sigma} \\ &\leq \nu_1 \tilde{C} \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1_\sigma} \|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}^1_\sigma} + C \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1_\sigma}^2 \|\nabla \mathbf{v}\| + 2\sqrt{2}\nu_r C \|\nabla \mathbf{w}^\varepsilon\| \|\mathbf{v}\|_6 + \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}'_\sigma} \|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}^1_\sigma} \\ &\leq (\nu_1 \tilde{C} \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1_\sigma} + C \tilde{C} \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1_\sigma}^2 + 2\sqrt{2}\nu_r C \tilde{C} \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1} + \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}'_\sigma}) \|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}^1_\sigma}, \end{aligned}$$

y entonces se obtiene

$$\|\hat{\mathbf{f}}\|_{\mathbf{H}'_\sigma} = \sup_{\|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}^1_\sigma} \leq 1} |\langle \hat{\mathbf{f}}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma}| \leq \nu_1 \tilde{C} \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1_\sigma} + C \tilde{C} \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1_\sigma}^2 + 2\sqrt{2}\nu_r C \tilde{C} \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1} + \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}'_\sigma}. \quad (2.22)$$

Análogamente, usando la desigualdad de Hölder y las desigualdades (1.19), (1.30), (1.33), de (2.21) se tiene

$$\begin{aligned} |\langle \hat{\mathbf{g}}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}}| &\leq \nu_2 \|\nabla \mathbf{w}^\varepsilon\| \|\nabla \mathbf{z}\| + \nu_3 \|\operatorname{div} \mathbf{w}^\varepsilon\| \|\operatorname{div} \mathbf{z}\| + \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_3 \|\nabla \mathbf{w}^\varepsilon\| \|\mathbf{z}\|_6 \\ &\quad + 4\nu_r \|\mathbf{w}^\varepsilon\| \|\mathbf{z}\| + 2\nu_r \|\operatorname{rot} \mathbf{u}^\varepsilon\| \|\mathbf{z}\| + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{H}^{-1}} \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}^1_0} \\ &\leq \nu_2 \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1} \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}^1_0} + \nu_3 \|\nabla \mathbf{w}^\varepsilon\| \|\nabla \mathbf{z}\| + C \|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\| \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1} \|\nabla \mathbf{z}\| \\ &\quad + 4\nu_r C \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1} \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}^1_0} + 2\sqrt{2}\nu_r C \|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\| \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}^1_0} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{H}^{-1}} \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}^1_0} \\ &\leq (\nu_2 + \nu_3 + 4\nu_r C) \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1} \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}^1_0} + C (\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1_\sigma}^2 + \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1}^2) \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}^1_0} \\ &\quad + (2\sqrt{2}\nu_r C \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1_\sigma} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{H}^{-1}}) \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}^1_0}, \end{aligned}$$

y como $\|\hat{\mathbf{g}}\|_{\mathbf{H}^{-1}} = \sup_{\|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}^1_0} \leq 1} |\langle \hat{\mathbf{g}}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}}|$, se obtiene

$$\|\hat{\mathbf{g}}\|_{\mathbf{H}^{-1}} \leq (\nu_2 + \nu_3 + 4\nu_r C) \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1} + C (\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1_\sigma}^2 + \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1}^2) + 2\sqrt{2}\nu_r C \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1_\sigma} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{H}^{-1}}. \quad (2.23)$$

Sumando las desigualdades (2.22) y (2.23), y usando la desigualdad $ab \leq a^2 + b^2$, se obtiene

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{f}}\|_{\mathbf{H}'_\sigma} + \|\hat{\mathbf{g}}\|_{\mathbf{H}^{-1}} &\leq (\nu_1 \tilde{C} + 2\sqrt{2}\nu_r C) \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1_\sigma} + (2\sqrt{2}\nu_r C \tilde{C} + \nu_2 + \nu_3 + 4\nu_r C) \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1} \\ &\quad + (C \tilde{C} + C) \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1_\sigma}^2 + C \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1}^2 + \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}'_\sigma} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{H}^{-1}}, \end{aligned}$$

y entonces considerando la desigualdad $(|a|^2 + |b|^2)^{1/2} \leq |a| + |b| \leq \sqrt{2}(|a|^2 + |b|^2)^{1/2}$, se deduce

$$\begin{aligned} \|[\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{g}}]\|_{\mathbb{X}'} &\leq \|\hat{\mathbf{f}}\|_{\mathbf{H}'_\sigma} + \|\hat{\mathbf{g}}\|_{\mathbf{H}^{-1}} \\ &\leq (\nu_1 \tilde{C} + 2\sqrt{2}\nu_r C) \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1_\sigma} + (2\sqrt{2}\nu_r C \tilde{C} + \nu_2 + \nu_3 + 4\nu_r C) \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1} \\ &\quad + (C \tilde{C} + C) \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1_\sigma}^2 + C \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1}^2 + \sqrt{2} \|[\mathbf{f}, \mathbf{g}]\|_{\mathbb{X}'}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ahora, de (1.2) y (2.17) se tiene que $\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1_\sigma} \leq C \|\mathbf{u} \mathbf{g}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma^2_\sigma)}$ y $\|\mathbf{w}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1} \leq C \|\mathbf{w} \mathbf{g}_2\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}$; por lo tanto de (2.24) se concluye que

$$\|[\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{g}}]\|_{\mathbb{X}'} \leq C (\|\mathbf{u} \mathbf{g}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma^2_\sigma)} + \|\mathbf{w} \mathbf{g}_2\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{u} \mathbf{g}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma^2_\sigma)}^2 + \|\mathbf{w} \mathbf{g}_2\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|[\mathbf{f}, \mathbf{g}]\|_{\mathbb{X}'}), \quad (2.25)$$

donde C es una constante positiva que depende de $\Omega, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \tilde{C}$.

Para el problema (2.18)-(2.19) se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.6 Sean $[\mathbf{f}, \mathbf{g}] \in \mathbb{X}'$, $\mathbf{g}_1 \in \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_1)$, $\mathbf{u}_0 \in \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_2^1)$, $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_3)$, $\mathbf{g}_2 \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_4)$. Si ν y ν_2 son suficientemente grandes, entonces existe una solución $[\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{w}}] \in \mathbb{X}$ del problema (2.18)-(2.19).

Demostración: La existencia de solución es probada usando el método de Galerkin. Sean $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{\mathbf{z}_i\}_{i=1}^{\infty}$ bases de $\tilde{\mathbf{H}}_{\sigma}^1$ y $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, respectivamente. Para cada $k \in \mathbb{N}$ considerar $\tilde{\mathbf{H}}_k$ el subespacio de $\tilde{\mathbf{H}}_{\sigma}^1$ generado por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ y \mathbf{H}_k el subespacio de $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ generado por $\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k\}$; se denota por $\mathbb{X}_k = \tilde{\mathbf{H}}_k \times \mathbf{H}_k \subseteq \mathbb{X}$. El producto escalar para \mathbb{X}_k es el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ inducido por \mathbb{X} . Para cada $k \in \mathbb{N}$ se define una solución aproximada $[\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k] \in \mathbb{X}_k$ de (2.18)-(2.19), dada por

$$\mathbf{u}_k(x) = \sum_{i=1}^k \xi_{i,k} \mathbf{v}_i(x), \quad \mathbf{w}_k(x) = \sum_{i=1}^k \theta_{i,k} \mathbf{z}_i(x), \quad \xi_{i,k}, \theta_{i,k} \in \mathbb{R}$$

satisfaciendo

$$\begin{aligned} & 2\nu_1(D(\mathbf{u}_k), D(\mathbf{v})) + 2\alpha\nu_1 \int_{\Gamma_2^2} \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + (\mathbf{u}_k \cdot \nabla \mathbf{u}_k, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}_k \cdot \nabla \mathbf{u}^{\varepsilon}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}^{\varepsilon} \cdot \nabla \mathbf{u}_k, \mathbf{v}) \\ & = 2\nu_r(\text{rot } \mathbf{w}_k, \mathbf{v}) + \langle \hat{\mathbf{f}}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_{\sigma}} \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_k, \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} & \nu_2(\nabla \mathbf{w}_k, \nabla \mathbf{z}) + \nu_3(\text{div } \mathbf{w}_k, \text{div } \mathbf{z}) + (\mathbf{u}_k \cdot \nabla \mathbf{w}_k, \mathbf{z}) + (\mathbf{u}_k \cdot \nabla \mathbf{w}^e, \mathbf{z}) + (\mathbf{u}^{\varepsilon} \cdot \nabla \mathbf{w}_k, \mathbf{z}) + 4\nu_r(\mathbf{w}_k, \mathbf{z}) \\ & = 2\nu_r(\text{rot } \mathbf{u}_k, \mathbf{z}) + \langle \hat{\mathbf{g}}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}} \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}_k. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Observando el Lema 1.5, considerar la aplicación continua $P_k : \mathbb{X}_k \rightarrow \mathbb{X}_k$ dada por

$$\begin{aligned} \langle P_k[\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k], [\mathbf{v}, \mathbf{z}] \rangle & = 2\nu_1(D(\mathbf{u}_k), D(\mathbf{v})) + 2\alpha\nu_1 \int_{\Gamma_2^2} \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + (\mathbf{u}_k \cdot \nabla \mathbf{u}_k, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}_k \cdot \nabla \mathbf{u}^{\varepsilon}, \mathbf{v}) \\ & + (\mathbf{u}^{\varepsilon} \cdot \nabla \mathbf{u}_k, \mathbf{v}) - 2\nu_r(\text{rot } \mathbf{w}_k, \mathbf{v}) - \langle \hat{\mathbf{f}}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_{\sigma}} + \nu_2(\nabla \mathbf{w}_k, \nabla \mathbf{z}) \\ & + \nu_3(\text{div } \mathbf{w}_k, \text{div } \mathbf{z}) + (\mathbf{u}_k \cdot \nabla \mathbf{w}_k, \mathbf{z}) + (\mathbf{u}_k \cdot \nabla \mathbf{w}^e, \mathbf{z}) + (\mathbf{u}^{\varepsilon} \cdot \nabla \mathbf{w}_k, \mathbf{z}) \\ & + 4\nu_r(\mathbf{w}_k, \mathbf{z}) - 2\nu_r(\text{rot } \mathbf{u}_k, \mathbf{z}) - \langle \hat{\mathbf{g}}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

para todo $[\mathbf{v}, \mathbf{z}] \in \mathbb{X}_k$.

Haciendo $[\mathbf{v}, \mathbf{z}] = [\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k]$ en (2.28), y observando que $(\text{rot } \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_k) = (\text{rot } \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k)$ y $\nu_1 = \nu + \nu_r$, se obtiene

$$\begin{aligned} \langle P_k[\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k], [\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k] \rangle & \geq 2(\nu + \nu_r) \|\mathbf{u}_k\|_{\tilde{\mathbf{H}}_{\sigma}^1}^2 + (\mathbf{u}_k \cdot \nabla \mathbf{u}^{\varepsilon}, \mathbf{u}_k) + \nu_2 \|\mathbf{w}_k\|_{\mathbf{H}_0^1}^2 + (\mathbf{u}_k \cdot \nabla \mathbf{w}^e, \mathbf{w}_k) \\ & + 4\nu_r \|\mathbf{w}_k\|^2 - 4\nu_r(\text{rot } \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k) - \langle \hat{\mathbf{f}}, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbf{H}'_{\sigma}} - \langle \hat{\mathbf{g}}, \mathbf{w}_k \rangle_{\mathbf{H}^{-1}}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

A seguir se acotan los términos del lado derecho de (2.29). Teniendo en cuenta las desigualdades (1.30), (1.33) y aplicando la desigualdad de Hölder, se tiene

$$|(\mathbf{u}_k \cdot \nabla \mathbf{w}^e, \mathbf{w}_k)| \leq \|\mathbf{u}_k\|_3 \|\nabla \mathbf{w}^e\| \|\mathbf{w}_k\|_6 \leq C\tilde{C} \|\mathbf{u}_k\|_{\tilde{\mathbf{H}}_{\sigma}^1} \|\mathbf{w}^e\|_{\mathbf{H}^1} \|\mathbf{w}_k\|_{\mathbf{H}_0^1},$$

y observando que $\|\mathbf{u}_k\|_{\tilde{\mathbf{H}}_{\sigma}^1} \|\mathbf{w}_k\|_{\mathbf{H}_0^1} \leq \|[\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k]\|_{\mathbb{X}_k}^2$ se obtiene

$$|(\mathbf{u}_k \cdot \nabla \mathbf{w}^e, \mathbf{w}_k)| \leq C\tilde{C} \|\mathbf{w}^e\|_{\mathbf{H}^1} \|[\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k]\|_{\mathbb{X}_k}^2. \quad (2.30)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} |\langle \hat{\mathbf{f}}, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbf{H}'_{\sigma}} + \langle \hat{\mathbf{g}}, \mathbf{w}_k \rangle_{\mathbf{H}^{-1}}| & \leq \|\hat{\mathbf{f}}\|_{\mathbf{H}'_{\sigma}} \|\mathbf{u}_k\|_{\tilde{\mathbf{H}}_{\sigma}^1} + \|\hat{\mathbf{g}}\|_{\mathbf{H}^{-1}} \|\mathbf{w}_k\|_{\mathbf{H}_0^1} \\ & \leq (\|\hat{\mathbf{f}}\|_{\mathbf{H}'_{\sigma}} + \|\hat{\mathbf{g}}\|_{\mathbf{H}^{-1}}) \|[\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k]\|_{\mathbb{X}_k} \\ & \leq \sqrt{2} \|\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{g}}\|_{\mathbb{X}'} \|[\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k]\|_{\mathbb{X}_k}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Teniendo en cuenta (1.19) y aplicando las desigualdades de Hölder y Young, se obtiene

$$4\nu_r |(\operatorname{rot} \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k)| \leq 4\nu_r \|\operatorname{rot} \mathbf{u}_k\| \|\mathbf{w}_k\| \leq 2\nu_r \tilde{C}^2 \|\mathbf{u}_k\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}^2 + 4\nu_r \|\mathbf{w}_k\|^2. \quad (2.32)$$

Por lo tanto, usando (2.16), (2.17) y las desigualdades (2.30)-(2.32), de (2.29) se tiene

$$\begin{aligned} \langle P_k[\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k], [\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k] \rangle &\geq (2(\nu + \nu_r) - \varepsilon - 2\nu_r \tilde{C}^2) \|\mathbf{u}_k\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}^2 + \nu_2 \|\mathbf{w}_k\|_{\mathbf{H}_0^1}^2 \\ &\quad - C\tilde{C} \|\mathbf{w}^e\|_{\mathbf{H}^1} \|[\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k]\|_{\mathbb{X}_k}^2 - \sqrt{2} \|[\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{g}}]\|_{\mathbb{X}'} \|[\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k]\|_{\mathbb{X}_k} \\ &\geq \min\{2(\nu + \nu_r) - \varepsilon - 2\nu_r \tilde{C}^2, \nu_2\} \|[\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k]\|_{\mathbb{X}_k}^2 \\ &\quad - C\tilde{C} \|\mathbf{w}_{g_2}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \|[\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k]\|_{\mathbb{X}_k}^2 \\ &\quad - \sqrt{2} \|[\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{g}}]\|_{\mathbb{X}'} \|[\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k]\|_{\mathbb{X}_k} \\ &\geq \|[\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k]\|_{\mathbb{X}_k} \left[\gamma \|[\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k]\|_{\mathbb{X}_k} - \sqrt{2} \|[\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{g}}]\|_{\mathbb{X}'} \right], \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde

$$\gamma = \min\{2(\nu + \nu_r) - \varepsilon - 2\nu_r \tilde{C}^2, \nu_2\} - C\tilde{C} \|\mathbf{w}_{g_2}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \quad (2.34)$$

la constante \tilde{C} y C_7 es dada en (1.33).

Sea ε suficientemente pequeño y ν , ν_2 suficientemente grandes, tales que $\gamma > 0$. Entonces, para $\|[\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k]\|_{\mathbb{X}_k} = M$, de (2.33) se sigue que

$$\langle P_k[\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k], [\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k] \rangle \geq M(\gamma M - \sqrt{2} \|[\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{g}}]\|_{\mathbb{X}'}) > 0,$$

desde que γ sea suficientemente grande tal que $M > \frac{\sqrt{2}}{\gamma} \|[\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{g}}]\|_{\mathbb{X}'}$.

Por lo tanto, aplicando el Lema 1.5, existe $[\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k] \in \mathbb{X}_k$ tal que

$$\|[\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k]\|_{\mathbb{X}_k} \leq M \text{ y } \langle P_k[\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k], [\mathbf{v}, \mathbf{z}] \rangle = 0 \quad \forall [\mathbf{v}, \mathbf{z}] \in \mathbb{X}_k. \quad (2.35)$$

Además, dado que $[\mathbf{v}, \mathbf{0}], [\mathbf{0}, \mathbf{z}] \in \mathbb{X}_k$, de (2.35) y (2.28) se concluye que $[\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k]$ es solución de (2.26)-(2.27).

Paso al límite

Puesto que $\langle P_k[\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k], [\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k] \rangle = 0$, entonces desde (2.33) se obtiene que

$$\|[\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k]\|_{\mathbb{X}_k} \leq \frac{\sqrt{2}}{\gamma} \|[\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{g}}]\|_{\mathbb{X}'}. \quad (2.36)$$

Así, de (2.36) se concluye que la sucesión $\{[\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k]\}_{k \geq 1}$ es acotada en \mathbb{X} , entonces existe una sub-sucesión $\{[\mathbf{u}_{k_m}, \mathbf{w}_{k_m}]\}_{m \geq 1}$ y un elemento $[\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{w}}] \in \mathbb{X}$, tal que

$$\mathbf{u}_{k_m} \rightarrow \hat{\mathbf{u}} \text{ débilmente en } \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1, \quad \mathbf{w}_{k_m} \rightarrow \hat{\mathbf{w}} \text{ débilmente en } \mathbf{H}_0^1(\Omega). \quad (2.37)$$

Además, como las inmersiones $\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1 \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$, $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ y $\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1 \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Gamma)$ son compactas, se tienen las convergencias

$$\mathbf{u}_{k_m} \rightarrow \hat{\mathbf{u}} \text{ fuertemente en } \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ y fuertemente en } \mathbf{L}^2(\Gamma), \quad (2.38)$$

$$\mathbf{w}_{k_m} \rightarrow \hat{\mathbf{w}} \text{ fuertemente en } \mathbf{L}^2(\Omega). \quad (2.39)$$

De (2.37) se obtienen las siguientes convergencias:

$$\begin{aligned}
2\nu_1(D(\mathbf{u}_{k_m}), D(\mathbf{v})) - 2\nu_r(\text{rot } \mathbf{w}_{k_m}, \mathbf{v}) &\rightarrow 2\nu_1(D(\mathbf{u}), D(\mathbf{v})) - 2\nu_r(\text{rot } \hat{\mathbf{w}}, \mathbf{v}), \\
(\mathbf{u}_{k_m} \cdot \nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{u}_{k_m}, \mathbf{v}) &\rightarrow (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}), \\
\nu_2(\nabla \mathbf{w}_{k_m}, \nabla \mathbf{z}) + \nu_3(\text{div } \mathbf{w}_{k_m}, \text{div } \mathbf{z}) &\rightarrow \nu_2(\nabla \hat{\mathbf{w}}, \nabla \mathbf{z}) + \nu_3(\text{div } \hat{\mathbf{w}}, \text{div } \mathbf{z}), \\
(\mathbf{u}_{k_m} \cdot \nabla \mathbf{w}^e, \mathbf{z}) + (\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{w}_{k_m}, \mathbf{z}) &\rightarrow (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{w}^e, \mathbf{z}) + (\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla \hat{\mathbf{w}}, \mathbf{z}), \\
2\nu_r(\text{rot } \mathbf{u}_{k_m}, \mathbf{z}) &\rightarrow 2\nu_r(\text{rot } \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{z}),
\end{aligned} \tag{2.40}$$

para todo $[\mathbf{v}, \mathbf{z}] \in \mathbb{X}$. Además, combinando los resultados obtenidos en (2.37) y (2.38)-(2.39), se obtiene

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}_{k_m} \cdot \nabla \mathbf{u}_{k_m}, \mathbf{v}) + 2\alpha\nu_1 \int_{\Gamma_2^2} \mathbf{u}_{k_m} \cdot \mathbf{v} d\Gamma &\rightarrow (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + 2\alpha\nu_1 \int_{\Gamma_2^2} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} d\Gamma, \\
(\mathbf{u}_{k_m} \cdot \nabla \mathbf{w}_{k_m}, \mathbf{z}) &\rightarrow (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{w}}, \mathbf{z}).
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Por lo tanto, de (2.40)-(2.41) y (2.26)-(2.27), se concluye que $[\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{w}}]$ es una solución del sistema (2.18)-(2.19). Además, desde (2.36) se deduce que

$$\|[\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{w}}]\|_{\mathbb{X}} \leq \frac{\sqrt{2}}{\gamma} \|[\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{g}}]\|_{\mathbb{X}'}. \tag{2.42}$$

◇

Para el problema no homogéneo (2.12)-(2.15) se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.7 (*Existencia de solución*) *Bajo las hipótesis del Teorema 2.6, existe una solución $[\mathbf{u}, \mathbf{w}] \in \mathbb{H}$ para el sistema (2.12)-(2.15). Además, la siguiente estimativa es satisfecha*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_0^1} + \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^1} \leq \Theta, \tag{2.43}$$

donde $\Theta = C_0(\|\mathbf{u}\mathbf{g}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_2^2)} + \|\mathbf{u}\mathbf{g}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_2^2)}^2 + \|\mathbf{w}\mathbf{g}_2\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{w}\mathbf{g}_2\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|[\mathbf{f}, \mathbf{g}]\|_{\mathbb{X}'})$ con C_0 constante positiva que depende de Ω , ν_1 , ν_2 , ν_3 y γ definida en (2.34).

Demostración:

Como una consecuencia del Teorema 2.6, se tiene que existe una solución $[\mathbf{u}, \mathbf{w}] \in \mathbb{H}$ para el sistema (2.12)-(2.15) donde

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \quad \mathbf{w} = \hat{\mathbf{w}} + \mathbf{w}^e, \tag{2.44}$$

con $[\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{w}}] \in \mathbb{X}$ solución de (2.18)-(2.19) dada por el Teorema 2.6.

De (2.44), la desigualdad triangular, la desigualdad $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ y (2.42), se tiene

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_0^1} + \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^1} &\leq \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\hat{\mathbf{H}}_0^1} + \|\hat{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{H}_0^1} + \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_0^1} + \|\mathbf{w}^e\|_{\mathbf{H}^1} \\
&\leq \sqrt{2}\|[\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{w}}]\|_{\mathbb{X}} + \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_0^1} + \|\mathbf{w}^e\|_{\mathbf{H}^1} \leq \frac{2}{\gamma} \|[\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{g}}]\|_{\mathbb{X}'} + \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_0^1} + \|\mathbf{w}^e\|_{\mathbf{H}^1},
\end{aligned}$$

y entonces, teniendo en cuenta (1.2), (2.17) y (2.25), se obtiene

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_0^1} + \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^1} &\leq \frac{2}{\gamma} \|[\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{g}}]\|_{\mathbb{X}'} + C\|\mathbf{u}\mathbf{g}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_2^2)} + C\|\mathbf{w}\mathbf{g}_2\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \\
&\leq \frac{2}{\gamma} C(\|\mathbf{u}\mathbf{g}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_2^2)} + \|\mathbf{w}\mathbf{g}_2\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{u}\mathbf{g}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_2^2)}^2 \\
&\quad + \|\mathbf{w}\mathbf{g}_2\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|[\mathbf{f}, \mathbf{g}]\|_{\mathbb{X}'}) + C\|\mathbf{u}\mathbf{g}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_2^2)} + C\|\mathbf{w}\mathbf{g}_2\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \\
&\leq C_0(\|\mathbf{u}\mathbf{g}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_2^2)} + \|\mathbf{w}\mathbf{g}_2\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{u}\mathbf{g}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_2^2)}^2 \\
&\quad + \|\mathbf{w}\mathbf{g}_2\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|[\mathbf{f}, \mathbf{g}]\|_{\mathbb{X}'}),
\end{aligned}$$

desde donde se sigue (2.43). \diamond

Teorema 2.8 (Unicidad) Sea Θ definida como en (2.43) y ν, ν_2 suficientemente grandes tales que

$$\kappa > C\Theta, \quad (2.45)$$

donde $\kappa = \min\{2(\nu + \nu_r) - 2\nu_r\tilde{C}^2, \nu_2\} > 0$ y \tilde{C} es la constante definida en (1.33). Entonces, la solución dada por el Teorema 2.7 es única.

Demostración: Sean $[\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1]$ y $[\mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2] \in \mathbb{H}$ dos soluciones de (2.12)-(2.15), entonces para $i = 1, 2$ y para todo $[\mathbf{v}, \mathbf{z}] \in \mathbb{X}$ se tiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 2\nu_1(D(\mathbf{u}_i), D(\mathbf{v})) + 2\alpha\nu_1 \int_{\Gamma_2^2} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{u}_i, \mathbf{v}) &= 2\nu_r(\text{rot } \mathbf{w}_i, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}_\sigma^1}, \\ \nu_2(\nabla \mathbf{w}_i, \nabla \mathbf{z}) + \nu_3(\text{div } \mathbf{w}_i, \text{div } \mathbf{z}) + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{w}_i, \mathbf{z}) + 4\nu_r(\mathbf{w}_i, \mathbf{z}) &= 2\nu_r(\text{rot } \mathbf{u}_i, \mathbf{z}) + \langle \mathbf{g}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}}, \\ \mathbf{u}_i &= \mathbf{u} \mathbf{g}_1 \quad \text{sobre } \Gamma \setminus \Gamma_2^2, \\ \mathbf{w}_i &= \mathbf{w} \mathbf{g}_2 \quad \text{sobre } \Gamma. \end{aligned}$$

Sustrayendo las ecuaciones anteriores y denotando $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} \in \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1$, $\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 = \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, se obtiene el siguiente sistema

$$2\nu_1(D(\mathbf{u}), D(\mathbf{v})) + 2\alpha\nu_1 \int_{\Gamma_2^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = 2\nu_r(\text{rot } \mathbf{w}, \mathbf{v}), \quad (2.46)$$

$$\nu_2(\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{z}) + \nu_3(\text{div } \mathbf{w}, \text{div } \mathbf{z}) + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{z}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}_2, \mathbf{z}) + 4\nu_r(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = 2\nu_r(\text{rot } \mathbf{u}, \mathbf{z}), \quad (2.47)$$

para todo $[\mathbf{v}, \mathbf{z}] \in \mathbb{X}$. Puesto que $[\mathbf{u}, \mathbf{w}] \in \mathbb{X}$, haciendo $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ y $\mathbf{z} = \mathbf{w}$ en (2.46)-(2.47), se tienen

$$\begin{aligned} 2\nu_1\|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}^2 + 2\alpha\nu_1\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_2^2)}^2 &= -(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_2, \mathbf{u}) + 2\nu_r(\text{rot } \mathbf{w}, \mathbf{u}), \\ \nu_2\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}_0^1}^2 + \nu_3\|\text{div } \mathbf{w}\|^2 + 4\nu_r\|\mathbf{w}\|^2 &= -(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}_2, \mathbf{w}) + 2\nu_r(\text{rot } \mathbf{u}, \mathbf{w}), \end{aligned}$$

las cuales implican

$$2\nu_1\|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}^2 + \nu_2\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}_0^1}^2 + 4\nu_r\|\mathbf{w}\|^2 \leq |(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_2, \mathbf{u})| + |(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}_2, \mathbf{w})| + 4\nu_r|(\text{rot } \mathbf{u}, \mathbf{w})|. \quad (2.48)$$

Para acotar los términos del lado derecho de (2.48), usando las desigualdades de Hölder y Young, así como también considerando (1.19), (1.30) y (1.33), se obtienen

$$\begin{aligned} 4\nu_r|(\text{rot } \mathbf{u}, \mathbf{w})| &\leq 4\sqrt{2}\nu_r\|\text{rot } \mathbf{u}\|\|\mathbf{w}\| \leq 4\sqrt{2}\|\nabla \mathbf{u}\|\|\mathbf{w}\| \\ &\leq 4\sqrt{2}\tilde{C}\|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}\|\mathbf{w}\| \leq 2\nu_r\tilde{C}^2\|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}^2 + 4\nu_r\|\mathbf{w}\|^2, \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} |(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}_2, \mathbf{w})| &\leq \|\mathbf{u}\|_3\|\nabla \mathbf{w}_2\|\|\mathbf{w}\|_6 \leq C\|\nabla \mathbf{u}\|\|\mathbf{w}_2\|_{\mathbf{H}^1}\|\nabla \mathbf{w}\| \\ &\leq C\tilde{C}\|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}\|\mathbf{w}_2\|_{\mathbf{H}^1}\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}_0^1} \leq C\|\mathbf{w}_2\|_{\mathbf{H}^1}(\|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}^2 + \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}_0^1}^2), \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$|(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_2, \mathbf{u})| \leq \|\mathbf{u}\|_3\|\nabla \mathbf{u}_2\|\|\mathbf{u}\|_6 \leq C\|\nabla \mathbf{u}\|^2\|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{H}_\sigma^1} \leq C\|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}^2\|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{H}_\sigma^1}. \quad (2.51)$$

Entonces, teniendo en cuenta (2.49) -(2.51), de (2.48) se deduce que

$$2\nu_1\|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}^2 + \nu_2\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}_0^1}^2 \leq [2\nu_r\tilde{C}^2 + C(\|\mathbf{w}_2\|_{\mathbf{H}^1} + \|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{H}_\sigma^1})]\|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}^2 + C\|\mathbf{w}_2\|_{\mathbf{H}^1}\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}_0^1}^2. \quad (2.52)$$

Como de (2.43) se tiene que $\|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{H}_\sigma^1} + \|\mathbf{w}_2\|_{\mathbf{H}^1} \leq \Theta$ y $\nu_1 = \nu + \nu_r$, entonces (2.52) implica

$$(2\nu_1 - 2\nu_r\tilde{C}^2 - C\Theta)\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1}^2 + (\nu_2 - C\Theta)\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}_0^1}^2 \leq 0.$$

Por lo tanto, observando la condición (2.45), la última desigualdad implica $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1} = 0$, $\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}_0^1} = 0$, esto es, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ y $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$, de donde se sigue la unicidad. \diamond

2.2 Fluidos micropolares estacionarios con densidad variable con condiciones de borde Dirichlet no homogéneas

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado con frontera Γ suficientemente regular. Las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido micropolar viscoso e incompresible con densidad variable son dadas por:

$$-(\mu + \mu_r)\Delta\mathbf{u} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = 2\mu_r \text{rot } w + \rho\mathbf{f} \text{ en } \Omega, \quad (2.53)$$

$$-(c_a + c_d)\Delta w + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)w + 4\mu_r w = 2\mu_r \text{rot } \mathbf{u} + \rho\mathbf{g} \text{ en } \Omega, \quad (2.54)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 \text{ en } \Omega, \quad (2.55)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega, \quad (2.56)$$

donde las funciones $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2$ y $w(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ denotan la velocidad de traslación y la velocidad de microrotación del fluido, $\rho(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ y $p(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ denotan la densidad y la presión hidrostática del fluido, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ son funciones dadas que representan fuerzas externas actuando sobre el fluido. La constante $\mu > 0$ es la viscosidad dinámica y las constantes positivas μ_r, c_a, c_d son viscosidades asociadas a las propiedades del material.

El borde Γ del dominio de flujo Ω es dividido en partes simplemente conexas de la forma $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, donde $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ y $\Gamma_2 \cap \Gamma_3 = \emptyset$, las partes Γ_1 y Γ_3 pueden coincidir o diferir, pero ambas deben tener interior no vacío.

Con las consideraciones sobre Γ , a las ecuaciones (2.53)-(2.56) se les asocia las siguientes condiciones de borde:

$$\rho = \rho_0 > 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \quad (2.57)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ sobre } \Gamma_0, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g}_1 \text{ sobre } \Gamma_1, \quad (2.58)$$

$$w = w_0 \text{ sobre } \Gamma_2, \quad w = g_2 \text{ sobre } \Gamma_3. \quad (2.59)$$

La parte Γ_0 del borde es un conjunto arco conexo cerrado sobre Γ con medida positiva, tal que

$$\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} > 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \quad \text{ó} \quad \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} < 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \quad (2.60)$$

donde \mathbf{n} es el vector normal exterior a Γ .

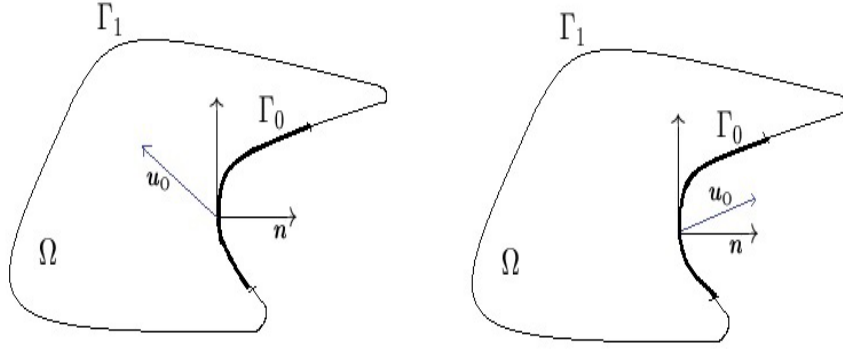


Fig. 2 Flujo hacia el interior - Flujo hacia el exterior

Con las notaciones dadas y espacios definidos en el Capítulo 1, se consideran los siguientes espacios de divergencia nula: El espacio

$$\mathbf{H}_\sigma = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ y } \int_\Gamma \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0\},$$

dotado con la norma de $\mathbf{H}^1(\Omega)$. El espacio de Hilbert

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega\} \subset \mathbf{H}_\sigma,$$

con producto interno $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{V}} = (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})$ y norma $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} := \|\nabla \mathbf{u}\|$. El espacio dual de \mathbf{V} es denotado por \mathbf{V}' .

La densidad del fluido ρ es definida en la forma $\rho = \eta(\psi)$, donde η es una función escalar determinada por \mathbf{u}_0 , ρ_0 y ψ es una función corriente, esto es $\operatorname{rot} \psi = \mathbf{u}$. Esta aproximación fue considerada en [21], [32] y [57] para el modelo no homogéneo de Navier-Stokes bidimensional. El caso tridimensional fue estudiado en [22]. Para fluidos micropolares esta aproximación para la densidad fue utilizada por Vitoriano en [66]. El autor probó, empleando el método de Galerkin, la existencia de soluciones débiles para el sistema (2.53)-(2.56), al cual le asoció condiciones de borde Dirichlet no nulas sin subdivisión de la frontera.

Nótese que toda función $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\sigma$ tiene $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, entonces existe una función escalar $\psi \in H^2(\Omega)$ tal que

$$\mathbf{u} = \operatorname{rot} \psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) \text{ en } \Omega, \quad \psi(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0, \quad (2.61)$$

donde \mathbf{x}_0 es el punto inicial de Γ_0 y $\Gamma_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ es la curva que une los puntos \mathbf{x}_0 y \mathbf{x} .

Considere el operador lineal $N : \mathbf{H}_\sigma \rightarrow H^2(\Omega)$ que a cada $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\sigma$ le asigna su función corriente $\psi = N\mathbf{u}$ con ψ satisfaciendo (2.61). Sea la función ψ_0 , definida por

$$\psi_0(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0.$$

Como $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_0)$, entonces $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_0)$, lo que implica que $\psi_0 \in \mathbf{H}^{3/2}(\Gamma_0) \subset C^0(\Gamma_0)$ y además por (2.60), ψ_0 es una función estrictamente monótona sobre Γ_0 . Por lo tanto, existe

$\psi_0^{-1} \in C^0(M)$, donde $M = \{\psi_0(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \Gamma_0\}$. Entonces, si se asume que

$$\rho_0 \in C^0(\Gamma_0), \quad 0 < \rho_0(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0, \quad \mathbf{u}_0 \in \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_0),$$

existe una función escalar η tal que

$$\eta \in C^0(\mathbb{R}), \quad \eta(\xi) > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \eta(\xi) = \rho_0(\psi_0^{-1}(\xi)) \quad \xi \in M. \quad (2.62)$$

Con las consideraciones anteriores la densidad ρ puede ser definida en la forma

$$\rho = \eta(\psi) = \eta(N\mathbf{u}), \quad \rho_0 = \eta(\psi_0).$$

Observación 2.9 Para $\mathbf{u} = \text{rot } \psi$ y $\rho = \eta(\psi)$ con $\eta \in C^1(\mathbb{R})$, de forma natural se satisface la ecuación (2.55). En efecto, se tiene que

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \rho = \text{rot } \psi \cdot (\eta'(\psi) \nabla \psi) = \eta'(\psi) (\text{rot } \psi \cdot \nabla \psi) = 0 \quad (2.63)$$

puesto que $\text{rot } \psi$ es ortogonal a $\nabla \psi$.

Observación 2.10 El operador $N : \mathbf{H}_\sigma \rightarrow H^2(\Omega)$ tal que $N\mathbf{u} = \psi$ con ψ satisfaciendo (2.61) es continuo. En efecto, sea el conjunto $H_\psi = \{\psi \in H^2(\Omega) : \psi \text{ satisface (2.61)}\}$ y el operador $\text{rot} : H_\psi \rightarrow \mathbf{H}_\sigma$. El operador rot es biyectivo: Si $\text{rot } \psi = 0$ entonces $\psi = c$ con c constante. Por (2.61) se tiene que $\psi(\mathbf{x}_0) = 0$, lo cual implica $\psi = 0$ y en consecuencia rot es inyectivo. Ahora, sea $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\sigma$, por definición del operador N se tiene que $N\mathbf{u} = \psi \in H^2(\Omega)$ con ψ satisfaciendo (2.61), esto es, para $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\sigma$ existe $\psi \in H_\psi$ tal que $\text{rot } \psi = \mathbf{u}$, lo que implica que rot es sobreyectivo.

Entonces, como rot es biyectivo, por el Teorema de la aplicación inversa de Banach el operador inverso $\text{rot}^{-1} = N$ es continuo.

2.2.1 Existencia de solución débil

Para estudiar la existencia de una solución débil del sistema (2.53)-(2.59), en primer lugar es preciso establecer una formulación débil del problema.

Considere los operadores:

$$\begin{aligned} A : \mathbf{H}_\sigma \rightarrow \mathbf{V}', \quad \tilde{A} : H^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega), \quad B : \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\sigma \rightarrow \mathbf{V}', \quad F : \mathbf{H}_\sigma \rightarrow \mathbf{V}', \\ \tilde{B} : \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\sigma \times H^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega), \quad G : \mathbf{H}_\sigma \rightarrow H^{-1}(\Omega), \end{aligned}$$

definidos por

$$\left. \begin{aligned} \langle A\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \rangle &= (\nabla \mathbf{u}, \nabla \boldsymbol{\varphi}) \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}, & \langle \tilde{A}w, z \rangle &= (\nabla w, \nabla z) \quad \forall z \in H_0^1(\Omega), \\ B(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{e}) &= \eta(N\mathbf{u})\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{e}, & F(\mathbf{u}) &= \eta(N\mathbf{u})\mathbf{f}, \\ \tilde{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, w) &= \eta(N\mathbf{u})\mathbf{v} \cdot \nabla w, & G(\mathbf{u}) &= \eta(N\mathbf{u})g. \end{aligned} \right\} \quad (2.64)$$

Observación 2.11 De (2.63) se tiene que $\text{div}(\eta(N\mathbf{u})\mathbf{u}) = \text{div}(\rho\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0$, entonces para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\sigma$ se satisface

$$(B(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_\sigma, \quad (\tilde{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, w), w) = 0 \quad \forall w \in H^1(\Omega). \quad (2.65)$$

Así, el problema (2.53)-(2.59) es equivalente a hallar $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\sigma$, $w \in H^1(\Omega)$ y $\rho = \eta(N\mathbf{u})$ tal que

$$(\mu + \mu_r)A\mathbf{u} + B(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \nabla p = 2\mu_r \text{rot } w + F(\mathbf{u}) \quad \text{en } \Omega, \quad (2.66)$$

$$(c_a + c_d)\tilde{A}w + \tilde{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, w) + 4\mu_r w = 2\mu_r \text{rot } \mathbf{u} + G(\mathbf{u}) \quad \text{en } \Omega, \quad (2.67)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathbf{g}_1}, \quad w = wg_2 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad \eta(N\mathbf{u}) = \rho_0 \quad \text{sobre } \Gamma_0. \quad (2.68)$$

Para $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, haciendo el producto interno de (2.66) con una función $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ y teniendo en cuenta la definición del operador A , se obtiene

$$(\mu + \mu_r)(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + \langle B(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = 2\mu_r(\text{rot } w, \mathbf{v}) + \langle F(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle. \quad (2.69)$$

Similarmente, para $g \in L^2(\Omega)$, haciendo el producto interno de (2.67) con $z \in H_0^1(\Omega)$ y teniendo en cuenta la definición de \tilde{A} , se tiene

$$(c_a + c_d)(\nabla w, \nabla z) + \langle \tilde{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, w), z \rangle + 4\mu_r(w, z) = 2\mu_r(\text{rot } \mathbf{u}, z) + \langle G(\mathbf{u}), z \rangle. \quad (2.70)$$

Por lo tanto, denotando $\mu_1 = \mu + \mu_r$, $\nu_2 = c_a + c_d$ y teniendo en cuenta (2.63), desde (2.69) y (2.70), se obtiene una formulación débil del problema (2.66)-(2.68): Dados $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Omega)$ hallar $[\mathbf{u}, w] \in \mathbf{H}_\sigma \times H^1(\Omega)$, $\rho = \eta(N\mathbf{u})$ tal que

$$\mu_1(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + \langle B(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = 2\mu_r(\text{rot } w, \mathbf{v}) + \langle F(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle, \quad (2.71)$$

$$\nu_2(\nabla w, \nabla z) + \langle \tilde{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, w), z \rangle + 4\mu_r(w, z) = 2\mu_r(\text{rot } \mathbf{u}, z) + \langle G(\mathbf{u}), z \rangle, \quad (2.72)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathbf{g}_1}, \quad w = wg_2 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (2.73)$$

$$\eta(N\mathbf{u}) = \rho_0 \quad \text{sobre } \Gamma_0, \quad (2.74)$$

para todo $[\mathbf{v}, z] \in \mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)$ y $\eta \in C^1(\mathbb{R})$, donde

$$\mathbf{u}_{\mathbf{g}_1} = \begin{cases} \mathbf{u}_0 & \text{sobre } \Gamma_0, \\ \mathbf{g}_1 & \text{sobre } \Gamma_1, \end{cases} \quad wg_2 = \begin{cases} w_0 & \text{sobre } \Gamma_2, \\ g_2 & \text{sobre } \Gamma_3. \end{cases}$$

A seguir se enuncia la definición de solución débil del problema (2.66)-(2.68).

Definición 2.12 (Solución débil) Sean $[\mathbf{f}, g] \in \mathbf{L}^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $\mathbf{u}_0 \in \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_0)$, $\mathbf{g}_1 \in \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_1)$, $w_0 \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)$, $g_2 \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_3)$, $\eta \in C^1(\mathbb{R})$. Una solución débil del sistema (2.66)-(2.68) es un par de funciones $[\mathbf{u}, w] \in \mathbf{H}_\sigma \times H^1(\Omega)$ y $\rho = \eta(N\mathbf{u})$ satisfaciendo el sistema (2.71)-(2.74).

Para probar la existencia de una solución débil del sistema (2.66)-(2.68), el problema no homogéneo (2.71)-(2.74) será reducido a un nuevo problema con condiciones de borde nulas en términos de nuevas variables $\hat{\mathbf{u}}$ y \hat{w} . Para este propósito, similar al Lema 2.5, se introduce el siguiente resultado.

Lema 2.13 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado con borde $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Suponga que $\mathbf{u}_0 \in \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_0)$, $\mathbf{g}_1 \in \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_1)$. Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\mathbf{u}^\varepsilon \in \mathbf{H}_\sigma$ con $\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{g}_1$ sobre Γ_1 y $\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{u}_0$ sobre Γ_0 , tal que

$$|(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v})| \leq \varepsilon \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (2.75)$$

Además, si $\Gamma = \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $w_0 \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)$, $g_2 \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_3)$, entonces existe $w^e \in H^1(\Omega)$ tal que $w^e = w_0$ sobre Γ_2 , $w^e = g_2$ sobre Γ_3 , y la siguiente estimativa es satisfecha

$$\|w^e\|_{H^1} \leq C \|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \quad (2.76)$$

donde C es una constante que depende sólo del dominio Ω . \diamond

Por la definición de las funciones \mathbf{u}_{g_1} , w_{g_2} y el Lema 2.13, se tiene que existen funciones $\mathbf{u}^\varepsilon \in \mathbf{H}_\sigma$ y $w^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ tales que $\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{u}_{g_1}$ sobre Γ y $w^\varepsilon = w_{g_2}$ sobre Γ , entonces si $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^\varepsilon$ y $\hat{w} = w - w^\varepsilon$ se deduce que $[\hat{\mathbf{u}}, \hat{w}] \in \mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)$.

Reescribiendo las variables $[\mathbf{u}, w] \in \mathbf{H}_\sigma \times H^1(\Omega)$ de (2.71)-(2.74) en la forma $\mathbf{u} = \mathbf{u}^\varepsilon + \hat{\mathbf{u}}$ y $w = w^\varepsilon + \hat{w}$, siendo $[\hat{\mathbf{u}}, \hat{w}] \in \mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)$ nuevas funciones desconocidas, de (2.71)-(2.74) se obtiene el siguiente problema: Hallar $[\hat{\mathbf{u}}, \hat{w}] \in \mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} & \mu_1(\nabla \hat{\mathbf{u}}, \nabla \mathbf{v}) + \langle B(\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}), \mathbf{v} \rangle + \langle B(\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle \\ & = 2\mu_r(\text{rot}(\hat{w} + w^\varepsilon), \mathbf{v}) + \langle F(\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle - \mu_1(\nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \nabla \mathbf{v}) - \langle B(\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle, \quad (2.77) \\ & \nu_2(\nabla \hat{w}, \nabla z) + \langle \tilde{B}(\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{w}), z \rangle + \langle \tilde{B}(\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}, w^\varepsilon), z \rangle + 4\mu_r(\hat{w}, z) \\ & = 2\mu_r(\text{rot}(\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon), z) + \langle G(\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon), z \rangle - \nu_2(\nabla w^\varepsilon, \nabla z) - \langle \tilde{B}(\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon), z \rangle \\ & \quad - 4\mu_r(w^\varepsilon, z), \quad (2.78) \end{aligned}$$

para todo $[\mathbf{v}, z] \in \mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)$.

Para demostrar la existencia de una solución $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{w})$ para el problema (2.77)-(2.78) se procede como sigue:

Paso 1: Fijando $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}$, de la ecuación (2.78) se define un *problema auxiliar lineal* y aplicando el Teorema de Lax-Milgram se demuestra que el problema tiene una solución \hat{w} .

Paso 2: Fijando la solución \hat{w} del problema auxiliar, aplicando el principio de Leray-Schauder se demuestra que (2.77) tiene una solución $\hat{\mathbf{u}}$, y en consecuencia se sigue que $[\hat{\mathbf{u}}, \hat{w}]$ es solución del sistema (2.77)-(2.78).

Paso 1: Problema auxiliar lineal

Para cada función $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}$ fijada, observando (2.78) se considera el siguiente problema lineal

$$\begin{aligned} & \nu_2(\nabla \hat{w}, \nabla z) + \langle \tilde{B}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{w}), z \rangle + 4\mu_r(\hat{w}, z) \\ & = 2\mu_r(\text{rot}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon), z) + \langle G(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon), z \rangle - \nu_2(\nabla w^\varepsilon, \nabla z) - 4\mu_r(w^\varepsilon, z) \\ & \quad - \langle \tilde{B}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon), z \rangle - \langle \tilde{B}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{u}}, w^\varepsilon), z \rangle \quad \forall z \in H_0^1(\Omega). \quad (2.79) \end{aligned}$$

Para el problema (2.79) se tiene el siguiente resultado.

Lema 2.14 Si $g \in L^2(\Omega)$, entonces el problema (2.79) tiene una única solución $\hat{w} \in H_0^1(\Omega)$. Además, la siguiente desigualdad es satisfecha

$$\begin{aligned} \nu_2 \|\hat{w}\|_{H_0^1} & \leq \tilde{C}_\eta C (\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} \|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|g\|_{H^{-1}}) \\ & \quad + C (\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}), \quad (2.80) \end{aligned}$$

donde $\tilde{C}_\eta > 0$ es la constante satisfaciendo $\|\eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon))\|_{L^\infty} \leq \tilde{C}_\eta$ con \mathbf{u}^ε definido como en (2.75), y $C > 0$ es una constante que depende de Ω , ν_2 y μ_r .

Demostración: Con el propósito de aplicar el Lema de Lax-Milgram, observando (2.79) se considera la forma bilineal $a_{\tilde{\mathbf{u}}} : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ y el funcional lineal $f_{\tilde{\mathbf{u}}} : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definidos por

$$a_{\tilde{\mathbf{u}}}(\hat{w}, z) = \nu_2(\nabla \hat{w}, \nabla z) + \langle \tilde{B}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{w}), z \rangle + 4\mu_r(\hat{w}, z) \quad \forall z \in H_0^1(\Omega), \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} \langle f_{\tilde{\mathbf{u}}}, z \rangle & = 2\mu_r(\text{rot}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon), z) + \langle G(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon), z \rangle - \nu_2(\nabla w^\varepsilon, \nabla z) - 4\mu_r(w^\varepsilon, z) \\ & \quad - \langle \tilde{B}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon), z \rangle - \langle \tilde{B}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{u}}, w^\varepsilon), z \rangle \quad \forall z \in H_0^1(\Omega). \quad (2.82) \end{aligned}$$

Entonces, el problema (2.79) es equivalente a hallar $\hat{w} \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a_{\tilde{\mathbf{u}}}(\hat{w}, z) = \langle \mathbf{f}_{\tilde{\mathbf{u}}}, z \rangle \quad \forall z \in H_0^1(\Omega). \quad (2.83)$$

A seguir se verifica las condiciones del Teorema 1.23 (Lax-Milgram):

- La forma bilineal $a_{\tilde{\mathbf{u}}}$ es continua.

Usando la desigualdad de Hölder, la desigualdad de Poincaré, la definición de \tilde{B} y (1.2), (1.30), de (2.81), se tiene

$$\begin{aligned} |a_{\tilde{\mathbf{u}}}(\hat{w}, z)| &\leq \nu_2 \|\nabla \hat{w}\| \|\nabla z\| + |\langle \eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon))(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon) \cdot \nabla \hat{w}, z \rangle| + 4\mu_r \|\hat{w}\| \|z\| \\ &\leq \nu_2 \|\hat{w}\|_{H_0^1} \|z\|_{H_0^1} + \|\eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon))\|_{L^\infty} \|\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon\|_3 \|\hat{w}\|_{H_0^1} \|z\|_6 + 4\mu_r C \|\hat{w}\|_{H_0^1} \|z\|_{H_0^1} \\ &\leq \nu_2 \|\hat{w}\|_{H_0^1} \|z\|_{H_0^1} + \tilde{C}_\eta C \|\nabla \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \mathbf{u}^\varepsilon\| \|\hat{w}\|_{H_0^1} \|z\|_{H_0^1} + 4\mu_r C \|\hat{w}\|_{H_0^1} \|z\|_{H_0^1} \\ &\leq (\nu_2 + \tilde{C}_\eta C (\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma}) + 4\mu_r C) \|\hat{w}\|_{H_0^1} \|z\|_{H_0^1} \\ &\leq (\nu_2 + \tilde{C}_\eta C (\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} + C \|\mathbf{u}_{\mathbf{g}_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}) + 4\mu_r C) \|\hat{w}\|_{H_0^1} \|z\|_{H_0^1} \\ &\leq C \|\hat{w}\|_{H_0^1} \|z\|_{H_0^1}, \end{aligned}$$

lo que implica que $a_{\tilde{\mathbf{u}}}$ es continua sobre $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

- La forma bilineal $a_{\tilde{\mathbf{u}}}$ es coerciva.

De (2.63) para $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\sigma$ se tiene $\operatorname{div}(\eta(N\mathbf{u})\mathbf{u}) = \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0$, entonces observando (1.25) y la definición de \tilde{B} para $\hat{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ resulta

$$\langle \tilde{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \hat{w}), \hat{w} \rangle = \langle \eta(N\mathbf{u})\mathbf{u} \cdot \nabla \hat{w}, \hat{w} \rangle = 0. \quad (2.84)$$

Luego reemplazando $z = \hat{w}$ en (2.81) y considerando (2.84), se obtiene

$$a_{\tilde{\mathbf{u}}}(\hat{w}, \hat{w}) = \nu_2 \|\hat{w}\|_{H_0^1}^2 + 4\mu_r \|\hat{w}\|^2 \geq \nu_2 \|\hat{w}\|_{H_0^1}^2,$$

lo cual implica que $a_{\tilde{\mathbf{u}}}$ es coerciva.

- El funcional lineal $\mathbf{f}_{\tilde{\mathbf{u}}}$ es continuo.

Usando la desigualdad de Hölder junto con la definición de los operadores \tilde{B} y G , también considerando (1.19) y (1.30), desde (2.82) se obtiene

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{f}_{\tilde{\mathbf{u}}}, z \rangle| &\leq 2\mu_r |\langle \operatorname{rot}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon), z \rangle| + |\langle \eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon))\mathbf{g}, z \rangle| + \nu_2 |\langle \nabla w^e, z \rangle| + 4\mu_r |(w^e, z)| \\ &\quad + |\langle \eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon))\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla w^e, z \rangle| + |\langle \eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon))\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla w^e, z \rangle| \\ &\leq 2\mu_r \|\operatorname{rot}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon)\| \|z\| + \|\eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon))\|_{L^\infty} \|\mathbf{g}\|_{H^{-1}} \|z\|_{H_0^1} + \nu_2 \|\nabla w^e\| \|\nabla z\| \\ &\quad + 4\mu_r \|w^e\| \|z\| + \|\eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon))\|_{L^\infty} \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_3 \|\nabla w^e\| \|z\|_6 \\ &\quad + \|\eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon))\|_{L^\infty} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_3 \|\nabla w^e\| \|z\|_6 \\ &\leq 2\sqrt{2}\mu_r C \|\nabla(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon)\| \|z\|_{H_0^1} + \tilde{C}_\eta \|\mathbf{g}\|_{H^{-1}} \|z\|_{H_0^1} + \nu_2 \|w^e\|_{H^1} \|z\|_{H_0^1} \\ &\quad + 4\mu_r C \|w^e\|_{H^1} \|z\|_{H_0^1} + \tilde{C}_\eta C \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma} \|w^e\|_{H^1} \|z\|_{H_0^1} + \tilde{C}_\eta C \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} \|w^e\|_{H^1} \|z\|_{H_0^1} \\ &\leq 2\sqrt{2}\mu_r C (\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma}) \|z\|_{H_0^1} + \tilde{C}_\eta \|\mathbf{g}\|_{H^{-1}} \|z\|_{H_0^1} + (\nu_2 + 4\mu_r C) \|w^e\|_{H^1} \|z\|_{H_0^1} \\ &\quad + \tilde{C}_\eta C (\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma} + \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}}) \|w^e\|_{H^1} \|z\|_{H_0^1} \end{aligned}$$

Observando (1.2) y (2.76), la última desigualdad implica

$$\begin{aligned} |\langle f_{\tilde{\mathbf{u}}}, z \rangle| &\leq 2\sqrt{2}\mu_r C(\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} + C\|\mathbf{u}_{\mathbf{g}_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)})\|z\|_{H_0^1} + \tilde{C}_\eta \|g\|_{H^{-1}}\|z\|_{H_0^1} \\ &\quad + (\nu_2 + 4\mu_r C)C\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\|z\|_{H_0^1} \\ &\quad + \tilde{C}_\eta C(C\|\mathbf{u}_{\mathbf{g}_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}})C\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\|z\|_{H_0^1} \leq C\|z\|_{H_0^1} \end{aligned}$$

y se concluye que $f_{\tilde{\mathbf{u}}}$ es continuo.

Por lo tanto, como $a_{\tilde{\mathbf{u}}}$ y $f_{\tilde{\mathbf{u}}}$ satisfacen las hipótesis del Teorema 1.23, existe una única $\hat{w} \in H_0^1(\Omega)$ que satisface (2.83) y en consecuencia, $\hat{w} \in H_0^1(\Omega)$ es la única solución del problema (2.79).

Para obtener la desigualdad (2.80), haciendo $z = \hat{w}$ en (2.79) y teniendo en cuenta (2.84), se tiene

$$\begin{aligned} \nu_2\|\hat{w}\|_{H_0^1}^2 + 4\mu_r\|\hat{w}\|^2 &\leq 2\mu_r|\langle \operatorname{rot}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon), \hat{w} \rangle| + |\langle G(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon), \hat{w} \rangle| + \nu_2|\langle \nabla w^e, \nabla \hat{w} \rangle| \\ &\quad + 4\mu_r|\langle w^e, \hat{w} \rangle| + |\langle \tilde{B}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, w^e), \hat{w} \rangle| \\ &\quad + |\langle \tilde{B}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{u}}, w^e), \hat{w} \rangle|. \end{aligned} \quad (2.85)$$

A seguir se acotan los términos del lado derecho de (2.85). Usando la desigualdad de Hölder, junto con la definición de los operadores \tilde{B} y G , y teniendo en cuenta (1.19) y (1.30), se tiene

$$\begin{aligned} 2\mu_r|\langle \operatorname{rot}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon), \hat{w} \rangle| &\leq 2\mu_r\|\operatorname{rot}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon)\|\|\hat{w}\| \leq 2\sqrt{2}\mu_r C\|\nabla(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon)\|\|\hat{w}\|_{H_0^1} \\ &\leq 2\sqrt{2}\mu_r C(\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma})\|\hat{w}\|_{H_0^1}, \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} |\langle G(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon), \hat{w} \rangle| &= |\langle \eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon)g), \hat{w} \rangle| \leq \|\eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon))\|_{L^\infty}\|g\|_{H^{-1}}\|\hat{w}\|_{H_0^1} \\ &\leq \tilde{C}_\eta \|g\|_{H^{-1}}\|\hat{w}\|_{H_0^1}, \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\nu_2|\langle \nabla w^e, \nabla \hat{w} \rangle| \leq \nu_2\|\nabla w^e\|\|\nabla \hat{w}\| \leq \nu_2\|w^e\|_{H^1}\|\hat{w}\|_{H_0^1}, \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} 4\mu_r|\langle w^e, \hat{w} \rangle| &\leq 4\mu_r\|w^e\|\|\hat{w}\| \leq 4\mu_r C\|w^e\|_{H^1}\|\nabla \hat{w}\| \\ &\leq 4\mu_r C\|w^e\|_{H^1}\|\hat{w}\|_{H_0^1}, \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} |\langle \tilde{B}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, w^e), \hat{w} \rangle| &= |\langle \eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon))\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla w^e, \hat{w} \rangle| \\ &\leq \|\eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon))\|_{L^\infty}\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_3\|\nabla w^e\|\|\hat{w}\|_6 \\ &\leq \tilde{C}_\eta C\|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\|\|\nabla w^e\|\|\nabla \hat{w}\| \\ &\leq \tilde{C}_\eta C\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma}\|w^e\|_{H^1}\|\hat{w}\|_{H_0^1}, \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} |\langle \tilde{B}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{u}}, w^e), \hat{w} \rangle| &= |\langle \eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon))\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla w^e, \hat{w} \rangle| \\ &\leq \|\eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon))\|_{L^\infty}\|\tilde{\mathbf{u}}\|_3\|\nabla w^e\|\|\hat{w}\|_6 \\ &\leq \tilde{C}_\eta C\|\nabla \tilde{\mathbf{u}}\|\|\nabla w^e\|\|\nabla \hat{w}\| \\ &\leq \tilde{C}_\eta C\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}}\|w^e\|_{H^1}\|\hat{w}\|_{H_0^1}. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Por lo tanto, si consideramos (1.2) y (2.76), al sustituir (2.86)-(2.91) en (2.85), se concluye

$$\begin{aligned} \nu_2\|\hat{w}\|_{H_0^1}^2 &\leq \tilde{C}_\eta C(\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} + C\|\mathbf{u}_{\mathbf{g}_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)})\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\|\hat{w}\|_{H_0^1} + \tilde{C}_\eta \|g\|_{H^{-1}}\|\hat{w}\|_{H_0^1} \\ &\quad + 2\sqrt{2}\mu_r C(\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} + C\|\mathbf{u}_{\mathbf{g}_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)})\|\hat{w}\|_{H_0^1} + C(\nu_2 + 4\mu_r C)\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\|\hat{w}\|_{H_0^1}, \end{aligned}$$

lo cual implica

$$\begin{aligned}
\nu_2 \|\hat{w}\|_{H_0^1} &\leq \tilde{C}_\eta C(\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} + C\|\mathbf{u}_{\mathbf{g}_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)})\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \tilde{C}_\eta \|\mathbf{g}\|_{H^{-1}} \\
&\quad + 2\sqrt{2}\mu_r C(\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} + C\|\mathbf{u}_{\mathbf{g}_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}) + C(\nu_2 + 4\mu_r C)\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\
&\leq \tilde{C}_\eta C(\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}}\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{u}_{\mathbf{g}_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{g}\|_{H^{-1}}) \\
&\quad + C(\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{u}_{\mathbf{g}_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)})
\end{aligned}$$

y se obtiene (2.80). ◇

Paso 2: Existencia de solución de (2.77)-(2.78)

Con el propósito de aplicar el teorema de punto fijo de Leray-Schauder (ver Teorema 1.24), se define el operador lineal $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, tal que a cada $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}$ le asigna $T\tilde{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}$ con $\hat{\mathbf{u}}$ satisfaciendo el sistema

$$\begin{aligned}
\mu_1(\nabla \hat{\mathbf{u}}, \nabla \mathbf{v}) + \langle B(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}), \mathbf{v} \rangle + \langle B(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle \\
= 2\mu_r(\text{rot}(\hat{w} + w^\varepsilon), \mathbf{v}) + \langle F(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle - \mu_1(\nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \nabla \mathbf{v}) - \langle B(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle, \quad (2.92)
\end{aligned}$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, donde \hat{w} es la única solución del problema lineal (2.79).

En los siguientes Lemas se establecen las propiedades del operador T que permiten aplicar el Teorema de Leray-Schauder.

Lema 2.15 *El operador $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ definido por (2.92) es compacto.*

Demostración: Sea $\{\tilde{\mathbf{u}}^m\}_{m \geq 1} \subset \mathbf{V}$ una sucesión tal que

$$\tilde{\mathbf{u}}^m \rightarrow \tilde{\mathbf{u}} \text{ débilmente en } \mathbf{V}.$$

Para $1 \leq p < 6$, $\mathbf{V} \hookrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega)$ es compacta, entonces

$$\tilde{\mathbf{u}}^m \rightarrow \tilde{\mathbf{u}} \text{ fuerte en } \mathbf{L}^p(\Omega).$$

Como el operador N es continuo, entonces $N\tilde{\mathbf{u}}^m \rightarrow N\tilde{\mathbf{u}}$ débilmente en $H^2(\Omega)$, y como $H^2(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ es compacta (Teorema 1.19), entonces $N\tilde{\mathbf{u}}^m \rightarrow N\tilde{\mathbf{u}}$ fuerte en $C^0(\bar{\Omega})$, más aún, como $\eta \in C^1(\mathbb{R})$

$$\eta(N\tilde{\mathbf{u}}^m) \rightarrow \eta(N\tilde{\mathbf{u}}) \text{ fuerte en } C^0(\bar{\Omega}),$$

lo cual implica que existe una constante $C_\eta > 0$, independiente de m , tal que

$$\|\eta(N(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon))\|_{L^\infty} \leq C_\eta. \quad (2.93)$$

Entonces, denotando $\hat{\mathbf{u}}^m = T(\tilde{\mathbf{u}}^m)$, desde (2.92) para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\mu_1(\nabla \hat{\mathbf{u}}^m, \nabla \mathbf{v}) + \langle B(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}^m), \mathbf{v} \rangle + \langle B(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}^m, \mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle \\
= 2\mu_r(\text{rot}(\hat{w} + w^\varepsilon), \mathbf{v}) + \langle F(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle - \mu_1(\nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \nabla \mathbf{v}) - \langle B(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle. \quad (2.94)
\end{aligned}$$

Sustrayendo (2.92) desde (2.94), se obtiene

$$\begin{aligned}
\mu_1(\nabla(\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}), \nabla \mathbf{v}) + \langle B(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}), \mathbf{v} \rangle + \langle B(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle \\
= \langle B(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}), \mathbf{v} \rangle - \langle B(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}), \mathbf{v} \rangle \\
+ \langle B(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle - \langle B(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle \\
+ \langle F(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon) - F(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle. \quad (2.95)
\end{aligned}$$

Haciendo $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}$ en (2.95) y teniendo en cuenta que $\langle B(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} \mu_1 \|\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}}^2 &\leq |\langle B(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}^\varepsilon), \hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}} \rangle| \\ &\quad + |\langle B(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}) - B(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}), \hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}} \rangle| \\ &\quad + |\langle B(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) - B(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon), \hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}} \rangle| \\ &\quad + |\langle F(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon) - F(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon), \hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}} \rangle|. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Se acotan los términos del lado derecho de la desigualdad (2.96). De la definición del operador B , observando (2.75) y (2.93), resulta

$$\begin{aligned} |\langle B(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}^\varepsilon), \hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}} \rangle| &= |\langle \eta(N(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon))(\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}} \rangle| \\ &\leq \|\eta(N(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon))\|_{L^\infty} |\langle (\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}} \rangle| \\ &\leq C_\eta \varepsilon \|\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}}^2. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} &B(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}) - B(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}) \\ &= \eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon))(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon) \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}} - \eta(N(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon))(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon) \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}} \\ &= (\eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon)) - \eta(N(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon)))(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon) \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}} - \eta(N(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon))(\tilde{\mathbf{u}}^m - \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}}, \end{aligned}$$

entonces, usando la desigualdad de Hölder y (2.93), se obtiene

$$\begin{aligned} &|\langle B(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}) - B(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}), \hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}} \rangle| \\ &\leq |\langle (\eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon)) - \eta(N(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon)))(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon) \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}} \rangle| \\ &\quad + |\langle \eta(N(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon))(\tilde{\mathbf{u}}^m - \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}} \rangle| \\ &\leq \|\eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon)) - \eta(N(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon))\|_{L^\infty} |\langle (\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon) \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}} \rangle| \\ &\quad + \|\eta(N(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon))\|_{L^\infty} |\langle (\tilde{\mathbf{u}}^m - \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}} \rangle| \\ &\leq \|\eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon)) - \eta(N(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon))\|_{L^\infty} \|(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon) \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}'} \|\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} \\ &\quad + C_\eta \|\hat{\mathbf{u}}^m - \tilde{\mathbf{u}}\|_3 \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} \|\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}\|_6 \\ &\leq C \|\eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon)) - \eta(N(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon))\|_{L^\infty} \|\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} \\ &\quad + CC_\eta \|\tilde{\mathbf{u}}^m - \tilde{\mathbf{u}}\|_3 \|\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Por la definición del operador B y usando la desigualdad de Hölder, se tiene

$$\begin{aligned} &|\langle B(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) - B(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon), \hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}} \rangle| \\ &\leq |\langle [(\eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon)) - \eta(N(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon)))(\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon) \cdot \nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}} \rangle| \\ &\leq \|\eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon)) - \eta(N(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon))\|_{L^\infty} \|(\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon) \cdot \nabla \mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}'} \|\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} \\ &\leq C \|\eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon)) - \eta(N(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon))\|_{L^\infty} \|\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

De la definición del operador F y la desigualdad de Hölder, se obtiene

$$\begin{aligned} &|\langle F(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon) - F(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon), \hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}} \rangle| \\ &= |\langle (\eta(N(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon)) - \eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon)))\mathbf{f}, \hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}} \rangle| \\ &\leq \|\eta(N(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon)) - \eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon))\|_{L^\infty} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}'} \|\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} \\ &\leq C \|\eta(N(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon)) - \eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon))\|_{L^\infty} \|\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}}. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Reemplazando las desigualdes (2.97)-(2.100) en (2.96) y teniendo en cuenta (2.93), resulta

$$(\mu_1 - \varepsilon C_\eta) \|\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}}^2 \leq C \|\eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon)) - \eta(N(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon))\|_{L^\infty} \|\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} + CC_\eta \|\tilde{\mathbf{u}}^m - \tilde{\mathbf{u}}\|_3 \|\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}},$$

entonces, para ε suficientemente pequeño tal que $\mu_1 > \varepsilon C_\eta$, se deduce

$$\|\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} \leq C(\|\eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon)) - \eta(N(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^\varepsilon))\|_{L^\infty} + C_\eta \|\tilde{\mathbf{u}}^m - \tilde{\mathbf{u}}\|_3). \quad (2.101)$$

Tomando límite en (2.101) cuando $m \rightarrow \infty$ y considerando las convergencias fuertes de $\tilde{\mathbf{u}}^m$ en $\mathbf{L}^3(\Omega)$ y de $\eta(N\tilde{\mathbf{u}}^m)$ en $C^0(\bar{\Omega})$, se obtiene que

$$\|T\tilde{\mathbf{u}}^m - T\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} = \|\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} \rightarrow 0,$$

por lo tanto, el operador T es compacto. \diamond

Lema 2.16 *Sea T el operador definido por (2.92). Para $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}$ se define el conjunto*

$$M_\lambda = \{\tilde{\mathbf{u}} : \tilde{\mathbf{u}} = \lambda T\tilde{\mathbf{u}} \text{ para algún } \lambda \in [0, 1]\}. \quad (2.102)$$

Si μ_1 es suficientemente grande tal que

$$\mu_1 > \varepsilon \tilde{C}_\eta + 2\tilde{C}_\eta C \mu_r \nu_2^{-1} \|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + 2C \mu_r \nu_2^{-1}, \quad (2.103)$$

donde \tilde{C}_η es la constante dada en (2.80). Entonces el conjunto M_λ es acotado en \mathbf{V} .

Además, para $\lambda \in [0, 1]$ todas las funciones $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(\lambda) \in M_\lambda$ están contenidas, independientemente de λ , en una bola $B \subset \mathbf{V}$ centrada en $\mathbf{0}$ y de radio

$$R = \tilde{C}_\eta C (\|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|g\|_{H^{-1}} + \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}'} + \|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2) + C (\|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}). \quad (2.104)$$

donde la constante C depende de Ω, μ_1, ν_2 .

Demostración: Supóngase que $\lambda > 0$, entonces para $\tilde{\mathbf{u}} \in M_\lambda$ es posible escribir $T\tilde{\mathbf{u}} = \frac{1}{\lambda}\tilde{\mathbf{u}}$, luego sustituyendo $\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\lambda}\tilde{\mathbf{u}}$ y $\mathbf{v} = \lambda\tilde{\mathbf{u}}$ en (2.92) y teniendo en cuenta que $\langle B(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} \mu_1 \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}}^2 &\leq |\langle B(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u}^\varepsilon), \tilde{\mathbf{u}} \rangle| + 2\mu_r \lambda |(\text{rot}(\hat{w} + w^\varepsilon), \tilde{\mathbf{u}})| + \lambda |\langle F(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon), \tilde{\mathbf{u}} \rangle| \\ &\quad + \mu_1 \lambda |(\nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \nabla \tilde{\mathbf{u}})| + \lambda |\langle B(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon), \tilde{\mathbf{u}} \rangle|. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Se acotarán los términos del lado derecho de (2.105). Usando la desigualdad de Hölder y observando (2.75), se tiene

$$\begin{aligned} |\langle B(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u}^\varepsilon), \tilde{\mathbf{u}} \rangle| &= |\langle \eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon)) \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{u}} \rangle| \\ &\leq \|\eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon))\|_{L^\infty} \varepsilon \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \varepsilon \tilde{C}_\eta \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}}^2. \end{aligned} \quad (2.106)$$

De las desigualdades de Hölder y Poincaré, teniendo en cuenta (1.20) y (1.30), se tiene

$$\begin{aligned} 2\mu_r\lambda|\langle \operatorname{rot}(\hat{w} + w^e), \tilde{\mathbf{u}} \rangle| &\leq 2\mu_r\lambda\|\operatorname{rot}(\hat{w} + w^e)\|\|\tilde{\mathbf{u}}\| \leq 2\lambda\mu_r C\|\nabla(\hat{w} + w^e)\|\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} \\ &\leq 2\lambda\mu_r C(\|\hat{w}\|_{H_0^1} + \|w^e\|_{H^1})\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}}, \end{aligned} \quad (2.107)$$

$$\begin{aligned} \lambda|\langle F(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon), \tilde{\mathbf{u}} \rangle| &= \lambda|\langle \eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon))\mathbf{f}, \tilde{\mathbf{u}} \rangle| \leq \lambda\|\eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon))\|_{L^\infty}\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}'}\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} \\ &\leq \lambda\tilde{C}_\eta\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}'}\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}}, \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$\mu_1\lambda|\langle \nabla\mathbf{u}^\varepsilon, \nabla\tilde{\mathbf{u}} \rangle| \leq \mu_1\lambda\|\nabla\mathbf{u}^\varepsilon\|\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}\| \leq \mu_1\lambda\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma}\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}}, \quad (2.109)$$

$$\lambda|\langle B(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon), \tilde{\mathbf{u}} \rangle| = \lambda|\langle \eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon))\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla\mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{u}} \rangle| \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned} &\leq \lambda\|\eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon))\|_{L^\infty}\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_3\|\nabla\mathbf{u}^\varepsilon\|\|\tilde{\mathbf{u}}\|_6 \\ &\leq \lambda\tilde{C}_\eta C\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma}^2\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}}. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Sustituyendo (2.106)-(2.111) en (2.105) y observando que $\lambda \leq 1$, se tiene

$$\begin{aligned} (\mu_1 - \varepsilon\tilde{C}_\eta)\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}}^2 &\leq 2\mu_r C(\|\hat{w}\|_{H_0^1} + \|w^e\|_{H^1})\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} + \tilde{C}_\eta\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}'}\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} + \mu_1\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma}\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} \\ &\quad + C\tilde{C}_\eta\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma}^2\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}}, \end{aligned}$$

y entonces se sigue

$$(\mu_1 - \varepsilon\tilde{C}_\eta)\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} \leq 2\mu_r C(\|\hat{w}\|_{H_0^1} + \|w^e\|_{H^1}) + \tilde{C}_\eta\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}'} + \mu_1\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma} + \tilde{C}_\eta C\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma}^2. \quad (2.112)$$

Sustituyendo (2.80) y teniendo en cuenta (1.2) y (2.76) en la última desigualdad, se obtiene

$$\begin{aligned} (\mu_1 - \varepsilon\tilde{C}_\eta)\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} &\leq 2\tilde{C}_\eta C\mu_r\nu_2^{-1}(\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}}\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|g\|_{H^{-1}}) \\ &\quad + 2C\mu_r\nu_2^{-1}(\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}) \\ &\quad + 2\mu_r C\|w^e\|_{H^1} + \tilde{C}_\eta\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}'} + \mu_1\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma} + \tilde{C}_\eta C\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma}^2 \\ &\leq 2\tilde{C}_\eta C\mu_r\nu_2^{-1}(\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}}\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|g\|_{H^{-1}}) \\ &\quad + 2C\mu_r\nu_2^{-1}(\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}) \\ &\quad + 2\mu_r C\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \tilde{C}_\eta\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}'} + \mu_1 C\|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \\ &\quad + \tilde{C}_\eta C\|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2, \end{aligned}$$

y entonces resulta

$$\begin{aligned} &(\mu_1 - \varepsilon\tilde{C}_\eta - 2\tilde{C}_\eta C\mu_r\nu_2^{-1}\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} - 2C\mu_r\nu_2^{-1})\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} \\ &\leq 2\tilde{C}_\eta C\mu_r\nu_2^{-1}(\|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|g\|_{H^{-1}}) \\ &\quad + 2C\mu_r\nu_2^{-1}(\|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}) + 2\mu_r C\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\quad + \tilde{C}_\eta\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}'} + \mu_1 C\|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \tilde{C}_\eta C\|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 \\ &\leq \tilde{C}_\eta C(\|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|g\|_{H^{-1}} + \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}'} + \|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2) \\ &\quad + C(\|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}), \end{aligned} \quad (2.113)$$

y como por hipótesis $\mu_1 - \varepsilon\tilde{C}_\eta - 2\tilde{C}_\eta C\mu_r\nu_2^{-1}\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} - 2C\mu_r\nu_2^{-1} > 0$, considerando $C = C(\mu_1 - \varepsilon\tilde{C}_\eta - 2\tilde{C}_\eta C\mu_r\nu_2^{-1}\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} - 2\mu_r C\nu_2^{-1})^{-1}$, de (2.113) se deduce

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} &\leq \tilde{C}_\eta C(\|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|g\|_{H^{-1}} + \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}'} + \|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2) \\ &\quad + C(\|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}), \end{aligned} \quad (2.114)$$

lo cual implica que el conjunto M_λ es acotado en \mathbf{V} para $\lambda > 0$. Para $\lambda = 0$ el resultado es trivial. El radio (2.104) de la bola $B \subset \mathbf{V}$ es obtenido de (2.114). \diamond

Con los resultados de los lemas anteriores, se tiene el siguiente teorema de existencia de soluciones del sistema (2.77)-(2.78).

Teorema 2.17 Sean $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Omega)$, $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ y μ_1 satisfaciendo (2.103). Entonces, el operador $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ definido en (2.92), con \hat{w} solución de (2.79), tiene un punto fijo $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}$, y el par de funciones $[\hat{\mathbf{u}}, \hat{w}]$ es solución del sistema (2.77)-(2.78). Además, si μ_1 y ν_2 son suficientemente grandes, entonces la solución $[\hat{\mathbf{u}}, \hat{w}]$ satisface la siguiente desigualdad

$$\|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} + \|\hat{w}\|_{H_0^1} \leq C\tilde{\Theta}, \quad (2.115)$$

donde $\tilde{\Theta} = \|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}(\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + 1) + \|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}'} + \|g\|_{H^{-1}}$ y la constante C depende de $\Omega, \mu_1, \nu_2, \tilde{C}_\eta$.

Demostración: Se sigue del Lema 2.15 y Lema 2.16 que el operador T y el conjunto M_λ satisfacen las condiciones del principio de Leray-Schauder (Teorema 1.24), por lo tanto el operador T tiene un punto fijo, esto es, existe $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}$ tal que $T\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}$. Entonces, por la definición de T dada en (2.92) se deduce que $\tilde{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}$ el cual satisface (2.92) y la ecuación auxiliar (2.79), así, se concluye que $[\hat{\mathbf{u}}, \hat{w}]$ es solución del sistema (2.77)-(2.78).

Sumando (2.92) y (2.112), así como también considerando (1.2) y (2.76), se tiene

$$\begin{aligned} (\mu_1 - \varepsilon\tilde{C}_\eta)\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} + \nu_2\|\hat{w}\|_{H_0^1} &\leq \tilde{C}_\eta C\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}}\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + 2\sqrt{2}\mu_r C\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} \\ &\quad + 2\mu_r C\|\hat{w}\|_{H_0^1} + \tilde{C}_\eta C\|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\quad + 2\sqrt{2}\mu_r C\|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + C(\nu_2 + 6\mu_r C)\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\quad + \mu_1 C\|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \tilde{C}_\eta C\|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 \\ &\quad + \tilde{C}_\eta(\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}'} + \|g\|_{H^{-1}}), \end{aligned}$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} (\mu_1 - \varepsilon\tilde{C}_\eta - \tilde{C}_\eta C\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} - 2\sqrt{2}\mu_r C)\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} + (\nu_2 - 2\mu_r C)\|\hat{w}\|_{H_0^1} \\ \leq \tilde{C}_\eta C\|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + (2\sqrt{2}\mu_r C + \mu_1 C)\|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \\ + C(\nu_2 + 6\mu_r C)\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \tilde{C}_\eta C\|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 + \tilde{C}_\eta(\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}'} + \|g\|_{H^{-1}}). \end{aligned} \quad (2.116)$$

Denotando $C = \min\{\mu_1 - \varepsilon\tilde{C}_\eta - \tilde{C}_\eta C\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} - 2\sqrt{2}\mu_r C, \nu_2 - 2\mu_r C\} > 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} C(\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} + \|\hat{w}\|_{H_0^1}) &\leq C(\|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}) \\ &\quad + C(\|\mathbf{u}_{g_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}'} + \|g\|_{H^{-1}}), \end{aligned}$$

desde donde se sigue (2.115). ◇

Como una consecuencia del Teorema 2.17 se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.18 Sean $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $\mathbf{g} \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{u}_0 \in \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_0)$, $\mathbf{g}_1 \in \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_1)$, $w_0 \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)$, $g_2 \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_3)$, $\eta \in C^1(\mathbb{R})$, μ_1 y ν_2 suficientemente grandes como en el Teorema 2.17. Entonces, existen funciones $[\mathbf{u}, w] \in \mathbf{H}_\sigma \times H^1(\Omega)$ y $\rho = \eta(N\mathbf{u})$ satisfaciendo el sistema no homogéneo (2.71)-(2.74).

Además, la solución $[\mathbf{u}, w]$ satisface la siguiente desigualdad

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_\sigma} + \|w\|_{H^1} \leq C\tilde{\Theta}, \quad (2.117)$$

donde C es una constante positiva que depende de Ω, μ_1, ν_2 , y $\tilde{\Theta}$ definido en (2.115).

Demostración: Considerando $[\hat{\mathbf{u}}, \hat{w}] \in \mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)$ solución del problema (2.77)-(2.78) dada por el Teorema 2.17, se deduce que existe una solución $[\mathbf{u}, w] \in \mathbf{H}_\sigma \times H^1(\Omega)$ para el sistema (2.71)-(2.74), donde

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon, \quad w = \hat{w} + w^\varepsilon. \quad (2.118)$$

De (2.118) y la desigualdad triangular, se tiene

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_\sigma} + \|w\|_{H^1} \leq \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} + \|\hat{w}\|_{H_0^1} + \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma} + \|w^\varepsilon\|_{H^1},$$

y entonces, teniendo en cuenta (1.2) y (2.76), se obtiene

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_\sigma} + \|w\|_{H^1} &\leq \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}} + \|\hat{w}\|_{H_0^1} + C\|\mathbf{u}\mathbf{g}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + C\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq C + C\|\mathbf{u}\mathbf{g}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + C\|w_{g_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \end{aligned}$$

desde donde se sigue (2.117). ◇

Capítulo 3

Problema de control de borde para ecuaciones de fluidos micropolares con condiciones de borde tipo mixto

En este capítulo se estudia un problema de control de borde restringido a las soluciones débiles de las ecuaciones estacionarias de fluidos micropolares con condiciones de borde mixta sobre una parte del borde del dominio de flujo, incluyendo la condición de deslizamiento de tipo Navier para la velocidad de traslación del fluido. Específicamente, los controles son aplicados sobre partes del borde del dominio de flujo y la restricción son las soluciones del sistema (2.12)-(2.15) dado en el Capítulo 2. También como en el Capítulo 2, se consideran los espacios de funciones: $\mathbb{H} = \mathbf{H}_\sigma^1 \times \mathbf{H}^1(\Omega)$, $\mathbb{X} = \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1 \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, $\mathbb{X}' = \mathbf{H}'_\sigma \times \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ y

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_0) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Gamma_0) : \text{existe } \hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \text{ satisfaciendo } \hat{\mathbf{u}}|_{\Gamma \setminus \Gamma_0} = \mathbf{0}, \hat{\mathbf{u}}|_{\Gamma_0} = \mathbf{u}\}, \\ \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_0) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_0) : \int_{\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0\}.\end{aligned}$$

Con las mismas consideraciones hechas en la Sección 2.1 del Capítulo 2, se considera el flujo en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y borde es subdividido en regiones simplemente conexas de la forma $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, donde $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\Gamma_3 \cap \Gamma_4 = \emptyset$ y $\Gamma_2 = \Gamma_2^1 \cup \Gamma_2^2$ con $\Gamma_2^1 \cap \Gamma_2^2 = \emptyset$, la parte Γ_2^1 debe tener interior no vacío y Γ_2^2 debe tener medida de Lebesgue positiva, además Γ_1 y Γ_4 pueden coincidir o diferir, pero ambas deben tener interior no vacío. Se definen los conjuntos convexos y cerrados $\mathcal{U}_1 \subset \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_1)$ y $\mathcal{U}_2 \subset \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_4)$.

En las condiciones de borde (2.14)-(2.15), esto es

$$\mathbf{u} \mathbf{g}_1 = \begin{cases} \mathbf{g}_1 & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \mathbf{u}_0 & \text{sobre } \Gamma_2^1, \end{cases} \quad \mathbf{w} \mathbf{g}_2 = \begin{cases} \mathbf{w}_0 & \text{sobre } \Gamma_3, \\ \mathbf{g}_2 & \text{sobre } \Gamma_4, \end{cases} \quad (3.1)$$

las funciones \mathbf{u}_0 y \mathbf{w}_0 son funciones dadas sobre las partes Γ_2^1 y Γ_3 respectivamente, las funciones \mathbf{g}_1 y \mathbf{g}_2 describen controles de borde de tipo Dirichlet para \mathbf{u} y \mathbf{w} sobre las partes Γ_1 y Γ_4 .

3.1 Formulación del problema de control

Sean $[\mathbf{f}, \mathbf{g}] \in \mathbb{X}'$, $\mathbf{u}_0 \in \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_2^1)$ y $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_3)$. Considere $\mathbf{u}_d \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $\mathbf{u}_b \in \mathbf{L}^p(\Omega)$, $\mathbf{w}_d \in \mathbf{L}^q(\Omega)$, representando los estados deseados, y las funciones $\mathbf{g}_1 \in \mathcal{U}_1$, $\mathbf{g}_2 \in \mathcal{U}_2$ describiendo controles de borde de tipo Dirichlet para \mathbf{u} y \mathbf{w} , sobre las partes Γ_1 y Γ_4 .

Bajo las consideraciones anteriores se formula el siguiente problema de control:

Problema 1. Hallar $[[\mathbf{u}, \mathbf{w}], \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] \in \mathbb{H} \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ tal que para $2 \leq p \leq 6$ y $2 \leq q \leq 6$, minimice el funcional

$$\begin{aligned} J[\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] &= \frac{\beta_1}{2} \|\text{rot } \mathbf{u} - \mathbf{u}_d\|^2 + \frac{\beta_2 \nu}{2} \|\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}\|^2 + \frac{\beta_3}{p} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_b\|_p^p + \frac{\beta_4}{q} \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_d\|_q^q \\ &\quad + \frac{\beta_5}{2} \|\mathbf{g}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 + \frac{\beta_6}{2} \|\mathbf{g}_2\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_4)}^2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

sujeto a que $[\mathbf{u}, \mathbf{w}] \in \mathbb{H}$ sea una solución del sistema

$$2\nu_1(D(\mathbf{u}), D(\mathbf{v})) + 2\alpha\nu_1 \int_{\Gamma_2^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Gamma + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\nu_r(\text{rot } \mathbf{w}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}_t}, \quad (3.3)$$

$$\nu_2(\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{z}) + \nu_3(\text{div } \mathbf{w}, \text{div } \mathbf{z}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{z}) + 4\nu_r(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = 2\nu_r(\text{rot } \mathbf{u}, \mathbf{z}) + \langle \mathbf{g}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathbf{g}_1} \quad \text{sobre } \Gamma \setminus \Gamma_2^2, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\mathbf{g}_2} \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (3.6)$$

para todo $[\mathbf{v}, \mathbf{z}] \in \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1 \times \mathbf{H}_0^1(\Omega) = \mathbb{X}$ con $\mathbf{u}_{\mathbf{g}_1}$ y $\mathbf{w}_{\mathbf{g}_2}$ definidos en (3.1).

Las constantes $\beta_i, i = 1, \dots, 6$ dadas en (3.2) satisfacen alguna de las siguientes condiciones:

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad &\beta_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, 6, \mathcal{U}_1 \subset \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_1) \text{ y } \mathcal{U}_2 \subset \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_4) \text{ son conjuntos} \\ &\text{convexos, cerrados y acotados,} \\ (ii) \quad &\beta_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, 4, \beta_5 > 0, \beta_6 > 0, \mathcal{U}_1 \subset \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_1) \text{ y } \mathcal{U}_2 \subset \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_4) \\ &\text{son conjuntos convexos y cerrados.} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

El primer término del funcional J dado en (3.2) otorga una medida entre la turbulencia del flujo y una velocidad prescrita \mathbf{u}_d ; el objetivo del tercer término es procurar que la velocidad traslacional se mantenga próxima a una velocidad deseada \mathbf{u}_b ; el cuarto término mide la proximidad entre la velocidad de microrotación y una velocidad microrotacional deseada \mathbf{w}_d . El segundo término mide la resistencia del fluido debido a la fricción viscosa (ver [2], [29]). Finalmente, el quinto y sexto término son introducidos con el objetivo de generar un balance en el funcional J .

3.2 Existencia de una solución óptima

Se define el conjunto de soluciones admisibles para el *Problema 1* como sigue:

$$\mathcal{S}_{ad} = \{\mathbf{s} = [[\mathbf{u}, \mathbf{w}], [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]] \in \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad} \text{ tal que } J(\mathbf{s}) < \infty \text{ y } \mathbf{s} \text{ satisface el sistema (3.3) - (3.6)}\},$$

donde $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ es el conjunto de controles admisibles para el *Problema 1*.

Se tiene el siguiente resultado de existencia de solución.

Teorema 3.1 *Bajo las hipótesis del Teorema 2.7, si una de las condiciones dadas en (3.7) es satisfecha, entonces el problema de control (3.2)-(3.6) tiene al menos una solución $\tilde{\mathbf{s}} = [\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{\mathbf{g}}_2] \in \mathcal{S}_{ad}$.*

Demostración: Se sigue del Teorema 2.7 que el conjunto \mathcal{S}_{ad} es no vacío. Además, dado que el funcional J es acotado inferiormente, entonces existe una sucesión minimizante $\mathbf{s}^m = [\mathbf{u}^m, \mathbf{w}^m, \mathbf{g}_1^m, \mathbf{g}_2^m] \in \mathcal{S}_{ad}, m \in \mathbb{N}$, tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(\mathbf{s}^m) = \inf_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_{ad}} J(\mathbf{s}).$$

Por la definición de \mathcal{S}_{ad} , se tiene \mathbf{s}^m satisface (3.3)-(3.6), esto es

$$\begin{aligned} & 2\nu_1(D(\mathbf{u}^m), D(\mathbf{v})) + 2\alpha\nu_1 \int_{\Gamma_2^2} \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + (\mathbf{u}^m \cdot \nabla \mathbf{u}^m, \mathbf{v}) - 2\nu_r(\text{rot } \mathbf{w}^m, \mathbf{v}) \\ & = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} & \nu_2(\nabla \mathbf{w}^m, \nabla \mathbf{z}) + \nu_3(\text{div } \mathbf{w}^m, \text{div } \mathbf{z}) + (\mathbf{u}^m \cdot \nabla \mathbf{w}^m, \mathbf{z}) + 4\nu_r(\mathbf{w}^m, \mathbf{z}) - 2\nu_r(\text{rot } \mathbf{u}^m, \mathbf{z}) \\ & = \langle \mathbf{g}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}} \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{u}^m = \mathbf{u} \mathbf{g}_1^m \text{ sobre } \Gamma \setminus \Gamma_2^2, \quad \mathbf{w}^m = \mathbf{w} \mathbf{g}_2^m \text{ sobre } \Gamma. \quad (3.10)$$

Además, si una de las condiciones dadas en (3.7) es satisfecha, entonces nuevamente por la definición de \mathcal{S}_{ad} existe una constante C independiente de m tal que

$$\|\mathbf{g}_1^m\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 + \|\mathbf{g}_2^m\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_4)}^2 \leq C. \quad (3.11)$$

En efecto, si la condición (i) de (3.7) es satisfecha, se tiene que los conjuntos $\mathcal{U}_1 \subset \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_1)$ y $\mathcal{U}_2 \subset \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_4)$ son acotados y como $\{\mathbf{s}^m\} \subset \mathcal{S}_{ad}$, entonces $\{\mathbf{g}_1^m\} \subset \mathcal{U}_1$ y $\{\mathbf{g}_2^m\} \subset \mathcal{U}_2$. Así, se concluye (3.11). Por otro lado, si la condición (ii) de (3.7) es satisfecha, entonces como la sucesión $\{J(\mathbf{s}^m)\}$ es convergente, se tiene que es acotada y se sigue (3.11).

Consecuentemente, de la estimativa (2.43) y (3.11), se tiene que existe una constante C independiente de m , tal que

$$\|\mathbf{u}^m\|_{\mathbf{H}_\sigma^1}^2 + \|\mathbf{w}^m\|_{\mathbf{H}^1}^2 \leq C.$$

Por lo tanto, la sucesión $\mathbf{s}^m = [\mathbf{u}^m, \mathbf{w}^m, \mathbf{g}_1^m, \mathbf{g}_2^m]$ es uniformemente acotada y como \mathcal{U}_{ad} es un subconjunto convexo y cerrado de $\tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_1) \times \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_4)$, existe un elemento $\tilde{\mathbf{s}} = [[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{w}}], [\tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{\mathbf{g}}_2]] \in \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}$ tal que para alguna subsucesión de $\{\mathbf{s}^m\}$, que por simplicidad será aún denotada por $\{\mathbf{s}^m\}$, se tiene

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}^m \rightarrow \tilde{\mathbf{u}} \text{ débilmente en } \mathbf{H}_\sigma^1, & \mathbf{w}^m \rightarrow \tilde{\mathbf{w}} \text{ débilmente en } \mathbf{H}^1(\Omega), \\ & \mathbf{g}_1^m \rightarrow \tilde{\mathbf{g}}_1 \text{ débilmente en } \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_1), & \mathbf{g}_2^m \rightarrow \tilde{\mathbf{g}}_2 \text{ débilmente en } \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_4), \end{aligned} \quad (3.12)$$

y considerando las inmersiones compactas dadas en Lema 1.22 y la Observación 1.21, se obtienen las convergencias fuertes

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}^m \rightarrow \tilde{\mathbf{u}} \text{ en } \mathbf{L}^2(\Omega), & \mathbf{w}^m \rightarrow \tilde{\mathbf{w}} \text{ en } \mathbf{L}^2(\Omega), \\ & \mathbf{g}_1^m \rightarrow \tilde{\mathbf{g}}_1 \text{ en } \mathbf{L}^2(\Gamma_1), & \mathbf{g}_2^m \rightarrow \tilde{\mathbf{g}}_2 \text{ en } \mathbf{L}^2(\Gamma_4). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Además, como $\mathbf{u}^m = \mathbf{g}_1^m$ sobre Γ_1 , $\mathbf{u}^m = \mathbf{u}_0$ sobre $\Gamma \setminus \Gamma_2^1$, $\mathbf{w}^m = \mathbf{g}_2^m$ sobre Γ_4 y $\mathbf{w}^m = \mathbf{w}_0$ sobre Γ_3 , entonces de (3.13) se sigue que $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{g}_1$ sobre Γ_1 , $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_0$ sobre $\Gamma \setminus \Gamma_2^1$, $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{g}_2$ sobre Γ_4 y $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w}_0$ sobre Γ_3 ; así $\tilde{\mathbf{s}}$ satisface las condiciones de frontera dadas en (3.5)-(3.6).

Análogamente a la prueba del Teorema 2.6, teniendo en cuenta (3.12) y (3.13), es posible pasar al límite en (3.8)-(3.9) cuando $m \rightarrow \infty$, y concluir que $\tilde{\mathbf{s}}$ es una solución del sistema (3.3)-(3.6). Consecuentemente, se tiene que $\tilde{\mathbf{s}} \in \mathcal{S}_{ad}$ y

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(\mathbf{s}^m) = \inf_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_{ad}} J(\mathbf{s}) \leq J(\tilde{\mathbf{s}}). \quad (3.14)$$

Por otro lado, como el funcional J es débilmente semicontinuo inferior sobre \mathcal{S}_{ad} , se tiene por definición que

$$J(\tilde{\mathbf{s}}) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} J(\mathbf{s}^m). \quad (3.15)$$

Por lo tanto, de (3.14) y (3.15), se concluye que

$$J[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{\mathbf{g}}_2] = J(\tilde{\mathbf{s}}) = \min_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_{ad}} J(\mathbf{s}),$$

por lo tanto $\tilde{\mathbf{s}} = [\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{\mathbf{g}}_2]$ es una solución óptima para el problema de control (3.2)-(3.6). \diamond

3.3 Condiciones necesarias de optimalidad de primer orden

Con el propósito de aplicar el método de Lagrange y derivar condiciones necesarias de optimalidad de primer orden para el problema (3.2)-(3.6), se define el siguiente espacio de Banach

$$\mathbb{Y} = \mathbb{X}' \times \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_2^2) \times \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma),$$

y observando (3.3)-(3.6) se define el operador $\mathbb{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4) : \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad} \rightarrow \mathbb{Y}$, donde

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 : \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad} &\rightarrow \mathbf{H}'_{\sigma}, & \mathbf{F}_2 : \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad} &\rightarrow \mathbf{H}^{-1}(\Omega), \\ \mathbf{F}_3 : \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad} &\rightarrow \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_2^2) & \mathbf{F}_4 : \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad} &\rightarrow \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma), \end{aligned}$$

los cuales en cada punto $\mathbf{r} = [[\mathbf{u}, \mathbf{w}], [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]] \in \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}$ son definidos por:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}_1(\mathbf{r}), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_{\sigma}} &= 2\nu_1(D(\mathbf{u}), D(\mathbf{v})) + 2\alpha\nu_1 \int_{\Gamma_2^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Gamma + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v}) - 2\nu_r(\text{rot} \mathbf{w}, \mathbf{v}) \\ &\quad - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_{\sigma}} \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_{\sigma}^1, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}_2(\mathbf{r}), \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}} &= \nu_2(\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{z}) + \nu_3(\text{div} \mathbf{w}, \text{div} \mathbf{z}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{z}) + 4\nu_r(\mathbf{w}, \mathbf{z}) - 2\nu_r(\text{rot} \mathbf{u}, \mathbf{z}) \\ &\quad - \langle \mathbf{g}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}} \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{F}_3(\mathbf{r}) = \mathbf{u}|_{\Gamma \setminus \Gamma_2^2} - \mathbf{u} \mathbf{g}_1, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{F}_4(\mathbf{r}) = \mathbf{w}|_{\Gamma} - \mathbf{w} \mathbf{g}_2. \quad (3.19)$$

Así, el problema de control (3.2)-(3.6) es equivalente a: Hallar $\mathbf{r} = [[\mathbf{u}, \mathbf{w}], [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]] \in \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}$ que minimice el funcional

$$\begin{aligned} J[\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] &= \frac{\beta_1}{2} \|\text{rot} \mathbf{u} - \mathbf{u}_d\|^2 + \frac{\beta_2 \nu}{2} \|\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}\|^2 + \frac{\beta_3}{p} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_b\|_p^p + \frac{\beta_4}{q} \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_d\|_q^q \\ &\quad + \frac{\beta_5}{2} \|\mathbf{g}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 + \frac{\beta_6}{2} \|\mathbf{g}_2\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_4)}^2, \end{aligned} \quad (3.20)$$

sujeto a $\mathbb{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, esto es

$$\langle \mathbf{F}_1(\mathbf{r}), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} = 0, \quad \langle \mathbf{F}_2(\mathbf{r}), \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} = 0, \quad \mathbf{F}_3(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}_4(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad \forall [\mathbf{v}, \mathbf{z}] \in \mathbb{X}. \quad (3.21)$$

Para garantizar la existencia de multiplicadores de Lagrange se probará que el problema de control óptimo (3.20)-(3.21) satisface las condiciones del Teorema 1.45. Los resultados se establecen en los siguientes lemas.

Lema 3.2 *El operador \mathbb{F} , definido en (3.16)-(3.19), es Fréchet diferenciable con respecto a $\mathbf{r} = [[\mathbf{u}, \mathbf{w}], [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]] \in \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}$. Además, en un punto arbitrario $\tilde{\mathbf{r}} = [\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{\mathbf{g}}_2]$ la derivada de Fréchet de \mathbb{F} con respecto a \mathbf{r} es el operador lineal y acotado $\mathbb{F}_{\mathbf{r}}(\tilde{\mathbf{r}}) : \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad} \rightarrow \mathbb{Y}$ tal que en cada punto $\mathbf{t} = [\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\chi}] \in \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}$ con $\boldsymbol{\phi} = [\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}]$ y $\boldsymbol{\chi} = [\boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{\tau}]$ es definido por:*

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}_{1\mathbf{r}}(\tilde{\mathbf{r}})\mathbf{t}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} &= 2\nu_1(D(\boldsymbol{\varphi}), D(\mathbf{v})) + 2\alpha\nu_1 \int_{\Gamma_2^2} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{v} d\Gamma + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \\ &\quad - 2\nu_r(\text{rot } \boldsymbol{\psi}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}_{2\mathbf{r}}(\tilde{\mathbf{r}})\mathbf{t}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}} &= \nu_2(\nabla \boldsymbol{\psi}, \nabla \mathbf{z}) + \nu_3(\text{div } \boldsymbol{\psi}, \text{div } \mathbf{z}) + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}, \mathbf{z}) + (\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{z}) \\ &\quad + 4\nu_r(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{z}) - 2\nu_r(\text{rot } \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{F}_{3\mathbf{r}}(\tilde{\mathbf{r}})\mathbf{t} = \boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma \setminus \Gamma_2^2} - \mathcal{B}_1 \boldsymbol{\varrho}, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{F}_{4\mathbf{r}}(\tilde{\mathbf{r}})\mathbf{t} = \boldsymbol{\psi}|_\Gamma - \mathcal{B}_2 \boldsymbol{\tau}, \quad (3.25)$$

donde $\mathcal{B}_1 \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_1), \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_2^2))$ y $\mathcal{B}_2 \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_4), \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma))$ son definidos por

$$\mathcal{B}_1 \boldsymbol{\varrho} = \begin{cases} \boldsymbol{\varrho} & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \mathbf{0} & \text{sobre } \Gamma_2^2, \end{cases} \quad y \quad \mathcal{B}_2 \boldsymbol{\tau} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{sobre } \Gamma_3, \\ \boldsymbol{\tau} & \text{sobre } \Gamma_4. \end{cases} \quad (3.26)$$

Demostración: Desde la definición de \mathbf{F}_1 dada en (3.16) y $\mathbf{t} = [\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{\tau}]$, se tiene

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}_1(\tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{t}), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} - \langle \mathbf{F}_1(\tilde{\mathbf{r}}), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} &= 2\nu_1(D(\boldsymbol{\varphi}), D(\mathbf{v})) + 2\alpha\nu_1 \int_{\Gamma_2^2} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{v} d\Gamma + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}) \\ &\quad + (\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}) - 2\nu_r(\text{rot } \boldsymbol{\psi}, \mathbf{v}), \end{aligned}$$

denotando

$$\langle \mathcal{G}(\tilde{\mathbf{r}})\mathbf{t}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} = 2\nu_1(D(\boldsymbol{\varphi}), D(\mathbf{v})) + 2\alpha\nu_1 \int_{\Gamma_2^2} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{v} d\Gamma + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - 2\nu_r(\text{rot } \boldsymbol{\psi}, \mathbf{v})$$

se tiene que

$$\langle \mathbf{F}_1(\tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{t}), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} - \langle \mathbf{F}_1(\tilde{\mathbf{r}}), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} - \langle \mathcal{G}(\tilde{\mathbf{r}})\mathbf{t}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} = (\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}). \quad (3.27)$$

Usando la desigualdad de Hölder, observando (1.30) y (1.33), se obtiene

$$|(\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v})| \leq \|\boldsymbol{\varphi}\|_3 \|\nabla \mathbf{v}\| \|\boldsymbol{\varphi}\|_6 \leq C\tilde{C} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{H}_1^2}^2 \|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1},$$

luego, (3.27) implica

$$|\langle \mathbf{F}_1(\tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{t}), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} - \langle \mathbf{F}_1(\tilde{\mathbf{r}}), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} - \langle \mathcal{G}(\tilde{\mathbf{r}})\mathbf{t}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma}| \leq C\tilde{C} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{H}_1^2}^2 \|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1},$$

así,

$$\sup_{\|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} \leq 1} |\langle \mathbf{F}_1(\tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{t}), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} - \langle \mathbf{F}_1(\tilde{\mathbf{r}}), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} - \langle \mathcal{G}(\tilde{\mathbf{r}})\mathbf{t}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma}| \leq C\tilde{C} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{H}_1^2}^2,$$

y se concluye

$$\|\mathbf{F}_1(\tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{t}) - \mathbf{F}_1(\tilde{\mathbf{r}}) - \mathcal{G}(\tilde{\mathbf{r}})\mathbf{t}\|_{\mathbf{H}'_\sigma} \leq C\tilde{C}\|\varphi\|_{\mathbf{H}^1_\sigma}^2 \leq C\tilde{C}\|\mathbf{t}\|_{\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}}^2. \quad (3.28)$$

Entonces, se obtiene

$$\lim_{\|\mathbf{t}\|_{\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}} \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{F}_1(\tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{t}) - \mathbf{F}_1(\tilde{\mathbf{r}}) - \mathcal{G}(\tilde{\mathbf{r}})\mathbf{t}\|_{\mathbf{H}'_\sigma}}{\|\mathbf{t}\|_{\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}}} \leq \lim_{\|\mathbf{t}\|_{\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}} \rightarrow 0} C\tilde{C}\|\mathbf{t}\|_{\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}} = 0. \quad (3.29)$$

Por lo tanto, de (3.29) y la Definición 1.25 se obtiene (3.22). La igualdad (3.23) se obtiene de manera análoga.

Por otro lado, desde la definición de \mathbf{F}_3 dada en (3.18), se tiene

$$\mathbf{F}_3(\tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{t}) - \mathbf{F}_3(\tilde{\mathbf{r}}) = (\tilde{\mathbf{u}} + \varphi)|_{\Gamma \setminus \Gamma_2^2} - \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{g}}_1 + \varrho) - (\tilde{\mathbf{u}}|_{\Gamma \setminus \Gamma_2^2} - \tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{g}}_1) = \varphi|_{\Gamma \setminus \Gamma_2^2} - (\tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{g}}_1 + \varrho) - \tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{g}}_1). \quad (3.30)$$

Ahora, por la definición (3.1) y (3.26), resulta $\tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{g}}_1 + \varrho) - \tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{g}}_1 = \mathcal{B}_1\varrho$, así, (3.30) implica

$$\mathbf{F}_3(\tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{t}) - \mathbf{F}_3(\tilde{\mathbf{r}}) = \varphi|_{\Gamma \setminus \Gamma_2^2} - \mathcal{B}_1(\varrho),$$

entonces se concluye

$$\lim_{\|\mathbf{t}\|_{\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}} \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{F}_3(\tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{t}) - \mathbf{F}_3(\tilde{\mathbf{r}}) - (\varphi|_{\Gamma \setminus \Gamma_2^2} - \mathcal{B}_1(\varrho))\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_2^2)}}{\|\mathbf{t}\|_{\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}}} = 0,$$

y en consecuencia, de la Definición 1.25, se sigue (3.24). La igualdad (3.25) es obtenida de manera análoga. \diamond

Lema 3.3 *El funcional J , definido en (3.20), es Fréchet diferenciable con respecto a $\mathbf{r} = [[\mathbf{u}, \mathbf{w}], [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]] \in \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}$. Además, en un punto arbitrario $\tilde{\mathbf{r}} = [\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{\mathbf{g}}_2]$ la derivada de J con respecto a \mathbf{r} es el funcional lineal y acotado $J_{\tilde{\mathbf{r}}}(\tilde{\mathbf{r}}) : \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que en cada punto $\mathbf{t} = [\varphi, \chi] \in \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}$ con $\varphi = [\varphi, \psi]$ y $\chi = [\varrho, \tau]$ es definido por:*

$$\begin{aligned} J_{\tilde{\mathbf{r}}}(\tilde{\mathbf{r}})\mathbf{t} &= \beta_1(\text{rot}\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d, \text{rot}\varphi) + 4\beta_2\nu(D(\tilde{\mathbf{u}}), D(\varphi)) + \beta_3(\text{sgn}(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b)|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b|^{p-1}, \varphi) \\ &\quad + \beta_4(\text{sgn}(\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d)|\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d|^{q-1}, \psi) + \beta_5 \int_{\Gamma_1} \tilde{\mathbf{g}}_1 \cdot \varrho \, d\Gamma + \beta_6 \int_{\Gamma_4} \tilde{\mathbf{g}}_2 \cdot \tau \, d\Gamma, \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde $D(\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{\nabla\tilde{\mathbf{u}} + \nabla^T\tilde{\mathbf{u}}}{2}$ y la i -ésima componente del vector $\text{sgn}(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b)|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b|^{p-1}$ es

$$(\text{sgn}(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b)|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b|^{p-1})_i = \text{sgn}(\tilde{u}_i - u_{ib})|\tilde{u}_i - u_{ib}|^{p-1}.$$

Demostración: El funcional J definido en (3.20) se reescribe como

$$J(\tilde{\mathbf{r}}) = J[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{\mathbf{g}}_2] = J_1(\tilde{\mathbf{u}}) + J_2(\tilde{\mathbf{u}}) + J_3(\tilde{\mathbf{w}}) + J_4(\tilde{\mathbf{g}}_1) + J_5(\tilde{\mathbf{g}}_2)$$

con

$$\begin{aligned} J_1(\tilde{\mathbf{u}}) &= \frac{\beta_1}{2} \|\text{rot}\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d\|^2 + \frac{\beta_2\nu}{2} \|\nabla\tilde{\mathbf{u}} + \nabla^T\tilde{\mathbf{u}}\|^2, & J_2(\tilde{\mathbf{u}}) &= \frac{\beta_3}{p} \|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b\|_p^p, \\ J_3(\tilde{\mathbf{w}}) &= \frac{\beta_4}{q} \|\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d\|_q^q, & J_4(\tilde{\mathbf{g}}_1) &= \frac{\beta_5}{2} \|\tilde{\mathbf{g}}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2, & J_5(\tilde{\mathbf{g}}_2) &= \frac{\beta_6}{2} \|\tilde{\mathbf{g}}_2\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_4)}^2, \end{aligned}$$

entonces, si los J_i son Fréchet diferenciables se deduce que J es Fréchet diferenciable y la derivada de J con respecto a \mathbf{r} en la dirección $\mathbf{t} = [\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{\tau}]$ satisface

$$J_{\mathbf{r}}(\tilde{\mathbf{r}})\mathbf{t} = J_{1\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{u}})\boldsymbol{\varphi} + J_{2\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{u}})\boldsymbol{\varphi} + J_{3w}(\tilde{\mathbf{w}})\boldsymbol{\psi} + J_{4\mathbf{g}_1}(\tilde{\mathbf{g}}_1)\boldsymbol{\varrho} + J_{5\mathbf{g}_2}(\tilde{\mathbf{g}}_2)\boldsymbol{\tau}. \quad (3.32)$$

A continuación se demuestra que los funcionales J_i son Fréchet diferenciables.

El funcional $J_1 : \mathbf{H}_\sigma^1 \rightarrow \mathbb{R}$ es Fréchet diferenciable con respecto a $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\sigma^1$ y en un punto arbitrario $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}_\sigma^1$ la derivada de Fréchet de J_1 en la dirección $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}_\sigma^1$ es el funcional lineal y acotado $J_{1\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{u}}) : \mathbf{H}_\sigma^1 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J_{1\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{u}})\boldsymbol{\varphi} = \beta_1(\text{rot}\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d, \text{rot}\boldsymbol{\varphi}) + 2\beta_2\nu(D(\tilde{\mathbf{u}}), D(\boldsymbol{\varphi})). \quad (3.33)$$

En efecto, de la definición de J_1 y teniendo en cuenta que $\nabla\tilde{\mathbf{u}} + \nabla^T\tilde{\mathbf{u}} = 2D(\tilde{\mathbf{u}})$, se tiene

$$\begin{aligned} J_1(\tilde{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varphi}) &= \frac{\beta_1}{2}\|\text{rot}(\tilde{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varphi}) - \mathbf{u}_d\|^2 + \frac{\beta_2\nu}{2}\|\nabla(\tilde{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varphi}) + \nabla^T(\tilde{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varphi})\|^2 \\ &= \frac{\beta_1}{2}\|\text{rot}\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d + \text{rot}\boldsymbol{\varphi}\|^2 + 2\beta_2\nu\|D(\tilde{\mathbf{u}}) + D(\boldsymbol{\varphi})\|^2 \\ &= \frac{\beta_1}{2}(\text{rot}\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d + \text{rot}\boldsymbol{\varphi}, \text{rot}\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d + \text{rot}\boldsymbol{\varphi}) + 2\beta_2\nu(D(\tilde{\mathbf{u}}) + D(\boldsymbol{\varphi}), D(\tilde{\mathbf{u}}) + D(\boldsymbol{\varphi})) \\ &= \frac{\beta_1}{2}\|\text{rot}\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d\|^2 + \beta_1(\text{rot}\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d, \text{rot}\boldsymbol{\varphi}) + \frac{\beta_1}{2}\|\text{rot}\boldsymbol{\varphi}\|^2 + 2\beta_2\nu\|D(\tilde{\mathbf{u}})\|^2 \\ &\quad + 4\beta_2\nu(D(\tilde{\mathbf{u}}), D(\boldsymbol{\varphi})) + 2\beta_2\nu\|D(\boldsymbol{\varphi})\|^2 \\ &= J_1(\tilde{\mathbf{u}}) + \beta_1(\text{rot}\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d, \text{rot}\boldsymbol{\varphi}) + 4\beta_2\nu(D(\tilde{\mathbf{u}}), D(\boldsymbol{\varphi})) + \frac{\beta_1}{2}\|\text{rot}\boldsymbol{\varphi}\|^2 + 2\beta_2\nu\|D(\boldsymbol{\varphi})\|^2, \end{aligned}$$

entonces se sigue

$$J_1(\tilde{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varphi}) - J_1(\tilde{\mathbf{u}}) - [\beta_1(\text{rot}\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d, \text{rot}\boldsymbol{\varphi}) + 4\beta_2\nu(D(\tilde{\mathbf{u}}), D(\boldsymbol{\varphi}))] = \frac{\beta_1}{2}\|\text{rot}\boldsymbol{\varphi}\|^2 + 2\beta_2\nu\|D(\boldsymbol{\varphi})\|^2,$$

y observando que

$$\|\text{rot}\boldsymbol{\varphi}\| \leq \sqrt{2}\|\nabla\boldsymbol{\varphi}\| \leq \sqrt{2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1}, \quad \|D(\boldsymbol{\varphi})\| = \frac{1}{2}\|\nabla\boldsymbol{\varphi} + \nabla^T\boldsymbol{\varphi}\| \leq \|\nabla\boldsymbol{\varphi}\| \leq \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1},$$

se obtiene

$$|J_1(\tilde{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varphi}) - J_1(\tilde{\mathbf{u}}) - [\beta_1(\text{rot}\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d, \text{rot}\boldsymbol{\varphi}) + 4\beta_2\nu(D(\tilde{\mathbf{u}}), D(\boldsymbol{\varphi}))]| \leq (\beta_1 + 2\beta_2\nu)\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1}^2.$$

Así,

$$\lim_{\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1} \rightarrow 0} \frac{|J_1(\tilde{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varphi}) - J_1(\tilde{\mathbf{u}}) - [\beta_1(\text{rot}\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d, \text{rot}\boldsymbol{\varphi}) + 4\beta_2\nu(D(\tilde{\mathbf{u}}), D(\boldsymbol{\varphi}))]|}{\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1}} \leq C \lim_{\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1} \rightarrow 0} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1} = 0,$$

lo cual implica que J_1 es Fréchet diferenciable y se sigue (3.33).

El funcional $J_2 : \mathbf{H}_\sigma^1 \rightarrow \mathbb{R}$ es Fréchet diferenciable con respecto a $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\sigma^1$ y en un punto arbitrario $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}_\sigma^1$ la derivada de Fréchet de J_2 en la dirección $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}_\sigma^1$ es el funcional lineal y acotado $J_{2\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{u}}) : \mathbf{H}_\sigma^1 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J_{2\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{u}})\boldsymbol{\varphi} = \beta_3(\text{sgn}(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b)|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b|^{p-1}, \boldsymbol{\varphi}). \quad (3.34)$$

Con $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$ y $\mathbf{u}_b = (u_{1b}, u_{2b}, u_{3b})$, de la definición de J_2 se tiene

$$J_2(\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{\beta_3}{p} \|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b\|_p^p = \frac{\beta_3}{p} \sum_{i=1}^3 \|\tilde{u}_i - u_{ib}\|_p^p,$$

entonces, observando (1.6) y considerando $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, se deduce

$$J_{2\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{u}})\boldsymbol{\varphi} = \frac{\beta_3}{p} \sum_{i=1}^3 p(\operatorname{sgn}(\tilde{u}_i - u_{ib})|\tilde{u}_i - u_{ib}|^{p-1}, \varphi_i) = \beta_3(\operatorname{sgn}(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b)|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b|^{p-1}, \boldsymbol{\varphi}).$$

El funcional $J_3 : \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es Fréchet diferenciable con respecto a $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ y en un punto arbitrario $\tilde{\mathbf{w}} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ la derivada de Fréchet de J_3 en la dirección $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ es el funcional lineal y acotado $J_{3\mathbf{w}}(\tilde{\mathbf{w}}) : \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J_{3\mathbf{w}}(\tilde{\mathbf{w}})\boldsymbol{\psi} = \beta_4(\operatorname{sgn}(\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d)|\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d|^{q-1}, \boldsymbol{\psi}). \quad (3.35)$$

La demostración es similar que para la derivada de Fréchet del funcional J_2 .

El funcional $J_4 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ es Fréchet diferenciable con respecto a $\mathbf{g}_1 \in \mathcal{U}_1$ y en un punto arbitrario $\tilde{\mathbf{g}}_1 \in \mathcal{U}_1$ la derivada de Fréchet de J_4 en la dirección $\boldsymbol{\varrho} \in \mathcal{U}_1$ es el funcional lineal y acotado $J_{4\mathbf{g}_1}(\tilde{\mathbf{g}}_1) : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J_{4\mathbf{g}_1}(\tilde{\mathbf{g}}_1)\boldsymbol{\varrho} = \beta_5 \int_{\Gamma_1} \tilde{\mathbf{g}}_1 \cdot \boldsymbol{\varrho} \, d\Gamma. \quad (3.36)$$

En efecto, de la definición de J_4 , se tiene

$$\begin{aligned} J_4(\tilde{\mathbf{g}}_1 + \boldsymbol{\varrho}) &= \frac{\beta_5}{2} \|\tilde{\mathbf{g}}_1 + \boldsymbol{\varrho}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 = \frac{\beta_5}{2} \langle \tilde{\mathbf{g}}_1 + \boldsymbol{\varrho}, \tilde{\mathbf{g}}_1 + \boldsymbol{\varrho} \rangle_{\Gamma_1} \\ &= \frac{\beta_5}{2} \langle \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{\mathbf{g}}_1 \rangle_{\Gamma_1} + \beta_5 \langle \tilde{\mathbf{g}}_1, \boldsymbol{\varrho} \rangle_{\Gamma_1} + \frac{\beta_5}{2} \langle \boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{\varrho} \rangle_{\Gamma_1} \\ &= J_4(\tilde{\mathbf{g}}_1) + \beta_5 \int_{\Gamma_1} \tilde{\mathbf{g}}_1 \cdot \boldsymbol{\varrho} \, d\Gamma + \frac{\beta_5}{2} \|\boldsymbol{\varrho}\|_{\mathcal{U}_1}^2, \end{aligned}$$

de modo que

$$|J_4(\tilde{\mathbf{g}}_1 + \boldsymbol{\varrho}) - J_4(\tilde{\mathbf{g}}_1) - \beta_5 \int_{\Gamma_1} \tilde{\mathbf{g}}_1 \cdot \boldsymbol{\varrho} \, d\Gamma| = \frac{\beta_5}{2} \|\boldsymbol{\varrho}\|_{\mathcal{U}_1}^2.$$

Así,

$$\lim_{\|\boldsymbol{\varrho}\|_{\mathcal{U}_1} \rightarrow 0} \frac{|J_4(\tilde{\mathbf{g}}_1 + \boldsymbol{\varrho}) - J_4(\tilde{\mathbf{g}}_1) - \beta_5 \int_{\Gamma_1} \tilde{\mathbf{g}}_1 \cdot \boldsymbol{\varrho} \, d\Gamma|}{\|\boldsymbol{\varrho}\|_{\mathcal{U}_1}} = \frac{\beta_5}{2} \lim_{\|\boldsymbol{\varrho}\|_{\mathcal{U}_1} \rightarrow 0} \|\boldsymbol{\varrho}\|_{\mathcal{U}_1} = 0,$$

lo que implica que J_4 es Fréchet diferenciable y se sigue (3.36).

El funcional $J_5 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ es Fréchet diferenciable con respecto a $\mathbf{g}_2 \in \mathcal{U}_2$ y en un punto arbitrario $\tilde{\mathbf{g}}_2 \in \mathcal{U}_2$ la derivada de Fréchet de J_5 en la dirección $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{U}_2$ es el funcional lineal y acotado $J_{5\mathbf{g}_2}(\tilde{\mathbf{g}}_2) : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J_{5\mathbf{g}_2}(\tilde{\mathbf{g}}_2)\boldsymbol{\tau} = \beta_6 \int_{\Gamma_4} \tilde{\mathbf{g}}_2 \cdot \boldsymbol{\tau} \, d\Gamma. \quad (3.37)$$

La demostración es similar que para la derivada del funcional J_4 .

Finalmente, reemplazando (3.33)-(3.37) en (3.32) se obtiene (3.31). \diamond

Observación 3.4 *Nótese que para $\tilde{\mathbf{r}} = [\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{\mathbf{g}}_2]$, $\mathbf{x} = [\mathbf{u}, \mathbf{w}]$ y $\phi = [\varphi, \psi]$, se tiene:*

$$\text{Si } \mathbf{t} = [\varphi, \psi, \mathbf{0}, \mathbf{0}], \text{ entonces } \mathbb{F}_{\tilde{\mathbf{r}}}(\tilde{\mathbf{r}})\mathbf{t} \equiv \mathbb{F}_{\mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{r}})\phi \text{ y } J_{\tilde{\mathbf{r}}}(\tilde{\mathbf{r}})\mathbf{t} \equiv J_{\mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{r}})\phi.$$

$$\text{Si } \mathbf{t} = [\varphi, \psi, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\tau}], \text{ entonces } \mathbf{F}_{1\tilde{\mathbf{r}}}(\tilde{\mathbf{r}})\mathbf{t} = \mathbf{F}_{1\mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{r}})\phi \text{ y } \mathbf{F}_{2\tilde{\mathbf{r}}}(\tilde{\mathbf{r}})\mathbf{t} = \mathbf{F}_{2\mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{r}})\phi.$$

Lema 3.5 *El funcional J es convexo con respecto a \mathcal{U}_{ad} y el operador \mathbb{F} es afín sobre \mathcal{U}_{ad} .*

Demostración: Los conjuntos \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 son convexos, las normas $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}$ y $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_4)}$ son convexas, entonces el funcional J definido en (3.20) es convexo con respecto al conjunto \mathcal{U}_{ad} . Puesto que el conjunto \mathcal{U}_{ad} es convexo y el operador \mathbb{F} depende linealmente sobre los controles $[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] \in \mathcal{U}_{ad}$, se tiene que el operador \mathbb{F} es afín sobre \mathcal{U}_{ad} . \diamond

Lema 3.6 *El rango del operador $\mathbb{F}_{\mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{r}}) : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{Y}$, donde $\mathbf{x} = [\mathbf{u}, \mathbf{w}] \in \mathbb{H}$, es cerrado con codimensión finita en \mathbb{Y} .*

Demostración: Considerando la Observación 3.4, para cada $\phi = [\varphi, \psi] \in \mathbb{H}$ es posible reescribir el operador $\mathbb{F}_{\mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{r}})$ como sigue

$$\mathbb{F}_{\mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{r}})\phi = \mathcal{I}(\phi) + \mathcal{K}(\phi), \quad (3.38)$$

donde los operadores lineales

$$\mathcal{I} = [\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathbf{F}_{3\mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{r}}), \mathbf{F}_{4\mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{r}})] : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{Y} \quad \text{y} \quad \mathcal{K} = [\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathbf{0}, \mathbf{0}] : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{Y}$$

son definidos por

$$\langle \mathcal{I}_1(\phi), \mathbf{v} \rangle = 2\nu_1(D(\varphi), D(\mathbf{v})) + 2\alpha\nu_1 \int_{\Gamma_2^2} \varphi \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_{\sigma}^1, \quad (3.39)$$

$$\langle \mathcal{I}_2(\phi), \mathbf{z} \rangle = \nu_2(\nabla\psi, \nabla\mathbf{z}) + \nu_3(\text{div } \psi, \text{div } \mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad (3.40)$$

$$\mathbf{F}_{3\mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{r}})\phi = \varphi|_{\Gamma \setminus \Gamma_2^2}, \quad (3.41)$$

$$\mathbf{F}_{4\mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{r}})\phi = \psi|_{\Gamma}, \quad (3.42)$$

y por

$$\langle \mathcal{K}_1(\phi), \mathbf{v} \rangle = (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla\varphi, \mathbf{v}) + (\varphi \cdot \nabla\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - 2\nu_r(\text{rot } \psi, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_{\sigma}^1, \quad (3.43)$$

$$\langle \mathcal{K}_2(\phi), \mathbf{z} \rangle = (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla\psi, \mathbf{z}) + 4\nu_r(\psi, \mathbf{z}) - 2\nu_r(\text{rot } \varphi, \mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \quad (3.44)$$

Con el propósito de aplicar el Lema 1.30 y la Proposición 1.31, a continuación se prueba que \mathcal{I} es un isomorfismo y que el operador \mathcal{K} es compacto.

\mathcal{I} es un isomorfismo.

El operador \mathcal{I} es inyectivo. Sea $\phi = [\varphi, \psi] \in \mathbb{H}$ tal que $\mathcal{I}(\phi) = \mathbf{0}$, entonces desde (3.39)-(3.42) se obtiene

$$2\nu_1(D(\varphi), D(\mathbf{v})) + 2\alpha\nu_1 \int_{\Gamma_2^2} \varphi \cdot \mathbf{v} d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_{\sigma}^1, \quad (3.45)$$

$$\nu_2(\nabla\psi, \nabla\mathbf{z}) + \nu_3(\text{div } \psi, \text{div } \mathbf{z}) = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad (3.46)$$

$$\psi = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma, \quad \varphi = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma \setminus \Gamma_2^2. \quad (3.47)$$

De (3.47) se tiene que $\varphi \in \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1$ y $\psi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, entonces sustituyendo $\mathbf{v} = \varphi$ en (3.45) y $\mathbf{z} = \psi$ en (3.46), se obtiene que

$$\|\varphi\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1(\Omega)}^2 + \alpha \|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_2^2)}^2 = 0 \quad \text{y} \quad \nu_2 \|\psi\|_{\mathbf{H}_0^1}^2 + \nu_3 \|\operatorname{div} \psi\|^2 = 0,$$

lo que implica que $\phi = [\varphi, \psi] = \mathbf{0}$ en Ω y en consecuencia el operador \mathcal{I} es inyectivo.

El operador \mathcal{I} es sobreyectivo. Sea $[\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}, \varphi_0, \psi_0]$ un elemento cualquiera de \mathbb{Y} , se verificará que existe $\phi = [\varphi, \psi] \in \mathbb{H}$ tal que $\mathcal{I}(\phi) = [\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}, \varphi_0, \psi_0]$, es decir, que satisfaga el siguiente sistema

$$2\nu_1(D(\varphi), D(\mathbf{v})) + 2\alpha\nu_1 \int_{\Gamma_2^2} \varphi \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma = (\tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1, \quad (3.48)$$

$$\varphi = \varphi_0 \quad \text{sobre } \Gamma \setminus \Gamma_2^2, \quad (3.49)$$

$$\nu_2(\nabla \psi, \nabla \mathbf{z}) + \nu_3(\operatorname{div} \psi, \operatorname{div} \mathbf{z}) = (\tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad (3.50)$$

$$\psi = \psi_0 \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (3.51)$$

Como $[\varphi_0, \psi_0] \in \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_2^2) \times \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, por el Lema 2.5, existe $\tilde{\phi} = [\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}] \in \mathbb{H}$ tal que $\tilde{\varphi} = \varphi_0$ sobre $\Gamma \setminus \Gamma_2^2$, $\tilde{\varphi} = \mathbf{0}$ sobre Γ_2^2 y $\tilde{\psi} = \psi_0$ sobre Γ . Entonces, denotando $\hat{\varphi} = \varphi - \tilde{\varphi} \in \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1$ y $\hat{\psi} = \psi - \tilde{\psi} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, luego sustituyendo $\varphi = \hat{\varphi} + \tilde{\varphi}$ en (3.48) y $\psi = \hat{\psi} + \tilde{\psi}$ en (3.50), se obtiene

$$2\nu_1(D(\hat{\varphi}), D(\mathbf{v})) + 2\alpha\nu_1 \int_{\Gamma_2^2} \hat{\varphi} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma = (\tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{v}) - 2\nu_1(D(\tilde{\varphi}), D(\mathbf{v})) - 2\alpha\nu_1 \int_{\Gamma_2^2} \tilde{\varphi} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma, \quad (3.52)$$

$$\nu_2(\nabla \hat{\psi}, \nabla \mathbf{z}) + \nu_3(\operatorname{div} \hat{\psi}, \operatorname{div} \mathbf{z}) = (\tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{z}) - \nu_2(\nabla \tilde{\psi}, \nabla \mathbf{z}) - \nu_3(\operatorname{div} \tilde{\psi}, \operatorname{div} \mathbf{z}). \quad (3.53)$$

Considerando una forma bilineal $a : \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1 \times \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1 \rightarrow \mathbb{R}$ y un funcional lineal $L_{\tilde{\varphi}} : \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1 \rightarrow \mathbb{R}$ definidos por

$$a(\hat{\varphi}, \mathbf{v}) = 2\nu_1(D(\hat{\varphi}), D(\mathbf{v})) + 2\alpha\nu_1 \int_{\Gamma_2^2} \hat{\varphi} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma,$$

$$L_{\tilde{\varphi}}(\mathbf{v}) = (\tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{v}) - 2\nu_1(D(\tilde{\varphi}), D(\mathbf{v})) - 2\alpha\nu_1 \int_{\Gamma_2^2} \tilde{\varphi} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1(\Omega),$$

resolver la ecuación (3.52) es equivalente a: hallar $\hat{\varphi} \in \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1$, tal que

$$a(\hat{\varphi}, \mathbf{v}) = L_{\tilde{\varphi}}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1. \quad (3.54)$$

- La forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es continua y coerciva:

Para todo $[\hat{\varphi}, \mathbf{v}] \in \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1 \times \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1$, usando la desigualdad de Hölder, se tiene

$$\begin{aligned} |a(\hat{\varphi}, \mathbf{v})| &\leq 2\nu_1 \|D(\hat{\varphi})\| \|D(\mathbf{v})\| + 2\alpha\nu_1 \left| \int_{\Gamma_2^2} \hat{\varphi} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \right| \\ &\leq 2\nu_1 \|\hat{\varphi}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} \|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} + 2\alpha\nu_1 C^2 \|\hat{\varphi}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} \|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} \\ &\leq 2\nu_1 (1 + \alpha C^2) \|\hat{\varphi}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} \|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

donde C es una constante tal que $\|\hat{\varphi}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \leq C \|\hat{\varphi}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}$. Así, (3.55) implica que $a(\cdot, \cdot)$ es continua.

Para todo $\hat{\varphi} \in \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1$, se tiene

$$a(\hat{\varphi}, \hat{\varphi}) = 2\nu_1 \|D(\hat{\varphi})\|^2 + 2\alpha\nu_1 \|\hat{\varphi}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_2)}^2 \geq 2\nu_1 \|\hat{\varphi}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}^2, \quad (3.56)$$

y en consecuencia, $a(\cdot, \cdot)$ es coerciva.

- EL funcional $L_{\tilde{\varphi}}$ es continuo:

Para todo $\mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1$ por la desigualdad de Hölder y la definición de $L_{\tilde{\varphi}}$, se tiene

$$\begin{aligned} |L_{\tilde{\varphi}}(\mathbf{v})| &\leq \|\tilde{\mathbf{f}}\|_{\mathbf{H}_\sigma} \|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} + 2\nu_1 \|D(\tilde{\varphi})\| \|D(\mathbf{v})\| + 2\alpha\nu_1 \|\tilde{\varphi}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \\ &\leq \left(\|\tilde{\mathbf{f}}\|_{\mathbf{H}_\sigma} + 2\nu_1 \|\tilde{\varphi}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1} + 2\alpha\nu_1 C \|\varphi_0\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \right) \|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

lo que implica que $L_{\tilde{\varphi}}$ es continuo.

Entonces, de (3.55)-(3.57) y el Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.23), se tiene que existe una única $\hat{\varphi} \in \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1$ satisfaciendo (3.54), en consecuencia $\hat{\varphi}$ es la única solución de (3.52). Así, $\varphi = \hat{\varphi} + \tilde{\varphi}$ es solución de (3.48)-(3.49). Similarmente, para demostrar la existencia de una solución $\hat{\psi}$ de (3.53) se aplica el Teorema de Lax-Milgram y luego se deduce la existencia de la solución $\psi = \hat{\psi} + \tilde{\psi}$ de (3.50)-(3.51).

Por lo tanto, se ha demostrado que para todo $[\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}, \varphi_0, \psi_0] \in \mathbb{Y}$ existe $[\varphi, \psi] \in \mathbf{H}$ tal que satisface (3.48)-(3.51), lo cual implica que \mathcal{I} es sobreyectivo, y consecuentemente, se concluye que el operador \mathcal{I} es un isomorfismo.

\mathcal{K} es un operador compacto.

Para probar que el operador \mathcal{K} es compacto, se verificará que los operadores \mathcal{K}_1 y \mathcal{K}_2 definidos en (3.43) y (3.44) son compactos. Sea $\{\phi_m\}_{m \geq 1} = \{[\varphi_m, \psi_m]\}_{m \geq 1}$ una sucesión débilmente convergente en \mathbb{H} , esto es, existe un elemento $\phi = [\varphi, \psi] \in \mathbb{H}$ tal que

$$\varphi_m \rightarrow \varphi \text{ débilmente en } \mathbf{H}_\sigma^1, \quad \psi_m \rightarrow \psi \text{ débilmente en } \mathbf{H}^1(\Omega).$$

Como $\mathbb{H} \subset \mathbf{H}_\sigma^1 \times \mathbf{H}^1(\Omega)$ y las inmersiones $\mathbf{H}_\sigma^1 \hookrightarrow \mathbf{L}^4(\Omega)$, $\mathbf{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^4(\Omega)$ son compactas, se tienen las convergencias fuertes

$$\varphi_m \rightarrow \varphi \text{ en } \mathbf{L}^4(\Omega), \quad \psi_m \rightarrow \psi \text{ en } \mathbf{L}^4(\Omega). \quad (3.58)$$

Además, ϕ_m satisface las ecuaciones

$$\langle \mathcal{K}_1(\phi_m), \mathbf{v} \rangle = (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \varphi_m, \mathbf{v}) + (\varphi_m \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - 2\nu_r (\text{rot } \psi_m, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1, \quad (3.59)$$

$$\langle \mathcal{K}_2(\phi_m), \mathbf{z} \rangle = (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \psi_m, \mathbf{z}) + 4\nu_r (\psi_m, \mathbf{z}) - 2\nu_r (\text{rot } \varphi_m, \mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \quad (3.60)$$

Haciendo la diferencia entre (3.43) y (3.59), la diferencia entre (3.44) y (3.60), se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{K}_1(\phi_m) - \mathcal{K}_1(\phi), \mathbf{v} \rangle &= (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla (\varphi_m - \varphi), \mathbf{v}) + ((\varphi_m - \varphi) \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + 2\nu_r (\text{rot}(\psi_m - \psi), \mathbf{v}), \\ \langle \mathcal{K}_2(\phi_m) - \mathcal{K}_2(\phi), \mathbf{z} \rangle &= (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla (\psi_m - \psi), \mathbf{z}) + 4\nu_r (\psi_m - \psi, \mathbf{z}) + 2\nu_r (\text{rot}(\varphi_m - \varphi), \mathbf{z}), \end{aligned}$$

entonces, usando la desigualdad de Hölder, la desigualdad de Poincaré, (1.19), (1.33) y (2.7), se tiene

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{K}_1(\phi_m) - \mathcal{K}_1(\phi), \mathbf{v})| &\leq |(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \varphi_m - \varphi, \mathbf{v})| + |((\varphi_m - \varphi) \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})| + 2\nu_r |(\psi_m - \psi, \text{rot} \mathbf{v})| \\
&\leq \|\tilde{\mathbf{u}}\|_4 \|\nabla \mathbf{v}\| \|\varphi_m - \varphi\|_4 + \|\varphi_m - \varphi\|_4 \|\nabla \mathbf{v}\| \|\tilde{\mathbf{u}}\|_4 + 2\nu_r \|\psi_m - \psi\| \|\text{rot} \mathbf{v}\| \\
&\leq 2\tilde{C} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_4 \|\varphi_m - \varphi\|_4 \|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} + 2\sqrt{2}\nu_r \tilde{C} \|\psi_m - \psi\| \|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} \\
&\leq C(\|\varphi_m - \varphi\|_4 + \|\psi_m - \psi\|_4) \|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}, \tag{3.61}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{K}_2(\phi_m) - \mathcal{K}_2(\phi), \mathbf{z})| &\leq |(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{z}, \psi_m - \psi)| + 4\nu_r |(\psi_m - \psi, \mathbf{z})| + 2\nu_r |(\varphi_m - \varphi, \text{rot} \mathbf{z})| \\
&\leq \|\tilde{\mathbf{u}}\|_4 \|\nabla \mathbf{z}\| \|\psi_m - \psi\|_4 + 4\nu_r \|\psi_m - \psi\| \|\mathbf{z}\| + 2\nu_r \|\varphi_m - \varphi\| \|\text{rot} \mathbf{z}\| \\
&\leq \|\tilde{\mathbf{u}}\|_4 \|\psi_m - \psi\|_4 \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}_0^1} + 4\nu_r C \|\psi_m - \psi\| \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}_0^1} \\
&\quad + 2\sqrt{2}\nu_r \|\varphi_m - \varphi\| \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}_0^1} \\
&\leq C(\|\psi_m - \psi\|_4 + \|\varphi_m - \varphi\|_4) \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}_0^1}, \tag{3.62}
\end{aligned}$$

donde C es una constante que depende sólo de $\|\tilde{\mathbf{u}}\|_4$ y ν_r . Entonces, desde (3.61) y (3.61), se obtiene

$$\|\mathcal{K}_1(\phi_m) - \mathcal{K}_1(\phi)\|_{\mathbf{H}'_\sigma} = \sup_{\|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} \leq 1} |(\mathcal{K}_1(\phi_m) - \mathcal{K}_1(\phi), \mathbf{v})| \leq C(\|\varphi_m - \varphi\|_4 + \|\psi_m - \psi\|_4), \tag{3.63}$$

$$\|\mathcal{K}_2(\phi_m) - \mathcal{K}_2(\phi)\|_{\mathbf{H}^{-1}} = \sup_{\|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}_0^1} \leq 1} |(\mathcal{K}_2(\phi_m) - \mathcal{K}_2(\phi), \mathbf{z})| \leq C(\|\psi_m - \psi\|_4 + \|\varphi_m - \varphi\|_4). \tag{3.64}$$

Entonces, considerando (3.58) y tomando límite en (3.63)-(3.64) cuando $m \rightarrow \infty$, se tiene

$$\|\mathcal{K}_1(\phi_m) - \mathcal{K}_1(\phi)\|_{\mathbf{H}'_\sigma} \longrightarrow 0 \quad \text{y} \quad \|\mathcal{K}_2(\phi_m) - \mathcal{K}_2(\phi)\|_{\mathbf{H}^{-1}} \longrightarrow 0,$$

lo cual implica que los operadores \mathcal{K}_1 y \mathcal{K}_2 son compactos.

Por lo tanto, como \mathcal{I} es un isomorfismo y \mathcal{K} es compacto, considerando (3.38) y el Lema 1.30, se sigue que $\mathbf{F}_x(\tilde{\mathbf{r}}) : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{Y}$ es un operador de Fredholm, y entonces por la Proposición 1.31 se concluye que el rango del operador $\mathbf{F}_x(\tilde{\mathbf{r}})$ es cerrado y de codimensión finita en \mathbb{Y} . \diamond

Debido al Lema 3.2, Lema 3.3, Lema 3.5 y Lema 3.6, el operador \mathbb{F} y el funcional J definidos en (3.16)-(3.20) satisfacen las condiciones del Teorema 1.45, el cual garantiza la existencia de multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_0, [\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}], \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\vartheta}] \in \mathbb{R} \times \mathbb{X} \times \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{-1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_2^2) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ asociados al problema de control (3.20)-(3.21). Entonces, para $\boldsymbol{\lambda}$ y $\mathbf{r} = [[\mathbf{u}, \mathbf{w}], [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]] \in \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}$, se introduce el funcional de Lagrange

$$\mathcal{L} : \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad} \times \mathbb{R} \times \mathbb{X} \times \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{-1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_2^2) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R},$$

el cual es definido por

$$\mathcal{L}[\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}] = \lambda_0 J(\mathbf{r}) - \langle \mathbf{F}_1(\mathbf{r}), \boldsymbol{\eta} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} - \langle \mathbf{F}_2(\mathbf{r}), \boldsymbol{\xi} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}} - \langle \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{F}_3(\mathbf{r}) \rangle_{\Gamma \setminus \Gamma_2^2} - \langle \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{F}_4(\mathbf{r}) \rangle_\Gamma, \tag{3.65}$$

donde $\mathbf{F}_1(\mathbf{r}), \mathbf{F}_2(\mathbf{r}), \mathbf{F}_3(\mathbf{r}), \mathbf{F}_4(\mathbf{r})$ son definidos en (3.16)-(3.19) y $J(\mathbf{r})$ es dado en (3.20).

Del Lema 3.2, Lema 3.3 y Observación 3.4, se deduce que el funcional de Lagrange \mathcal{L} es Fréchet diferenciable con respecto a $\mathbf{x} = [\mathbf{u}, \mathbf{w}] \in \mathbb{H}$. Además, en un punto arbitrario $[\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}]$ la derivada de Fréchet de \mathcal{L} con respecto a \mathbf{x} es el funcional lineal y acotado

$$\mathcal{L}_x[\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}] : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que en cada punto $\phi = [\varphi, \psi] \in \mathbb{H}$ es definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x[\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}]\phi &= \lambda_0 J_x(\mathbf{r})\phi - \langle \mathbf{F}_{1x}(\mathbf{r})\phi, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\mathbf{H}'_v} - \langle \mathbf{F}_{2x}(\mathbf{r})\phi, \boldsymbol{\xi} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}} - \langle \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{F}_{3x}(\mathbf{r})\phi \rangle_{\Gamma \setminus \Gamma_2^2} \\ &\quad - \langle \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{F}_{4x}(\mathbf{r})\phi \rangle_{\Gamma}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

con $\mathbf{F}_{1x}(\mathbf{r})\phi$, $\mathbf{F}_{2x}(\mathbf{r})\phi$, $\mathbf{F}_{3x}(\mathbf{r})\phi$ y $\mathbf{F}_{4x}(\mathbf{r})\phi$ definidos en (3.22)-(3.25) cuando $\mathbf{t} = [\varphi, \psi, \mathbf{0}, \mathbf{0}]$ y $J_x(\mathbf{r})\phi$ definido en (3.31) cuando $\mathbf{t} = [\varphi, \psi, \mathbf{0}, \mathbf{0}]$.

Resultados acerca de condiciones de optimalidad son dados en el siguiente teorema.

Teorema 3.7 *Sea $\tilde{\mathbf{s}} = [\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{\mathbf{g}}_2] \in \mathcal{S}_{ad}$ una solución óptima del problema de control (3.20)-(3.21) con J y \mathbb{F} satisfaciendo el Lema 3.2, Lema 3.3, Lema 3.5 y Lema 3.6. Entonces, existe un multiplicador de Lagrange no nulo $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_0, [\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}], \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\vartheta}] \in \mathbb{R} \times \mathbb{X} \times \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{-1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_2^2) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ tal que satisface la ecuación de Lagrange-Euler*

$$\mathcal{L}_x[\tilde{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\lambda}]\phi = 0 \quad \forall \phi \in \mathbb{H} \quad (3.67)$$

y el principio del mínimo

$$\mathcal{L}[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{\mathbf{g}}_2, \boldsymbol{\lambda}] = \min_{[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] \in \mathcal{U}_{ad}} \mathcal{L}[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \boldsymbol{\lambda}], \quad (3.68)$$

donde el funcional de Lagrange \mathcal{L} es definido en (3.65).

Demostración:

Del Lema 3.2, Lema 3.3, Lema 3.5 y Lema 3.6, se concluye que el funcional J y el operador \mathbb{F} del problema (3.20) satisfacen las hipótesis del Teorema 1.45. Por lo tanto, existe un multiplicador de Lagrange no nulo $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_0, [\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}], \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\vartheta}] \in \mathbb{R} \times \mathbb{X} \times \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{-1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_2^2) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ tal que $\mathcal{L}[\tilde{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\lambda}]$ definido en (3.65) y $\mathcal{L}_x[\tilde{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\lambda}]$ definido en (3.66) satisfacen las relaciones (3.67)-(3.68). \diamond

3.4 Sistema de optimalidad

En esta sección, a partir de las condiciones necesarias de primer orden dadas en (3.67) y (3.68), se deriva un sistema de optimalidad para el problema de control (3.20)-(3.21). El sistema de optimalidad lo constituyen las ecuaciones de estado, las ecuaciones adjuntas y la condición de optimalidad. Las ecuaciones adjuntas es un sistema que es satisfecho por el multiplicador de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ dado por el Teorema 3.7.

Considerando la Observación 3.4 y las derivadas de Fréchet dadas en (3.22)-(3.25) y (3.31), la ecuación (3.66) en $\tilde{\mathbf{s}} = [\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{\mathbf{g}}_2]$ y $\forall \phi = [\varphi, \psi] \in \mathbb{H}$ se reescribe como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x[\tilde{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\lambda}]\phi &= \lambda_0 \beta_1 (\text{rot } \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d, \text{rot } \varphi) + 4\lambda_0 \nu \beta_2 (D(\tilde{\mathbf{u}}), D(\varphi)) + \lambda_0 \beta_3 (\text{sgn}(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b) |\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b|^{p-1}, \varphi) \\ &\quad + \lambda_0 \beta_4 (\text{sgn}(\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d) |\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d|^{q-1}, \psi) - 2\nu_1 (D(\boldsymbol{\eta}), D(\varphi)) - 2\alpha \nu_1 \langle \boldsymbol{\eta}, \varphi \rangle_{\Gamma_2^2} \\ &\quad - (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \varphi, \boldsymbol{\eta}) - (\varphi \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}) + 2\nu_r (\text{rot } \psi, \boldsymbol{\eta}) - \nu_2 (\nabla \boldsymbol{\xi}, \nabla \psi) - \nu_3 (\text{div } \boldsymbol{\xi}, \text{div } \psi) \\ &\quad - (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \psi, \boldsymbol{\xi}) - (\varphi \cdot \nabla \tilde{\mathbf{w}}, \boldsymbol{\xi}) + 2\nu_r (\text{rot } \varphi, \boldsymbol{\xi}) - 4\nu_r (\boldsymbol{\xi}, \psi) - \langle \boldsymbol{\zeta}, \varphi \rangle_{\Gamma \setminus \Gamma_2^2} \\ &\quad - \langle \boldsymbol{\vartheta}, \psi \rangle_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

De (3.69) para $\phi = [\varphi, \mathbf{0}] \in \mathbb{H}$, la ecuación de Lagrange-Euler definida en (3.67) es dada por

$$\begin{aligned} & \lambda_0 \beta_1 (\text{rot } \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d, \text{rot } \varphi) + 4\lambda_0 \nu \beta_2 (D(\tilde{\mathbf{u}}), D(\varphi)) + \lambda_0 \beta_3 (\text{sgn}(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b) |\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b|^{p-1}, \varphi) \\ & - 2\nu_1 (D(\boldsymbol{\eta}), D(\varphi)) - 2\alpha \nu_1 \langle \boldsymbol{\eta}, \varphi \rangle_{\Gamma_2^2} - (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \varphi, \boldsymbol{\eta}) - (\varphi \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}) - (\varphi \cdot \nabla \tilde{\mathbf{w}}, \boldsymbol{\xi}) \\ & + 2\nu_r (\text{rot } \varphi, \boldsymbol{\xi}) - \langle \boldsymbol{\zeta}, \varphi \rangle_{\Gamma \setminus \Gamma_2^2} = 0 \quad \forall \varphi \in \mathbf{H}_\sigma^1. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Teniendo en cuenta las identidades

$$(\text{rot } \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \text{rot } \mathbf{v}) + \langle \mathbf{u} \times \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_\Gamma \quad \text{y} \quad 2(D(\mathbf{u}), D(\mathbf{v})) = -(\Delta \mathbf{u}, \mathbf{v}) + 2\langle (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_\Gamma,$$

para los términos del lado izquierdo de (3.70), se tiene

$$\lambda_0 \beta_1 (\text{rot } \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d, \text{rot } \varphi) = \lambda_0 \beta_1 (\text{rot}(\text{rot } \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b), \varphi) - \lambda_0 \beta_1 \langle (\text{rot } \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b) \times \mathbf{n}, \varphi \rangle_\Gamma, \quad (3.71)$$

$$2\nu_r (\text{rot } \varphi, \boldsymbol{\xi}) = 2\nu_r (\text{rot } \boldsymbol{\xi}, \varphi) + 2\nu_r \langle \varphi \times \mathbf{n}, \boldsymbol{\xi} \rangle_\Gamma = 2\nu_r (\text{rot } \boldsymbol{\xi}, \varphi), \quad (3.72)$$

$$4\lambda_0 \nu \beta_2 (D(\tilde{\mathbf{u}}), D(\varphi)) = -2\lambda_0 \nu \beta_2 (\Delta \tilde{\mathbf{u}}, \varphi) + 4\lambda_0 \nu \beta_2 \langle (\nabla \tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{n}, \varphi \rangle_\Gamma, \quad (3.73)$$

$$2\nu_1 (D(\boldsymbol{\eta}), D(\varphi)) = -\nu_1 (\Delta \boldsymbol{\eta}, \varphi) + 2\nu_1 \langle (\nabla \boldsymbol{\eta}) \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\Gamma_2^2}. \quad (3.74)$$

Además, del Lema 1.36 se deduce

$$(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \varphi, \boldsymbol{\eta}) = -(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \boldsymbol{\eta}, \varphi), \quad (\varphi \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}) = (\nabla^T \boldsymbol{\eta} \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \varphi), \quad (\varphi \cdot \nabla \tilde{\mathbf{w}}, \boldsymbol{\xi}) = (\nabla^T \boldsymbol{\xi} \cdot \tilde{\mathbf{w}}, \varphi). \quad (3.75)$$

Luego, al sustituir (3.71)-(3.75) en (3.70), se obtiene

$$\begin{aligned} & \lambda_0 \beta_1 (\text{rot}(\text{rot } \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b), \varphi) - 2\lambda_0 \nu \beta_2 (\Delta \tilde{\mathbf{u}}, \varphi) + \nu_1 (\Delta \boldsymbol{\eta}, \varphi) + \lambda_0 \beta_3 (\text{sgn}(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b) |\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b|^{p-1}, \varphi) \\ & + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \boldsymbol{\eta}, \varphi) - (\nabla^T \boldsymbol{\eta} \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \varphi) - (\nabla^T \boldsymbol{\xi} \cdot \tilde{\mathbf{w}}, \varphi) + 2\nu_r (\text{rot } \boldsymbol{\xi}, \varphi) - \langle \boldsymbol{\zeta}, \varphi \rangle_{\Gamma \setminus \Gamma_2^2} - 2\alpha \nu_1 \langle \boldsymbol{\eta}, \varphi \rangle_{\Gamma_2^2} \\ & - \lambda_0 \beta_1 \langle (\text{rot } \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b) \times \mathbf{n}, \varphi \rangle_\Gamma + 4\lambda_0 \nu \beta_2 \langle (\nabla \tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{n}, \varphi \rangle_\Gamma - 2\nu_1 \langle (\nabla \boldsymbol{\eta}) \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\Gamma_2^2} = 0 \quad \forall \varphi \in \mathbf{H}_\sigma^1. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Similarmente, de (3.69) para $\phi = [\mathbf{0}, \boldsymbol{\psi}] \in \mathbb{H}$, la ecuación de Lagrange-Euler (3.67) es dada por

$$\begin{aligned} & \lambda_0 \beta_4 (\text{sgn}(\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d) |\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d|^{q-1}, \boldsymbol{\psi}) + 2\nu_r (\text{rot } \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\eta}) - \nu_2 (\nabla \boldsymbol{\xi}, \nabla \boldsymbol{\psi}) - \nu_3 (\text{div } \boldsymbol{\xi}, \text{div } \boldsymbol{\psi}) \\ & - (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\xi}) - 4\nu_r (\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\xi}) - \langle \boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\psi} \rangle_\Gamma = 0 \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{H}^1(\Omega). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Al integrar por partes el segundo, tercer y cuarto término de (3.77), resulta

$$2\nu_r (\text{rot } \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\eta}) = 2\nu_r (\text{rot } \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\psi}) - 2\nu_r \langle \boldsymbol{\eta} \times \mathbf{n}, \boldsymbol{\psi} \rangle_{\Gamma_2^2}, \quad (3.78)$$

$$\nu_2 (\nabla \boldsymbol{\xi}, \nabla \boldsymbol{\psi}) = -\nu_2 (\Delta \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\psi}), \quad (3.79)$$

$$\nu_3 (\text{div } \boldsymbol{\xi}, \text{div } \boldsymbol{\psi}) = -\nu_3 (\nabla \text{div } \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\psi}). \quad (3.80)$$

Así, sustituyendo (3.78)-(3.80) en (3.77), se obtiene

$$\begin{aligned} & \lambda_0 \beta_4 (\text{sgn}(\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d) |\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d|^{q-1}, \boldsymbol{\psi}) + 2\nu_r (\text{rot } \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\psi}) + \nu_2 (\Delta \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\psi}) + \nu_3 (\nabla \text{div } \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\psi}) \\ & + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\psi}) - 4\nu_r (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\psi}) - \langle \boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\psi} \rangle_\Gamma - 2\nu_r \langle \boldsymbol{\eta} \times \mathbf{n}, \boldsymbol{\psi} \rangle_{\Gamma_2^2} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{H}^1(\Omega). \end{aligned} \quad (3.81)$$

Dado que la dirección $\phi = [\varphi, \psi] \in \mathbb{H}$ es arbitraria, de (3.76) y (3.81) para el problema de control (3.20)-(3.21), se obtiene el siguiente sistema de *ecuaciones adjuntas*:

$$\begin{aligned} -\nu_1 \Delta \boldsymbol{\eta} - \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \boldsymbol{\eta} + (\nabla \boldsymbol{\eta})^T \cdot \tilde{\mathbf{u}} + (\nabla \boldsymbol{\xi})^T \cdot \tilde{\mathbf{w}} - 2\nu_r \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} \\ = \lambda_0 \beta_1 \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b) - 2\lambda_0 \nu \beta_2 \Delta \tilde{\mathbf{u}} \\ + \lambda_0 \beta_3 \operatorname{sgn}(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b) |\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b|^{p-1} \quad \text{en } \mathbf{H}'_\sigma, \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} \nu_2 \Delta \boldsymbol{\xi} + \nu_3 \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} + 2\nu_r \operatorname{rot} \boldsymbol{\eta} - 4\nu_r \boldsymbol{\xi} \\ = -\lambda_0 \beta_4 \operatorname{sgn}(\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d) |\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d|^{q-1} \quad \text{en } \mathbf{H}^{-1}(\Omega), \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\eta} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (3.84)$$

$$2\nu_1((\nabla \boldsymbol{\eta}) \mathbf{n} + \alpha \boldsymbol{\eta}) = 4\lambda_0 \nu \beta_2 (\nabla \tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{n} - \lambda_0 \beta_1 (\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b) \times \mathbf{n} \quad \text{sobre } \Gamma_2^2, \quad (3.85)$$

$$\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_2^2, \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma \setminus \Gamma_2^2, \quad (3.86)$$

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma,$$

$$\boldsymbol{\zeta} = 4\lambda_0 \nu \beta_2 (\nabla \tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{n} - \lambda_0 \beta_1 (\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b) \times \mathbf{n} \quad \text{sobre } \Gamma \setminus \Gamma_2^2, \quad (3.87)$$

$$\boldsymbol{\vartheta} + 2\nu_r \boldsymbol{\eta} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_2^2, \quad \boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma \setminus \Gamma_2^2. \quad (3.88)$$

Por otro lado, por el principio del mínimo (3.68) dado en el Teorema 3.7, $\forall [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] \in \mathcal{U}_{ad}$ se tiene

$$\mathcal{L}[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{\mathbf{g}}_2, \boldsymbol{\lambda}] \leq \mathcal{L}[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \boldsymbol{\lambda}],$$

luego, por la definición de \mathcal{L} dada en (3.65) y (3.16)-(3.18), se obtiene

$$\langle \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{u}_{\tilde{\mathbf{g}}_1} - \mathbf{u}_{\mathbf{g}_1} \rangle_{\Gamma \setminus \Gamma_2^2} + \langle \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{g}}_2} - \mathbf{w}_{\mathbf{g}_2} \rangle_{\Gamma} \leq \lambda_0 (J[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] - J[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{\mathbf{g}}_2]).$$

Observando la definición del funcional J dado en (3.20) y las definiciones de $\mathbf{u}_{\mathbf{g}_1}$ y $\mathbf{w}_{\mathbf{g}_2}$, se tiene

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\zeta}, \tilde{\mathbf{g}}_1 - \mathbf{g}_1 \rangle_{\Gamma_1} + \langle \boldsymbol{\vartheta}, \tilde{\mathbf{g}}_2 - \mathbf{g}_2 \rangle_{\Gamma_4} &\leq \frac{\lambda_0 \beta_5}{2} (\|\mathbf{g}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 - \|\tilde{\mathbf{g}}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2) \\ &+ \frac{\lambda_0 \beta_6}{2} (\|\mathbf{g}_2\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_4)}^2 - \|\tilde{\mathbf{g}}_2\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_4)}^2). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Como $\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma) \subset \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$, entonces usando la identidad $\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 - \|\tilde{\mathbf{g}}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 = \|\mathbf{g} - \tilde{\mathbf{g}}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 + 2\langle \tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{g} - \tilde{\mathbf{g}} \rangle_{\Gamma}$ en (3.89), resulta

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\zeta}, \tilde{\mathbf{g}}_1 - \mathbf{g}_1 \rangle_{\Gamma_1} + \langle \boldsymbol{\vartheta}, \tilde{\mathbf{g}}_2 - \mathbf{g}_2 \rangle_{\Gamma_4} &\leq \frac{\lambda_0 \beta_5}{2} \|\mathbf{g}_1 - \tilde{\mathbf{g}}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 + \lambda_0 \beta_5 \langle \tilde{\mathbf{g}}_1, \mathbf{g}_1 - \tilde{\mathbf{g}}_1 \rangle_{\Gamma_1} \\ &+ \frac{\lambda_0 \beta_6}{2} \|\mathbf{g}_2 - \tilde{\mathbf{g}}_2\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_4)}^2 + \lambda_0 \beta_6 \langle \tilde{\mathbf{g}}_2, \mathbf{g}_2 - \tilde{\mathbf{g}}_2 \rangle_{\Gamma_4}, \end{aligned}$$

y entonces se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_0 \beta_5}{2} \|\mathbf{g}_1 - \tilde{\mathbf{g}}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 + \langle \lambda_0 \beta_5 \tilde{\mathbf{g}}_1 + \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{g}_1 - \tilde{\mathbf{g}}_1 \rangle_{\Gamma_1} \\ + \frac{\lambda_0 \beta_6}{2} \|\mathbf{g}_2 - \tilde{\mathbf{g}}_2\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_4)}^2 + \langle \lambda_0 \beta_6 \tilde{\mathbf{g}}_2 + \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{g}_2 - \tilde{\mathbf{g}}_2 \rangle_{\Gamma_4} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Así, de (3.90) se obtiene las *condiciones de optimalidad* dadas por

$$\langle \lambda_0 \beta_5 \tilde{\mathbf{g}}_1 + \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{g}_1 - \tilde{\mathbf{g}}_1 \rangle_{\Gamma_1} \geq 0 \quad \text{y} \quad \langle \lambda_0 \beta_6 \tilde{\mathbf{g}}_2 + \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{g}_2 - \tilde{\mathbf{g}}_2 \rangle_{\Gamma_4} \geq 0. \quad (3.91)$$

Por lo tanto, de (3.3)-(3.6), (3.82)-(3.88) y (3.91), para el problema de control (3.20)-(3.21), el sistema de optimalidad está constituido por:

Ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} 2\nu_1(D(\tilde{\mathbf{u}}), D(\mathbf{v})) + 2\alpha\nu_1 \int_{\Gamma_2^2} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} d\Gamma + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) &= 2\nu_r(\text{rot } \tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma}, \\ \nu_2(\nabla \tilde{\mathbf{w}}, \nabla \mathbf{z}) + \nu_3(\text{div } \tilde{\mathbf{w}}, \text{div } \mathbf{z}) + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{z}) + 4\nu_r(\tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{z}) &= 2\nu_r(\text{rot } \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{z}) + \langle \mathbf{g}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}}, \\ \tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{u}_{\tilde{\mathbf{g}}_1} \text{ sobre } \Gamma \setminus \Gamma_2^2, \quad \tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{g}}_2} \text{ sobre } \Gamma, \end{aligned}$$

para todo $[\mathbf{v}, \mathbf{z}] \in \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1 \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

Ecuaciones adjuntas

$$\begin{aligned} -\nu_1 \Delta \boldsymbol{\eta} - \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \boldsymbol{\eta} + (\nabla \boldsymbol{\eta})^T \cdot \tilde{\mathbf{u}} + (\nabla \boldsymbol{\xi})^T \cdot \tilde{\mathbf{w}} - 2\nu_r \text{rot } \boldsymbol{\xi} &= \lambda_0 \beta_1 \text{rot}(\text{rot } \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b) - 2\lambda_0 \nu \beta_2 \Delta \tilde{\mathbf{u}} \\ &\quad + \lambda_0 \beta_3 \text{sgn}(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b) |\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b|^{p-1} \text{ en } \mathbf{H}'_\sigma, \\ \nu_2 \Delta \boldsymbol{\xi} + \nu_3 \nabla \text{div } \boldsymbol{\xi} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} + 2\nu_r \text{rot } \boldsymbol{\eta} - 4\nu_r \boldsymbol{\xi} &= -\lambda_0 \beta_4 \text{sgn}(\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d) |\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d|^{q-1} \text{ en } \mathbf{H}^{-1}(\Omega), \\ \text{div } \boldsymbol{\eta} &= 0 \text{ en } \Omega, \\ 2\nu_1((\nabla \boldsymbol{\eta}) \mathbf{n} + \alpha \boldsymbol{\eta}) &= 4\lambda_0 \nu \beta_2 (\nabla \tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{n} - \lambda_0 \beta_1 (\text{rot } \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b) \times \mathbf{n} \text{ sobre } \Gamma_2^2, \\ \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ sobre } \Gamma_2^2, \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma \setminus \Gamma_2^2, \\ \boldsymbol{\xi} &= \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma, \\ \boldsymbol{\zeta} &= 4\lambda_0 \nu \beta_2 (\nabla \tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{n} - \lambda_0 \beta_1 (\text{rot } \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b) \times \mathbf{n} \text{ sobre } \Gamma \setminus \Gamma_2^2, \\ \boldsymbol{\vartheta} + 2\nu_r \boldsymbol{\eta} \times \mathbf{n} &= \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma_2^2, \quad \boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma \setminus \Gamma_2^2. \end{aligned}$$

Condiciones de optimalidad

$$\langle \lambda_0 \beta_5 \tilde{\mathbf{g}}_1 + \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{g}_1 - \tilde{\mathbf{g}}_1 \rangle_{\Gamma_1} \geq 0 \quad \text{y} \quad \langle \lambda_0 \beta_6 \tilde{\mathbf{g}}_2 + \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{g}_2 - \tilde{\mathbf{g}}_2 \rangle_{\Gamma_4} \geq 0.$$

Observación 3.8 En el multiplicador de Lagrange $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_0, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\vartheta}]$ dado en el Teorema 3.7, es posible distinguir dos casos: $\lambda_0 > 0$ y $\lambda_0 = 0$.

Si $\lambda_0 > 0$, el multiplicador $\boldsymbol{\lambda}$ puede ser reescrito como $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 [1, \frac{\boldsymbol{\eta}}{\lambda_0}, \frac{\boldsymbol{\xi}}{\lambda_0}, \frac{\boldsymbol{\zeta}}{\lambda_0}, \frac{\boldsymbol{\vartheta}}{\lambda_0}]$, y entonces sustituyendo $\boldsymbol{\lambda}$ por $\boldsymbol{\lambda} = [1, \frac{\boldsymbol{\eta}}{\lambda_0}, \frac{\boldsymbol{\xi}}{\lambda_0}, \frac{\boldsymbol{\zeta}}{\lambda_0}, \frac{\boldsymbol{\vartheta}}{\lambda_0}]$ en (3.67) y (3.68), es posible asumir que $\lambda_0 = 1$.

Si $\lambda_0 = 0$, denotando $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = [\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\vartheta}]$ y observando la definición de $\mathcal{L}_x[\tilde{\mathbf{s}}, 0, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}]\phi$ dada en (3.66), la ecuación (3.67) toma la forma

$$-\langle \mathbf{F}_{1x}(\tilde{\mathbf{s}})\phi, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} - \langle \mathbf{F}_{2x}(\tilde{\mathbf{s}})\phi, \boldsymbol{\xi} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}} - \langle \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{F}_{3x}(\tilde{\mathbf{s}})\phi \rangle_{\Gamma \setminus \Gamma_2^2} - \langle \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{F}_{4x}(\tilde{\mathbf{s}})\phi \rangle_{\Gamma} = 0 \quad \forall \phi \in \mathbb{H}, \quad (3.92)$$

lo cual no proporciona información acerca de un mínimo para el problema (3.20)-(3.21), puesto que el funcional J desaparece. Por lo tanto, se debe hallar condiciones sobre \mathcal{U}_{ad} y $\tilde{\mathbf{s}} = [\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{\mathbf{g}}_2]$, bajo las cuales $\lambda_0 > 0$.

Similarmente como en [2], se dice que el conjunto \mathcal{U}_{ad} posee la Propiedad C en el punto $[\tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{\mathbf{g}}_2]$ si para cada solución no nula $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbb{X} \times \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{-1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_2^2) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ de la ecuación (3.92) existe un elemento $[\mathbf{g}_1^*, \mathbf{g}_2^*] \in \mathcal{U}_{ad}$ tal que

$$\langle \boldsymbol{\zeta}, \tilde{\mathbf{g}}_1 - \mathbf{g}_1^* \rangle_{\Gamma_1} > 0, \quad \langle \boldsymbol{\vartheta}, \tilde{\mathbf{g}}_2 - \mathbf{g}_2^* \rangle_{\Gamma_4} > 0. \quad (3.93)$$

Fácilmente se verifica que si el conjunto \mathcal{U}_{ad} posee la Propiedad C en el punto $[\tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{\mathbf{g}}_2]$ entonces necesariamente $\lambda_0 > 0$. En efecto, si existe un multiplicador de Lagrange de la forma $[0, \boldsymbol{\lambda}] \neq \mathbf{0}$, por (3.68) del Teorema 3.7 se tiene que para todo $[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] \in \mathcal{U}_{ad}$ la desigualdad (3.92) es satisfecha con $\lambda_0 = 0$, en particular para $[\mathbf{g}_1^*, \mathbf{g}_2^*] \in \mathcal{U}_{ad}$, se tiene

$$\langle \boldsymbol{\zeta}, \tilde{\mathbf{g}}_1 - \mathbf{g}_1^* \rangle_{\Gamma_1} + \langle \boldsymbol{\vartheta}, \tilde{\mathbf{g}}_2 - \mathbf{g}_2^* \rangle_{\Gamma_4} \leq 0,$$

lo cual contradice (3.93).

Observación 3.9 Al asumir que el conjunto de controles \mathcal{U}_{ad} posee la Propiedad C en $[\tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{\mathbf{g}}_2]$ y recordando que \mathcal{U}_{ad} es convexo, de (3.91) y el Teorema 1.32 se deduce que $\tilde{\mathbf{g}}_1$ puede ser expresado como la proyección de $-\frac{1}{\beta_5}\boldsymbol{\zeta}$ sobre \mathcal{U}_1 y $\tilde{\mathbf{g}}_2$ puede ser expresado como la proyección de $-\frac{1}{\beta_6}\boldsymbol{\vartheta}$ sobre \mathcal{U}_2 , esto es

$$\tilde{\mathbf{g}}_1 = \text{Proy}_{\mathcal{U}_1}\left(-\frac{\boldsymbol{\zeta}}{\beta_5}\right) \quad \text{sobre } \Gamma_1, \quad \tilde{\mathbf{g}}_2 = \text{Proy}_{\mathcal{U}_2}\left(-\frac{\boldsymbol{\vartheta}}{\beta_6}\right) \quad \text{sobre } \Gamma_4.$$

3.5 Condición suficiente de segundo orden

Para el problema de control (3.20)-(3.21), aplicando la Proposición 1.49, no es posible obtener condiciones suficientes de segundo orden para un mínimo, puesto que el funcional objetivo J en su definición no considera la \mathbf{H}^1 -norma para la velocidad de microrotación \mathbf{w} , lo cual hace imposible que la función de Lagrange sea coerciva sobre $\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}$. Sin embargo, al realizar una pequeña variación sobre el funcional J , aplicando la Proposición 1.49 y considerando el estudio realizado en [11], es posible derivar una condición suficiente de segundo orden. Entonces, en la definición de J dada en (3.20), si consideramos $p = 2$ y cambiamos el cuarto término por $\frac{\beta_4}{2}\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_d\|_{\mathbf{H}^1}^2$ con $\mathbf{w}_d \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, se tiene el siguiente problema modificado:

Problema 2. Hallar $\mathbf{r} = [[\mathbf{u}, \mathbf{w}], [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]] \in \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}$ que minimice el funcional

$$\begin{aligned} \tilde{J}[\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] &= \frac{\beta_1}{2}\|\text{rot} \mathbf{u} - \mathbf{u}_d\|^2 + \frac{\beta_2\nu}{2}\|\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}\|^2 + \frac{\beta_3}{2}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_b\|_2^2 + \frac{\beta_4}{2}\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_d\|_{\mathbf{H}^1}^2 \\ &\quad + \frac{\beta_5}{2}\|\mathbf{g}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 + \frac{\beta_6}{2}\|\mathbf{g}_2\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_4)}^2, \end{aligned} \quad (3.94)$$

sujeeto a $\mathbb{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, esto es

$$\langle \mathbf{F}_1(\mathbf{r}), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} = 0, \quad \langle \mathbf{F}_2(\mathbf{r}), \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} = 0, \quad \mathbf{F}_3(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}_4(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad \forall [\mathbf{v}, \mathbf{z}] \in \mathbb{X}, \quad (3.95)$$

donde los coeficientes $\beta_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ y el conjunto de controles $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ satisfacen las condiciones dadas en (3.7). Además, se asume que el conjunto \mathcal{U}_{ad} satisface la Propiedad C.

El conjunto de soluciones admisibles para el problema (3.94)-(3.95) se define como

$$\mathcal{S}_{ad} = \{\mathbf{s} = [[\mathbf{u}, \mathbf{w}], [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]] \in \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad} \text{ tal que } \tilde{J}(\mathbf{s}) < \infty \text{ y } \mathbf{s} \text{ satisface (3.95)}\}.$$

Similar al Teorema 3.1 se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.10 Bajo las hipótesis del Teorema 2.7, si una de las condiciones dadas en (3.7) es satisfecha, entonces el problema de control (3.94)-(3.95) tiene al menos una solución $\bar{\mathbf{s}} = [\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{g}}_2] \in \mathcal{S}_{ad}$.

Demostración: Similar a la demostración del Teorema 3.1. ◇

Sobre el funcional \tilde{J} definido en (3.94) se tiene el siguiente resultado.

Lema 3.11 *El funcional \tilde{J} definido en (3.94), es Fréchet diferenciable con respecto a $\mathbf{r} = [[\mathbf{u}, \mathbf{w}], [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]] \in \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}$. Además, en un punto arbitrario $\bar{\mathbf{r}} = [\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{g}}_2]$, la derivada de \tilde{J} con respecto a \mathbf{r} es el funcional lineal y acotado $\tilde{J}_{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{r}}) : \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que en cada punto $\mathbf{t} = [\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\chi}] \in \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}$ con $\boldsymbol{\phi} = [\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}]$ y $\boldsymbol{\chi} = [\boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{\tau}]$ es definido por:*

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{r}})\mathbf{t} &= \beta_1(\text{rot}\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d, \text{rot}\boldsymbol{\varphi}) + 4\beta_2\nu(D(\bar{\mathbf{u}}), D(\boldsymbol{\varphi})) + \beta_3(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b, \boldsymbol{\varphi}) + \beta_4(\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d, \boldsymbol{\psi})_{\mathbf{H}^1} \\ &\quad + \beta_5 \langle \bar{\mathbf{g}}_1, \boldsymbol{\varrho} \rangle_{\Gamma_1} + \beta_6 \langle \bar{\mathbf{g}}_2, \boldsymbol{\tau} \rangle_{\Gamma_4}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Demostración: Similar como en la demostración del Lema 3.3, el funcional \tilde{J} definido en (3.94) se reescribe como

$$\tilde{J}(\mathbf{r}) = \tilde{J}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) = J_1(\mathbf{u}) + J_2(\mathbf{u}) + \tilde{J}_3(\mathbf{w}) + J_4(\mathbf{g}_1) + J_5(\mathbf{g}_2)$$

con

$$\begin{aligned} J_1(\mathbf{u}) &= \frac{\beta_1}{2} \|\text{rot}\mathbf{u} - \mathbf{u}_d\|^2 + \frac{\beta_2\nu}{2} \|\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u}\|^2, & J_2(\mathbf{u}) &= \frac{\beta_3}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_b\|^2, \\ \tilde{J}_3(\mathbf{w}) &= \frac{\beta_4}{2} \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_d\|_{\mathbf{H}^1}^2, & J_4(\mathbf{g}_1) &= \frac{\beta_5}{2} \|\mathbf{g}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2, & J_5(\mathbf{g}_2) &= \frac{\beta_6}{2} \|\mathbf{g}_2\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_4)}^2. \end{aligned}$$

Entonces, la derivada de Fréchet de \tilde{J} con respecto a $\mathbf{r} = [\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]$ en un punto arbitrario $\bar{\mathbf{r}} = [\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{g}}_2]$ en la dirección $\mathbf{t} = [\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{\tau}]$ es dada por

$$\tilde{J}_{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{r}})\mathbf{t} = J_{1\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{u}})\boldsymbol{\varphi} + J_{2\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{u}})\boldsymbol{\varphi} + \tilde{J}_{3\mathbf{w}}(\bar{\mathbf{w}})\boldsymbol{\psi} + J_{4\mathbf{g}_1}(\bar{\mathbf{g}}_1)\boldsymbol{\varrho} + J_{5\mathbf{g}_2}(\bar{\mathbf{g}}_2)\boldsymbol{\tau}. \quad (3.97)$$

Las derivadas $J_{1\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{u}})$, $J_{4\mathbf{g}_1}(\bar{\mathbf{g}}_1)$ y $J_{5\mathbf{g}_2}(\bar{\mathbf{g}}_2)$ son dadas en (3.33), (3.36) y (3.37) respectivamente.

El funcional $\tilde{J}_3 : \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es Fréchet diferenciable con respecto a $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ y en un punto arbitrario $\bar{\mathbf{w}} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ la derivada de Fréchet de \tilde{J}_3 en la dirección $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ es el funcional lineal y acotado $\tilde{J}_{3\mathbf{w}}(\bar{\mathbf{w}}) : \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\tilde{J}_{3\mathbf{w}}(\bar{\mathbf{w}})\boldsymbol{\psi} = \beta_4(\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d, \boldsymbol{\psi})_{\mathbf{H}^1} = \beta_4(\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d, \boldsymbol{\psi}) + \beta_4(\nabla\bar{\mathbf{w}} - \nabla\mathbf{w}_d, \nabla\boldsymbol{\psi}). \quad (3.98)$$

En efecto, de la definición de \tilde{J}_3 y de $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{H}^1} = (\cdot, \cdot) + (\nabla\cdot, \nabla\cdot)$, se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{J}_3(\bar{\mathbf{w}} + \boldsymbol{\psi}) &= \frac{\beta_4}{2} \|\bar{\mathbf{w}} + \boldsymbol{\psi} - \mathbf{w}_d\|_{\mathbf{H}^1}^2 = \frac{\beta_4}{2} (\bar{\mathbf{w}} + \boldsymbol{\psi} - \mathbf{w}_d, \bar{\mathbf{w}} + \boldsymbol{\psi} - \mathbf{w}_d)_{\mathbf{H}^1} \\ &= \frac{\beta_4}{2} (\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d + \boldsymbol{\psi}, \bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d + \boldsymbol{\psi}) + \frac{\beta_4}{2} (\nabla(\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d) + \nabla\boldsymbol{\psi}, \nabla(\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d) + \nabla\boldsymbol{\psi}) \\ &= \frac{\beta_4}{2} \|\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d\|_{\mathbf{H}^1}^2 + \beta_4(\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d, \boldsymbol{\psi})_{\mathbf{H}^1} + \frac{\beta_4}{2} \|\boldsymbol{\psi}\|_{\mathbf{H}^1}^2 \\ &= \tilde{J}_3(\bar{\mathbf{w}}) + \beta_4(\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d, \boldsymbol{\psi})_{\mathbf{H}^1} + \frac{\beta_4}{2} \|\boldsymbol{\psi}\|_{\mathbf{H}^1}^2, \end{aligned}$$

entonces,

$$\tilde{J}_3(\bar{\mathbf{w}} + \boldsymbol{\psi}) - \tilde{J}_3(\bar{\mathbf{w}}) - \beta_4(\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d, \boldsymbol{\psi})_{\mathbf{H}^1} = \frac{\beta_4}{2} \|\boldsymbol{\psi}\|_{\mathbf{H}^1}^2,$$

y se sigue que

$$\lim_{\|\psi\|_{\mathbf{H}^1} \rightarrow 0} \frac{|\tilde{J}_3(\bar{\mathbf{w}} + \psi) - \tilde{J}_3(\bar{\mathbf{w}}) - \beta_4(\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d, \psi)_{\mathbf{H}^1}|}{\|\psi\|_{\mathbf{H}^1}} = \frac{\beta_4}{2} \lim_{\|\psi\|_{\mathbf{H}^1} \rightarrow 0} \|\psi\|_{\mathbf{H}^1} = 0,$$

lo cual implica (3.98). En (3.34) observando que $\text{sgn}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b)|\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b| = \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b$, se tiene

$$J_{2u}(\bar{\mathbf{u}})\varphi = \beta_3(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b, \varphi). \quad (3.99)$$

Por lo tanto, reemplazando (3.33), (3.36), (3.37), (3.98) y (3.99) en (3.97) se obtiene (3.96). \diamond

Debido al Lema 3.2, Lema 3.5, Lema 3.6 y Lema 3.11, el operador \mathbb{F} y el funcional \tilde{J} definidos en (3.16)-(3.19) y (3.94)-(3.95) satisfacen las condiciones del Teorema 1.45, el cual garantiza la existencia de multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_0, [\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}], \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\vartheta}] \in \mathbb{R} \times \mathbb{X} \times \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{-1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_2^2) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ asociados al problema de control (3.94)-(3.95), más aún, como \mathcal{U}_{ad} satisface la *Propiedad C*, se asume $\lambda_0 = 1$. Entonces, para $\bar{\boldsymbol{\lambda}} = [[\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}], \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\vartheta}] \in \mathbb{X} \times \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{-1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_2^2) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ y $\mathbf{r} = [[\mathbf{u}, \mathbf{w}], [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]] \in \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}$, se introduce el funcional de Lagrange

$$\mathcal{L} : \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad} \times \mathbb{X} \times \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{-1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_2^2) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R},$$

el cual es definido por

$$\mathcal{L}[\mathbf{r}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}] = \tilde{J}(\mathbf{r}) - \langle \mathbf{F}_1(\mathbf{r}), \boldsymbol{\eta} \rangle_{\mathbf{H}_\sigma} - \langle \mathbf{F}_2(\mathbf{r}), \boldsymbol{\xi} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}} - \langle \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{F}_3(\mathbf{r}) \rangle_{\Gamma \setminus \Gamma_2^2} - \langle \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{F}_4(\mathbf{r}) \rangle_{\Gamma}, \quad (3.100)$$

donde $\mathbf{F}_1(\mathbf{r}), \mathbf{F}_2(\mathbf{r}), \mathbf{F}_3(\mathbf{r}), \mathbf{F}_4(\mathbf{r})$ son definidos en (3.16)-(3.19) y $\tilde{J}(\mathbf{r})$ es dado en (3.94).

Además, en un punto arbitrario $[\bar{\mathbf{r}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}]$ la derivada de Fréchet de \mathcal{L} con respecto a $\mathbf{x} = [\mathbf{u}, \mathbf{w}] \in \mathbb{H}$ satisface la ecuación de Lagrange-Euler

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}[\bar{\mathbf{r}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}]\phi = 0 \quad \forall \phi = [\varphi, \psi] \in \mathbb{H}. \quad (3.101)$$

De (3.100) en un punto arbitrario $\bar{\mathbf{r}} = [\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{g}}_2]$ para $\mathbf{t} = [\varphi, \psi, \boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{\tau}]$, se tiene

$$\mathcal{L}_{\mathbf{r}}[\bar{\mathbf{r}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}]\mathbf{t} = \tilde{J}_{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{r}})\mathbf{t} - \langle \mathbf{F}_{1\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{r}})\mathbf{t}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\mathbf{H}_\sigma} - \langle \mathbf{F}_{2\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{r}})\mathbf{t}, \boldsymbol{\xi} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}} - \langle \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{F}_{3\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{r}})\mathbf{t} \rangle_{\Gamma \setminus \Gamma_2^2} - \langle \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{F}_{4\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{r}})\mathbf{t} \rangle_{\Gamma}. \quad (3.102)$$

Observando (3.96) y (3.22)-(3.25), de (3.102) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{r}}[\bar{\mathbf{r}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}]\mathbf{t} &= \beta_1(\text{rot} \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d, \text{rot} \varphi) + 4\beta_2\nu(D(\bar{\mathbf{u}}), D(\varphi)) + \beta_3(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b, \varphi) + \beta_4(\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d, \psi)_{H^1} \\ &\quad + \beta_5 \langle \bar{\mathbf{g}}_1, \boldsymbol{\varrho} \rangle_{\Gamma_1} + \beta_6 \langle \bar{\mathbf{g}}_2, \boldsymbol{\tau} \rangle_{\Gamma_4} - 2\nu_1(D(\varphi), D(\boldsymbol{\eta})) - 2\alpha\nu_1 \int_{\Gamma_2^2} \varphi \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma \\ &\quad - (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \varphi, \boldsymbol{\eta}) - (\varphi \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}) + 2\nu_r(\text{rot} \psi, \boldsymbol{\eta}) - \nu_2(\nabla \psi, \nabla \boldsymbol{\xi}) - \nu_3(\text{div} \psi, \text{div} \boldsymbol{\xi}) \\ &\quad - (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \psi, \boldsymbol{\xi}) - (\varphi \cdot \nabla \bar{\mathbf{w}}, \boldsymbol{\xi}) - 4\nu_r(\psi, \boldsymbol{\xi}) + 2\nu_r(\text{rot} \varphi, \boldsymbol{\xi}) - \langle \boldsymbol{\zeta}, \varphi - \mathcal{B}_1 \boldsymbol{\varrho} \rangle_{\Gamma \setminus \Gamma_2^2} \\ &\quad - \langle \boldsymbol{\vartheta}, \psi - \mathcal{B}_2 \boldsymbol{\tau} \rangle_{\Gamma}, \end{aligned} \quad (3.103)$$

donde los operadores \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 son definidos en (3.26).

Con el propósito de obtener una condición suficiente de segundo orden para que $\bar{\mathbf{r}} \in \mathcal{S}_{ad}$ sea un punto de mínimo para el Problema 2, en los siguientes lemas se verifican las condiciones de la Proposición 1.49.

Lema 3.12 *El funcional \tilde{J} definido en (3.94) es dos veces Fréchet diferenciable con respecto a $\mathbf{r} = [[\mathbf{u}, \mathbf{w}], [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]] \in \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}$. Además, en un punto arbitrario $\bar{\mathbf{r}} = [\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{g}}_2]$ la segunda derivada de \tilde{J} con respecto a \mathbf{r} es el operador lineal y acotado $\tilde{J}_{\mathbf{rr}}(\bar{\mathbf{r}}) : (\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}) \times (\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que en cada punto $[\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}] \in (\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}) \times (\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad})$ es definido por:*

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{\mathbf{rr}}(\bar{\mathbf{r}})[\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}] &= \beta_1(\text{rot } \bar{\varphi}, \text{rot } \varphi) + 4\beta_2\nu(D(\bar{\varphi}), D(\varphi)) + \beta_3(\bar{\varphi}, \varphi) + \beta_4(\bar{\psi}, \psi)_{\mathbf{H}^1} \\ &\quad + \beta_5\langle \bar{\varrho}, \varrho \rangle_{\Gamma_1} + \beta_6\langle \bar{\tau}, \tau \rangle_{\Gamma_4}, \end{aligned} \quad (3.104)$$

donde $\mathbf{t} = [\varphi, \psi, \varrho, \tau]$, $\bar{\mathbf{t}} = [\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{\varrho}, \bar{\tau}]$ y $\tilde{J}_{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{r}})\mathbf{t}$ es la primera derivada de \tilde{J} en la dirección \mathbf{t} definida en (3.96).

Demostración:

Observando la definición de la primera derivada de Fréchet de \tilde{J} en la dirección \mathbf{t} dada en (3.96), se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{t}})\mathbf{t} - \tilde{J}_{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{r}})\mathbf{t} &= \tilde{J}_{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{u}} + \bar{\varphi}, \bar{\mathbf{w}} + \bar{\psi}, \bar{\mathbf{g}}_1 + \bar{\varrho}, \bar{\mathbf{g}}_2 + \bar{\tau})\mathbf{t} - \tilde{J}_{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\varrho}, \bar{\tau})\mathbf{t} \\ &= \beta_1(\text{rot } \bar{\varphi}, \text{rot } \varphi) + 4\beta_2\nu(D(\bar{\varphi}), D(\varphi)) + \beta_3(\bar{\varphi}, \varphi) + \beta_4(\bar{\psi}, \psi)_{\mathbf{H}^1} \\ &\quad + \beta_5\langle \bar{\varrho}, \varrho \rangle_{\Gamma_1} + \beta_6\langle \bar{\tau}, \tau \rangle_{\Gamma_4}, \end{aligned} \quad (3.105)$$

denotando

$$\mathcal{H}(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = \beta_1(\text{rot } \bar{\varphi}, \text{rot } \varphi) + 4\beta_2\nu(D(\bar{\varphi}), D(\varphi)) + \beta_3(\bar{\varphi}, \varphi) + \beta_4(\bar{\psi}, \psi)_{\mathbf{H}^1} + \beta_5\langle \bar{\varrho}, \varrho \rangle_{\Gamma_1} + \beta_6\langle \bar{\tau}, \tau \rangle_{\Gamma_4},$$

de (3.105) se obtiene

$$\lim_{\|\bar{\mathbf{t}}\|_{\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}} \rightarrow 0} \frac{|\tilde{J}_{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{t}})\mathbf{t} - \tilde{J}_{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{r}})\mathbf{t} - \mathcal{H}(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})|}{\|\bar{\mathbf{t}}\|_{\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}}} = 0,$$

lo que demuestra que el funcional \tilde{J} es dos veces Fréchet diferenciable con respecto a \mathbf{r} , además en el punto $\bar{\mathbf{r}}$ en la dirección $[\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}]$ la segunda derivada es $\tilde{J}_{\mathbf{rr}}(\bar{\mathbf{r}})[\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}] = \mathcal{H}[\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}]$, así se obtiene (3.104). \diamond

Lema 3.13 *El operador $\mathbb{F} = [\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4]$ definido en (3.16)-(3.19) es dos veces Fréchet diferenciable con respecto a $\mathbf{r} = [[\mathbf{u}, \mathbf{w}], [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]] \in \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}$. Además, en un punto arbitrario $\bar{\mathbf{r}} = [\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{g}}_2]$ la segunda derivada de \mathbb{F} con respecto a \mathbf{r} es el operador lineal y acotado $\mathbb{F}_{\mathbf{rr}}(\bar{\mathbf{r}}) : (\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}) \times (\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}) \rightarrow \mathbb{Y}$ tal que en cada punto $[\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}] \in (\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}) \times (\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad})$ es definido por:*

$$\langle \mathbf{F}_{1\mathbf{rr}}(\bar{\mathbf{r}})[\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}], \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} = (\bar{\varphi} \cdot \nabla \varphi, \mathbf{v}) + (\varphi \cdot \nabla \bar{\varphi}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1, \quad (3.106)$$

$$\langle \mathbf{F}_{2\mathbf{rr}}(\bar{\mathbf{r}})[\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}], \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}} = (\bar{\varphi} \cdot \nabla \psi, \mathbf{z}) + (\varphi \cdot \nabla \bar{\psi}, \mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad (3.107)$$

$$\mathbf{F}_{3\mathbf{rr}}(\bar{\mathbf{r}})[\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}] = \mathbf{0}, \quad (3.108)$$

$$\mathbf{F}_{4\mathbf{rr}}(\bar{\mathbf{r}})[\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}] = \mathbf{0}. \quad (3.109)$$

donde $\mathbf{t} = [\varphi, \psi, \varrho, \tau]$, $\bar{\mathbf{t}} = [\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{\varrho}, \bar{\tau}]$ y $\mathbb{F}_{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{r}})\mathbf{t} = [\mathbf{F}_{1\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{r}})\mathbf{t}, \mathbf{F}_{2\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{r}})\mathbf{t}, \mathbf{F}_{3\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{r}})\mathbf{t}, \mathbf{F}_{4\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{r}})\mathbf{t}]$ es la primera derivada de \mathbb{F} en la dirección \mathbf{t} definida en (3.22)-(3.25).

Demostración:

Observando la definición (3.22), se obtiene

$$\langle \mathbf{F}_{1\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{t}})\mathbf{t}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} - \langle \mathbf{F}_{1\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{r}})\mathbf{t}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} = (\bar{\varphi} \cdot \nabla \varphi, \mathbf{v}) + (\varphi \cdot \nabla \bar{\varphi}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1,$$

entonces,

$$\lim_{\|\bar{\mathbf{t}}\|_{\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}} \rightarrow 0} \frac{|\langle \mathbf{F}_{1r}(\bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{t}})\mathbf{t}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} - \langle \mathbf{F}_{1r}(\bar{\mathbf{r}})\mathbf{t}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} - ((\bar{\varphi} \cdot \nabla \varphi, \mathbf{v}) + (\varphi \cdot \nabla \bar{\varphi}, \mathbf{v}))|}{\|\bar{\mathbf{t}}\|_{\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}}} = 0,$$

lo que implica que el operador \mathbf{F}_1 es dos veces Fréchet diferenciable con respecto a \mathbf{r} y en el punto $\bar{\mathbf{r}}$ en la dirección $[\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}]$ se tiene que $\langle \mathbf{F}_{1rr}(\bar{\mathbf{r}})[\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}], \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} = (\bar{\varphi} \cdot \nabla \varphi, \mathbf{v}) + (\varphi \cdot \nabla \bar{\varphi}, \mathbf{v})$, esto es (3.106).

De la definición dada en (3.23), se obtiene

$$\langle \mathbf{F}_{2r}(\bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{t}})\mathbf{t}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}} - \langle \mathbf{F}_{2r}(\bar{\mathbf{r}})\mathbf{t}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}} = (\bar{\varphi} \cdot \nabla \psi, \mathbf{z}) + (\varphi \cdot \nabla \bar{\psi}, \mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega),$$

entonces

$$\lim_{\|\bar{\mathbf{t}}\|_{\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}} \rightarrow 0} \frac{|\langle \mathbf{F}_{2r}(\bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{t}})\mathbf{t}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}} - \langle \mathbf{F}_{2r}(\bar{\mathbf{r}})\mathbf{t}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}} - ((\bar{\varphi} \cdot \nabla \psi, \mathbf{z}) + (\varphi \cdot \nabla \bar{\psi}, \mathbf{z}))|}{\|\bar{\mathbf{t}}\|_{\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}}} = 0,$$

lo que implica que el operador \mathbf{F}_2 es dos veces Fréchet diferenciable con respecto a \mathbf{r} y en el punto $\bar{\mathbf{r}}$ en la dirección $[\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}]$, se tiene que $\langle \mathbf{F}_{2rr}(\bar{\mathbf{r}})[\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}], \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}} = (\bar{\varphi} \cdot \nabla \psi, \mathbf{z}) + (\varphi \cdot \nabla \bar{\psi}, \mathbf{z})$, esto es (3.107).

Por último, de (3.24) y (3.25), se tiene

$$\mathbf{F}_{3r}(\bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{t}})\mathbf{t} - \mathbf{F}_{3r}(\bar{\mathbf{r}})\mathbf{t} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}_{4r}(\bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{t}})\mathbf{t} - \mathbf{F}_{4r}(\bar{\mathbf{r}})\mathbf{t} = \mathbf{0},$$

entonces se sigue (3.108) y (3.109). \diamond

Como consecuencia de los lemas anteriores, para el funcional de Lagrange $\mathcal{L}[\mathbf{r}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}]$ asociado al problema (3.94)-(3.95) se tiene el siguiente resultado.

Lema 3.14 *El funcional de Lagrange \mathcal{L} definido en (3.100) es dos veces Fréchet diferenciable con respecto a $\mathbf{r} = [[\mathbf{u}, \mathbf{w}], [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]] \in \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}$. Además, en un punto arbitrario $\bar{\mathbf{r}} = [[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}}], [\bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{g}}_2]] \in \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}$ la segunda derivada de Fréchet del funcional \mathcal{L} es el funcional lineal y acotado $\mathcal{L}_{rr}[\bar{\mathbf{r}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}] : (\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}) \times (\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que en cada dirección $[\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}] \in (\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}) \times (\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad})$ es definida por*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{rr}[\bar{\mathbf{r}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}][\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}] &= \beta_1(\text{rot } \bar{\varphi}, \text{rot } \varphi) + 4\beta_2\nu(D(\bar{\varphi}), D(\varphi)) + \beta_3(\bar{\varphi}, \varphi) + \beta_4(\bar{\psi}, \psi)_{\mathbf{H}^1} \\ &\quad + \beta_5\langle \bar{\varrho}, \varrho \rangle_{\Gamma_1} + \beta_6\langle \bar{\tau}, \tau \rangle_{\Gamma_4} - (\bar{\varphi} \cdot \nabla \varphi, \boldsymbol{\eta}) - (\varphi \cdot \nabla \bar{\varphi}, \boldsymbol{\eta}) \\ &\quad - (\bar{\varphi} \cdot \nabla \psi, \boldsymbol{\xi}) - (\varphi \cdot \nabla \bar{\psi}, \boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \quad (3.110)$$

donde $\mathbf{t} = [\varphi, \psi, \varrho, \tau]$, $\bar{\mathbf{t}} = [\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{\varrho}, \bar{\tau}]$ y $\bar{\boldsymbol{\lambda}} = [\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\vartheta}]$.

Demostración:

De la definición de \mathcal{L} dada en (3.100), el Lema 3.12 y el Lema 3.13, se deduce que \mathcal{L} es dos veces Fréchet diferenciable con respecto a \mathbf{r} , además en un punto arbitrario $\bar{\mathbf{r}}$ en la dirección $[\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}]$, la segunda derivada de \mathcal{L} es dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{rr}[\bar{\mathbf{r}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}][\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}] &= \tilde{J}_{rr}(\mathbf{r})(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) - \langle \mathbf{F}_{1rr}(\bar{\mathbf{r}})(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}), \boldsymbol{\eta} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} - \langle \mathbf{F}_{2rr}(\bar{\mathbf{r}})(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}), \boldsymbol{\xi} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}} \\ &\quad - \langle \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{F}_{3rr}(\bar{\mathbf{r}})(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) \rangle_{\Gamma \setminus \Gamma_2^2} - \langle \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{F}_{4rr}(\bar{\mathbf{r}})(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) \rangle_{\Gamma}, \end{aligned}$$

y entonces observando (3.104) y (3.106)-(3.109) se obtiene (3.110). \diamond

En el siguiente lema se establece una condición para que \mathbb{F} sea regular en un punto $\bar{\mathbf{r}} \in \mathcal{S}_{ad}$, esto es, $\text{Im}(\mathbb{F}_{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{r}})) = \mathbb{Y}$ (ver [11] y [67], pág. 50).

Lema 3.15 Sea $\bar{\mathbf{r}} = [\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{g}}_2] \in \mathcal{S}_{ad}$ un elemento admisible para el problema (3.94)-(3.95). Si ν, ν_2 son suficientemente grandes tales que

$$\delta = \min\{2(\nu + \nu_r) - 3\nu_r\tilde{C}^2 - C\tilde{C}^2\Theta, \frac{\nu_2}{2} - C\Theta\} > 0, \quad (3.111)$$

donde Θ es definido en (2.43), entonces el operador \mathbb{F} es regular en el punto $\bar{\mathbf{r}}$.

Demostración:

Sea $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}] \in \mathbb{Y}$, es suficiente probar la existencia de un elemento $\mathbf{t} = [\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\chi}] \in \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}$, con $\boldsymbol{\phi} = [\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}]$ y $\boldsymbol{\chi} = [\boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{\tau}]$ satisfaciendo

$$\begin{aligned} & 2(\nu + \nu_r)(D(\boldsymbol{\varphi}), D(\mathbf{v})) + 2\alpha(\nu + \nu_r)\langle \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_2^2} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \\ & = 2\nu_r(\text{rot } \boldsymbol{\psi}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1, \end{aligned} \quad (3.112)$$

$$\begin{aligned} & \nu_2(\nabla \boldsymbol{\psi}, \nabla \mathbf{z}) + \nu_3(\text{div } \boldsymbol{\psi}, \text{div } \mathbf{z}) + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}, \mathbf{z}) + (\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla \bar{\mathbf{w}}, \mathbf{z}) + 4\nu_r(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{z}) \\ & = 2\nu_r(\text{rot } \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{z}) + \langle \mathbf{b}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}} \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (3.113)$$

$$\boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma \setminus \Gamma_2^2} = \mathbf{c} + \mathcal{B}_1(\boldsymbol{\varrho} - \bar{\mathbf{g}}_1), \quad (3.114)$$

$$\boldsymbol{\psi}|_\Gamma = \mathbf{d} + \mathcal{B}_2(\boldsymbol{\tau} - \bar{\mathbf{g}}_2). \quad (3.115)$$

Haciendo $\boldsymbol{\varrho} = \bar{\mathbf{g}}_1$ y $\boldsymbol{\tau} = \bar{\mathbf{g}}_2$, se tiene que $\boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma \setminus \Gamma_2^2} = \mathbf{c}$ y $\boldsymbol{\psi}|_\Gamma = \mathbf{d}$. Por Lema 2.5, existen extensiones $[\boldsymbol{\varphi}^\varepsilon, \boldsymbol{\psi}^\varepsilon] \in \mathbb{H}$ tal que $\boldsymbol{\varphi}^\varepsilon|_{\Gamma \setminus \Gamma_2^2} = \mathbf{c}$, $\boldsymbol{\varphi}^\varepsilon|_{\Gamma_2^2} = \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{\psi}^\varepsilon|_\Gamma = \mathbf{d}$. Entonces, reescribiendo las variables $[\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}] \in \mathbb{H}$ en la forma $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}^\varepsilon + \bar{\boldsymbol{\varphi}}$ y $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}^\varepsilon + \bar{\boldsymbol{\psi}}$ con nuevas variables $[\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \bar{\boldsymbol{\psi}}] \in \mathbb{X}$, desde (3.112)-(3.115) se obtiene el siguiente sistema lineal: Hallar $[\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \bar{\boldsymbol{\psi}}] \in \mathbb{X}$ tal que

$$\begin{aligned} & 2(\nu + \nu_r)(D(\bar{\boldsymbol{\varphi}}), D(\mathbf{v})) + 2\alpha(\nu + \nu_r)\langle \bar{\boldsymbol{\varphi}}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_2^2} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{\varphi}}, \mathbf{v}) + (\bar{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \\ & = 2\nu_r(\text{rot } \bar{\boldsymbol{\psi}}, \mathbf{v}) + \langle \tilde{\mathbf{a}}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1, \end{aligned} \quad (3.116)$$

$$\begin{aligned} & \nu_2(\nabla \bar{\boldsymbol{\psi}}, \nabla \mathbf{z}) + \nu_3(\text{div } \bar{\boldsymbol{\psi}}, \text{div } \mathbf{z}) + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{\psi}}, \mathbf{z}) + (\bar{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{w}}, \mathbf{z}) + 4\nu_r(\bar{\boldsymbol{\psi}}, \mathbf{z}) \\ & = 2\nu_r(\text{rot } \bar{\boldsymbol{\varphi}}, \mathbf{z}) + \langle \tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}} \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (3.117)$$

donde

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathbf{a}}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} &= \langle \nu_1 \Delta \boldsymbol{\varphi}^\varepsilon - \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}^\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}^\varepsilon \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + 2\nu_r \text{rot } \boldsymbol{\psi}^\varepsilon + \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma}, \\ \langle \tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}} &= \langle \nu_2 \Delta \boldsymbol{\psi}^\varepsilon + \nu_3 \nabla \text{div } \boldsymbol{\psi}^\varepsilon - \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}^\varepsilon - \boldsymbol{\psi}^\varepsilon \cdot \nabla \bar{\mathbf{w}} - 4\nu_r \boldsymbol{\psi}^\varepsilon + 2\nu_r \text{rot } \boldsymbol{\varphi}^\varepsilon + \mathbf{b}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}}. \end{aligned}$$

La existencia de un par $[\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \bar{\boldsymbol{\psi}}] \in \mathbb{X}$ satisfaciendo (3.116)-(3.117) se demuestra aplicando el Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.23). Con este propósito considerando la forma bilineal $a : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} a([\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \bar{\boldsymbol{\psi}}], [\mathbf{v}, \mathbf{z}]) &= 2(\nu + \nu_r)(D(\bar{\boldsymbol{\varphi}}), D(\mathbf{v})) + 2\alpha(\nu + \nu_r)\langle \bar{\boldsymbol{\varphi}}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_2^2} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{\varphi}}, \mathbf{v}) + (\bar{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \\ &\quad - 2\nu_r(\text{rot } \bar{\boldsymbol{\psi}}, \mathbf{v}) + \nu_2(\nabla \bar{\boldsymbol{\psi}}, \nabla \mathbf{z}) + \nu_3(\text{div } \bar{\boldsymbol{\psi}}, \text{div } \mathbf{z}) + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{\psi}}, \mathbf{z}) \\ &\quad + (\bar{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{w}}, \mathbf{z}) + 4\nu_r(\bar{\boldsymbol{\psi}}, \mathbf{z}) - 2\nu_r(\text{rot } \bar{\boldsymbol{\varphi}}, \mathbf{z}), \end{aligned} \quad (3.118)$$

y el funcional lineal continuo $F : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$F[\mathbf{v}, \mathbf{z}] = \langle \tilde{\mathbf{a}}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma} + \langle \tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}},$$

el problema (3.116)-(3.117) es equivalente a: Hallar $[\bar{\varphi}, \bar{\psi}] \in \mathbb{X}$ tal que

$$a([\bar{\varphi}, \bar{\psi}], [\mathbf{v}, \mathbf{z}]) = F[\mathbf{v}, \mathbf{z}] \quad \forall [\mathbf{v}, \mathbf{z}] \in \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1 \times \mathbf{H}_0^1(\Omega) = \mathbb{X}. \quad (3.119)$$

A seguir se verifica que a y F satisfacen las condiciones del Teorema 1.23.

- La forma bilineal a es continua:

Para los términos del lado derecho de la igualdad (3.118), usando la desigualdad de Hölder, se tiene

$$\begin{aligned} 2(\nu + \nu_r)|(D(\bar{\varphi}), D(\mathbf{v}))| + 2\alpha(\nu + \nu_r)|\langle \bar{\varphi}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_2^2}| &\leq 2(\nu + \nu_r)\|D(\bar{\varphi})\|\|D(\mathbf{v})\| \\ &\quad + 2\alpha(\nu + \nu_r)\|\bar{\varphi}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_2^2)}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_2^2)} \\ &\leq 2(\nu + \nu_r)\|\bar{\varphi}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}\|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} \\ &\quad + 2\alpha(\nu + \nu_r)C\|\bar{\varphi}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}\|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}, \end{aligned} \quad (3.120)$$

$$\begin{aligned} \nu_2|\langle \nabla \bar{\psi}, \nabla \mathbf{z} \rangle| + \nu_3|(\operatorname{div} \bar{\psi}, \operatorname{div} \mathbf{z})| &\leq (\nu_2 + \nu_3)\|\nabla \bar{\psi}\|\|\nabla \mathbf{z}\| \\ &= (\nu_2 + \nu_3)\|\bar{\psi}\|_{\mathbf{H}_0^1}\|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}_0^1}. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Aplicando las desigualdades de Hölder y Poincaré, también observando (1.19), se obtiene

$$\begin{aligned} 2\nu_r|(\operatorname{rot} \bar{\psi}, \mathbf{v})| + 2\nu_r|(\operatorname{rot} \bar{\varphi}, \mathbf{z})| &\leq 2\nu_r\|\operatorname{rot} \bar{\psi}\|\|\mathbf{v}\| + 2\nu_r\|\operatorname{rot} \bar{\varphi}\|\|\mathbf{z}\| \\ &\leq 2\sqrt{2}\nu_r C(\|\nabla \bar{\psi}\|\|\nabla \mathbf{v}\| + \|\nabla \bar{\varphi}\|\|\nabla \mathbf{z}\|) \\ &\leq 2\sqrt{2}\nu_r C\tilde{C}(\|\bar{\psi}\|_{\mathbf{H}_0^1}\|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} + \|\bar{\varphi}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}\|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}_0^1}), \end{aligned} \quad (3.122)$$

$$4\nu_r|(\bar{\psi}, \mathbf{z})| \leq 4\nu_r\|\bar{\psi}\|\|\mathbf{z}\| \leq 4\nu_r C\|\bar{\psi}\|_{\mathbf{H}_0^1}\|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}_0^1}, \quad (3.123)$$

Usando la desigualdad de Hölder, junto con las desigualdades (1.30) y (1.33), se tiene

$$\begin{aligned} |(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\varphi}, \mathbf{v})| + |(\bar{\varphi} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})| &\leq \|\bar{\mathbf{u}}\|_3\|\nabla \bar{\varphi}\|\|\mathbf{v}\|_6 + \|\bar{\varphi}\|_3\|\nabla \bar{\mathbf{u}}\|\|\mathbf{v}\|_6, \\ &\leq C\|\nabla \bar{\mathbf{u}}\|\|\nabla \bar{\varphi}\|\|\nabla \mathbf{v}\| + C\|\nabla \bar{\varphi}\|\|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1}\|\nabla \mathbf{v}\| \\ &\leq C\tilde{C}^2\|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1}\|\bar{\varphi}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}\|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}, \end{aligned} \quad (3.124)$$

$$\begin{aligned} |(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\psi}, \mathbf{z})| + |(\bar{\varphi} \cdot \nabla \bar{\mathbf{w}}, \mathbf{z})| &\leq \|\bar{\mathbf{u}}\|_3\|\nabla \bar{\psi}\|\|\mathbf{z}\|_6 + \|\bar{\varphi}\|_3\|\nabla \bar{\mathbf{w}}\|\|\mathbf{z}\|_6 \\ &\leq C\|\nabla \bar{\mathbf{u}}\|\|\bar{\psi}\|_{\mathbf{H}_0^1}\|\nabla \mathbf{z}\| + C\|\nabla \bar{\varphi}\|\|\bar{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{H}^1}\|\nabla \mathbf{z}\| \\ &\leq C\|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1}\|\bar{\psi}\|_{\mathbf{H}_0^1}\|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}_0^1} \\ &\quad + C\tilde{C}\|\bar{\varphi}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}\|\bar{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{H}^1}\|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}_0^1}. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Reemplazando las desigualdades (3.120)-(3.125) en (3.118), se obtiene

$$\begin{aligned} |a([\bar{\varphi}, \bar{\psi}], [\mathbf{v}, \mathbf{z}])| &\leq (2(\nu + \nu_r) + 2\alpha(\nu + \nu_r)C + C\tilde{C}^2\|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1})\|\bar{\varphi}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}\|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} \\ &\quad + (\nu_2 + \nu_3 + 4\nu_r C + C\|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1})\|\bar{\psi}\|_{\mathbf{H}_0^1}\|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}_0^1} \\ &\quad + (2\sqrt{2}\nu_r C\tilde{C} + C\tilde{C}\|\bar{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{H}^1})\|\bar{\varphi}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}\|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}_0^1} \\ &\quad + 2\sqrt{2}\nu_r C\tilde{C}\|\bar{\psi}\|_{\mathbf{H}_0^1}\|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}. \end{aligned} \quad (3.126)$$

Como $\|\varphi\|_{\tilde{\mathbf{H}}_r^1} \leq \|[\varphi, \psi]\|_{\mathbb{X}}$ y $\|\psi\|_{\mathbf{H}_0^1} \leq \|[\varphi, \psi]\|_{\mathbb{X}}$, de (3.126) se tiene

$$\begin{aligned}
|a([\bar{\varphi}, \bar{\psi}], [\mathbf{v}, \mathbf{z}])| &\leq (2(\nu + \nu_r) + 2\alpha(\nu + \nu_r)C + 2C\tilde{C}^2\|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_r^1})\|[\bar{\varphi}, \bar{\psi}]\|_{\mathbb{X}}\|[\mathbf{v}, \mathbf{z}]\|_{\mathbb{X}} \\
&\quad + (\nu_2 + \nu_3 + 4\nu_r C + C\|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_r^1})\|[\bar{\varphi}, \bar{\psi}]\|_{\mathbb{X}}\|[\mathbf{v}, \mathbf{z}]\|_{\mathbb{X}} \\
&\quad + (2\sqrt{2}\nu_r C\tilde{C} + C\tilde{C}\|\bar{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{H}^1})\|[\bar{\varphi}, \bar{\psi}]\|_{\mathbb{X}}\|[\mathbf{v}, \mathbf{z}]\|_{\mathbb{X}} \\
&\quad + 2\sqrt{2}\nu_r C\tilde{C}\|[\bar{\varphi}, \bar{\psi}]\|_{\mathbb{X}}\|[\mathbf{v}, \mathbf{z}]\|_{\mathbb{X}} \\
&\leq C_a\|[\bar{\varphi}, \bar{\psi}]\|_{\mathbb{X}}\|[\mathbf{v}, \mathbf{z}]\|_{\mathbb{X}},
\end{aligned} \tag{3.127}$$

donde $C_a = 2(\nu + \nu_r) + 2\alpha(\nu + \nu_r)C + \nu_2 + \nu_3 + 4\nu_r C + 4\sqrt{2}\nu_r C\tilde{C} + C(\tilde{C}^2 + 1)\Theta + C\tilde{C}\Theta$ es una constante positiva, con Θ definida en (2.43) ($\|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_r^1} + \|\bar{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{H}^1} \leq \Theta$).

Por lo tanto (3.127) implica que a es una forma bilineal continua.

- La forma bilineal a es coerciva:

Haciendo $[\mathbf{v}, \mathbf{z}] = [\bar{\varphi}, \bar{\psi}] = \bar{\phi}$ en (3.118) se obtiene

$$\begin{aligned}
a(\bar{\phi}, \bar{\phi}) &\geq 2(\nu + \nu_r)\|\bar{\varphi}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_r^1}^2 + \nu_2\|\bar{\psi}\|_{\mathbf{H}_0^1}^2 + (\bar{\varphi} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}, \bar{\varphi}) + (\bar{\varphi} \cdot \nabla \bar{\mathbf{w}}, \bar{\psi}) \\
&\quad + 4\nu_r\|\bar{\psi}\|^2 - 4\nu_r(\text{rot } \bar{\varphi}, \bar{\psi}).
\end{aligned} \tag{3.128}$$

Para los términos del lado derecho de (3.128), aplicando las desigualdades de Hölder y Young, y considerando el Lema 1.35, se tiene

$$\begin{aligned}
|(\bar{\varphi} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}, \bar{\varphi})| &\leq \|\bar{\varphi}\|_3\|\nabla \bar{\mathbf{u}}\|\|\bar{\varphi}\|_6 \leq C\tilde{C}^2\|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_r^1}\|\bar{\varphi}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_r^1}^2, \\
|(\bar{\varphi} \cdot \nabla \bar{\mathbf{w}}, \bar{\psi})| &\leq \|\bar{\varphi}\|_3\|\nabla \bar{\mathbf{w}}\|\|\bar{\psi}\|_6 \leq C\tilde{C}\|\bar{\varphi}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_r^1}^2\|\bar{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{H}^1}\|\bar{\psi}\|_{\mathbf{H}_0^1} \\
&\leq C\|\bar{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{H}^1}(\tilde{C}^2\|\bar{\varphi}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_r^1}^2 + \|\bar{\psi}\|_{\mathbf{H}_0^1}^2), \\
4\nu_r|(\text{rot } \bar{\varphi}, \bar{\psi})| &\leq 4\sqrt{2}\nu_r\|\nabla \bar{\varphi}\|\|\bar{\psi}\| \leq 4\sqrt{2}\nu_r\tilde{C}\|\bar{\varphi}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_r^1}\|\bar{\psi}\| \\
&\leq 2\nu_r\tilde{C}^2\|\bar{\varphi}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_r^1}^2 + 4\nu_r\|\bar{\psi}\|^2.
\end{aligned}$$

Entonces, usando las desigualdades de arriba en (3.128), se obtiene

$$\begin{aligned}
a(\bar{\phi}, \bar{\phi}) &\geq (2(\nu + \nu_r) - 2\nu_r\tilde{C}^2 - C\tilde{C}^2\|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_r^1} - C\tilde{C}^2\|\bar{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{H}^1})\|\bar{\varphi}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_r^1}^2 \\
&\quad + (\nu_2 - C\|\bar{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{H}^1})\|\bar{\psi}\|_{\mathbf{H}_0^1}^2,
\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta (2.43), se obtiene

$$\begin{aligned}
a(\bar{\phi}, \bar{\phi}) &\geq (2(\nu + \nu_r) - 2\nu_r\tilde{C}^2 - C\tilde{C}^2\Theta)\|\bar{\varphi}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_r^1}^2 + (\nu_2 - C\Theta)\|\bar{\psi}\|_{\mathbf{H}_0^1}^2 \\
&\geq \min\{2(\nu + \nu_r) - 2\nu_r\tilde{C}^2 - C\tilde{C}^2\Theta, \nu_2 - C\Theta\}\|\bar{\phi}\|_{\mathbb{X}}^2 = \delta\|\bar{\phi}\|_{\mathbb{X}}^2,
\end{aligned} \tag{3.129}$$

donde $\delta > 0$ es definido en el Lema 3.16. Así, (3.129) implica que a es coerciva.

- El funcional F es continuo:

De la definición de F se tiene que

$$|F[\mathbf{v}, \mathbf{z}]| \leq |\langle \tilde{\mathbf{a}}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}_r^1}| + |\langle \tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}}|, \tag{3.130}$$

donde

$$\begin{aligned} |\langle \tilde{\mathbf{a}}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma}| &\leq (\nu + \nu_r)|(\nabla \varphi^\varepsilon, \nabla \mathbf{v})| + |(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \varphi^\varepsilon, \mathbf{v})| + |(\varphi^\varepsilon \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})| \\ &\quad + 2\nu_r |(\text{rot } \psi^\varepsilon, \mathbf{v})| + |\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma}|, \end{aligned} \quad (3.131)$$

$$\begin{aligned} |\langle \tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}}| &\leq \nu_2 |(\nabla \psi^\varepsilon, \nabla \mathbf{z})| + \nu_3 |(\text{div } \psi^\varepsilon, \text{div } \mathbf{z})| + |(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \psi^\varepsilon, \mathbf{z})| + |(\varphi^\varepsilon \cdot \nabla \bar{\mathbf{w}}, \mathbf{z})| \\ &\quad + 4\nu_r |(\psi^\varepsilon, \mathbf{z})| + 2\nu_r |(\text{rot } \varphi^\varepsilon, \mathbf{z})| + |\langle \mathbf{b}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}}|. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Para los términos del lado derecho de (3.131), usando la desigualdad de Hölder y teniendo en cuenta (1.30) y (1.33), se tiene

$$(\nu + \nu_r)|(\nabla \varphi^\varepsilon, \nabla \mathbf{v})| \leq (\nu + \nu_r) \|\nabla \varphi^\varepsilon\| \|\nabla \mathbf{v}\| \leq \nu_1 \tilde{C} \|\varphi^\varepsilon\|_{\mathbf{H}'_\sigma} \|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}^1_\sigma}, \quad (3.133)$$

$$\begin{aligned} |(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \varphi^\varepsilon, \mathbf{v})| + |(\varphi^\varepsilon \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})| &\leq \|\bar{\mathbf{u}}\|_3 \|\nabla \varphi^\varepsilon\| \|\mathbf{v}\|_6 + \|\varphi^\varepsilon\|_3 \|\nabla \bar{\mathbf{u}}\| \|\mathbf{v}\|_6 \\ &\leq C(\|\nabla \bar{\mathbf{u}}\| \|\varphi^\varepsilon\|_{\mathbf{H}'_\sigma} + \|\nabla \varphi^\varepsilon\| \|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}^1_\sigma}) \|\nabla \mathbf{v}\| \\ &\leq C\tilde{C} \|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}'_\sigma} \|\varphi^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1_\sigma} \|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}^1_\sigma}, \end{aligned} \quad (3.134)$$

$$\begin{aligned} 2\nu_r |(\text{rot } \psi^\varepsilon, \mathbf{v})| &\leq 2\nu_r \|\text{rot } \psi^\varepsilon\| \|\mathbf{v}\| \leq 2\sqrt{2}\nu_r C \|\nabla \psi^\varepsilon\| \|\mathbf{v}\|_6 \\ &\leq 2\sqrt{2}\nu_r C \|\psi^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1} \|\nabla \mathbf{v}\| \\ &\leq 2\sqrt{2}\nu_r C \tilde{C} \|\psi^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1} \|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}^1_\sigma}. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Sustituyendo (3.133)-(3.135) en (3.131), se obtiene

$$|\langle \tilde{\mathbf{a}}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma}| \leq ((\nu + \nu_r)\tilde{C} + C\tilde{C}\|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}^1_\sigma}) \|\varphi^\varepsilon\|_{\mathbf{H}'_\sigma} \|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}^1_\sigma} + (2\sqrt{2}\nu_r \tilde{C} \|\psi^\varepsilon\| + \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{H}'_\sigma}) \|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}^1_\sigma},$$

entonces teniendo en cuenta (1.2) y el hecho que $\|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{H}}^1_\sigma} \leq \|[\mathbf{v}, \mathbf{z}]\|_{\mathbb{X}}$, se deduce

$$\begin{aligned} |\langle \tilde{\mathbf{a}}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}'_\sigma}| &\leq ((\nu + \nu_r)\tilde{C} + C\tilde{C}\|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}^1_\sigma}) C \|\mathbf{c}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma^2_\sigma)} \|[\mathbf{v}, \mathbf{z}]\|_{\mathbb{X}} \\ &\quad + (2\sqrt{2}\nu_r \tilde{C} C \|\mathbf{d}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{H}'_\sigma}) \|[\mathbf{v}, \mathbf{z}]\|_{\mathbb{X}} \leq C_{\tilde{a}} \|[\mathbf{v}, \mathbf{z}]\|_{\mathbb{X}}, \end{aligned} \quad (3.136)$$

donde $C_{\tilde{a}} > 0$ es una constante que depende de $\nu, \nu_r, \|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}^1_\sigma}, \|\mathbf{c}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma^2_\sigma)}, \|\mathbf{d}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}, \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{H}'_\sigma}$.

Para los términos del lado derecho de (3.132), usando la desigualdad de Hölder, la desigualdad de Poincaré, así como también teniendo en cuenta (1.30) y (1.33), se tiene

$$\begin{aligned} \nu_2 |(\nabla \psi^\varepsilon, \nabla \mathbf{z})| + \nu_3 |(\text{div } \psi^\varepsilon, \text{div } \mathbf{z})| &\leq (\nu_2 + \nu_3) \|\nabla \psi^\varepsilon\| \|\nabla \mathbf{z}\| \leq (\nu_2 + \nu_3) \|\psi^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1} \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}^1_0}, \\ |(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \psi^\varepsilon, \mathbf{z})| &\leq \|\bar{\mathbf{u}}\|_3 \|\nabla \psi^\varepsilon\| \|\mathbf{z}\|_6 \leq C \|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}'_\sigma} \|\psi^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1} \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}^1_0}, \\ |(\varphi^\varepsilon \cdot \nabla \bar{\mathbf{w}}, \mathbf{z})| &\leq \|\varphi^\varepsilon\|_3 \|\nabla \bar{\mathbf{w}}\| \|\mathbf{z}\|_6 \leq C \|\varphi^\varepsilon\|_{\mathbf{H}'_\sigma} \|\bar{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{H}^1} \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}^1_0}, \\ 4\nu_r |(\psi^\varepsilon, \mathbf{z})| &\leq 4\nu_r \|\psi^\varepsilon\| \|\mathbf{z}\| \leq 4\nu_r C \|\psi^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1} \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}^1_0}, \\ 2\nu_r |(\text{rot } \varphi^\varepsilon, \mathbf{z})| &\leq 2\sqrt{2}\nu_r C \|\nabla \varphi^\varepsilon\| \|\nabla \mathbf{z}\| \leq 2\sqrt{2}\nu_r C \|\varphi^\varepsilon\|_{\mathbf{H}'_\sigma} \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}^1_0}, \end{aligned}$$

entonces sustituyendo estas desigualdades en (3.132), se obtiene

$$\begin{aligned} |\langle \tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}}| &\leq (\nu_2 + \nu_3 + 4\nu_r C + C\|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}^1_\sigma}) \|\psi^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1} \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}^1_0} \\ &\quad + (2\sqrt{2}\nu_r C + C\|\bar{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{H}^1}) \|\varphi^\varepsilon\|_{\mathbf{H}'_\sigma} \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}^1_0} + \|\mathbf{b}\|_{\mathbf{H}^{-1}} \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}^1_0}, \end{aligned}$$

luego teniendo en cuenta (1.2) y el hecho que $\|\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1} \leq \|[\mathbf{v}, \mathbf{z}]\|_{\mathbb{X}}$, se deduce

$$\begin{aligned} |(\tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{z})_{\mathbf{H}^{-1}}| &\leq (\nu_2 + \nu_3 + 4\nu_r C + C\|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1})C\|\mathbf{d}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}\|[\mathbf{v}, \mathbf{z}]\|_{\mathbb{X}} \\ &\quad + (2\sqrt{2}\nu_r C + C\|\bar{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{H}^1})C\|\mathbf{c}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_2^2)}\|[\mathbf{v}, \mathbf{z}]\|_{\mathbb{X}} \\ &\quad + \|\mathbf{b}\|_{\mathbf{H}^{-1}}\|[\mathbf{v}, \mathbf{z}]\|_{\mathbb{X}} \leq C_{\tilde{b}}\|[\mathbf{v}, \mathbf{z}]\|_{\mathbb{X}}, \end{aligned} \quad (3.137)$$

donde $C_{\tilde{b}}$ es una constante positiva que depende de $\nu_2, \nu_3, \nu_r, \|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1}, \|\bar{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{H}^1}, \|\mathbf{b}\|_{\mathbf{H}_\sigma^{-1}}, \|\mathbf{d}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}$ y $\|\mathbf{c}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_2^2)}$.

Así, llevando (3.136) y (3.137) en (3.130), se obtiene

$$|F[\mathbf{v}, \mathbf{z}]| \leq (C_{\tilde{a}} + C_{\tilde{b}})\|[\mathbf{v}, \mathbf{z}]\|_{\mathbb{X}},$$

lo cual implica que F es continuo sobre \mathbb{X} .

Por lo tanto, la forma bilineal a y el funcional F satisfacen las condiciones del Teorema de Lax-Milgram, entonces existe una única $[\bar{\varphi}, \bar{\psi}] \in \mathbb{X}$ solución de (3.119) y, en consecuencia $[\bar{\varphi}, \bar{\psi}]$ es solución de (3.116)-(3.117).

Por lo tanto, se ha probado que existe $\mathbf{t} = [\varphi, \psi, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\tau}] = [\varphi^\varepsilon + \bar{\varphi}, \psi^\varepsilon + \bar{\psi}, \bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{g}}_2]$ solución del sistema (3.112)-(3.115). \diamond

Para el multiplicador de Lagrange $[\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}] \in \mathbb{X}$ dado en (3.100), se obtiene el siguiente resultado.

Lema 3.16 *Sea $\bar{\mathbf{r}} = [\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{g}}_2] \in \mathcal{S}_{ad}$ un elemento admisible para el problema (3.94)-(3.95) y sea el espacio \mathcal{U}_{ad} satisfaciendo la Propiedad C en un punto $[\bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{g}}_2]$. Si ν, ν_2 satisfacen la condición (3.111) dada en el Lema 3.15, entonces el multiplicador de Lagrange $[\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}]$ dado en (3.100) satisface la siguiente desigualdad*

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1}^2 + \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1}^2 \leq \frac{\tilde{\delta}}{\delta} \mathcal{M}[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}}],$$

con $\mathcal{M}[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}}] = \|\text{rot } \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d\|^2 + \|\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b\|^2 + \|\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d\|_{\mathbf{H}^1}^2 + \|D(\bar{\mathbf{u}})\|^2$, δ es definido en (3.111) y $\tilde{\delta}$ es una constante positiva que depende de $\Omega, \nu, \nu_r, \nu_2$.

Demostración:

De la definición de \mathcal{L} dada en (3.100), con $\boldsymbol{\phi} = [\varphi, \psi]$ se tiene

$$\mathcal{L}_x[\bar{\mathbf{r}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}]\boldsymbol{\phi} = \tilde{J}_x(\bar{\mathbf{r}})\boldsymbol{\phi} - \langle \mathbf{F}_{1x}(\bar{\mathbf{r}})\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\mathbf{H}_\sigma^{-1}} - \langle \mathbf{F}_{2x}(\bar{\mathbf{r}})\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\xi} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}} - \langle \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{F}_{3x}(\bar{\mathbf{r}})\boldsymbol{\phi} \rangle_{\Gamma \setminus \Gamma_2^2} - \langle \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{F}_{4x}(\bar{\mathbf{r}})\boldsymbol{\phi} \rangle_{\Gamma},$$

así, desde (3.22)-(3.25), (3.96) y (3.101), con $\mathbf{t} = [\varphi, \psi, \mathbf{0}, \mathbf{0}]$, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x[\bar{\mathbf{r}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}]\boldsymbol{\phi} &= \beta_1(\text{rot } \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d, \text{rot } \boldsymbol{\varphi}) + 4\beta_2\nu(D(\bar{\mathbf{u}}), D(\boldsymbol{\varphi})) + \beta_3(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b, \boldsymbol{\varphi}) + \beta_4(\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d, \boldsymbol{\psi})_{H^1} \\ &\quad - 2\nu_1(D(\boldsymbol{\eta}), D(\boldsymbol{\varphi})) - (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\eta}) - (\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}) + 2\nu_r(\text{rot } \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\eta}) - \nu_2(\nabla \boldsymbol{\xi}, \nabla \boldsymbol{\psi}) \\ &\quad - \nu_3(\text{div } \boldsymbol{\xi}, \text{div } \boldsymbol{\psi}) - (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\xi}) - (\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla \bar{\mathbf{w}}, \boldsymbol{\xi}) + 2\nu_r(\text{rot } \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\xi}) - 4\nu_r(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\psi}) \\ &\quad - 2\alpha\nu_1\langle \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\Gamma_2^2} - \langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\Gamma \setminus \Gamma_2^2} - \langle \boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\psi} \rangle_{\Gamma} = 0 \quad \forall (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) \in \mathbb{H}. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Haciendo $[\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}] = [\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}] \in \mathbb{X} \subset \mathbb{H}$, de la igualdad (3.138) se obtiene

$$\begin{aligned} 2\nu_1\|\boldsymbol{\eta}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1}^2 + \nu_2\|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1}^2 + 4\nu_r\|\boldsymbol{\xi}\|^2 &\leq \beta_1(\text{rot } \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d, \text{rot } \boldsymbol{\eta}) + 4\nu\beta_2(D(\bar{\mathbf{u}}), D(\boldsymbol{\eta})) + \beta_3(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b, \boldsymbol{\eta}) \\ &\quad + \beta_4(\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d, \boldsymbol{\xi})_{\mathbf{H}^1} - (\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}) - (\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla \bar{\mathbf{w}}, \boldsymbol{\xi}) \\ &\quad + 4\nu_r(\text{rot } \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}). \end{aligned} \quad (3.139)$$

Para los términos del lado derecho de (3.139), empleando la desigualdad de Hölder, la desigualdad de Young, como también teniendo en cuenta el Lema 1.35 y la desigualdad de Poincaré ($\|\mathbf{u}\| \leq C_\Omega \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_0^1}$), se tiene

$$\begin{aligned}
\beta_1 |(\operatorname{rot} \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d, \operatorname{rot} \boldsymbol{\eta})| &\leq \beta_1 \|\operatorname{rot} \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d\| \|\operatorname{rot} \boldsymbol{\eta}\| \leq \sqrt{2} \beta_1 \|\operatorname{rot} \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d\| \|\nabla \boldsymbol{\eta}\| \\
&\leq \sqrt{2} \beta_1 \tilde{C} \|\operatorname{rot} \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d\| \|\boldsymbol{\eta}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} \leq \frac{3\beta_1^2}{2\nu_r} \|\operatorname{rot} \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d\|^2 + \frac{\nu_r \tilde{C}^2}{3} \|\boldsymbol{\eta}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}^2, \\
4\nu\beta_2 |(D(\bar{\mathbf{u}}), D(\boldsymbol{\eta}))| &\leq \frac{12\nu^2\beta_2^2}{\nu_r \tilde{C}^2} \|D(\bar{\mathbf{u}})\|^2 + \frac{\nu_r \tilde{C}^2}{3} \|\boldsymbol{\eta}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}^2, \\
\beta_3 |(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b, \boldsymbol{\eta})| &\leq \beta_3 \|\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b\| \|\boldsymbol{\eta}\| \leq C\beta_3 \|\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b\| \|\boldsymbol{\eta}\|_6 \leq C\beta_3 \|\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b\| \|\nabla \boldsymbol{\eta}\| \\
&\leq C\tilde{C}\beta_3 \|\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b\| \|\boldsymbol{\eta}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} \leq \frac{3\beta_3^2 C}{4\nu_r} \|\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b\|^2 + \frac{\nu_r \tilde{C}^2}{3} \|\boldsymbol{\eta}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}^2, \\
\beta_4 |(\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d, \boldsymbol{\xi})_{\mathbf{H}^1}| &\leq \beta_4 (\|\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d\| \|\boldsymbol{\xi}\| + \|\nabla(\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d)\| \|\nabla \boldsymbol{\xi}\|) \\
&\leq \beta_4 (\|\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d\| + \|\nabla(\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d)\|) (\|\boldsymbol{\xi}\| + \|\nabla \boldsymbol{\xi}\|) \\
&\leq \beta_4 \sqrt{2} \|\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d\|_{\mathbf{H}^1} (C\|\nabla \boldsymbol{\xi}\| + \|\nabla \boldsymbol{\xi}\|) \\
&\leq \beta_4 \sqrt{2} (C+1) \|\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d\|_{\mathbf{H}^1} \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbf{H}_0^1} \\
&\leq \frac{\beta_4^2 (C+1)^2}{\nu_2} \|\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d\|_{\mathbf{H}^1}^2 + \frac{\nu_2}{2} \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbf{H}_0^1}^2, \\
4\nu_r |(\operatorname{rot} \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})| &\leq 4\nu_r \|\operatorname{rot} \boldsymbol{\eta}\| \|\boldsymbol{\xi}\| \leq 4\sqrt{2}\nu_r \|\nabla \boldsymbol{\eta}\| \|\boldsymbol{\xi}\| \\
&\leq 4\sqrt{2}\nu_r \tilde{C} \|\boldsymbol{\eta}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} \|\boldsymbol{\xi}\| \leq 2\nu_r \tilde{C}^2 \|\boldsymbol{\eta}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}^2 + 4\nu_r \|\boldsymbol{\xi}\|^2, \\
|(\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta})| &\leq \|\boldsymbol{\eta}\|_3 \|\nabla \bar{\mathbf{u}}\| \|\boldsymbol{\eta}\|_6 \leq C \|\bar{\mathbf{u}}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} \|\nabla \boldsymbol{\eta}\|^2 \leq C\tilde{C}^2 \|\bar{\mathbf{u}}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} \|\boldsymbol{\eta}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}^2, \\
|(\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla \bar{\mathbf{w}}, \boldsymbol{\xi})| &\leq \|\boldsymbol{\eta}\|_3 \|\nabla \bar{\mathbf{w}}\| \|\boldsymbol{\xi}\|_6 \leq C \|\nabla \boldsymbol{\eta}\| \|\bar{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{H}^1} \|\nabla \boldsymbol{\xi}\| \\
&\leq C\tilde{C} \|\boldsymbol{\eta}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} \|\bar{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{H}^1} \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbf{H}_0^1} \leq C \|\bar{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{H}^1} (\tilde{C}^2 \|\boldsymbol{\eta}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}^2 + \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbf{H}_0^1}^2).
\end{aligned}$$

Entonces, considerando estas desigualdades y la desigualdad (2.43) del Teorema 2.7, desde (3.139) se obtiene

$$\begin{aligned}
&(2(\nu + \nu_r) - 3\nu_r \tilde{C}^2 - C\tilde{C}^2\Theta) \|\boldsymbol{\eta}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}^2 + \left(\frac{\nu_2}{2} - C\Theta\right) \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbf{H}_0^1}^2 \\
&\leq \frac{3\beta_1^2}{2\nu_r} \|\operatorname{rot} \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d\|^2 + \frac{12\nu^2\beta_2^2}{\nu_r \tilde{C}^2} \|D(\bar{\mathbf{u}})\|^2 + \frac{3\beta_3^2 \tilde{C}^2 C}{4\nu_r} \|\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b\|^2 + \frac{(C+1)^2 \beta_4^2}{\nu_2} \|\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d\|_{\mathbf{H}^1}^2 \\
&\leq \tilde{\delta} (\|\operatorname{rot} \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d\|^2 + \|\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b\|^2 + \|\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d\|_{\mathbf{H}^1}^2 + \|D(\bar{\mathbf{u}})\|^2)
\end{aligned}$$

con $\tilde{\delta} = \max\left\{\frac{3\beta_1^2}{2\nu_r}, \frac{12\nu^2\beta_2^2}{\nu_r \tilde{C}^2}, \frac{3\beta_3^2 \tilde{C}^2 C}{4\nu_r}, \frac{(C+1)^2 \beta_4^2}{\nu_2}\right\}$.

Finalmente, como por hipótesis $\delta = \min\{2(\nu + \nu_r) - 3\nu_r \tilde{C}^2 - C\tilde{C}^2\Theta, \frac{\nu_2}{2} - C\Theta\} > 0$, de la última desigualdad se sigue el resultado. \diamond

Para la segunda derivada de Fréchet del funcional de Lagrange definida en (3.110), se tiene el siguiente resultado.

Lema 3.17 Sea $\bar{\mathbf{r}} = [\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{g}}_2] \in \mathcal{S}_{ad}$ un elemento admisible para el problema (3.94)-(3.95) satisfaciendo las condiciones del Lema 3.16 y C_k la constante dada en el Lema 1.41. Si

$$\|\text{rot } \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d\|^2 + \|\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b\|^2 + \|\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d\|_{\mathbf{H}^1}^2 + \|D(\bar{\mathbf{u}})\|^2 = \mathcal{M}[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}}] < \frac{\delta \Pi^2}{8 \tilde{\delta} C(\tilde{C} + 1)^2}$$

con $\Pi = \min\{4\nu\beta_2 C_k, \beta_3 C_k, \beta_4\}$, existe una constante $\bar{k} > 0$ tal que

$$\mathcal{L}_{\mathbf{rr}}[\bar{\mathbf{r}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}][\mathbf{t}, \mathbf{t}] \geq \bar{k} \|\mathbf{t}\|_{\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}}^2, \quad (3.140)$$

para todo $\mathbf{t} = [\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{\tau}] \in \mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}$. En particular, considerando $\mathbf{t} = [\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{\tau}] \in \ker(\mathbb{F}_{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{r}}))$ con

$$[\boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{\tau}] \in \mathcal{C}(\bar{\mathbf{g}}_1) \times \mathcal{C}(\bar{\mathbf{g}}_2) = \{[\theta_1(\mathbf{g}_1 - \bar{\mathbf{g}}_1), \theta_2(\mathbf{g}_2 - \bar{\mathbf{g}}_2)] : \theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0, [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] \in \mathcal{U}_{ad}\},$$

la desigualdad (3.140) es válida.

Demostración:

Haciendo $\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}$ en (3.110), se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{rr}}[\bar{\mathbf{r}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}][\mathbf{t}, \mathbf{t}] &= \beta_1 \|\text{rot } \boldsymbol{\varphi}\|^2 + 4\nu\beta_2 \|D(\boldsymbol{\varphi})\|^2 + \beta_3 \|\boldsymbol{\varphi}\|^2 + \beta_4 \|\boldsymbol{\psi}\|_{\mathbf{H}^1}^2 + \beta_5 \|\boldsymbol{\varrho}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 \\ &\quad + \beta_6 \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_4)}^2 - 2(\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\eta}) - 2(\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\xi}). \end{aligned} \quad (3.141)$$

Luego, empleando la desigualdad de Hölder, junto con (1.30) y (1.33), se obtiene

$$\begin{aligned} 2|(\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\eta})| &\leq 2\|\boldsymbol{\varphi}\|_3 \|\nabla \boldsymbol{\varphi}\| \|\boldsymbol{\eta}\|_6 \leq 2C \|\nabla \boldsymbol{\varphi}\|^2 \|\nabla \boldsymbol{\eta}\| \\ &\leq 2C\tilde{C} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1}^2 \|\boldsymbol{\eta}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} \leq 2C\tilde{C} \|[\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}]\|_{\mathbb{H}}^2 \|\boldsymbol{\eta}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1}, \\ 2|(\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\xi})| &\leq 2\|\boldsymbol{\varphi}\|_3 \|\nabla \boldsymbol{\psi}\| \|\boldsymbol{\xi}\|_6 \leq 2C \|\nabla \boldsymbol{\varphi}\| \|\nabla \boldsymbol{\psi}\| \|\nabla \boldsymbol{\xi}\| \\ &\leq 2C \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1} \|\boldsymbol{\psi}\|_{\mathbf{H}^1} \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbf{H}_0^1} \leq 2C \|[\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}]\|_{\mathbb{H}}^2 \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbf{H}_0^1}. \end{aligned}$$

Entonces, al sustituir estas últimas desigualdades en (3.141), se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{rr}}[\bar{\mathbf{r}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}][\mathbf{t}, \mathbf{t}] &\geq 4\nu\beta_2 \|D(\boldsymbol{\varphi})\|^2 + \beta_3 \|\boldsymbol{\varphi}\|^2 + \beta_4 \|\boldsymbol{\psi}\|_{\mathbf{H}^1}^2 + \beta_5 \|\boldsymbol{\varrho}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 + \beta_6 \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_4)}^2 \\ &\quad - 2C\tilde{C} \|[\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}]\|_{\mathbb{H}}^2 \|\boldsymbol{\eta}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} - 2C \|[\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}]\|_{\mathbb{H}}^2 \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbf{H}_0^1}. \end{aligned} \quad (3.142)$$

Se sigue de la desigualdad de Korn (ver Lema 1.41) que existe una constante positiva C_k , tal que

$$\|D(\boldsymbol{\varphi})\|^2 + \|\boldsymbol{\varphi}\|^2 \geq C_k \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1}^2,$$

entonces, de (3.142) se deduce

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{rr}}[\bar{\mathbf{r}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}][\mathbf{t}, \mathbf{t}] &\geq \min\{4\nu\beta_2, \beta_3\} C_k \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1}^2 + \beta_4 \|\boldsymbol{\psi}\|_{\mathbf{H}^1}^2 + \beta_5 \|\boldsymbol{\varrho}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 + \beta_6 \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_4)}^2 \\ &\quad - 2C\tilde{C} \|[\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}]\|_{\mathbb{H}}^2 \|\boldsymbol{\eta}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} - 2C \|[\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}]\|_{\mathbb{H}}^2 \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbf{H}_0^1} \\ &\geq \min\{4\nu\beta_2 C_k, \beta_3 C_k, \beta_4\} \|[\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}]\|_{\mathbb{H}}^2 + \beta_5 \|\boldsymbol{\varrho}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 + \beta_6 \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_4)}^2 \\ &\quad - 2C\tilde{C} \|[\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}]\|_{\mathbb{H}}^2 \|\boldsymbol{\eta}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} - 2C \|[\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}]\|_{\mathbb{H}}^2 \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbf{H}_0^1} \\ &\geq [\min\{4\nu\beta_2 C_k, \beta_3 C_k, \beta_4\} - 2C(\tilde{C} \|\boldsymbol{\eta}\|_{\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^1} + \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbf{H}_0^1})] \|[\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}]\|_{\mathbb{H}}^2 \\ &\quad + \beta_5 \|\boldsymbol{\varrho}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 + \beta_6 \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_4)}^2. \end{aligned} \quad (3.143)$$

Observar que

$$2C(\tilde{C}\|\boldsymbol{\eta}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1} + \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbf{H}_0^1}) \leq 2C(\tilde{C} + 1)\sqrt{2}(\|\boldsymbol{\eta}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1}^2 + \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbf{H}_0^1}^2)^{1/2},$$

entonces, por el Lema 3.16, se tiene la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} 2C(\tilde{C}\|\boldsymbol{\eta}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1} + \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbf{H}_0^1}) &\leq 2\sqrt{2}C(\tilde{C} + 1)\sqrt{2} \left(\frac{\tilde{\delta}}{\delta} \mathcal{M}[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{w}}] \right)^{1/2} \\ &< 2\sqrt{2}C(\tilde{C} + 1) \left(\frac{\Pi^2}{8C(\tilde{C} + 1)^2} \right)^{1/2} = \Pi = \min\{4\nu\beta_2C_k, \beta_3C_k, \beta_4\}, \end{aligned}$$

lo cual implica que $\Lambda = \min\{4\nu\beta_2C_k, \beta_3C_k, \beta_4\} - 2C(\tilde{C}\|\boldsymbol{\eta}\|_{\mathbf{H}_\sigma^1} + \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbf{H}_0^1}) > 0$. Así, desde (3.143) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}[\bar{\mathbf{r}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}][\mathbf{t}, \mathbf{t}] &\geq \Lambda \|\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}\|_{\mathbb{H}}^2 + \beta_5\|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 + \beta_6\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_4)}^2 \\ &\geq \min\{\Lambda, \beta_5, \beta_6\}(\|\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\tau}\|_{\mathcal{U}_{ad}}^2) = \bar{k} \|\mathbf{t}\|_{\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}}^2, \end{aligned}$$

donde $\bar{k} = \min\{\Lambda, \beta_5, \beta_6\} > 0$. Tomando en particular $\mathbf{t} = [\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\tau}] \in \ker(\mathbb{F}_{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{r}}))$ con

$$[\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\tau}] \in \mathcal{C}(\bar{\mathbf{g}}_1) \times \mathcal{C}(\bar{\mathbf{g}}_2) = \{[\theta_1(\mathbf{g}_1 - \bar{\mathbf{g}}_1), \theta_2(\mathbf{g}_2 - \bar{\mathbf{g}}_2)] : \theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0, [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] \in \mathcal{U}_{ad}\}$$

se obtiene (ver[33], pág. 292) que $\bar{\mathbf{r}}$ es un punto de mínimo local para el problema (3.94)-(3.95). \diamond

Una condición suficiente de segundo orden para que el problema de control (3.94)-(3.95) tenga un punto de mínimo ([11], [33]) es dada en la siguiente proposición.

Proposición 3.18 *Sea $\bar{\mathbf{r}} = [\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{g}}_2] \in \mathcal{S}_{ad}$ un elemento admisible para el problema de control (3.94)-(3.95). Si*

$$\|\text{rot } \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d\|^2 + \|\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_b\|^2 + \|\bar{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_d\|_{\mathbf{H}^1}^2 + \|D(\bar{\mathbf{u}})\|^2 = \mathcal{M}[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}}] < \frac{\delta \Pi^2}{8\tilde{\delta}C(\tilde{C} + 1)^2} \quad (3.144)$$

con $\Pi = \min\{4\nu\beta_2C_k, \beta_3C_k, \beta_4\}$ y δ definido en (3.111), entonces $\bar{\mathbf{r}} = [\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{g}}_2]$ es un punto de mínimo local para el problema (3.94)-(3.95).

Demostración:

Por Lema 3.12 y Lema 3.13, el funcional \tilde{J} y el operador \mathbb{F} son dos veces Fréchet diferenciables. De Lema 3.15, el punto $\bar{\mathbf{r}}$ es un punto regular de \mathbb{F} . De (3.103) se tiene que

$$\mathcal{L}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}[\bar{\mathbf{r}}, 1, \bar{\boldsymbol{\lambda}}]\mathbf{t} = 0.$$

Además, si $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}})$ satisface la condición (3.144), por el Lema 3.17, se tiene que existe una constante $\bar{k} > 0$ tal que

$$\mathcal{L}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}[\bar{\mathbf{r}}, 1, \bar{\boldsymbol{\lambda}}][\mathbf{t}, \mathbf{t}] \geq \bar{k} \|\mathbf{t}\|_{\mathbb{H} \times \mathcal{U}_{ad}}^2 \quad \mathbf{t} \in \text{Ker } \mathbb{F}_{\mathbf{r}}((\bar{\mathbf{r}})).$$

Así, todas las condiciones de la Proposición 1.49 son satisfechas. Por lo tanto, se concluye que $\bar{\mathbf{r}} = [\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}}, \bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{g}}_2] \in \mathcal{S}_{ad}$ es un punto de mínimo local para el problema de control (3.94)-(3.95). \diamond

Capítulo 4

Problema de control de borde para ecuaciones de fluidos micropolares con densidad variable

El problema de control de borde a ser estudiado está restringido a las soluciones débiles del sistema (2.53)-(2.59), esto es, la restricción son las soluciones del sistema (2.71)-(2.74) dado en el Capítulo 2. Con las mismas consideraciones hechas en la Sección 2.2 del Capítulo 2, se tienen los espacios de funciones $\mathbf{H}_\sigma = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ y } \int_\Gamma \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0\}$, $\mathbf{V} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega\} \subset \mathbf{H}_\sigma$ y

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_0) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Gamma_0) : \text{existe } \hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \text{ satisfaciendo } \hat{\mathbf{u}}|_{\Gamma \setminus \Gamma_0} = \mathbf{0}, \hat{\mathbf{u}}|_{\Gamma_0} = \mathbf{u}\}, \\ \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_0) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_0) : \int_{\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0\}.\end{aligned}$$

Se considera que el flujo ocurre en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ donde el borde es subdividido en las partes simplemente conexas $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, donde $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ y $\Gamma_2 \cap \Gamma_3 = \emptyset$, y se definen los conjuntos convexos y cerrados $\mathcal{U}_1 \subset \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_1)$ y $\mathcal{U}_2 \subset H_{00}^{1/2}(\Gamma_3)$.

En las condiciones de borde (2.73), esto es

$$\mathbf{u} \mathbf{g}_1 = \begin{cases} \mathbf{u}_0 & \text{sobre } \Gamma_0, \\ \mathbf{g}_1 & \text{sobre } \Gamma_1, \end{cases} \quad w \mathbf{g}_2 = \begin{cases} w_0 & \text{sobre } \Gamma_2, \\ g_2 & \text{sobre } \Gamma_3, \end{cases} \quad (4.1)$$

las funciones \mathbf{u}_0 y w_0 son funciones dadas sobre las partes Γ_0 y Γ_2 respectivamente, las funciones \mathbf{g}_1 y g_2 describen controles de borde de tipo Dirichlet para \mathbf{u} y w sobre las partes Γ_1 y Γ_3 .

4.1 Formulación del problema de control

Sean $[\mathbf{f}, \mathbf{g}] \in \mathbf{H}_\sigma \times H^1(\Omega)$, $\mathbf{u}_0 \in \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_0)$ y $w_0 \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)$. Considerar $\rho_d \in L^2(\Omega)$, $w_d \in L^2(\Omega)$ representando los estados deseados, y las funciones $\mathbf{g}_1 \in \mathcal{U}_1$, $g_2 \in \mathcal{U}_2$ describiendo controles de borde de tipo Dirichlet para \mathbf{u} y w sobre las partes Γ_1 y Γ_3 respectivamente.

Para el estudio del problema de control se consideran los operadores:

$$\begin{aligned} D : \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{V} &\rightarrow \mathbf{V}', & \tilde{D} : \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\sigma \times H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) &\rightarrow \mathbf{V}', \\ B^T : \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{V} &\rightarrow \mathbf{V}', & E : \mathbf{H}_\sigma \times H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) &\rightarrow \mathbf{V}', \\ \tilde{E} : \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\sigma \times H_0^1(\Omega) &\rightarrow H^{-1}(\Omega), & F' : \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{V} &\rightarrow \mathbf{V}', \\ G' : \mathbf{H}_\sigma \times H_0^1(\Omega) &\rightarrow \mathbf{V}', & & \end{aligned}$$

definidos por

$$\left. \begin{aligned} (D(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{v}) &= (\eta'(N\mathbf{u})(N\mathbf{v})\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ (\tilde{D}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, w, \kappa), \mathbf{v}) &= (\eta'(N\mathbf{u})(N\mathbf{v})\mathbf{u} \cdot \nabla w, \kappa) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ (B^T(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{v}) &= (\eta(N\mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}), \boldsymbol{\lambda}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ (E(\mathbf{u}, w, \kappa), \mathbf{v}) &= (\eta(N\mathbf{u})\mathbf{v} \cdot \nabla w, \kappa) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ (\tilde{E}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \kappa), z) &= (\eta(N\mathbf{u})\mathbf{u} \cdot \nabla z, \kappa) \quad \forall z \in H_0^1(\Omega), \\ (F'(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{v}) &= (\eta'(N\mathbf{u})(N\mathbf{v})\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ (G'(\mathbf{u}, \kappa), \mathbf{v}) &= (\eta'(N\mathbf{u})(N\mathbf{v})\mathbf{g}, \kappa) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Bajo las consideraciones anteriores y las definiciones de los operadores dadas en (2.64), esto es,

$$\begin{aligned} \langle A\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \rangle &= (\nabla \mathbf{u}, \nabla \boldsymbol{\varphi}), & \langle \tilde{A}w, z \rangle &= (\nabla w, \nabla z), & B(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{e}) &= \eta(N\mathbf{u})\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{e}, \\ F(\mathbf{u}) &= \eta(N\mathbf{u})\mathbf{f}, & G(\mathbf{u}) &= \eta(N\mathbf{u})\mathbf{g}, & \tilde{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, w) &= \eta(N\mathbf{u})\mathbf{v} \cdot \nabla w, \end{aligned}$$

se formula el siguiente problema de control.

Problema 3. Hallar $[\mathbf{u}, w, \mathbf{g}_1, g_2] \in \mathbf{H}_\sigma \times H^1(\Omega) \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ tal que minimice el funcional

$$\begin{aligned} J[\mathbf{u}, w, \mathbf{g}_1, g_2] &= \frac{\beta_1}{2} \|\text{rot } \mathbf{u}\|^2 + \frac{\beta_2}{2} \|\eta(N\mathbf{u}) - \rho_d\|^2 + \frac{\beta_3}{2} \|w - w_d\|^2 \\ &\quad + \frac{\beta_4}{2} \|\mathbf{g}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 + \frac{\beta_5}{2} \|g_2\|_{H^{1/2}(\Gamma_3)}^2, \end{aligned} \quad (4.3)$$

sujeto a que $[\mathbf{u}, w] \in \mathbf{H}_\sigma \times H^1(\Omega)$ sea una solución del sistema

$$\mu_1(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + \langle B(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = 2\mu_r(\text{rot } w, \mathbf{v}) + (F(\mathbf{u}), \mathbf{v}), \quad (4.4)$$

$$\nu_2(\nabla w, \nabla z) + \langle \tilde{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, w), z \rangle + 4\mu_r(w, z) = 2\mu_r(\text{rot } \mathbf{u}, z) + (G(\mathbf{u}), z), \quad (4.5)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathbf{g}_1} \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (4.6)$$

$$w = w_{g_2} \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (4.7)$$

$$\eta(N\mathbf{u}) = \rho_0 \quad \text{sobre } \Gamma_0, \quad (4.8)$$

para todo $[\mathbf{v}, z] \in \mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)$ y $\eta \in C^1(\mathbb{R})$, con $\mathbf{u}_{\mathbf{g}_1}$ y w_{g_2} definidos en (4.1).

Las constantes $\beta_i, i = 1, \dots, 5$ dadas en (4.3) satisfacen alguna de las siguientes condiciones:

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad &\beta_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, 5, \mathcal{U}_1 \subset \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_1) \text{ y } \mathcal{U}_2 \subset H_{00}^{1/2}(\Gamma_3) \text{ son conjuntos} \\ &\text{convexos, cerrados y acotados,} \\ (ii) \quad &\beta_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, 3, \beta_4 > 0, \beta_5 > 0, \mathcal{U}_1 \subset \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_1) \text{ y } \mathcal{U}_2 \subset H_{00}^{1/2}(\Gamma_3) \\ &\text{son conjuntos convexos y cerrados.} \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

El objetivo del problema de control (4.3)-(4.8) es minimizar la tubulencia del flujo, descrito por el primer término de J , procurando que la densidad sea próxima a una densidad deseada ρ_d y que la velocidad de microrotación se mantenga cercana a una velocidad de microrotación deseada w_d . El cuarto y quinto término son introducidos con el objetivo de generar un balance en el funcional J .

4.2 Existencia de solución óptima

Se define el conjunto de soluciones admisibles para el *Problema 3* como sigue:

$$\mathcal{S}_{ad} = \{ \mathbf{s} = [\mathbf{u}, w, \mathbf{g}_1, g_2] \in \mathbf{H}_\sigma \times H^1(\Omega) \times \mathcal{U}_{ad} \text{ tal que } J(\mathbf{s}) < \infty \text{ y } \mathbf{s} \text{ satisface (4.4) - (4.8)} \},$$

donde $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ es el conjunto de controles admisibles para el *Problema 3*.

Sobre la existencia de soluciones del *Problema 3* se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.1 *Bajo las hipótesis del Teorema 2.18, si una de las condiciones dadas en (4.9) es satisfecha, entonces el problema de control (4.3)-(4.8) tiene al menos una solución $\tilde{\mathbf{s}} = [\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{g}_2]$.*

Demostración: Se sigue del Teorema 2.18 que el conjunto \mathcal{S}_{ad} es no vacío. Además, dado que el funcional J es acotado inferiormente, existe una sucesión minimizante $\mathbf{s}^m = [\mathbf{u}^m, w^m, \mathbf{g}_1^m, g_2^m] \subset \mathcal{S}_{ad}$, $m \in \mathbb{N}$, tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(\mathbf{s}^m) = \inf_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_{ad}} J(\mathbf{s}).$$

Por la definición del conjunto \mathcal{S}_{ad} , se tiene que \mathbf{s}^m satisface (4.4)-(4.8), esto es

$$\mu_1(\nabla \mathbf{u}^m, \nabla \mathbf{v}) + \langle B(\mathbf{u}^m, \mathbf{u}^m, \mathbf{u}^m), \mathbf{v} \rangle = 2\mu_r(\text{rot } w^m, \mathbf{v}) + (F(\mathbf{u}^m), \mathbf{v}), \quad (4.10)$$

$$\nu_2(\nabla w^m, \nabla z) + \langle \tilde{B}(\mathbf{u}^m, \mathbf{u}^m, w^m), z \rangle + 4\mu_r(w, z) = 2\mu_r(\text{rot } \mathbf{u}^m, z) + (G(\mathbf{u}^m), z), \quad (4.11)$$

$$\mathbf{u}^m = \mathbf{u} \mathbf{g}_1^m \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (4.12)$$

$$w^m = w \mathbf{g}_2^m \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (4.13)$$

$$\eta(N\mathbf{u}^m) = \rho_0 \quad \text{sobre } \Gamma_0, \quad (4.14)$$

para todo $[\mathbf{v}, z] \in \mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)$ y $\eta \in C^1(\mathbb{R})$.

Además, si una de las condiciones dadas en (4.9) es satisfecha, se sigue nuevamente por la definición de \mathcal{S}_{ad} que existe una constante C independiente de m tal que

$$\|\mathbf{g}_1^m\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 + \|g_2^m\|_{H^{1/2}(\Gamma_3)}^2 \leq C,$$

y consecuentemente, la estimativa (2.117) implica

$$\|\mathbf{u}^m\|_{\mathbf{H}_\sigma} + \|w^m\|_{H^1} \leq C.$$

Por lo tanto, la sucesión $\mathbf{s}^m = [\mathbf{u}^m, w^m, \mathbf{g}_1^m, g_2^m]$ es uniformemente acotada y como \mathcal{U}_{ad} es un subconjunto convexo y cerrado de $\tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_1) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_3)$, existe un elemento $\tilde{\mathbf{s}} = [\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, [\tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{g}_2]] \in \mathbf{H}_\sigma \times H^1(\Omega) \times \mathcal{U}_{ad}$ tal que para alguna subsucesión de $\{\mathbf{s}^m\}$, que por simplicidad será aún denotada por $\{\mathbf{s}^m\}$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^m &\rightharpoonup \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{débilmente en } \mathbf{H}_\sigma, & w^m &\rightharpoonup \tilde{w} \quad \text{débilmente en } H^1(\Omega), \\ \mathbf{g}_1^m &\rightharpoonup \tilde{\mathbf{g}}_1 \quad \text{débilmente en } \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_1), & g_2^m &\rightharpoonup \tilde{g}_2 \quad \text{débilmente en } H_{00}^{1/2}(\Gamma_3), \end{aligned} \quad (4.15)$$

y considerando las inmersiones compactas dadas en Lema 1.22 y la Observación 1.21, se obtienen las convergencias fuertes

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^m &\rightarrow \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{en } \mathbf{L}^2(\Omega), & w^m &\rightarrow \tilde{w} \quad \text{en } L^2(\Omega), \\ \mathbf{g}_1^m &\rightarrow \tilde{\mathbf{g}}_1 \quad \text{en } \mathbf{L}^2(\Gamma_1), & g_2^m &\rightarrow \tilde{g}_2 \quad \text{en } L^2(\Gamma_3). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Además, como $\mathbf{u}^m = \mathbf{u}_0$ sobre Γ_0 , $\eta(N\mathbf{u}^m) = \rho_0$ sobre Γ_0 , $\mathbf{u}^m = \mathbf{g}_1^m$ sobre Γ_1 , $w^m = w_0$ sobre Γ_2 y $w^m = g_2^m$ sobre Γ_3 , entonces de (4.16) y la continuidad de η y N se sigue que $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_0$ sobre Γ_0 , $\eta(N\tilde{\mathbf{u}}) = \rho_0$ sobre Γ_0 , $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{g}_1$ sobre Γ_1 , $\tilde{w} = w_0$ sobre Γ_2 y $\tilde{w} = g_2$ sobre Γ_3 , así $\tilde{\mathbf{s}}$ satisface las condiciones de frontera dadas en (4.6)-(4.8).

Con la ayuda de las convergencias obtenidas en (4.15)-(4.16) es posible pasar al límite en (4.10)-(4.14) cuando $m \rightarrow \infty$ y concluir que $\tilde{\mathbf{s}}$ es una solución del sistema (4.4)-(4.8). Así, se tiene que $\tilde{\mathbf{s}} \in \mathcal{S}_{ad}$ y

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(\mathbf{s}^m) = \inf_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_{ad}} J(\mathbf{s}) \leq J(\tilde{\mathbf{s}}). \quad (4.17)$$

Por otro lado, como el funcional J es débilmente semicontinuo inferior sobre \mathcal{S}_{ad} , por definición se tiene

$$J(\tilde{\mathbf{s}}) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} J(\mathbf{s}^m). \quad (4.18)$$

Por lo tanto, de (4.17) y (4.18), se concluye

$$J[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{g}_2] = J(\tilde{\mathbf{s}}) = \min_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_{ad}} J(\mathbf{s}),$$

por lo tanto $\tilde{\mathbf{s}} = [\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{g}_2]$ es una solución óptima para el problema de control (4.3)-(4.8). \diamond

4.3 Problema penalizado

Para una solución óptima $\tilde{\mathbf{s}} = [\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{g}_2]$ del problema de control (4.3)-(4.8), se considera el ε -problema penalizado: hallar

$$\min J_\varepsilon[\mathbf{u}, w, \mathbf{g}_1, g_2] \quad \forall [\mathbf{u}, w, \mathbf{g}_1, g_2] \in \mathbf{H}_\sigma \times H^1(\Omega) \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2, \quad (4.19)$$

donde para cualquier $\varepsilon > 0$ el funcional $J_\varepsilon : \mathbf{H}_\sigma \times H^1(\Omega) \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ es definido como

$$\begin{aligned} J_\varepsilon[\mathbf{u}, w, \mathbf{g}_1, g_2] &= J[\mathbf{u}, w, \mathbf{g}_1, g_2] + \frac{1}{2} \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma}^2 + \frac{1}{2} \|w - \tilde{w}\|_{H^1}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{g}_1 - \tilde{\mathbf{g}}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \|g_2 - \tilde{g}_2\|_{H^{1/2}(\Gamma_3)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|\mu_1 A\mathbf{u} + B(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) - 2\mu_r \text{rot } w - F(\mathbf{u})\|_{\mathbf{V}}^2, \\ &\quad + \frac{1}{2\varepsilon} \|\nu_2 \tilde{A}w + \tilde{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, w) + 4\mu_r w - 2\mu_r \text{rot } \mathbf{u} - G(\mathbf{u})\|_{H^{-1}}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}\mathbf{g}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|w - w\mathbf{g}_2\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2, \end{aligned} \quad (4.20)$$

con $J[\mathbf{u}, w, \mathbf{g}_1, g_2]$ definido en (4.3).

Observación 4.2 Por la definición de J_ε y el hecho que $\tilde{\mathbf{s}}$ satisface (4.4)-(4.8), se deduce que

$$J_\varepsilon(\tilde{\mathbf{s}}) = J(\tilde{\mathbf{s}}). \quad (4.21)$$

4.3.1 Existencia de solución

Sobre la existencia de soluciones del problema penalizado se tiene el siguiente resultado.

Lema 4.3 Bajo las condiciones del Teorema 4.1, para cada $\varepsilon > 0$ existe una solución $[\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \mathbf{g}_1^\varepsilon, g_2^\varepsilon]$ del problema (4.19)-(4.20).

Demostración:

Según la definición de los funcionales J y J_ε , para $\mathbf{s} = [\mathbf{u}, w, \mathbf{g}_1, g_2] \in \mathbf{H}_\sigma \times H^1(\Omega) \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ se tiene que $J_\varepsilon(\mathbf{s}) \geq 0$, esto es, J_ε es acotado inferiormente. Entonces, siguiendo los mismos pasos que en la demostración del Teorema 4.1, se prueba que para cada $\varepsilon > 0$ existe una solución $\mathbf{s}^\varepsilon = [\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \mathbf{g}_1^\varepsilon, g_2^\varepsilon]$ del problema (4.19)-(4.20). \diamond

Lema 4.4 *Para cada $\varepsilon > 0$ sea $\mathbf{s}^\varepsilon = [\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \mathbf{g}_1^\varepsilon, g_2^\varepsilon]$ una solución del problema (4.19)-(4.20). Entonces, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ la sucesión $\{[\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \mathbf{g}_1^\varepsilon, g_2^\varepsilon]\}_{\varepsilon > 0}$ satisface las siguientes convergencias*

$$\mathbf{u}^\varepsilon \longrightarrow \tilde{\mathbf{u}} \text{ fuertemente en } \mathbf{H}_\sigma, \quad (4.22)$$

$$w^\varepsilon \longrightarrow \tilde{w} \text{ fuertemente en } H^1(\Omega), \quad (4.23)$$

$$\mathbf{g}_1^\varepsilon \longrightarrow \tilde{\mathbf{g}}_1 \text{ fuertemente en } \mathcal{U}_1, \quad (4.24)$$

$$g_2^\varepsilon \longrightarrow \tilde{g}_2 \text{ fuertemente en } \mathcal{U}_2. \quad (4.25)$$

$$J_\varepsilon[\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \mathbf{g}_1^\varepsilon, g_2^\varepsilon] \longrightarrow J[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{g}_2], \quad (4.26)$$

donde $\tilde{\mathbf{s}} = [\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{g}_2] \in \mathcal{S}_{ad}$ es una solución óptima del problema de control (4.3)-(4.8) considerada en la definición de J_ε .

Demostración:

Como $\tilde{\mathbf{s}} \in \mathcal{S}_{ad} \subset \mathbf{H}_\sigma \times H^1(\Omega) \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ y el funcional J_ε alcanza un mínimo en $\mathbf{s}^\varepsilon = [\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \mathbf{g}_1^\varepsilon, g_2^\varepsilon]$ se tiene que $J_\varepsilon(\mathbf{s}^\varepsilon) \leq J_\varepsilon(\tilde{\mathbf{s}})$, lo cual junto con (4.21) implica

$$J_\varepsilon(\mathbf{s}^\varepsilon) \leq J(\tilde{\mathbf{s}}). \quad (4.27)$$

Observando que $J(\mathbf{s}^\varepsilon) \geq 0$, de (4.20) se deduce

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma}^2 + \frac{1}{2}\|w^\varepsilon - \tilde{w}\|_{H^1}^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{g}_1^\varepsilon - \tilde{\mathbf{g}}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 + \frac{1}{2}\|g_2^\varepsilon - \tilde{g}_2\|_{H^{1/2}(\Gamma_3)}^2 \leq J_\varepsilon(\mathbf{s}^\varepsilon). \quad (4.28)$$

Entonces, teniendo en cuenta la desigualdad $|a|^2 \leq 2(|a - b|^2 + |b|^2)$ y (4.28), se obtiene

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma}^2 + \|w^\varepsilon\|_{H^1}^2 + \|\mathbf{g}_1^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 + \|g_2^\varepsilon\|_{H^{1/2}(\Gamma_3)}^2 \\ & \leq 2(\|\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma}^2 + \|w^\varepsilon - \tilde{w}\|_{H^1}^2 + \|\mathbf{g}_1^\varepsilon - \tilde{\mathbf{g}}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 + \|g_2^\varepsilon - \tilde{g}_2\|_{H^{1/2}(\Gamma_3)}^2) \\ & \quad + 2(\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma}^2 + \|\tilde{w}\|_{H^1}^2 + \|\tilde{\mathbf{g}}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 + \|\tilde{g}_2\|_{H^{1/2}(\Gamma_3)}^2) \\ & \leq 4J_\varepsilon(\mathbf{s}^\varepsilon) + 2(\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma}^2 + \|\tilde{w}\|_{H^1}^2 + \|\tilde{\mathbf{g}}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 + \|\tilde{g}_2\|_{H^{1/2}(\Gamma_3)}^2), \end{aligned}$$

y observando (4.27), se concluye

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma}^2 + \|w^\varepsilon\|_{H^1}^2 + \|\mathbf{g}_1^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 + \|g_2^\varepsilon\|_{H^{1/2}(\Gamma_3)}^2 \leq 4J(\tilde{\mathbf{s}}) + C \leq C, \quad (4.29)$$

donde C es una constante independiente de ε .

Así, (4.29) implica que existe un elemento $\mathbf{s} = [\mathbf{u}, w, \mathbf{g}_1, g_2] \in \mathbf{H}_\sigma \times H^1(\Omega) \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ y una subsucesión de $\{\mathbf{s}^\varepsilon\}$ que por simplicidad será denotada por $\{[\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \mathbf{g}_1^\varepsilon, g_2^\varepsilon]\}$ tal que cuando $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\mathbf{s}^\varepsilon = [\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \mathbf{g}_1^\varepsilon, g_2^\varepsilon] \longrightarrow \mathbf{s} = [\mathbf{u}, w, \mathbf{g}_1, g_2] \text{ débilmente en } \mathbf{H}_\sigma \times H^1(\Omega) \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2, \quad (4.30)$$

y como las inmersiones $\mathbf{H}_\sigma \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$, $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, $\mathcal{U}_1 \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Gamma_1)$ y $\mathcal{U}_2 \hookrightarrow L^2(\Gamma_3)$ son compactas, se tiene

$$\mathbf{s}^\varepsilon = [\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \mathbf{g}_1^\varepsilon, g_2^\varepsilon] \longrightarrow \mathbf{s} = [\mathbf{u}, w, \mathbf{g}_1, g_2] \text{ fuertemente en } \mathbf{L}^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_3). \quad (4.31)$$

Similarmente como en la demostración del Teorema 4.1, con la ayuda de las convergencias dadas en (4.30)-(4.31), se prueba que $\mathbf{s} = [\mathbf{u}, w, \mathbf{g}_1, g_2] \in \mathcal{S}_{ad}$.

Por otro lado, como $\mathbf{s}^\varepsilon \in \mathbf{H}_\sigma \times H^1(\Omega) \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ de la definición de J_ε dada en (4.20) se deduce

$$J_\varepsilon(\mathbf{s}^\varepsilon) \geq J(\mathbf{s}^\varepsilon),$$

y observando (4.27), se obtiene

$$J(\mathbf{s}^\varepsilon) \leq J_\varepsilon(\mathbf{s}^\varepsilon) \leq J(\tilde{\mathbf{s}}). \quad (4.32)$$

Como $\mathbf{s} \in \mathcal{S}_{ad}$ y J es débilmente semicontinuo inferior sobre \mathcal{S}_{ad} , de (4.30) y (4.32), se tiene

$$J(\mathbf{s}) = J[\mathbf{u}, w, \mathbf{g}_1, g_2] \leq \liminf J(\mathbf{s}^\varepsilon) \leq J(\tilde{\mathbf{s}}) = J[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{g}_2],$$

y puesto que $\tilde{\mathbf{s}} = [\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{g}_2]$ es una solución óptima del problema de control (4.3)-(4.8), se concluye que $[\mathbf{u}, w, \mathbf{g}_1, g_2] = [\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{g}_2]$. Entonces, de (4.30) se tiene que cuando $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$[\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \mathbf{g}_1^\varepsilon, g_2^\varepsilon] \longrightarrow [\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{g}_2] \text{ débilmente en } \mathcal{S}_{ad}, \quad (4.33)$$

esto es, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\mathbf{u}^\varepsilon \longrightarrow \tilde{\mathbf{u}} \text{ débilmente en } \mathbf{H}_\sigma, \quad (4.34)$$

$$w^\varepsilon \longrightarrow \tilde{w} \text{ débilmente en } H^1(\Omega), \quad (4.35)$$

$$\mathbf{g}_1^\varepsilon \longrightarrow \tilde{\mathbf{g}}_1 \text{ débilmente en } \mathcal{U}_1, \quad (4.36)$$

$$g_2^\varepsilon \longrightarrow \tilde{g}_2 \text{ débilmente en } \mathcal{U}_2. \quad (4.37)$$

1. Convergencia (4.22).

De la definición de $\|\cdot\|_{\mathbf{H}_\sigma}$ se tiene

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma}^2 - \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma}^2 = \|\mathbf{u}^\varepsilon\|^2 - \|\tilde{\mathbf{u}}\|^2 + (\nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \nabla \mathbf{u}^\varepsilon - \nabla \tilde{\mathbf{u}}) + (\nabla \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \mathbf{u}^\varepsilon - \nabla \tilde{\mathbf{u}}). \quad (4.38)$$

Observando que la inclusión $\mathbf{H}_\sigma \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ es compacta, de (4.34) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, se tiene

$$\nabla \mathbf{u}^\varepsilon \rightarrow \nabla \tilde{\mathbf{u}} \text{ débilmente en } \mathbf{L}^2(\Omega), \quad \mathbf{u}^\varepsilon \rightarrow \tilde{\mathbf{u}} \text{ fuertemente en } \mathbf{L}^2(\Omega). \quad (4.39)$$

Entonces, como $\nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \nabla \tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, de (4.39) se obtiene

$$(\nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \nabla \mathbf{u}^\varepsilon - \nabla \tilde{\mathbf{u}}) + (\nabla \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \mathbf{u}^\varepsilon - \nabla \tilde{\mathbf{u}}) \rightarrow 0 \text{ y } \|\mathbf{u}^\varepsilon\| \rightarrow \|\tilde{\mathbf{u}}\| \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0,$$

lo cual aplicado en (4.38) implica

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma}^2 \rightarrow \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma}^2,$$

y consecuentemente

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma} \leq \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma}. \quad (4.40)$$

Como \mathbf{H}_σ es un espacio de Hilbert se tiene que \mathbf{H}_σ es uniformemente convexo, entonces observando (4.34), (4.40) y el Lema 1.15 se concluye que cuando $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\mathbf{u}^\varepsilon \rightarrow \tilde{\mathbf{u}} \text{ fuertemente en } \mathbf{H}_\sigma.$$

2. Convergencia (4.23).

De la definición de $\|\cdot\|_{H^1}$ se tiene

$$\|w^\varepsilon\|_{H^1}^2 - \|\tilde{w}\|_{H^1}^2 = \|w^\varepsilon\|^2 - \|\tilde{w}\|^2 + (\nabla w^\varepsilon, \nabla w^\varepsilon - \nabla \tilde{w}) + (\nabla \tilde{w}, \nabla w^\varepsilon - \nabla \tilde{w}). \quad (4.41)$$

Como la inclusión $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es compacta, de (4.35) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, se tiene

$$\nabla w^\varepsilon \rightarrow \nabla \tilde{w} \text{ débilmente en } \mathbf{L}^2(\Omega), \quad w^\varepsilon \rightarrow \tilde{w} \text{ fuertemente en } L^2(\Omega),$$

lo cual observando que $\nabla w^\varepsilon, \nabla \tilde{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, implica

$$(\nabla w^\varepsilon, \nabla w^\varepsilon - \nabla \tilde{w}) + (\nabla \tilde{w}, \nabla w^\varepsilon - \nabla \tilde{w}) \rightarrow 0, \quad \|w^\varepsilon\| \rightarrow \|\tilde{w}\|. \quad (4.42)$$

Así, aplicando (4.42) en (4.41) se obtiene

$$\|w^\varepsilon\|_{H^1}^2 \rightarrow \|\tilde{w}\|_{H^1}^2,$$

y se sigue que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|w^\varepsilon\|_{H^1} \leq \|\tilde{w}\|_{H^1}. \quad (4.43)$$

Como $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert se tiene que es uniformemente convexo, entonces teniendo en cuenta (4.35), (4.43) y el Lema 1.15, se deduce que cuando $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$w^\varepsilon \rightarrow \tilde{w} \text{ fuertemente en } H^1(\Omega).$$

3. Convergencia (4.24).

De la definición de $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}$ se tiene

$$\|\mathbf{g}_1^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 - \|\tilde{\mathbf{g}}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 = \langle \mathbf{g}_1^\varepsilon - \tilde{\mathbf{g}}_1, \mathbf{g}_1^\varepsilon \rangle_{\Gamma_1} + \langle \tilde{\mathbf{g}}_1, \mathbf{g}_1^\varepsilon - \tilde{\mathbf{g}}_1 \rangle_{\Gamma_1}. \quad (4.44)$$

Teniendo en cuenta que $\mathcal{U}_1 \subset \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_1) \subset \mathbf{L}^2(\Gamma_1) \subset \mathcal{U}'_1$, se deduce que $\mathbf{g}_1^\varepsilon, \tilde{\mathbf{g}}_1 \in \mathcal{U}'_1$, entonces aplicando (4.36) en (4.44), se deduce que $\langle \mathbf{g}_1^\varepsilon - \tilde{\mathbf{g}}_1, \mathbf{g}_1^\varepsilon \rangle_{\Gamma_1} + \langle \tilde{\mathbf{g}}_1, \mathbf{g}_1^\varepsilon - \tilde{\mathbf{g}}_1 \rangle_{\Gamma_1} \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, lo cual implica

$$\|\mathbf{g}_1^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 \rightarrow \|\tilde{\mathbf{g}}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2,$$

y se sigue que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{g}_1^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)} \leq \|\tilde{\mathbf{g}}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}. \quad (4.45)$$

Como \mathcal{U}_1 es un espacio de Hilbert, se tiene que \mathcal{U}_1 es uniformemente convexo. Entonces, observando (4.36) y (4.45), por el Lema 1.15, se concluye que cuando $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\mathbf{g}_1^\varepsilon \rightarrow \tilde{\mathbf{g}}_1 \text{ fuertemente en } \mathcal{U}_1.$$

4. Convergencia (4.25).

De la definición de $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_3)}$ se tiene

$$\|g_2^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_3)}^2 - \|\tilde{g}_2\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_3)}^2 = \langle g_2^\varepsilon - \tilde{g}_2, g_2^\varepsilon \rangle_{\Gamma_3} + \langle \tilde{g}_2, g_2^\varepsilon - \tilde{g}_2 \rangle_{\Gamma_3}. \quad (4.46)$$

Como $g_2^\varepsilon, \tilde{g}_2 \in \mathcal{U}_2 \subset H_{00}^{1/2}(\Gamma_3) \subset L^2(\Gamma_3) \subset \mathcal{U}'_2$, observando la convergencia (4.37) se deduce que $\langle g_2^\varepsilon - \tilde{g}_2, g_2^\varepsilon \rangle_{\Gamma_3} + \langle \tilde{g}_2, g_2^\varepsilon - \tilde{g}_2 \rangle_{\Gamma_3} \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, y entonces observando (4.46) se obtiene

$$\|g_2^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_3)}^2 \rightarrow \|\tilde{g}_2\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_3)}^2$$

lo cual implica

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|g_2^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_3)} \leq \|\tilde{g}_2\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_3)}. \quad (4.47)$$

Como \mathcal{U}_2 es un espacio de Hilbert, se tiene que \mathcal{U}_2 es uniformemente convexo. Entonces, observando (4.37) y (4.47), por el Lema 1.15, se concluye que cuando $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$g_2^\varepsilon \rightarrow \tilde{g}_2 \text{ fuertemente en } \mathcal{U}_2.$$

5. Convergencia (4.26).

Para probar (4.26), nuevamente por la semicontinuidad inferior de J sobre \mathcal{S}_{ad} , y teniendo en cuenta (4.32), (4.33), se tiene

$$J(\tilde{\mathbf{s}}) = J[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{g}_2] \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J(\mathbf{s}^\varepsilon) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} J(\mathbf{s}^\varepsilon) \leq J[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{g}_2] = J(\tilde{\mathbf{s}}),$$

lo que implica

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J(\mathbf{s}^\varepsilon) = J[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{g}_2]. \quad (4.48)$$

Así, de (4.32) y la igualdad (4.48), se tiene

$$J[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{g}_2] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J[\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \mathbf{g}_1^\varepsilon, g_2^\varepsilon] \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon[\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \mathbf{g}_1^\varepsilon, g_2^\varepsilon] \leq J[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{g}_2],$$

y se concluye (4.26). \diamond

4.3.2 Existencia de multiplicadores de Lagrange y ecuaciones adjuntas

Teorema 4.5 Sean $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $\mathbf{g} \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{u}_0 \in \tilde{\mathbf{H}}_{00}^{1/2}(\Gamma_0)$, $\mathbf{g}_1 \in \mathcal{U}_1$, $w_0 \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)$, $g_2 \in \mathcal{U}_2$ y $\eta \in C^1(\mathbb{R})$. Entonces, para cualquier solución óptima $[\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \mathbf{g}_1^\varepsilon, g_2^\varepsilon] \in \mathcal{S}_{ad}$ del Problema (4.19)-(4.20) existen multiplicadores de Lagrange no nulos $[\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \phi^\varepsilon, \boldsymbol{\xi}^\varepsilon, \vartheta^\varepsilon] \in \mathbf{V} \times H_0^1(\Omega) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ definidos por

$$\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} A^{-1}(\mu_1 A \mathbf{u}^\varepsilon + B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) - 2\mu_r \text{rot } w^\varepsilon - F(\mathbf{u}^\varepsilon)) \in \mathbf{V}, \quad (4.49)$$

$$\phi^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \tilde{A}^{-1}(\nu_2 \tilde{A} w^\varepsilon + \tilde{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon) + 4\mu_r w^\varepsilon - 2\mu_r \text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon - G(\mathbf{u}^\varepsilon)) \in H_0^1(\Omega), \quad (4.50)$$

$$\boldsymbol{\xi}^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{u}_{|\Gamma}^\varepsilon - \mathbf{u} \mathbf{g}_1^\varepsilon) \in \mathbf{L}^2(\Gamma) \subset \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma), \quad (4.51)$$

$$\vartheta^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (w_{|\Gamma}^\varepsilon - w g_2^\varepsilon) \in L^2(\Gamma) \subset H^{-1/2}(\Gamma), \quad (4.52)$$

los cuales satisfacen el siguiente sistema

$$\begin{aligned} & \mu_1(A\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \mathbf{v}) + (D(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon), \mathbf{v}) + (B^T(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon), \mathbf{v}) + (\tilde{D}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \phi^\varepsilon), \mathbf{v}) \\ & + (E(\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \phi^\varepsilon), \mathbf{v}) + \langle J'_u(\mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle + \langle \boldsymbol{\xi}^\varepsilon, \mathbf{v} \rangle_\Gamma + (\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}_\sigma} \\ & = 2\mu_r(\text{rot } \phi^\varepsilon, \mathbf{v}) + (F'(\mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon), \mathbf{v}) + (G'(\mathbf{u}^\varepsilon, \phi^\varepsilon), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} & \nu_2(\tilde{A}\phi^\varepsilon, z) + (\tilde{E}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \phi^\varepsilon), z) + 4\mu_r(\phi^\varepsilon, z) + (w^\varepsilon - \tilde{w}, z)_{H^1} + \beta_3(w^\varepsilon - w_d, z) + \langle \vartheta^\varepsilon, z \rangle_\Gamma \\ & = 2\mu_r(\text{rot } \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, z) \quad \forall z \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\beta_4 \langle \mathbf{g}_1^\varepsilon, \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon \rangle_{\Gamma_1} + \langle \tilde{\mathbf{g}}_1 - \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon \rangle_{\Gamma_1} - \langle \boldsymbol{\xi}^\varepsilon, \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon \rangle_{\Gamma_1} \geq 0 \quad \forall \mathbf{g}_1 \in \mathcal{U}_1, \quad (4.55)$$

$$\beta_5 \langle \mathbf{g}_2^\varepsilon, \mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_2^\varepsilon \rangle_{\Gamma_3} + \langle \tilde{\mathbf{g}}_2 - \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_2^\varepsilon \rangle_{\Gamma_3} - \langle \vartheta^\varepsilon, \mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_2^\varepsilon \rangle_{\Gamma_3} \geq 0 \quad \forall \mathbf{g}_2 \in \mathcal{U}_2, \quad (4.56)$$

donde

$$\langle J'_u(\mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle = \beta_1(\text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon, \text{rot } \mathbf{v}) + \beta_2(\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \rho_d, \eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)N\mathbf{v}). \quad (4.57)$$

Demostración: Se introduce la función $\mathcal{F} : [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\mathcal{F}[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4] = J_\varepsilon[\mathbf{u}^\varepsilon + \zeta_1 \mathbf{v}, w^\varepsilon + \zeta_2 z, \mathbf{g}_1^\varepsilon + \zeta_3(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon), \mathbf{g}_2^\varepsilon + \zeta_4(\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_2^\varepsilon)], \quad (4.58)$$

donde $[\mathbf{v}, z, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] \in \mathbf{H}_\sigma \times H^1(\Omega) \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$.

Como \mathcal{U}_1 es convexo para $0 \leq h \leq 1$, $\mathbf{g}_1^\varepsilon + h(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon) \in \mathcal{U}_1$ y dado que $[\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \mathbf{g}_1^\varepsilon, \mathbf{g}_2^\varepsilon]$ es un punto de mínimo para J_ε , se tiene

$$\mathcal{F}[0, 0, h, 0] = J_\varepsilon[\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \mathbf{g}_1^\varepsilon + h(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon), \mathbf{g}_2^\varepsilon] \geq J_\varepsilon[\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \mathbf{g}_1^\varepsilon, \mathbf{g}_2^\varepsilon] = \mathcal{F}[0, 0, 0, 0],$$

y consecuentemente

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta_3}[0, 0, 0, 0] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}[0, 0, h, 0] - \mathcal{F}[0, 0, 0, 0]}{h} \geq 0.$$

Entonces, observando que \mathcal{F} alcanza su mínimo en $\mathbf{0} = [0, 0, 0, 0]$ se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta_1}(\mathbf{0}) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta_2}(\mathbf{0}) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta_3}(\mathbf{0}) \geq 0, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta_4}(\mathbf{0}) \geq 0. \quad (4.59)$$

El cálculo de las derivadas de \mathcal{F} en el punto $\mathbf{0}$, esta detallado en el Apéndice B.

Observando (5.9) del Apéndice B, la condición $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta_1}(\mathbf{0}) = 0$ es equivalente a la ecuación

$$\begin{aligned} & \beta_1(\text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon, \text{rot } \mathbf{v}) + \beta_2(\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \rho_d, \eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)N\mathbf{v}) + (\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}_\sigma} + \langle \boldsymbol{\xi}^\varepsilon, \mathbf{v} \rangle_\Gamma \\ & + (\mu_1 A\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) + (B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v}) + B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, \mathbf{u}^\varepsilon), \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) + (\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) \\ & - (\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) + (\tilde{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, w^\varepsilon), \phi^\varepsilon) + (\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla w^\varepsilon, \phi^\varepsilon) \\ & - (2\mu_r \text{rot } \mathbf{v}, \phi^\varepsilon) - (\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\mathbf{g}, \phi^\varepsilon) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Entonces, observando que el operador A es autoadjunto, denotando

$$\langle J'_u(\mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle = \beta_1(\text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon, \text{rot } \mathbf{v}) + \beta_2(\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \rho_d, \eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)N\mathbf{v}),$$

y usando los operadores definidos en (4.2), de (4.60) se sigue

$$\begin{aligned} & \langle J'_u(\mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle + (\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}_\sigma} + \langle \boldsymbol{\xi}^\varepsilon, \mathbf{v} \rangle_\Gamma + \mu_1(A\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \mathbf{v}) + (B^T(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon), \mathbf{v}) \\ & + (D(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon), \mathbf{v}) - (F'(\mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon), \mathbf{v}) + (E(\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \phi^\varepsilon), \mathbf{v}) + (\tilde{D}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \phi^\varepsilon), \mathbf{v}) \\ & - (2\mu_r \text{rot } \phi^\varepsilon, \mathbf{v}) - (G'(\mathbf{u}^\varepsilon, \phi^\varepsilon), \mathbf{v}) = 0, \end{aligned}$$

lo cual implica (4.53).

Teniendo en cuenta (5.32) dado en el Apéndice B, la condición $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta_2}(\mathbf{0}) = 0$ es equivalente a la ecuación

$$\begin{aligned} & \beta_3(w^\varepsilon - w_d, z) + (w^\varepsilon - \tilde{w}, z)_{H^1} + \langle \vartheta^\varepsilon, z \rangle_\Gamma - (2\mu_r \operatorname{rot} z, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) \\ & + (\nu_2 \tilde{A}z, \phi^\varepsilon) + (\tilde{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, z), \phi^\varepsilon) + (4\mu_r z, \phi^\varepsilon) = 0 \quad \forall z \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Entonces, teniendo en cuenta que el operador \tilde{A} es autoadjunto y la definición del operador \tilde{E} dada en (4.2), desde (4.61) se obtiene

$$\begin{aligned} & \beta_3(w^\varepsilon - w_d, z) + (w^\varepsilon - \tilde{w}, z)_{H^1} + \langle \vartheta^\varepsilon, z \rangle_\Gamma - (2\mu_r \operatorname{rot} \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, z) + (\nu_2 \tilde{A}\phi^\varepsilon, z) \\ & + (\tilde{E}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \phi^\varepsilon), z) + (4\mu_r \phi^\varepsilon, z) = 0, \end{aligned}$$

lo cual implica (4.54).

De (5.38) del Apéndice B, la condición $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta_3}(\mathbf{0}) \geq 0$ es equivalente a la desigualdad

$$\beta_4 \langle \mathbf{g}_1^\varepsilon, \mathbf{g}_1 - \tilde{\mathbf{g}}_1 \rangle_{\Gamma_1} + \langle \mathbf{g}_1^\varepsilon - \tilde{\mathbf{g}}_1, \mathbf{g}_1 - \tilde{\mathbf{g}}_1 \rangle_{\Gamma_1} - \langle \boldsymbol{\xi}^\varepsilon, \mathbf{g}_1 - \tilde{\mathbf{g}}_1 \rangle_{\Gamma_1} \geq 0 \quad \forall \mathbf{g}_1 \in \mathcal{U}_1,$$

la cual implica (4.55).

De (5.44) del Apéndice B, la condición $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta_4}(\mathbf{0}) \geq 0$ es equivalente a la desigualdad

$$\beta_5 \langle \mathbf{g}_2^\varepsilon, \mathbf{g}_2 - \tilde{\mathbf{g}}_2 \rangle_{\Gamma_3} + \langle \mathbf{g}_2^\varepsilon - \tilde{\mathbf{g}}_2, \mathbf{g}_2 - \tilde{\mathbf{g}}_2 \rangle_{\Gamma_3} - \langle \vartheta^\varepsilon, \mathbf{g}_2 - \tilde{\mathbf{g}}_2 \rangle_{\Gamma_3} \geq 0 \quad \forall \mathbf{g}_2 \in \mathcal{U}_2,$$

la cual implica (4.56).

Así, se ha demostrado la existencia de multiplicadores de Lagrange $[\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \phi^\varepsilon, \boldsymbol{\xi}^\varepsilon, \vartheta^\varepsilon]$ satisfaciendo el sistema (4.53)-(4.56). \diamond

4.4 Sistema de optimalidad

Considerando los operadores definidos en (4.2) se enuncia el siguiente resultado.

Teorema 4.6 Sean $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $\mathbf{g} \in L^2(\Omega)$ y $\eta \in C^1(\mathbb{R})$. Entonces, para cualquier solución óptima $\tilde{\mathbf{s}} = [\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{\mathbf{g}}_2] \in \mathcal{S}_{ad}$ del problema de control (4.3)-(4.8) existe un elemento no nulo $[\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}, \phi, \boldsymbol{\xi}, \vartheta] \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \times \mathbf{V} \times H_0^1(\Omega) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ satisfaciendo

$$\begin{aligned} & \mu_1(A\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) + (D(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{v}) + (B^T(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{v}) + (\tilde{D}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \phi), \mathbf{v}) + (E(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \phi), \mathbf{v}) \\ & + \lambda_0 \langle J'_u(\tilde{\mathbf{u}}), \mathbf{v} \rangle + \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle_\Gamma - 2\mu_r(\operatorname{rot} \phi, \mathbf{v}) = (F'(\tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{v}) + (G'(\tilde{\mathbf{u}}, \phi), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} & \nu_2(\tilde{A}\phi, z) + (\tilde{E}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \phi), z) + 4\mu_r(\phi, z) + \lambda_0 \beta_3(\tilde{w} - w_d, z) + \langle \vartheta, z \rangle_\Gamma \\ & = 2\mu_r(\operatorname{rot} \boldsymbol{\lambda}, z) \quad \forall z \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\lambda_0 \beta_4 \langle \tilde{\mathbf{g}}_1, \mathbf{g}_1 - \tilde{\mathbf{g}}_1 \rangle_{\Gamma_1} - \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{g}_1 - \tilde{\mathbf{g}}_1 \rangle_{\Gamma_1} \geq 0 \quad \forall \mathbf{g}_1 \in \mathcal{U}_1, \quad (4.64)$$

$$\lambda_0 \beta_5 \langle \tilde{\mathbf{g}}_2, \mathbf{g}_2 - \tilde{\mathbf{g}}_2 \rangle_{\Gamma_3} - \langle \vartheta, \mathbf{g}_2 - \tilde{\mathbf{g}}_2 \rangle_{\Gamma_3} \geq 0 \quad \forall \mathbf{g}_2 \in \mathcal{U}_2. \quad (4.65)$$

Demostración:

De (4.53) y (4.54) se tiene que

$$\|\boldsymbol{\xi}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \leq \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 \|[\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \phi^\varepsilon]\|_{\mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)}, \quad (4.66)$$

$$\|\vartheta^\varepsilon\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4 \|[\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \phi^\varepsilon]\|_{\mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)}, \quad (4.67)$$

donde $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ y \mathcal{C}_4 son constantes positivas independientes de ε .

Para $\|[\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \phi^\varepsilon]\|_{\mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)}$ puede ocurrir que

$$\|[\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \phi^\varepsilon]\|_{\mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)} \leq C \text{ o } \|[\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \phi^\varepsilon]\|_{\mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)} \rightarrow \infty \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Caso 1: Si $\|[\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \phi^\varepsilon]\|_{\mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)} \leq C$ con constante $C > 0$ independiente de ε .

Como la sucesión $\{[\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \phi^\varepsilon]\}_{\varepsilon > 0}$ es acotada en $\mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)$, entonces existe una subsucesión que por simplicidad es denotada por $\{[\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \phi^\varepsilon]\}$ y un elemento $[\boldsymbol{\lambda}, \phi] \in \mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$[\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \phi^\varepsilon] \rightharpoonup [\boldsymbol{\lambda}, \phi] \text{ débilmente en } \mathbf{V} \times H_0^1(\Omega), \quad (4.68)$$

y como las inmersiones $\mathbf{V} \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ son compactas, se tiene

$$[\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \phi^\varepsilon] \rightarrow [\boldsymbol{\lambda}, \phi] \text{ fuertemente en } \mathbf{L}^2(\Omega) \times L^2(\Omega). \quad (4.69)$$

Como $\|[\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \phi^\varepsilon]\|_{\mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)} \leq C$, de (4.66) y (4.67) se tiene que $\{[\boldsymbol{\xi}^\varepsilon, \vartheta^\varepsilon]\}_{\varepsilon > 0}$ es acotada en $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, entonces existe una subsucesión $\{[\boldsymbol{\xi}^\varepsilon, \vartheta^\varepsilon]\}$ y un elemento $[\boldsymbol{\xi}, \vartheta] \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ tal que

$$[\boldsymbol{\xi}^\varepsilon, \vartheta^\varepsilon] \rightharpoonup [\boldsymbol{\xi}, \vartheta] \text{ débilmente en } \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma).$$

esto es,

$$\langle \boldsymbol{\xi}^\varepsilon, \mathbf{v} \rangle_\Gamma \rightarrow \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle_\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad \langle \vartheta^\varepsilon, z \rangle_\Gamma \rightarrow \langle \vartheta, z \rangle_\Gamma \quad \forall z \in H_0^1(\Omega). \quad (4.70)$$

Además, de (4.22)-(4.25) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ se tiene que

$$[\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \mathbf{g}_1^\varepsilon, g_2^\varepsilon] \rightarrow [\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{g}_2] \text{ fuertemente en } \mathcal{S}_{ad} \subset \mathbf{H}_\sigma \times H^1(\Omega) \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2. \quad (4.71)$$

Como $\mathbf{u}^\varepsilon \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}$ fuertemente en \mathbf{H}_σ se tiene que $N\mathbf{u}^\varepsilon \rightarrow N\tilde{\mathbf{u}}$ converge fuerte en $C^0(\bar{\Omega})$, y teniendo en cuenta que $\eta \in C^1(\mathbb{R})$, se deduce

$$\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) \rightarrow \eta(N\tilde{\mathbf{u}}), \quad \eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon) \rightarrow \eta'(N\tilde{\mathbf{u}}) \text{ fuertemente en } C^0(\bar{\Omega}). \quad (4.72)$$

Así, usando las convergencias dadas en (4.68), (4.69), (4.71) y (4.72), $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ se obtiene¹

$$\left. \begin{aligned} \mu_1(A\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \mathbf{v}) = \mu_1(\nabla \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \nabla \mathbf{v}) &\rightarrow \mu_1(A\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}), \\ (D(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon), \mathbf{v}) &\rightarrow (D(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{v}), \\ (\tilde{D}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \phi^\varepsilon), \mathbf{v}) &\rightarrow (\tilde{D}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \phi), \mathbf{v}), \\ (B^T(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon), \mathbf{v}) &\rightarrow (B^T(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{v}), \\ (E(\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \phi^\varepsilon), \mathbf{v}) &\rightarrow (E(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \phi), \mathbf{v}), \\ 2\mu_r(\text{rot } \phi^\varepsilon, \mathbf{v}) &\rightarrow 2\mu_r(\text{rot } \phi, \mathbf{v}), \\ (F'(\mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon), \mathbf{v}) &\rightarrow (F'(\tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{v}), \\ (G'(\mathbf{u}^\varepsilon, \phi^\varepsilon), \mathbf{v}) &\rightarrow (G'(\tilde{\mathbf{u}}, \phi), \mathbf{v}). \end{aligned} \right\} \quad (4.73)$$

De la definición de J'_u dada en (4.57) y la convergencia dada en (4.72), cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ se tiene¹

$$\langle J'_u(\mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle \rightarrow \beta_1(\text{rot } \tilde{\mathbf{u}}, \text{rot } \mathbf{v}) + \beta_2(\eta(N\tilde{\mathbf{u}}) - \rho_d, \eta'(N\tilde{\mathbf{u}})N\mathbf{v}) = \langle J'_u(\tilde{\mathbf{u}}), \mathbf{v} \rangle. \quad (4.74)$$

Así, considerando las convergencias (4.70), (4.71), (4.73) y (4.74), tomando límite en (4.53) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ se obtiene la igualdad (4.62) con $\lambda_0 = 1$.

Con las convergencias dadas en (4.68)-(4.69) y (4.71)-(4.72), $\forall z \in H_0^1(\Omega)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ se obtiene¹

$$\left. \begin{aligned} \nu_2(\tilde{A}\phi^\varepsilon, z) &= \nu_2(\nabla\phi^\varepsilon, \nabla z) \rightarrow \nu_2(\tilde{A}\phi, z), \\ (\tilde{E}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \phi^\varepsilon), z) &\rightarrow (\tilde{E}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \phi), z), \\ 2\mu_r(\text{rot } \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, z) &\rightarrow 2\mu_r(\text{rot } \boldsymbol{\lambda}, z). \end{aligned} \right\} \quad (4.75)$$

Entonces, considerando las convergencias (4.70), (4.71), (4.75) y tomando límite en (4.54) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ se obtiene la igualdad (4.63) con $\lambda_0 = 1$.

Observando (4.70) y tomando límite en (4.55) y (4.56) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, se obtiene las desigualdades (4.64) y (4.65).

Por lo tanto, como $\lambda_0 = 1$, se ha demostrado que existe $[\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}, \phi, \boldsymbol{\xi}, \vartheta] \neq \mathbf{0}$ satisfaciendo el sistema (4.62)-(4.65).

Caso 2: Si $\|[\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \phi^\varepsilon]\|_{\mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)} \rightarrow \infty$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Denotando

$$I_\varepsilon = \|[\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \phi^\varepsilon]\|_{\mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)} = (\|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\phi^\varepsilon\|_{H_0^1}^2)^{1/2}, \quad (4.76)$$

se definen

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon = \frac{\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon}{I_\varepsilon}, \quad \tilde{\phi}^\varepsilon = \frac{\phi^\varepsilon}{I_\varepsilon},$$

entonces para todo $\varepsilon > 0$, se tiene

$$\|[\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon, \tilde{\phi}^\varepsilon]\|_{\mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)} = 1. \quad (4.77)$$

Así, la sucesión $\{[\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon, \tilde{\phi}^\varepsilon]\}_{\varepsilon > 0}$ es acotada en $\mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)$, entonces existe una subsucesión que por simplicidad será denotada por $\{[\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon, \tilde{\phi}^\varepsilon]\}$ y un elemento $[\boldsymbol{\lambda}, \phi] \in \mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$[\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon, \tilde{\phi}^\varepsilon] \rightarrow [\boldsymbol{\lambda}, \phi] \text{ débilmente en } \mathbf{V} \times H_0^1(\Omega), \quad (4.78)$$

y como las inmersiones $\mathbf{V} \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ son compactas, se tiene

$$[\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon, \tilde{\phi}^\varepsilon] \rightarrow [\boldsymbol{\lambda}, \phi] \text{ fuertemente en } \mathbf{L}^2(\Omega) \times L^2(\Omega). \quad (4.79)$$

Como $I_\varepsilon \rightarrow \infty$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, sin pérdida de generalidad se puede asumir que $I_\varepsilon > 1$ y denotando

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}^\varepsilon = \frac{\boldsymbol{\xi}^\varepsilon}{I_\varepsilon}, \quad \tilde{\vartheta}^\varepsilon = \frac{\vartheta^\varepsilon}{I_\varepsilon},$$

de (4.66) y (4.67) se obtiene

$$\|\tilde{\boldsymbol{\xi}}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \leq \frac{\mathcal{C}_1}{I_\varepsilon} + \mathcal{C}_2 \leq \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2, \quad \|\tilde{\vartheta}^\varepsilon\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq \frac{\mathcal{C}_3}{I_\varepsilon} + \mathcal{C}_4 \leq \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4,$$

lo cual implica que $\{[\tilde{\boldsymbol{\xi}}^\varepsilon, \tilde{\vartheta}^\varepsilon]\}_{\varepsilon > 0}$ es acotada en $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, entonces existe una subsucesión $\{[\tilde{\boldsymbol{\xi}}^\varepsilon, \tilde{\vartheta}^\varepsilon]\}$ y un elemento $[\boldsymbol{\xi}, \vartheta] \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ tal que

$$[\tilde{\boldsymbol{\xi}}^\varepsilon, \tilde{\vartheta}^\varepsilon] \rightarrow [\boldsymbol{\xi}, \vartheta] \text{ débilmente en } \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma),$$

esto es,

$$\langle \tilde{\boldsymbol{\xi}}^\varepsilon, \mathbf{v} \rangle_\Gamma \rightarrow \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle_\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad \langle \tilde{\vartheta}^\varepsilon, z \rangle_\Gamma \rightarrow \langle \vartheta, z \rangle_\Gamma \quad \forall z \in H_0^1(\Omega). \quad (4.80)$$

¹La demostración de las convergencias (4.73), (4.74) y (4.75) se encuentra en el Apéndice D.

Dividiendo los términos de (4.53) por I_ε , se obtiene

$$\begin{aligned} & \mu_1(A\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon, \mathbf{v}) + (D(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon), \mathbf{v}) + (B^T(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon), \mathbf{v}) + (\tilde{D}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \tilde{\phi}^\varepsilon), \mathbf{v}) \\ & + (E(\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \tilde{\phi}^\varepsilon), \mathbf{v}) + \frac{1}{I_\varepsilon} \langle J'_u(\mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle + \langle \tilde{\boldsymbol{\xi}}^\varepsilon, \mathbf{v} \rangle_\Gamma + \frac{1}{I_\varepsilon} (\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}_\sigma} \\ & = 2\mu_r(\text{rot } \tilde{\phi}^\varepsilon, \mathbf{v}) + (F'(\mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon), \mathbf{v}) + (G'(\mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\phi}^\varepsilon), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

De (4.74), cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ se tiene que $\langle J'_u(\mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle \rightarrow \langle J'_u(\tilde{\mathbf{u}}), \mathbf{v} \rangle$ y como $\frac{1}{I_\varepsilon} \rightarrow 0$, entonces

$$\frac{1}{I_\varepsilon} \langle J'_u(\mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle \rightarrow 0. \quad (4.82)$$

Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, $\frac{1}{I_\varepsilon} \rightarrow 0$ y $(\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}_\sigma} \rightarrow 0$, entonces

$$\frac{1}{I_\varepsilon} (\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}_\sigma} \rightarrow 0. \quad (4.83)$$

Observando las convergencias obtenidas en (4.73) y las convergencias (4.80), (4.82) y (4.83), tomando límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ en (4.81) se obtiene (4.62) con $\lambda_0 = 0$.

Dividiendo los términos de (4.54) por I_ε , se obtiene

$$\begin{aligned} & \nu_2(\tilde{A}\tilde{\phi}^\varepsilon, z) + (\tilde{E}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\phi}^\varepsilon), z) + 4\mu_r(\tilde{\phi}^\varepsilon, z) + \frac{1}{I_\varepsilon} (w^\varepsilon - \tilde{w}, z)_{H^1} + \beta_3 \frac{1}{I_\varepsilon} (w^\varepsilon - w_d, z) + \langle \tilde{\vartheta}^\varepsilon, z \rangle_\Gamma \\ & = 2\mu_r(\text{rot } \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon, z) \quad \forall z \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (4.84)$$

Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ se tiene que $\frac{1}{I_\varepsilon} \rightarrow 0$, $(w^\varepsilon - \tilde{w}, z)_{H^1} \rightarrow 0$ y $(w^\varepsilon - w_d, z) \rightarrow (\tilde{w} - w_d, z)$, entonces

$$\frac{1}{I_\varepsilon} (w^\varepsilon - \tilde{w}, z)_{H^1} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{I_\varepsilon} (w^\varepsilon - w_d, z) \rightarrow 0. \quad (4.85)$$

Entonces, teniendo en cuenta las convergencias (4.75), (4.80) y (4.85), tomando el límite en (4.84) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ se obtiene (4.63) con $\lambda_0 = 0$.

Observando (4.80) y tomando límite en (4.55) y (4.56) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, se obtienen las desigualdades (4.64) y (4.65).

Así, se ha demostrado que existe $[0, \boldsymbol{\lambda}, \phi, \boldsymbol{\xi}, \vartheta]$ satisfaciendo el sistema (4.64) y (4.65). Sólo falta probar que $[0, \boldsymbol{\lambda}, \phi, \boldsymbol{\xi}, \vartheta] \neq \mathbf{0}$.

Haciendo $\mathbf{v} = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon$ en (4.81) y $z = \tilde{\phi}^\varepsilon$ en (4.84), se obtiene

$$\begin{aligned} \mu_1 \|\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}}^2 &= \mu_1(A\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon) \\ &= -(D(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon), \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon) - (B^T(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon), \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon) - (\tilde{D}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \tilde{\phi}^\varepsilon), \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon) \\ &\quad - (E(\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \tilde{\phi}^\varepsilon), \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon) - \frac{1}{I_\varepsilon} \langle J'_u(\mathbf{u}^\varepsilon), \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon \rangle - \langle \tilde{\boldsymbol{\xi}}^\varepsilon, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon \rangle_\Gamma - \frac{1}{I_\varepsilon} (\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon)_{\mathbf{H}_\sigma} \\ &\quad + 2\mu_r(\text{rot } \tilde{\phi}^\varepsilon, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon) + (F'(\mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon), \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon) + (G'(\mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\phi}^\varepsilon), \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon), \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} \nu_2 \|\tilde{\phi}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_0^1}^2 &= \nu_2(\tilde{A}\tilde{\phi}^\varepsilon, \tilde{\phi}^\varepsilon) = -(\tilde{E}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \tilde{\phi}^\varepsilon), \tilde{\phi}^\varepsilon) - 4\mu_r(\tilde{\phi}^\varepsilon, \tilde{\phi}^\varepsilon) - \frac{1}{I_\varepsilon} (w^\varepsilon - \tilde{w}, \tilde{\phi}^\varepsilon)_{H^1} \\ &\quad - \beta_3 \frac{1}{I_\varepsilon} (w^\varepsilon - w_d, \tilde{\phi}^\varepsilon) - \langle \tilde{\vartheta}^\varepsilon, \tilde{\phi}^\varepsilon \rangle_\Gamma + 2\mu_r(\text{rot } \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon, \tilde{\phi}^\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.87)$$

Si $[\boldsymbol{\lambda}, \phi] = [\mathbf{0}, 0]$, teniendo en cuenta las convergencias (4.73), (4.82) y (4.83), también las convergencias (4.75) y (4.85), tomando límite en (4.86) y (4.87) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ se obtiene

$$\mu_1 \|\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}}^2 \rightarrow 0, \quad \nu_2 \|\tilde{\phi}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_0^1}^2 \rightarrow 0,$$

y entonces se tiene que

$$\|[\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon, \tilde{\phi}^\varepsilon]\|_{\mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)}^2 = \|\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\tilde{\phi}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_0^1}^2 \rightarrow 0,$$

lo cual es una contradicción con el hecho que $\|[\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon, \tilde{\phi}^\varepsilon]\|_{\mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)} = 1$ como establecido en (4.77).

Por lo tanto, se concluye que $[\boldsymbol{\lambda}, \phi] \neq [\mathbf{0}, 0]$ lo cual implica que $[0, \boldsymbol{\lambda}, \phi, \boldsymbol{\xi}, \vartheta] \neq \mathbf{0}$. Así, la demostración del teorema está completa. \diamond

Finalmente, desde (4.4)-(4.8) y (4.62)-(4.65), para el Problema 3, se obtiene el siguiente sistema de optimalidad:

Ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} \mu_1(\nabla \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \mathbf{v}) + \langle B(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}), \mathbf{v} \rangle &= 2\mu_r(\text{rot } \tilde{w}, \mathbf{v}) + (F(\tilde{\mathbf{u}}), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ \nu_2(\nabla \tilde{w}, \nabla z) + \langle \tilde{B}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}), z \rangle + 4\mu_r(\tilde{w}, z) &= 2\mu_r(\text{rot } \tilde{\mathbf{u}}, z) + (G(\tilde{\mathbf{u}}), z) \quad \forall z \in H_0^1(\Omega), \\ \tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{u}_{\tilde{g}_1} \quad \text{sobre } \Gamma, \\ \tilde{w} &= w_{\tilde{g}_2} \quad \text{sobre } \Gamma, \\ \eta(N\tilde{\mathbf{u}}) &= \rho_0 \quad \text{sobre } \Gamma_0. \end{aligned}$$

Ecuaciones de adjuntas

$$\begin{aligned} \mu_1(A\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) + (D(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{v}) + (B^T(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{v}) + (\tilde{D}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \phi), \mathbf{v}) + (E(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \phi), \mathbf{v}) \\ + \lambda_0 \langle J'_u(\tilde{\mathbf{u}}), \mathbf{v} \rangle + \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle_\Gamma - 2\mu_r(\text{rot } \phi, \mathbf{v}) &= (F'(\tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{v}) + (G'(\tilde{\mathbf{u}}, \phi), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ \nu_2(\tilde{A}\phi, z) + (\tilde{E}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \phi), z) + 4\mu_r(\phi, z) + \lambda_0 \beta_3(\tilde{w} - w_d, z) + \langle \vartheta, z \rangle_\Gamma \\ &= 2\mu_r(\text{rot } \boldsymbol{\lambda}, z) \quad \forall z \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Condiciones de optimalidad

$$\begin{aligned} \lambda_0 \beta_4 \langle \tilde{\mathbf{g}}_1, \mathbf{g}_1 - \tilde{\mathbf{g}}_1 \rangle_{\Gamma_1} - \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{g}_1 - \tilde{\mathbf{g}}_1 \rangle_{\Gamma_1} &\geq 0 \quad \forall \mathbf{g}_1 \in \mathcal{U}_1, \\ \lambda_0 \beta_5 \langle \tilde{g}_2, g_2 - \tilde{g}_2 \rangle_{\Gamma_3} - \langle \vartheta, g_2 - \tilde{g}_2 \rangle_{\Gamma_3} &\geq 0 \quad \forall g_2 \in \mathcal{U}_2. \end{aligned}$$

Apéndice

5.1 Apéndice A: Equivalencia de normas

Lema 5.7 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado con borde suficientemente regular. Las siguientes normas son equivalentes

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}'} \equiv \|\nabla(A^{-1}\mathbf{v})\| \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}', \quad \|z\|_{H^{-1}} \equiv \|\nabla(\tilde{A}^{-1}z)\| \quad \forall z \in H^{-1}(\Omega), \quad (5.1)$$

donde los operadores A y \tilde{A} son definidos en (2.64). Más aún, observando (2.64), se tiene

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}'}^2 = (\nabla(A^{-1}\mathbf{v}), \nabla(A^{-1}\mathbf{v})) = (\mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{v}), \quad (5.2)$$

$$\|z\|_{H^{-1}}^2 = (\nabla(\tilde{A}^{-1}z), \nabla(\tilde{A}^{-1}z)) = (z, \tilde{A}^{-1}z). \quad (5.3)$$

Demostración: En efecto, notar que $A^{-1} : \mathbf{V}' \rightarrow \mathbf{V}$ y como para $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ se tiene que $\operatorname{div} \nabla \mathbf{u} \in \mathbf{V}'$, entonces $A^{-1}(\operatorname{div} \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{u}$. Así,

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}'} = \sup_{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \leq 1} |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}'}| = \sup_{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \leq 1} |\langle \mathbf{u}, A^{-1}(\operatorname{div} \nabla \mathbf{v}) \rangle| = \sup_{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \leq 1} |(A^{-1}\mathbf{u}, \operatorname{div} \nabla \mathbf{v})|. \quad (5.4)$$

Usando integración por partes y la desigualdad de Hölder, se tiene

$$|(A^{-1}\mathbf{u}, \operatorname{div} \nabla \mathbf{v})| = |(\nabla(A^{-1}\mathbf{u}), \nabla \mathbf{v})| \leq \|\nabla(A^{-1}\mathbf{u})\| \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}. \quad (5.5)$$

Sustituyendo (5.5) en (5.4), se obtiene

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}'} \leq \|\nabla(A^{-1}\mathbf{u})\| \sup_{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \leq 1} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \leq \|\nabla(A^{-1}\mathbf{u})\|. \quad (5.6)$$

Por otro lado, de la definición del operador A y observando que $A(A^{-1}\mathbf{u}) = \mathbf{u} \in \mathbf{V}'$, se tiene

$$\begin{aligned} \|\nabla(A^{-1}\mathbf{u})\|^2 &= (\nabla(A^{-1}\mathbf{u}), \nabla(A^{-1}\mathbf{u})) = \langle A(A^{-1}\mathbf{u}), A^{-1}\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle \\ &\leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}'} \|A^{-1}\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}'} \|A^{-1}\| \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}'} \\ &\leq C \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}'}^2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Por lo tanto, de (5.6) y (5.7) se obtiene la primera equivalencia de (5.1). La segunda equivalencia se demuestra de manera análoga. \diamond

5.2 Apéndice B: Derivadas

Teniendo en cuenta el funcional J_ε dado en (4.20), para $[\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \mathbf{g}_1^\varepsilon, g_2^\varepsilon] \in \mathcal{S}_{ad}$ solución del Problema (4.19)-(4.20), se considera la función $\mathcal{F} : [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\mathcal{F}[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4] = J_\varepsilon[\mathbf{u}^\varepsilon + \zeta_1 \mathbf{v}, w^\varepsilon + \zeta_2 z, \mathbf{g}_1^\varepsilon + \zeta_3(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon), g_2^\varepsilon + \zeta_4(g_2 - g_2^\varepsilon)], \quad (5.8)$$

donde $[\mathbf{v}, z, \mathbf{g}_1, g_2] \in \mathbf{H}_\sigma \times H^1(\Omega) \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$. Considerar las funciones $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4] &= J[\hat{\mathbf{u}}, \hat{w}, \hat{\mathbf{g}}_1, \hat{g}_2] = \frac{\beta_1}{2} \|\text{rot } \hat{\mathbf{u}}\|^2 + \frac{\beta_2}{2} \|\eta(N\hat{\mathbf{u}}) - \rho_d\|^2 + \frac{\beta_3}{2} \|\hat{w} - w_d\|^2 \\ &\quad + \frac{\beta_4}{2} \|\hat{\mathbf{g}}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 + \frac{\beta_5}{2} \|\hat{g}_2\|_{H^{1/2}(\Gamma_3)}^2, \\ \mathcal{F}_2[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4] &= \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma}^2 + \frac{1}{2} \|\hat{w} - \tilde{w}\|_{H^1}^2 + \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{g}}_1 - \tilde{\mathbf{g}}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\hat{g}_2 - \tilde{g}_2\|_{H^{1/2}(\Gamma_3)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|\hat{w} - w\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2, \\ \mathcal{F}_3[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4] &= \frac{1}{2\varepsilon} \|\mu_1 A\hat{\mathbf{u}} + B(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) - 2\mu_r \text{rot } \hat{w} - F(\hat{\mathbf{u}})\|_{\mathbf{V}'}^2, \\ \mathcal{F}_4[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4] &= \frac{1}{2\varepsilon} \|\nu_2 \tilde{A}\hat{w} + 4\mu_r \hat{w} + \tilde{B}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{w}) - 2\mu_r \text{rot } \hat{\mathbf{u}} - G(\hat{\mathbf{u}})\|_{H^{-1}}^2, \end{aligned}$$

donde $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^\varepsilon + \zeta_1 \mathbf{v}$, $\hat{w} = w^\varepsilon + \zeta_2 z$, $\hat{\mathbf{g}}_1 = \mathbf{g}_1^\varepsilon + \zeta_3(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon)$, $\hat{g}_2 = g_2^\varepsilon + \zeta_4(g_2 - g_2^\varepsilon)$, y el funcional J es definido en (4.3).

Entonces, la función \mathcal{F} se reescribe como

$$\mathcal{F}[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4] = \mathcal{F}_1[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4] + \mathcal{F}_2[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4] + \mathcal{F}_3[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4] + \mathcal{F}_4[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4].$$

La función \mathcal{F} es derivable con respecto a cada una de sus variables y observando (5.8) se tiene que \mathcal{F} alcanza su mínimo en $\mathbf{0} = [0, 0, 0, 0]$. A seguir se detalla el cálculo de las derivadas de \mathcal{F} en el punto $\mathbf{0}$.

Derivada de \mathcal{F} con respecto a ζ_1 en el punto $\mathbf{0}$.

La derivada de \mathcal{F} con respecto a ζ_1 en el punto $\mathbf{0}$ es dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta_1}(\mathbf{0}) &= \beta_1(\text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon, \text{rot } \mathbf{v}) + \beta_2(\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \rho_d, \eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)N\mathbf{v}) + (\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}_\sigma} \\ &\quad + \langle \boldsymbol{\xi}^\varepsilon, \mathbf{v} \rangle_\Gamma + (\mu_1 A\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) + (B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) + B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, \mathbf{u}^\varepsilon), \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) \\ &\quad + (\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) - (\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) + (\tilde{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, w^\varepsilon), \phi^\varepsilon) \\ &\quad + (\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla w^\varepsilon, \phi^\varepsilon) - (2\mu_r \text{rot } \mathbf{v}, \phi^\varepsilon) - (\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\mathbf{g}, \phi^\varepsilon), \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde

$$\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} A^{-1}(\mu_1 A\mathbf{u}^\varepsilon + B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) - 2\mu_r \text{rot } w^\varepsilon - F(\mathbf{u}^\varepsilon)) \in \mathbf{V}, \quad (5.10)$$

$$\phi^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \tilde{A}^{-1}(\nu_2 \tilde{A}w^\varepsilon + \tilde{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon) + 4\mu_r w^\varepsilon - 2\mu_r \text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon - G(\mathbf{u}^\varepsilon)) \in H_0^1(\Omega), \quad (5.11)$$

$$\boldsymbol{\xi}^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{u}^\varepsilon|_\Gamma - \mathbf{u}\mathbf{g}_1^\varepsilon) \in \mathbf{L}^2(\Gamma) \subset \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma), \quad (5.12)$$

Observando que

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta_1}(\mathbf{0}) = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \zeta_1}(\mathbf{0}) + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \zeta_1}(\mathbf{0}) + \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \zeta_1}(\mathbf{0}) + \frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial \zeta_1}(\mathbf{0}),$$

el cálculo de (5.9) se realiza en cuatro etapas.

Etapas 1:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \zeta_1}(\mathbf{0}) = \beta_1(\text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon, \text{rot } \mathbf{v}) + \beta_2(\eta(N(\mathbf{u}^\varepsilon)) - \rho_d, \eta'(N(\mathbf{u}^\varepsilon))N\mathbf{v}). \quad (5.13)$$

Cálculo de (5.13): De la definición de \mathcal{F}_1 y J , se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1[h, 0, 0, 0] - \mathcal{F}_1(\mathbf{0}) &= J[\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v}, w^\varepsilon, \mathbf{g}_1^\varepsilon, \mathbf{g}_2^\varepsilon] - J[\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \mathbf{g}_1^\varepsilon, \mathbf{g}_2^\varepsilon] \\ &= \frac{\beta_1}{2} \|\text{rot}(\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v})\|^2 + \frac{\beta_2}{2} \|\eta(N(\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v})) - \rho_d\|^2 \\ &\quad - \frac{\beta_1}{2} \|\text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon\|^2 - \frac{\beta_2}{2} \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \rho_d\|^2. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Observar que

$$\begin{aligned} \|\text{rot}(\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v})\|^2 &= (\text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon + h \text{rot } \mathbf{v}, \text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon + h \text{rot } \mathbf{v}) \\ &= \|\text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon\|^2 + 2h(\text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon, \text{rot } \mathbf{v}) + h^2 \|\text{rot } \mathbf{v}\|^2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Como por definición $N(\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v}) = N\mathbf{u}^\varepsilon + hN\mathbf{v}$ y $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, entonces por el Teorema del valor medio existe $\sigma \in (N\mathbf{u}^\varepsilon, N(\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v}))$ tal que

$$\eta(N(\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v})) - \eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) = h\eta'(\sigma)N\mathbf{v} \Rightarrow \eta(N(\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v})) = h\eta'(\sigma)N\mathbf{v} + \eta(N\mathbf{u}^\varepsilon), \quad (5.16)$$

más aún, como $N\mathbf{u}^\varepsilon < \sigma < N\mathbf{u}^\varepsilon + hN\mathbf{v}$, cuando $h \rightarrow 0$ se tiene que

$$\sigma \rightarrow N\mathbf{u}^\varepsilon \Rightarrow \eta'(\sigma) \rightarrow \eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon). \quad (5.17)$$

Así, teniendo en cuenta (5.16) se tiene

$$\begin{aligned} \|\eta(N(\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v})) - \rho_d\|^2 &= \|h\eta'(\sigma)N\mathbf{v} + \eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \rho_d\|^2 \\ &= (\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \rho_d + h\eta'(\sigma)N\mathbf{v}, \eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \rho_d + h\eta'(\sigma)N\mathbf{v}) \\ &= \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \rho_d\|^2 + 2h(\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \rho_d, \eta'(\sigma)N\mathbf{v}) \\ &\quad + h^2 \|\eta'(\sigma)N\mathbf{v}\|^2. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Reemplazando (5.15) y (5.18) en (5.14) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1[h, 0, 0, 0] - \mathcal{F}_1(\mathbf{0}) &= h\beta_1(\text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon, \text{rot } \mathbf{v}) + h^2 \frac{\beta_1}{2} \|\text{rot } \mathbf{v}\|^2 + h\beta_2(\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \rho_d, \eta'(\sigma)N\mathbf{v}) \\ &\quad + h^2 \frac{\beta_2}{2} \|\eta'(\sigma)N\mathbf{v}\|^2, \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_1[h, 0, 0, 0] - \mathcal{F}_1(\mathbf{0})}{h} &= \beta_1(\text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon, \text{rot } \mathbf{v}) + h \frac{\beta_1}{2} \|\text{rot } \mathbf{v}\|^2 + \beta_2(\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \rho_d, \eta'(\sigma)N\mathbf{v}) \\ &\quad + h \frac{\beta_2}{2} \|\eta'(\sigma)N\mathbf{v}\|^2. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Así, teniendo en cuenta (5.17), de (5.19) se sigue

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \zeta_1}(\mathbf{0}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}_1(h, 0, 0, 0) - \mathcal{F}_1(\mathbf{0})}{h} = \beta_1(\operatorname{rot} \mathbf{u}^\varepsilon, \operatorname{rot} \mathbf{v}) + \beta_2(\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \rho_d, \eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)N\mathbf{v}). \quad (5.20)$$

Etapa 2:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \zeta_1}(\mathbf{0}) = (\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}_\sigma} + \langle \boldsymbol{\xi}^\varepsilon, \mathbf{v} \rangle_\Gamma. \quad (5.21)$$

Cálculo de (5.21): De la definición de \mathcal{F}_2 , se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2[h, 0, 0, 0] - \mathcal{F}_2(\mathbf{0}) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v} - \mathbf{u}\mathbf{g}_1^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma}^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}\mathbf{g}_1^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{u}})_{\mathbf{H}_\sigma} + \frac{1}{2\varepsilon} \langle \mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v} - \mathbf{u}\mathbf{g}_1^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v} - \mathbf{u}\mathbf{g}_1^\varepsilon \rangle_\Gamma \\ &\quad - \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma}^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}\mathbf{g}_1^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 \\ &= h(\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}_\sigma} + \frac{h^2}{2} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_\sigma}^2 + \frac{h}{\varepsilon} \langle \mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}\mathbf{g}_1^\varepsilon, \mathbf{v} \rangle_\Gamma + \frac{h^2}{2\varepsilon} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2, \end{aligned}$$

y entonces,

$$\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \zeta_1}(\mathbf{0}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}_2[h, 0, 0, 0] - \mathcal{F}_2(\mathbf{0})}{h} = (\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}_\sigma} + \frac{1}{\varepsilon} \langle \mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}\mathbf{g}_1^\varepsilon, \mathbf{v} \rangle_\Gamma,$$

así, observando (5.12) se sigue (5.21).

Etapa 3:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \zeta_1}(\mathbf{0}) &= (\mu_1 A\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) + (B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) + B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, \mathbf{u}^\varepsilon), \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) \\ &\quad + (\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) - (\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Cálculo de (5.22): Por la definición de \mathcal{F}_3 se tiene

$$\mathcal{F}_3[h, 0, 0, 0] = \frac{1}{2\varepsilon} \|\mu_1 A\hat{\mathbf{u}} + B(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) - 2\mu_r \operatorname{rot} w^\varepsilon - F(\hat{\mathbf{u}})\|_{\mathbf{V}'}^2.$$

donde $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v}$, y observando (5.2), se sigue

$$\mathcal{F}_3[h, 0, 0, 0] = \frac{1}{2\varepsilon} (\mu_1 A\hat{\mathbf{u}} + B(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) - 2\mu_r \operatorname{rot} w^\varepsilon - F(\hat{\mathbf{u}}), A^{-1}(\mu_1 A\hat{\mathbf{u}} + B(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) - 2\mu_r \operatorname{rot} w^\varepsilon - F(\hat{\mathbf{u}}))). \quad (5.23)$$

De la definición de B dado en (2.64) y (5.16), se tiene

$$\begin{aligned}
B(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) &= B(\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v}, \mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v}, \mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v}) \\
&= \eta(N(\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v}))(\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v}) \cdot \nabla(\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v}) \\
&= [\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) + h\eta'(\sigma)N\mathbf{v}](\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v}) \cdot \nabla(\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v}) \\
&= B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) + hB(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) + hB(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, \mathbf{u}^\varepsilon) + h^2B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, \mathbf{v}) \\
&\quad + h\eta'(\sigma)(N\mathbf{v})(\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla\mathbf{v} + h\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{u}^\varepsilon + h^2\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v}) \\
&= B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) + hB(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) + hB(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, \mathbf{u}^\varepsilon) + h\eta'(\sigma)(N\mathbf{v})\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla\mathbf{u}^\varepsilon \\
&\quad + h^2(B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, \mathbf{v}) + \eta'(\sigma)(N\mathbf{v})(\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla\mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v})) \\
&= B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) + hB(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) + hB(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, \mathbf{u}^\varepsilon) + h\eta'(\sigma)(N\mathbf{v})\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla\mathbf{u}^\varepsilon \\
&\quad + h^2\mathbf{M}_1(h, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}), \tag{5.24}
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{M}_1 : [0, 1] \times \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ es definido por

$$\mathbf{M}_1(h, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) = B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, \mathbf{v}) + \eta'(\sigma)(N\mathbf{v})(\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla\mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v}).$$

De la definición de F y (5.16), se obtiene

$$F(\hat{\mathbf{u}}) = \eta(N(\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v}))\mathbf{f} = (\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) + h\eta'(\sigma)N\mathbf{v})\mathbf{f} = F(\mathbf{u}^\varepsilon) + h\eta'(\sigma)(N\mathbf{v})\mathbf{f}, \tag{5.25}$$

$$A\hat{\mathbf{u}} = A(\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v}) = A\mathbf{u}^\varepsilon + hA\mathbf{v}. \tag{5.26}$$

Entonces, de (5.24)-(5.26) y denotando $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_1(h, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v})$, se tiene

$$\begin{aligned}
\mu_1 A\hat{\mathbf{u}} + B(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) - 2\mu_r w^\varepsilon - F(\hat{\mathbf{u}}) &= \mu_1 A\mathbf{u}^\varepsilon + B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) - 2\mu_r w^\varepsilon - F(\mathbf{u}^\varepsilon) \\
&\quad + h\mu_1 A\mathbf{v} + hB(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) + hB(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, \mathbf{u}^\varepsilon) \\
&\quad + h\eta'(\sigma)(N\mathbf{v})(\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{f}) + h^2\mathbf{M}_1. \tag{5.27}
\end{aligned}$$

Observando que $(\mathbf{u}, A^{-1}\mathbf{v}) = (A^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{v})$, la definición de $\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon$ dada en (5.10) y (5.2), reemplazando (5.27) en (5.23), se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_3[h, 0, 0, 0] &= \frac{1}{2\varepsilon} \|\mu_1 A\mathbf{u}^\varepsilon + B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) - 2\mu_r \text{rot } w^\varepsilon - F(\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{\mathbf{V}'}^2 \\
&\quad + h(\mu_1 A\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) + h(B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) + B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, \mathbf{u}^\varepsilon), \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) \\
&\quad + h(\eta'(\sigma)(N\mathbf{v})(\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{f}), \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) + h^2(\mathbf{M}_1, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) + \frac{h^4}{2\varepsilon} \|\mathbf{M}_1\|_{\mathbf{V}'}^2 \\
&\quad + \frac{h^2}{2\varepsilon} \|\mu_1 A\mathbf{v} + B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) + B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, \mathbf{u}^\varepsilon) + \eta'(\sigma)(N\mathbf{v})(\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{f})\|_{\mathbf{V}'}^2 \\
&\quad + \frac{h^3}{\varepsilon} (\mu_1 A\mathbf{v} + B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) + B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, \mathbf{u}^\varepsilon) + \eta'(\sigma)(N\mathbf{v})(\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{f}), A^{-1}\mathbf{M}_1),
\end{aligned}$$

y entonces se sigue

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_3[h, 0, 0, 0] - \mathcal{F}_3(\mathbf{0}) &= h(\mu_1 A\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) + h(B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) + B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, \mathbf{u}^\varepsilon), \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) \\
&\quad + h(\eta'(\sigma)(N\mathbf{v})(\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{f}), \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) + \frac{h^2}{\varepsilon} \mathbf{M}_2(h, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, \mathbf{f}),
\end{aligned}$$

así, considerando (5.17) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \zeta_1}(\mathbf{0}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}_3[h, 0, 0, 0] - \mathcal{F}_3(\mathbf{0})}{h} = (\mu_1 A \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) + (B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) + B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, \mathbf{u}^\varepsilon), \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) \\ &\quad + (\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})(\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{f}), \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon), \end{aligned} \quad (5.28)$$

lo cual implica (5.22).

Etapa 4:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial \zeta_1}(\mathbf{0}) &= (\tilde{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, w^\varepsilon), \phi^\varepsilon) + (\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla w^\varepsilon, \phi^\varepsilon) - (2\mu_r \text{rot } \mathbf{v}, \phi^\varepsilon) \\ &\quad - (\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\mathbf{g}, \phi^\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Cálculo de (5.29): Denotando

$$\mathcal{E}(\hat{\mathbf{u}}, w^\varepsilon) = \tilde{B}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}, w^\varepsilon) - 2\mu_r \text{rot } \hat{\mathbf{u}} - G(\hat{\mathbf{u}}),$$

de la definición de \mathcal{F}_4 y (5.3), se tiene

$$\mathcal{F}_4[h, 0, 0, 0] = \frac{1}{2\varepsilon} (\nu_2 \tilde{A} w^\varepsilon + 4\mu_r w^\varepsilon + \mathcal{E}(\hat{\mathbf{u}}, w^\varepsilon), \tilde{A}^{-1} (\nu_2 \tilde{A} w^\varepsilon + 4\mu_r w^\varepsilon + \mathcal{E}(\hat{\mathbf{u}}, w^\varepsilon))) \quad (5.30)$$

con $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v}$.

De la definición de \tilde{B} y G , observando (5.16) se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{B}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}, w^\varepsilon) &= \eta(N(\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v}))(\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v}) \cdot \nabla w^\varepsilon = (\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) + h\eta'(\sigma)N\mathbf{v})(\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v}) \cdot \nabla w^\varepsilon \\ &= \tilde{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon) + h\tilde{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, w^\varepsilon) + h\eta'(\sigma)(N\mathbf{v})\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla w^\varepsilon + h^2\eta'(\sigma)(N\mathbf{v})\mathbf{v} \cdot \nabla w^\varepsilon, \\ 2\mu_r \text{rot } \hat{\mathbf{u}} &= 2\mu_r \text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon + 2h\mu_r \text{rot } \mathbf{v}, \\ G(\hat{\mathbf{u}}) &= \eta(N(\mathbf{u}^\varepsilon + h\mathbf{v}))\mathbf{g} = (\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) + h\eta'(\sigma)N\mathbf{v})\mathbf{g} = G(\mathbf{u}^\varepsilon) + h\eta'(\sigma)(N\mathbf{v})\mathbf{g}, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \nu_2 \tilde{A} w^\varepsilon + 4\mu_r w^\varepsilon + \mathcal{E}(\hat{\mathbf{u}}, w^\varepsilon) &= \nu_2 \tilde{A} w^\varepsilon + 4\mu_r w^\varepsilon + \tilde{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon) - 2\mu_r \text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon - G(\mathbf{u}^\varepsilon) \\ &\quad + h\tilde{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, w^\varepsilon) + h\eta'(\sigma)(N\mathbf{v})\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla w^\varepsilon - 2h\mu_r \text{rot } \mathbf{v} \\ &\quad - h\eta'(\sigma)(N\mathbf{v})\mathbf{g} + h^2\eta'(\sigma)(N\mathbf{v})\mathbf{v} \cdot \nabla w^\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Reemplazando (5.31) en (5.30) y observando la definición de ϕ^ε dada en (5.11), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_4[h, 0, 0, 0] &= \frac{1}{2\varepsilon} \|\nu_2 \tilde{A} w^\varepsilon + 4\mu_r w^\varepsilon + \tilde{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon) - 2\mu_r \text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon - G(\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{H^{-1}}^2 \\ &\quad + h(\tilde{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, w^\varepsilon) + \eta'(\sigma)(N\mathbf{v})\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla w^\varepsilon - 2\mu_r \text{rot } \mathbf{v} - \eta'(\sigma)(N\mathbf{v})\mathbf{g}, \phi^\varepsilon) \\ &\quad + h^2(\eta'(\sigma)(N\mathbf{v})\mathbf{v} \cdot \nabla w^\varepsilon, \phi^\varepsilon) + \frac{h^4}{2\varepsilon} \|\eta'(\sigma)(N\mathbf{v})\mathbf{v} \cdot \nabla w^\varepsilon\|_{H^{-1}}^2 \\ &\quad + \frac{h^2}{2\varepsilon} \|\tilde{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, w^\varepsilon) + \eta'(\sigma)(N\mathbf{v})\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla w^\varepsilon - 2\mu_r \text{rot } \mathbf{v} - \eta'(\sigma)(N\mathbf{v})\mathbf{g}\|_{H^{-1}}^2 \\ &\quad + \frac{h^3}{\varepsilon} (\tilde{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, w^\varepsilon) + \eta'(\sigma)(N\mathbf{v})\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla w^\varepsilon, \tilde{A}^{-1}(\eta'(\sigma)(N\mathbf{v})\mathbf{v} \cdot \nabla w^\varepsilon)) \\ &\quad - \frac{h^3}{\varepsilon} (2\mu_r \text{rot } \mathbf{v} + \eta'(\sigma)(N\mathbf{v})\mathbf{g}, \tilde{A}^{-1}(\eta'(\sigma)(N\mathbf{v})\mathbf{v} \cdot \nabla w^\varepsilon)), \end{aligned}$$

y entonces se sigue

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_4[h, 0, 0, 0] - \mathcal{F}_4(\mathbf{0}) &= h(\tilde{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, w^\varepsilon) + \eta'(\sigma)(N\mathbf{v})\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla w^\varepsilon - 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{v} - \eta'(\sigma)(N\mathbf{v})\mathbf{g}, \phi^\varepsilon) \\ &\quad + \frac{h^2}{\varepsilon} \mathbf{M}_3(h, \mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \mathbf{v}, \mathbf{g}),\end{aligned}$$

así, considerando (5.17) se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial \zeta_1}(\mathbf{0}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}_4[h, 0, 0, 0] - \mathcal{F}_4(\mathbf{0})}{h} \\ &= (\tilde{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, w^\varepsilon) + \eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla w^\varepsilon - 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{v} - \eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\mathbf{g}, \phi^\varepsilon),\end{aligned}$$

lo cual implica (5.29).

Finalmente, sumando (5.13), (5.21), (5.22) y (5.29) se obtiene (5.9).

Derivada de \mathcal{F} con respecto a ζ_2 en el punto $\mathbf{0}$.

La derivada de \mathcal{F} con respecto a ζ_2 en el punto $\mathbf{0}$ es dada por

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta_2}(\mathbf{0}) &= \beta_3(w^\varepsilon - w_d, z) + (w^\varepsilon - \tilde{w}, z)_{H^1} + \langle \vartheta^\varepsilon, z \rangle_\Gamma - (2\mu_r \operatorname{rot} z, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) \\ &\quad + (\nu_2 \tilde{A}z, \phi^\varepsilon) + (\tilde{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, z), \phi^\varepsilon) + (4\mu_r z, \phi^\varepsilon),\end{aligned}\tag{5.32}$$

donde

$$\vartheta^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(w_{|\Gamma}^\varepsilon - w_{g_2^\varepsilon}) \in L^2(\Gamma) \subset H^{-1/2}(\Gamma),\tag{5.33}$$

$\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon$ y ϕ^ε definidos en (5.10) y (5.11) respectivamente.

Etapa 1:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \zeta_2}(\mathbf{0}) = \beta_3(w^\varepsilon - w_d, z).\tag{5.34}$$

Cálculo de (5.34): De la definición de \mathcal{F}_1 y J , se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1[0, h, 0, 0] - \mathcal{F}_1(\mathbf{0}) &= J[\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon + hz, \mathbf{g}_1^\varepsilon, g_2^\varepsilon] - J[\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \mathbf{g}_1^\varepsilon, g_2^\varepsilon] \\ &= \frac{\beta_3}{2} \|w^\varepsilon + hz - w_d\|^2 - \frac{\beta_3}{2} \|w^\varepsilon - w_d\|^2 \\ &= h\beta_3(w^\varepsilon - w_d, z) + \frac{h^2\beta_3}{2} \|z\|^2,\end{aligned}$$

y entonces,

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \zeta_2}(\mathbf{0}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}_1[0, h, 0, 0] - \mathcal{F}_1(\mathbf{0})}{h} = \beta_3(w^\varepsilon - w_d, z).$$

Etapa 2:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \zeta_2}(\mathbf{0}) = (w^\varepsilon - \tilde{w}, z)_{H^1} + \langle \vartheta^\varepsilon, z \rangle_\Gamma.\tag{5.35}$$

Cálculo de (5.35): De la definición de \mathcal{F}_2 , se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2[0, h, 0, 0] - \mathcal{F}_2(\mathbf{0}) &= \frac{1}{2} \|w^\varepsilon + hz - \tilde{w}\|_{H^1}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|w^\varepsilon + hz - wg_2^\varepsilon\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \|w^\varepsilon - \tilde{w}\|_{H^1}^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \|w^\varepsilon - wg_2^\varepsilon\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \\ &= h(w^\varepsilon - \tilde{w}, z)_{H^1} + \frac{h}{\varepsilon} \langle w^\varepsilon - wg_2^\varepsilon, z \rangle_\Gamma + \frac{h^2}{2} \|z\|_{H^1}^2 + \frac{h^2}{2\varepsilon} \|z\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2,\end{aligned}$$

y entonces,

$$\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \zeta_2}(\mathbf{0}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}_2[0, h, 0, 0] - \mathcal{F}_2(\mathbf{0})}{h} = (w^\varepsilon - \tilde{w}, z)_{H^1} + \frac{1}{\varepsilon} \langle w^\varepsilon - wg_2^\varepsilon, z \rangle_\Gamma,$$

así, observando (5.33) se sigue (5.35).

Etapa 3:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \zeta_2}(\mathbf{0}) = -(2\mu_r \operatorname{rot} z, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon). \quad (5.36)$$

Cálculo de (5.36): Observando (5.2), la definición de $\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon$ dada en (5.10) y la definición de \mathcal{F}_3 , se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_3[0, h, 0, 0] &= \frac{1}{2\varepsilon} \|\mu_1 A \mathbf{u}^\varepsilon + B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) - 2\mu_r \operatorname{rot}(w^\varepsilon + hz) - F(\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{\mathbf{V}'}^2, \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \|\mu_1 A \mathbf{u}^\varepsilon + B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) - 2\mu_r \operatorname{rot} w^\varepsilon - F(\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{\mathbf{V}'}^2 \\ &\quad - h(2\mu_r \operatorname{rot} z, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) + \frac{h^2}{2\varepsilon} \|2\mu_r \operatorname{rot} z\|_{\mathbf{V}'}^2,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathcal{F}_3[0, h, 0, 0] - \mathcal{F}_3(\mathbf{0}) = -h(2\mu_r \operatorname{rot} z, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) + \frac{h^2}{2\varepsilon} \|2\mu_r \operatorname{rot} z\|_{\mathbf{V}'}^2,$$

y se sigue

$$\frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \zeta_2}(\mathbf{0}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}_3[0, h, 0, 0] - \mathcal{F}_3(\mathbf{0})}{h} = -(2\mu_r \operatorname{rot} z, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon),$$

lo cual implica (5.36).

Etapa 4:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial \zeta_2}(\mathbf{0}) = (\nu_2 \tilde{A}z, \phi^\varepsilon) + (\tilde{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, z), \phi^\varepsilon) + (4\mu_r z, \phi^\varepsilon). \quad (5.37)$$

Cálculo de (5.37): Observando (5.3), la definición de ϕ^ε dada en (5.11) y la definición de \mathcal{F}_4 , se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_4[0, h, 0, 0] &= \frac{1}{2\varepsilon} \|\nu_2 \tilde{A}(w^\varepsilon + hz) + 4\mu_r(w^\varepsilon + hz) + \tilde{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon + hz) - 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{u}^\varepsilon - G(\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{H^{-1}}^2 \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \|\nu_2 \tilde{A}w^\varepsilon + 4\mu_r w^\varepsilon + \tilde{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon) - 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{u}^\varepsilon - G(\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{H^{-1}}^2 \\ &\quad + h(\nu_2 \tilde{A}z + 4\mu_r z + \tilde{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, z), \phi^\varepsilon) + \frac{h^2}{2\varepsilon} \|\nu_2 \tilde{A}z + 4\mu_r z + \tilde{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, z)\|_{H^{-1}}^2,\end{aligned}$$

entonces, se sigue

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_4[0, h, 0, 0] - \mathcal{F}_4(\mathbf{0}) &= h(\nu_2 \tilde{A}z + 4\mu_r z + \tilde{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, z), \phi^\varepsilon) \\ &\quad + \frac{h^2}{2\varepsilon} \|\nu_2 \tilde{A}z + 4\mu_r z + \tilde{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, z)\|_{H^{-1}}^2,\end{aligned}$$

así,

$$\frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial \zeta_2}(\mathbf{0}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}_4[0, h, 0, 0] - \mathcal{F}_4(\mathbf{0})}{h} = (\nu_2 \tilde{A}z + 4\mu_r z + \tilde{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, z), \phi^\varepsilon),$$

lo cual implica (5.37).

Finalmente, sumando (5.34), (5.35), (5.36) y (5.37) se obtiene (5.32).

Derivada de \mathcal{F} con respecto a ζ_3 en el punto $\mathbf{0}$.

La derivada de \mathcal{F} con respecto a ζ_3 en el punto $\mathbf{0}$ es dada por

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta_3}(\mathbf{0}) = \beta_4 \langle \mathbf{g}_1^\varepsilon, \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon \rangle_{\Gamma_1} + \langle \mathbf{g}_1^\varepsilon - \tilde{\mathbf{g}}_1, \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon \rangle_{\Gamma_1} - \langle \boldsymbol{\xi}^\varepsilon, \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon \rangle_{\Gamma_1}, \quad (5.38)$$

con $\boldsymbol{\xi}^\varepsilon$ definido en (5.12).

Etapa 1:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \zeta_3}(\mathbf{0}) = \beta_4 \langle \mathbf{g}_1^\varepsilon, \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon \rangle_{\Gamma_1}. \quad (5.39)$$

Cálculo de (5.39): De la definición de \mathcal{F}_1 se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1[0, 0, h, 0] - \mathcal{F}_1(\mathbf{0}) &= \frac{\beta_4}{2} \|\mathbf{g}_1^\varepsilon + h(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon)\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 - \frac{\beta_4}{2} \|\mathbf{g}_1^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 \\ &= \frac{\beta_4}{2} \langle \mathbf{g}_1^\varepsilon + h(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon), \mathbf{g}_1^\varepsilon + h(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon) \rangle_{\Gamma_1} - \frac{\beta_4}{2} \|\mathbf{g}_1^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 \\ &= h\beta_4 \langle \mathbf{g}_1^\varepsilon, \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon \rangle_{\Gamma_1} + \frac{h^2\beta_4}{2} \|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2,\end{aligned}$$

así,

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \zeta_3}(\mathbf{0}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}_1[0, 0, h, 0] - \mathcal{F}_1(\mathbf{0})}{h} = \beta_4 \langle \mathbf{g}_1^\varepsilon, \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon \rangle_{\Gamma_1},$$

lo cual implica (5.39).

Etapa 2:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \zeta_3}(\mathbf{0}) = \langle \mathbf{g}_1^\varepsilon - \tilde{\mathbf{g}}_1, \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon \rangle_{\Gamma_1} - \langle \boldsymbol{\xi}^\varepsilon, \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon \rangle_{\Gamma_1}. \quad (5.40)$$

Cálculo de (5.40): De la definición de \mathcal{F}_2 , se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2[0, 0, h, 0] - \mathcal{F}_2(\mathbf{0}) &= \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{g}}_1 - \tilde{\mathbf{g}}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}_{\hat{\mathbf{g}}_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \|\mathbf{g}_1^\varepsilon - \tilde{\mathbf{g}}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}_{\mathbf{g}_1^\varepsilon}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2,\end{aligned}\quad (5.41)$$

donde $\hat{\mathbf{g}}_1 = \mathbf{g}_1^\varepsilon + h(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon)$.

Por la definición dada en (4.1) se tiene $\mathbf{u}_{\hat{\mathbf{g}}_1} = \begin{cases} \mathbf{u}_0 & \text{sobre } \Gamma_0, \\ \mathbf{g}_1^\varepsilon + h(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon) & \text{sobre } \Gamma_1. \end{cases}$

Así, $\mathbf{u}_{\hat{\mathbf{g}}_1}$ se reescribe como

$$\mathbf{u}_{\hat{\mathbf{g}}_1} = \mathbf{u}_{\mathbf{g}_1^\varepsilon} + h\mathcal{B}(\mathbf{g}_1^\varepsilon),$$

donde $\mathcal{B}(\mathbf{g}_1^\varepsilon) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{sobre } \Gamma_0, \\ \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon & \text{sobre } \Gamma_1. \end{cases}$

Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\varepsilon} \|\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}_{\hat{\mathbf{g}}_1}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 &= \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}_{\mathbf{g}_1^\varepsilon} - h\mathcal{B}(\mathbf{g}_1^\varepsilon)\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \langle \mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}_{\mathbf{g}_1^\varepsilon} - h\mathcal{B}(\mathbf{g}_1^\varepsilon), \mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}_{\mathbf{g}_1^\varepsilon} - h\mathcal{B}(\mathbf{g}_1^\varepsilon) \rangle_\Gamma \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}_{\mathbf{g}_1^\varepsilon}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 - \frac{h}{\varepsilon} \langle \mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}_{\mathbf{g}_1^\varepsilon}, \mathcal{B}(\mathbf{g}_1^\varepsilon) \rangle_\Gamma + \frac{h^2}{2\varepsilon} \langle \mathcal{B}(\mathbf{g}_1^\varepsilon), \mathcal{B}(\mathbf{g}_1^\varepsilon) \rangle_\Gamma \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}_{\mathbf{g}_1^\varepsilon}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 - \frac{h}{\varepsilon} \langle \mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{g}_1^\varepsilon, \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon \rangle_{\Gamma_1} \\ &\quad + \frac{h^2}{2\varepsilon} \|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2.\end{aligned}\quad (5.42)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{g}}_1 - \tilde{\mathbf{g}}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 &= \frac{1}{2} \|\mathbf{g}_1^\varepsilon + h(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon) - \tilde{\mathbf{g}}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{g}_1^\varepsilon - \tilde{\mathbf{g}}_1 + h(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon), \mathbf{g}_1^\varepsilon - \tilde{\mathbf{g}}_1 + h(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon) \rangle_{\Gamma_1} \\ &= \frac{1}{2} \|\mathbf{g}_1^\varepsilon - \tilde{\mathbf{g}}_1\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 + h \langle \mathbf{g}_1^\varepsilon - \tilde{\mathbf{g}}_1, \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon \rangle_{\Gamma_1} \\ &\quad + \frac{h^2}{2} \|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2.\end{aligned}\quad (5.43)$$

Reemplazando (5.42) y (5.43) en (5.41), se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2[0, 0, h, 0] - \mathcal{F}_2(\mathbf{0}) &= h \langle \mathbf{g}_1^\varepsilon - \tilde{\mathbf{g}}_1, \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon \rangle_{\Gamma_1} + \frac{h^2}{2} \|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2 \\ &\quad - \frac{h}{\varepsilon} \langle \mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{g}_1^\varepsilon, \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon \rangle_{\Gamma_1} + \frac{h^2}{2\varepsilon} \|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_1)}^2,\end{aligned}$$

y desde que $\mathbf{u}_{\mathbf{g}_1^\varepsilon} = \mathbf{g}_1^\varepsilon$ sobre Γ_1 , se obtiene

$$\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \zeta_3}(\mathbf{0}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}_2[0, 0, h, 0] - \mathcal{F}_2(\mathbf{0})}{h} = \langle \mathbf{g}_1^\varepsilon - \tilde{\mathbf{g}}_1, \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon \rangle_{\Gamma_1} - \frac{1}{\varepsilon} \langle \mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}_{\mathbf{g}_1^\varepsilon}, \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\varepsilon \rangle_{\Gamma_1},$$

y entonces observando (5.12) se sigue (5.40).

Por lo tanto, desde que $\frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \zeta_3}(\mathbf{0}) = 0$ y $\frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial \zeta_3}(\mathbf{0}) = 0$, sumando (5.39) y (5.40) se obtiene (5.38).

Derivada de \mathcal{F} con respecto a ζ_4 en el punto $\mathbf{0}$.

La derivada de \mathcal{F} con respecto a ζ_4 en el punto $\mathbf{0}$ es dada por

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta_4}(\mathbf{0}) = \beta_5 \langle g_2^\varepsilon, g_2 - g_2^\varepsilon \rangle_{\Gamma_3} + \langle g_2^\varepsilon - \tilde{g}_2, g_2 - g_2^\varepsilon \rangle_{\Gamma_3} - \langle \vartheta^\varepsilon, g_2 - g_2^\varepsilon \rangle_{\Gamma_3}, \quad (5.44)$$

con ϑ^ε definido en (5.33).

Etapa 1:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \zeta_4}(\mathbf{0}) = \beta_5 \langle g_2^\varepsilon, g_2 - g_2^\varepsilon \rangle_{\Gamma_3}. \quad (5.45)$$

Cálculo de (5.45): De la definición de \mathcal{F}_1 se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1[0, 0, 0, h] - \mathcal{F}_1(\mathbf{0}) &= \frac{\beta_5}{2} \|g_2^\varepsilon + h(g_2 - g_2^\varepsilon)\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_3)}^2 - \frac{\beta_5}{2} \|g_2^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_3)}^2 \\ &= \frac{\beta_5}{2} \langle g_2^\varepsilon + h(g_2 - g_2^\varepsilon), g_2^\varepsilon + h(g_2 - g_2^\varepsilon) \rangle_{\Gamma_3} - \frac{\beta_5}{2} \|g_2^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_3)}^2 \\ &= h\beta_5 \langle g_2^\varepsilon, g_2 - g_2^\varepsilon \rangle_{\Gamma_3} + \frac{h^2\beta_5}{2} \|g_2 - g_2^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_3)}^2, \end{aligned}$$

así,

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \zeta_4}(\mathbf{0}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}_1[0, 0, 0, h] - \mathcal{F}_1(\mathbf{0})}{h} = \beta_5 \langle g_2^\varepsilon, g_2 - g_2^\varepsilon \rangle_{\Gamma_3},$$

lo cual implica (5.45).

Etapa 2:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \zeta_4}(\mathbf{0}) = \langle g_2^\varepsilon - \tilde{g}_2, g_2 - g_2^\varepsilon \rangle_{\Gamma_3} - \langle \vartheta^\varepsilon, g_2 - g_2^\varepsilon \rangle_{\Gamma_3}. \quad (5.46)$$

Cálculo de (5.46): De la definición de \mathcal{F}_2 , se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2[0, 0, 0, h] - \mathcal{F}_2(\mathbf{0}) &= \frac{1}{2} \|\hat{g}_2 - \tilde{g}_2\|_{H^{1/2}(\Gamma_3)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|w^\varepsilon - w_{\hat{g}_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \|g_2^\varepsilon - \tilde{g}_2\|_{H^{1/2}(\Gamma_3)}^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \|w^\varepsilon - w_{g_2^\varepsilon}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2, \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\text{donde } \hat{g}_2 = g_2^\varepsilon + h(g_2 - g_2^\varepsilon) \text{ y } w_{\hat{g}_2} = \begin{cases} w_0 & \text{sobre } \Gamma_2, \\ g_2^\varepsilon + h(g_2 - g_2^\varepsilon) & \text{sobre } \Gamma_3. \end{cases}$$

Así, $w_{\hat{g}_2}$ se reescribe como

$$w_{\hat{g}_2} = w_{g_2^\varepsilon} + h\mathcal{B}_1(g_2^\varepsilon),$$

$$\text{donde } \mathcal{B}_1(g_2^\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{sobre } \Gamma_2, \\ g_2 - g_2^\varepsilon & \text{sobre } \Gamma_3. \end{cases}$$

Similar como para (5.42) y (5.43), se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|\hat{g}_2 - \tilde{g}_2\|_{H^{1/2}(\Gamma_3)}^2 &= \frac{1}{2}\|g_2^\varepsilon + h(g_2 - g_2^\varepsilon) - \tilde{g}_2\|_{H^{1/2}(\Gamma_3)}^2 \\
&= \frac{1}{2}\|g_2^\varepsilon - \tilde{g}_2\|_{H^{1/2}(\Gamma_3)}^2 + h\langle g_2^\varepsilon - \tilde{g}_2, g_2 - g_2^\varepsilon \rangle_{\Gamma_3} \\
&\quad + \frac{h^2}{2}\|g_2 - g_2^\varepsilon\|_{H^{1/2}(\Gamma_3)}^2.
\end{aligned} \tag{5.48}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\varepsilon}\|w^\varepsilon - w_{\hat{g}_2}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 &= \frac{1}{2\varepsilon}\|w^\varepsilon - w_{g_2^\varepsilon} - h\mathcal{B}_1(g_2^\varepsilon)\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \\
&= \frac{1}{2\varepsilon}\|w^\varepsilon - w_{g_2^\varepsilon}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 - \frac{h}{\varepsilon}\langle w^\varepsilon - w_{g_2^\varepsilon}, \mathcal{B}_1(g_2^\varepsilon) \rangle_\Gamma + \frac{h^2}{2\varepsilon}\|\mathcal{B}_1(g_2^\varepsilon)\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \\
&= \frac{1}{2\varepsilon}\|w^\varepsilon - w_{g_2^\varepsilon}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 - \frac{h}{\varepsilon}\langle w^\varepsilon - g_2^\varepsilon, g_2 - g_2^\varepsilon \rangle_{\Gamma_3} \\
&\quad + \frac{h^2}{2\varepsilon}\|g_2 - g_2^\varepsilon\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2.
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Reemplazando (5.48) y (5.49) en (5.47), se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_2[0, 0, 0, h] - \mathcal{F}_2(\mathbf{0}) &= h\langle g_2^\varepsilon - \tilde{g}_2, g_2 - g_2^\varepsilon \rangle_{\Gamma_3} + \frac{h^2}{2}\|g_2 - g_2^\varepsilon\|_{H^{1/2}(\Gamma_3)}^2 \\
&\quad - \frac{1}{\varepsilon}\langle w^\varepsilon - g_2^\varepsilon, g_2 - g_2^\varepsilon \rangle_{\Gamma_3} + \frac{h^2}{2\varepsilon}\|g_2 - g_2^\varepsilon\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2,
\end{aligned}$$

y desde que $w_{g_2^\varepsilon} = g_2^\varepsilon$ sobre Γ_3 , se obtiene

$$\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \zeta_4}(\mathbf{0}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}_2[0, 0, 0, h] - \mathcal{F}_2(\mathbf{0})}{h} = \langle g_2^\varepsilon - \tilde{g}_2, g_2 - g_2^\varepsilon \rangle_{\Gamma_3} - \frac{1}{\varepsilon}\langle w^\varepsilon - w_{g_2^\varepsilon}, g_2 - g_2^\varepsilon \rangle_{\Gamma_3},$$

y entonces observando (5.33) se sigue (5.46).

Entonces, desde que $\frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \zeta_4}(\mathbf{0}) = 0$ y $\frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial \zeta_4}(\mathbf{0}) = 0$, sumando (5.45) y (5.46) se obtiene (5.44).

5.3 Apéndice C: Cotas

Lema 5.8 Sean las funciones $\boldsymbol{\xi}^\varepsilon \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ y $\vartheta^\varepsilon \in H^{-1/2}(\Gamma)$ definidas en (5.12) y (5.33) respectivamente, tal que $[\boldsymbol{\xi}^\varepsilon, \vartheta^\varepsilon]$ satisface el sistema (4.53)-(4.56). Entonces, las siguientes desigualdades son satisfechas

$$\|\boldsymbol{\xi}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \leq \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2\|[\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \phi^\varepsilon]\|_{\mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)}, \tag{5.50}$$

$$\|\vartheta^\varepsilon\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4\|[\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \phi^\varepsilon]\|_{\mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)}, \tag{5.51}$$

donde $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ y \mathcal{C}_4 son constantes positivas independientes de ε . Las funciones $\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon$ y ϕ^ε son definidos en (5.10) y (5.11) respectivamente.

Demostración:

De la definición y continuidad del operador N , para $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \subset \mathbf{H}_\sigma$ se tiene

$$\|N\mathbf{v}\|_{L^\infty} \leq C\|N\mathbf{v}\|_{H^2} \leq C\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_\sigma} \leq C\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}, \tag{5.52}$$

además, de las convergencias (4.71) y (4.72) se tiene que

$$\|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} \leq C, \quad \|\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} \leq C, \quad \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma} \leq C, \quad \|w^\varepsilon\|_{H^1} \leq C, \quad (5.53)$$

con C constante positiva independiente de ε .

Paso 1: Prueba de la desigualdad (5.50).

De (4.53) se deduce

$$\begin{aligned} |\langle \boldsymbol{\xi}^\varepsilon, \mathbf{v} \rangle_\Gamma| &\leq \mu_1 |(A\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \mathbf{v})| + |(D(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon), \mathbf{v})| + |(B^T(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon), \mathbf{v})| \\ &\quad + |(\tilde{D}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \phi^\varepsilon), \mathbf{v})| + |(E(\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \phi^\varepsilon), \mathbf{v})| + |\langle J'_u(\mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle| \\ &\quad + |(\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}_\sigma}| + 2\mu_r |(\text{rot } \phi^\varepsilon, \mathbf{v})| + |(F'(\mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon), \mathbf{v})| + |(G'(\mathbf{u}^\varepsilon, \phi^\varepsilon), \mathbf{v})|. \end{aligned} \quad (5.54)$$

A seguir se acotan cada uno de los términos del lado derecho de (5.54).

Usando la desigualdad de Hölder, la desigualdad de Poincaré y teniendo en cuenta (1.19), se tiene

$$\mu_1 |(A\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \mathbf{v})| = \mu_1 |(\nabla \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \nabla \mathbf{v})| \leq \mu_1 \|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \leq C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}}, \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} |(\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}_\sigma}| &\leq \|\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}\| \|\mathbf{v}\| + \|\nabla(\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}})\| \|\nabla \mathbf{v}\| \\ &\leq (C_\Omega + 1) \|\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \leq C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}, \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$2\mu_r |(\text{rot } \phi^\varepsilon, \mathbf{v})| \leq 2\mu_r \|\text{rot } \phi^\varepsilon\| \|\mathbf{v}\| \leq 2\sqrt{2} C_\Omega \mu_r \|\phi^\varepsilon\|_{H_0^1} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \leq C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|\phi^\varepsilon\|_{H_0^1}. \quad (5.57)$$

De la desigualdad de Hölder, la definición de $\langle J'_u(\mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle$ dada en (4.57), la desigualdad (1.19) y (5.52)-(5.53), se obtiene

$$\begin{aligned} |\langle J'_u(\mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle| &\leq \beta_1 |(\text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon, \text{rot } \mathbf{v})| + \beta_2 |(\eta(N(\mathbf{u}^\varepsilon)) - \rho_d, \eta'(N(\mathbf{u}^\varepsilon))N\mathbf{v})| \\ &\leq \beta_1 \|\text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon\| \|\text{rot } \mathbf{v}\| + \beta_2 \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \rho_d\|_{L^\infty} \|\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)\| \|N\mathbf{v}\| \\ &\leq 2\beta_1 \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} + \beta_2 C \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \rho_d\|_{L^\infty} \|\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} \|N\mathbf{v}\|_{L^\infty} \\ &\leq 2\beta_1 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} + \beta_2 C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \leq C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}, \end{aligned} \quad (5.58)$$

donde C es una constante positiva independiente de ε .

De la definición de los operadores B^T , E dadas en (4.2), usando la desigualdad de Hölder y considerando (1.30)-(??) y (5.53), se obtiene

$$\begin{aligned} |(B^T(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon), \mathbf{v})| &= |(B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) + B(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, \mathbf{u}^\varepsilon), \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon)| \\ &\leq |(\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon)| + |(\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon)| \\ &\leq \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} (\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_3 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{v}\|_3 \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma}) \|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\|_6 \\ &\leq 2C_3^2 C \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}} \leq C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}}, \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} |(E(\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \phi^\varepsilon), \mathbf{v})| &= |(\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)\mathbf{v} \cdot \nabla w^\varepsilon, \phi^\varepsilon)| \\ &\leq \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} \|\mathbf{v}\|_3 \|w^\varepsilon\|_{H^1} \|\phi^\varepsilon\|_6 \\ &\leq C_3 \tilde{C}_3 C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|w^\varepsilon\|_{H^1} \|\phi^\varepsilon\|_{H_0^1} \leq C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|\phi^\varepsilon\|_{H_0^1}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Usando las definiciones dadas en (4.2), las desigualdades (1.30), (??), la desigualdad de Hölder y

(5.52)-(5.53), se obtiene

$$\begin{aligned}
|(D(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon), \mathbf{v})| &= |(\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon)| \\
&\leq \|\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} \|N\mathbf{v}\|_{L^\infty} \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_3 \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma} \|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\|_6 \\
&\leq CC_3^2 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\| \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma} \|\nabla \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\| \\
&\leq CC_3^2 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma}^2 \|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}} \leq C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}}, \tag{5.61}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(\tilde{D}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \phi^\varepsilon), \mathbf{v})| &= |(\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla w^\varepsilon, \phi^\varepsilon)| \\
&\leq \|\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} \|N\mathbf{v}\|_{L^\infty} \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_3 \|w^\varepsilon\|_{H^1} \|\phi^\varepsilon\|_6 \\
&\leq CC_3 \tilde{C}_3 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma} \|w^\varepsilon\|_{H^1} \|\phi^\varepsilon\|_{H_0^1} \leq C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|\phi^\varepsilon\|_{H_0^1}, \tag{5.62}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(F'(\mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon), \mathbf{v})| &= |(\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon)| \leq \|\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} \|N\mathbf{v}\|_{L^\infty} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}'} \|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}} \\
&\leq \|\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} \|N\mathbf{v}\|_{L^\infty} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}'} \|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}} \leq C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}}, \tag{5.63}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(G'(\mathbf{u}^\varepsilon, \phi^\varepsilon), \mathbf{v})| &= |(\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\mathbf{g}, \phi^\varepsilon)| \\
&\leq \|\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} \|N\mathbf{v}\|_{L^\infty} \|\mathbf{g}\|_{H^{-1}} \|\phi^\varepsilon\|_{H_0^1} \leq C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|\phi^\varepsilon\|_{H_0^1}. \tag{5.64}
\end{aligned}$$

Sustituyendo las desigualdades (5.55)-(5.64) en (5.54), se obtiene

$$|\langle \boldsymbol{\xi}^\varepsilon, \mathbf{v} \rangle_\Gamma| \leq C_1 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} + C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} (\|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}} + \|\phi^\varepsilon\|_{H_0^1}), \tag{5.65}$$

con C_1, C constantes independientes de ε .

Aplicando la definición de la norma $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^{-1/2}}$, de la desigualdad (5.65) se tiene

$$\|\boldsymbol{\xi}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \leq C_1 + C(\|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}} + \|\phi^\varepsilon\|_{H_0^1}),$$

y entonces, teniendo en cuenta la desigualdad $|a| + |b| \leq \sqrt{2}(|a|^2 + |b|^2)^{1/2}$, se deduce

$$\|\boldsymbol{\xi}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \leq C_1 + \sqrt{2}C \|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \phi^\varepsilon\|_{\mathbf{V} \times H_0^1},$$

lo cual implica (5.50).

Paso 2: Prueba de la desigualdad (5.51):

De (4.54), se deduce

$$\begin{aligned}
|\langle \vartheta^\varepsilon, z \rangle_\Gamma| &\leq \nu_2 |(\tilde{A}\phi^\varepsilon, z)| + |(\tilde{E}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \phi^\varepsilon), z)| + 4\mu_r |(\phi^\varepsilon, z)| + |(w^\varepsilon - \tilde{w}, z)_{H^1}| \\
&\quad + \beta_3 |(w^\varepsilon - w_d, z)| + 2\mu_r |(\text{rot } \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, z)|. \tag{5.66}
\end{aligned}$$

Para los términos del lado derecho de (5.66), usando la desigualdad de Hölder, la desigualdad de Poincaré, y observando (4.71), se tiene

$$\nu_2 |(\tilde{A}\phi^\varepsilon, z)| = \nu_2 |(\nabla \phi^\varepsilon, \nabla z)| \leq \nu_2 \|\phi^\varepsilon\|_{H_0^1} \|z\|_{H_0^1}, \tag{5.67}$$

$$\beta_3 |(w^\varepsilon - w_d, z)| \leq \beta_3 \|w^\varepsilon - w_d\| \|z\| \leq C_\Omega \beta_3 \|w^\varepsilon - w_d\|_{H^1} \|z\|_{H_0^1} \leq C \|z\|_{H_0^1}, \tag{5.68}$$

$$\begin{aligned}
|(w^\varepsilon - \tilde{w}, z)_{H^1}| &\leq |(w^\varepsilon - \tilde{w}, z)| + |(\nabla(w^\varepsilon - \tilde{w}), \nabla z)| \\
&\leq \|w^\varepsilon - \tilde{w}\| \|z\| + \|\nabla(w^\varepsilon - \tilde{w})\| \|\nabla z\| \\
&\leq (C_\Omega + 1) \|w^\varepsilon - \tilde{w}\|_{H^1} \|z\|_{H_0^1} \leq C \|z\|_{H_0^1}, \tag{5.69}
\end{aligned}$$

$$2\mu_r |(\text{rot } \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, z)| \leq 2\mu_r \|\text{rot } \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\| \|z\| \leq 2\sqrt{2}\mu_r C_\Omega \|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}} \|z\|_{H_0^1} \leq C \|z\|_{H_0^1} \|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}}, \tag{5.70}$$

$$4\mu_r |(z, \phi^\varepsilon)| \leq 4\mu_r \|z\| \|\phi^\varepsilon\| \leq 4\mu_r C_\Omega^2 \|z\|_{H_0^1} \|\phi^\varepsilon\|_{H_0^1} \leq C \|z\|_{H_0^1} \|\phi^\varepsilon\|_{H_0^1}. \tag{5.71}$$

De la definición del operador \tilde{E} , la desigualdad de Hölder, junto con (1.30)-(??) y (5.53), se tiene

$$\begin{aligned} |(\tilde{E}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \phi^\varepsilon), z)| &= |(\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla z, \phi^\varepsilon)| \leq \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_3 \|z\|_{H_0^1} \|\phi^\varepsilon\|_6 \\ &\leq C_3 \tilde{C}_3 C \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma} \|\phi^\varepsilon\|_{H_0^1} \|z\|_{H_0^1} \leq C \|z\|_{H_0^1} \|\phi^\varepsilon\|_{H_0^1}. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Sustituyendo las desigualdades (5.67)-(5.72) en (5.66), se obtiene

$$|\langle \vartheta^\varepsilon, z \rangle_\Gamma| \leq \mathcal{C}_3 \|z\|_{H_0^1} + C \|z\|_{H_0^1} (\|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}} + \|\phi^\varepsilon\|_{H_0^1}), \quad (5.73)$$

con \mathcal{C}_3, C constantes independientes de ε .

Aplicando la definición de la norma $\|\cdot\|_{H^{-1/2}}$, de la desigualdad (5.73) se tiene

$$\|\vartheta^\varepsilon\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq \mathcal{C}_3 + C (\|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}} + \|\phi^\varepsilon\|_{H_0^1}),$$

y entonces, teniendo en cuenta la desigualdad $|a| + |b| \leq \sqrt{2}(|a|^2 + |b|^2)^{1/2}$, se deduce

$$\|\vartheta^\varepsilon\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq \mathcal{C}_3 + \sqrt{2}C \|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \phi^\varepsilon\|_{\mathbf{V} \times H_0^1},$$

lo cual implica (5.51). ◇

5.4 Apéndice D: Convergencias

Observar que bajo la condición $\|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \phi^\varepsilon\|_{\mathbf{V} \times H_0^1(\Omega)} \leq C$ se establecen las convergencias dadas en (4.68)-(4.72). Además, de estas convergencias se deducen las siguientes desigualdades

$$\|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}} + \|\phi^\varepsilon\|_{H_0^1} \leq C, \quad \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma} + \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_{H^1} \leq C, \quad \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} \leq C, \quad \|\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} \leq C, \quad (5.74)$$

donde C es una constante positiva independiente de ε .

Por la definición y continuidad del operador N , para $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \subset \mathbf{H}_\sigma$ se tiene

$$\|N\mathbf{v}\|_{L^\infty} \leq C \|N\mathbf{v}\|_{H^2} \leq C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_\sigma} \leq C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \leq C. \quad (5.75)$$

A seguir, teniendo en cuenta (5.74)-(5.75) y (4.68)-(4.72), para los operadores definidos en (4.2) se demuestra las convergencias dadas en (4.73), (4.74) y (4.75).

1. Demostración de las Convergencias establecidas en (4.73).

Convergencia 1: Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, $(B^T(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon), \mathbf{v}) \rightarrow (B^T(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{v})$.

Demostración. De la definición del operador B^T y observando (5.74), se tiene

$$\begin{aligned} & |(B^T(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon), \mathbf{v}) - (B^T(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{v})| \\ &= |(\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)(\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}^\varepsilon), \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) - (\eta(N\tilde{\mathbf{u}})(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}), \boldsymbol{\lambda})| \\ &= |(\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)((\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla(\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}})), \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon)| \\ &\quad + |(\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}), \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon - \boldsymbol{\lambda})| \\ &\quad + |((\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta(N\tilde{\mathbf{u}}))(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}), \boldsymbol{\lambda})| \\ &\leq \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} (\|\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}\|_3 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{v}\|_3 \|\nabla(\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}})\|) \|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\|_6 \\ &\quad + \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} |(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon - \boldsymbol{\lambda})| \\ &\quad + \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta(N\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^\infty} (\|\tilde{\mathbf{u}}\|_3 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{v}\|_3 \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma}) \|\boldsymbol{\lambda}\|_6 \\ &\leq 2C_3^2 C \|\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}} + C |(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon - \boldsymbol{\lambda})| \\ &\quad + 2C_3^2 \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta(N\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^\infty} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|\boldsymbol{\lambda}\|_{\mathbf{V}}. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Como $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}_\sigma \subset \mathbf{L}^3(\Omega)$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \subset \mathbf{L}^3(\Omega)$ y $\nabla \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, se tiene $\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{L}^{6/5}(\Omega) = (\mathbf{L}^6(\Omega))' \subset \mathbf{V}'$, y así la convergencia (4.68) implica

$$|(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon - \boldsymbol{\lambda})| \rightarrow 0. \quad (5.77)$$

Entonces, observando (5.74) y las convergencias (4.71), (4.72) y (5.77), de (5.76) se obtiene

$$\begin{aligned} |(B^T(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon), \mathbf{v}) - (B^T(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{v})| &\leq C\|\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma} + C|(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon - \boldsymbol{\lambda})| \\ &\quad + C\|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta(N\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^\infty} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

◇

Convergencia 2: Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, $(D(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon), \mathbf{v}) \rightarrow (D(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{v})$.

Demostración. De la definición del operador D y observando (5.74)-(5.75), se tiene

$$\begin{aligned} &|(D(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon), \mathbf{v}) - (D(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{v})| \\ &= |(\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) - (\eta'(N\tilde{\mathbf{u}})(N\mathbf{v})\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda})| \\ &\leq |(\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})(\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \nabla \mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon)| + |(\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla(\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}), \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon)| \\ &\quad + |(\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon - \boldsymbol{\lambda})| + |((\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta'(N\tilde{\mathbf{u}}))(N\mathbf{v})\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda})| \\ &\leq \|\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} \|N\mathbf{v}\|_{L^\infty} (\|\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}\|_3 \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma} + \|\tilde{\mathbf{u}}\|_3 \|\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma}) \|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\|_6 \\ &\quad + \|\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} \|N\mathbf{v}\|_{L^\infty} |(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon - \boldsymbol{\lambda})| \\ &\quad + \|\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta'(N\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^\infty} \|N\mathbf{v}\|_{L^\infty} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_3 \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma} \|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\|_6 \\ &\leq C_3^2 C \|\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma} (\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}_\sigma} + \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma}) \|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}} + C |(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon - \boldsymbol{\lambda})| \\ &\quad + C_3^2 C \|\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta'(N\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^\infty} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma}^2 \|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}}. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Como $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}_\sigma \subset \mathbf{L}^3(\Omega)$ y $\nabla \tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, se tiene que $\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{L}^{6/5}(\Omega) = (\mathbf{L}^6(\Omega))' \subset \mathbf{V}'$ lo cual teniendo en cuenta (4.68) implica

$$|(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon - \boldsymbol{\lambda})| \rightarrow 0. \quad (5.79)$$

Por lo tanto, observando (5.74) y las convergencias dadas en (4.71), (4.72) y (5.79), desde (5.78), se sigue

$$\begin{aligned} |(D(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon), \mathbf{v}) - (D(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{v})| &\leq C\|\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma} + C|(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon - \boldsymbol{\lambda})| \\ &\quad + C\|\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta'(N\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^\infty} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

◇

Convergencia 3: Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, $(\tilde{D}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \phi^\varepsilon), \mathbf{v}) \rightarrow (\tilde{D}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \phi), \mathbf{v})$.

Demostración. De la definición del operador \tilde{D} y observando (5.74)-(5.75), se tiene

$$\begin{aligned}
& |(\tilde{D}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \phi^\varepsilon), \mathbf{v}) - (\tilde{D}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \phi), \mathbf{v})| \\
&= |(\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla w^\varepsilon, \phi^\varepsilon) - (\eta'(N\tilde{\mathbf{u}})(N\mathbf{v})\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{w}, \phi)| \\
&\leq |(\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})(\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \nabla w^\varepsilon, \phi^\varepsilon)| + |(\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla (w^\varepsilon - \tilde{w}), \phi^\varepsilon)| \\
&\quad + |(\eta'(N\tilde{\mathbf{u}})(N\mathbf{v})\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{w}, \phi^\varepsilon - \phi)| + |((\eta'(N\tilde{\mathbf{u}}) - \eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon))(N\mathbf{v})\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{w}, \phi)| \\
&\leq \|\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} \|N\mathbf{v}\|_{L^\infty} (\|\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}\|_3 \|w^\varepsilon\|_{H^1} + \|\tilde{\mathbf{u}}\|_3 \|w^\varepsilon - \tilde{w}\|_{H^1}) \|\phi^\varepsilon\|_6 \\
&\quad + \|\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} \|N\mathbf{v}\|_{L^\infty} |(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{w}, \phi^\varepsilon - \phi)| \\
&\quad + C \|\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta'(N\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^\infty} \|N\mathbf{v}\|_{L^\infty} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_3 \|\tilde{w}\|_{H^1} \|\phi\|_6 \\
&\leq CC_3^2 (\|\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma} \|w^\varepsilon\|_{H^1} + \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma} \|w^\varepsilon - \tilde{w}\|_{H^1}) \|\phi^\varepsilon\|_{H_0^1} \\
&\quad + C |(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{w}, \phi^\varepsilon - \phi)| + CC_3^2 \|\eta'(N\tilde{\mathbf{u}}) - \eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma} \|\tilde{w}\|_{H^1} \|\phi\|_{H_0^1}. \quad (5.80)
\end{aligned}$$

Como $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}_\sigma \subset \mathbf{L}^3(\Omega)$ y $\nabla \tilde{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, se tiene que $\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{w} \in L^{6/5}(\Omega) = (L^6(\Omega))' \subset H^{-1}(\Omega)$ lo cual teniendo en cuenta (4.68) implica

$$|(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{w}, \phi^\varepsilon - \phi)| \rightarrow 0. \quad (5.81)$$

Entonces, observando (5.74) y considerando las convergencias dadas en (4.71), (4.72) y (5.81), desde (5.80), se obtiene

$$\begin{aligned}
|(\tilde{D}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \phi^\varepsilon), \mathbf{v}) - (\tilde{D}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \phi), \mathbf{v})| &\leq C(\|\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma} + \|w^\varepsilon - \tilde{w}\|_{H^1} + |(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{w}, \phi^\varepsilon - \phi)|) \\
&\quad + C \|\eta'(N\tilde{\mathbf{u}}) - \eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

◇

Convergencia 4: Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, $(E(\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \phi^\varepsilon), \mathbf{v}) \rightarrow (E(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \phi), \mathbf{v})$.

Demostración. De la definición del operador E , se tiene

$$\begin{aligned}
& |(E(\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \phi^\varepsilon), \mathbf{v}) - (E(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \phi), \mathbf{v})| = |(\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)\mathbf{v} \cdot \nabla w^\varepsilon, \phi^\varepsilon) - ((\eta(N\tilde{\mathbf{u}})\mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{w}, \phi)| \\
&\leq |(\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)\mathbf{v} \cdot \nabla (w^\varepsilon - \tilde{w}), \phi^\varepsilon)| + |((\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)\mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{w}, \phi^\varepsilon - \phi)| \\
&\quad + |((\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta(N\tilde{\mathbf{u}}))\mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{w}, \phi)| \\
&\leq \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} \|\mathbf{v}\|_3 \|w^\varepsilon - \tilde{w}\|_{H^1} \|\phi^\varepsilon\|_6 + \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} |(\mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{w}, \phi^\varepsilon - \phi)| \\
&\quad + \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta(N\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^\infty} \|\mathbf{v}\|_3 \|\tilde{w}\|_{H^1} \|\phi\|_6 \\
&\leq C_3^2 \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|w^\varepsilon - \tilde{w}\|_{H^1} \|\phi^\varepsilon\|_{H_0^1} + \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} |(\mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{w}, \phi^\varepsilon - \phi)| \\
&\quad + C_3^2 \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta(N\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^\infty} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|\tilde{w}\|_{H^1} \|\phi\|_{H_0^1}. \quad (5.82)
\end{aligned}$$

Como $\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{w} \in L^{6/5}(\Omega) = (L^6(\Omega))' \subset H^{-1}(\Omega)$, la convergencia (4.68) implica

$$|(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{w}, \phi^\varepsilon - \phi)| \rightarrow 0. \quad (5.83)$$

Entonces, observando (5.74) y las convergencias (4.71), (4.72) y (5.83), desde (5.82) se obtiene

$$\begin{aligned}
|(E(\mathbf{u}^\varepsilon, w^\varepsilon, \phi^\varepsilon), \mathbf{v}) - (E(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{w}, \phi), \mathbf{v})| &\leq C \|w^\varepsilon - \tilde{w}\|_{H^1} + C |(\mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{w}, \phi^\varepsilon - \phi)| \\
&\quad + C \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta(N\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^\infty} \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

◇

Convergencia 5: Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, $(F'(\mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon), \mathbf{v}) \rightarrow (F'(\tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{v})$.

Demostración. De la definición del operador F' se tiene

$$\begin{aligned} |(F'(\mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon), \mathbf{v}) - (F'(\tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{v})| &= |(\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon) - (\eta'(N\tilde{\mathbf{u}})(N\mathbf{v})\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda})| \\ &\leq |(\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon - \boldsymbol{\lambda})| + |((\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta'(N\tilde{\mathbf{u}}))(N\mathbf{v})\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda})| \\ &\leq \|\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} \|N\mathbf{v}\|_{L^\infty} \|\mathbf{f}\| \|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon - \boldsymbol{\lambda}\| + \|\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta'(N\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^\infty} \|N\mathbf{v}\|_{L^\infty} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}'} \|\boldsymbol{\lambda}\|_{\mathbf{V}}, \end{aligned}$$

y entonces, observando (5.74)-(5.75) y las convergencias (4.69) y (4.71), se obtiene

$$|(F'(\mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon), \mathbf{v}) - (F'(\tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{v})| \leq C\|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon - \boldsymbol{\lambda}\| + C\|\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta'(N\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^\infty} \rightarrow 0.$$

◇

Convergencia 6: Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, $(G'(\mathbf{u}^\varepsilon, \phi^\varepsilon), \mathbf{v}) \rightarrow (G'(\tilde{\mathbf{u}}, \phi), \mathbf{v})$.

Demostración. De la definición del operador G' se tiene

$$\begin{aligned} |(G'(\mathbf{u}^\varepsilon, \phi^\varepsilon), \mathbf{v}) - (G'(\tilde{\mathbf{u}}, \phi), \mathbf{v})| &= |(\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\mathbf{g}, \phi^\varepsilon) - (\eta'(N\tilde{\mathbf{u}})(N\mathbf{v})\mathbf{g}, \phi)| \\ &\leq |(\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)(N\mathbf{v})\mathbf{g}, \phi^\varepsilon - \phi)| + |((\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta'(N\tilde{\mathbf{u}}))(N\mathbf{v})\mathbf{g}, \phi)| \\ &\leq \|\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} \|N\mathbf{v}\|_{L^\infty} \|\mathbf{g}\| \|\phi^\varepsilon - \phi\| + \|\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta'(N\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^\infty} \|N\mathbf{v}\|_{L^\infty} \|\mathbf{g}\|_{H^{-1}} \|\phi\|_{H_0^1}, \end{aligned}$$

entonces, observando (5.74)-(5.75) y aplicando las convergencias (4.69) y (4.71), se sigue

$$|(G'(\mathbf{u}^\varepsilon, \phi^\varepsilon), \mathbf{v}) - (G'(\tilde{\mathbf{u}}, \phi), \mathbf{v})| \leq C\|\phi^\varepsilon - \phi\| + C\|\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta'(N\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^\infty} \rightarrow 0.$$

◇

Convergencia 7: Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, $(A\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \mathbf{v}) \rightarrow (A\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v})$, $(\text{rot } \phi^\varepsilon, \mathbf{v}) \rightarrow (\text{rot } \phi, \mathbf{v})$.

Demostración. Observando que A es un operador autoadjunto, se tiene

$$(A\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \mathbf{v}) - (A\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) = (A(\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon - \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{v}) = (A\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon - \boldsymbol{\lambda}),$$

y desde que $A\mathbf{v} \in \mathbf{V}'$, observando (4.68), se obtiene $(A\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, \mathbf{v}) - (A\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) \rightarrow 0$.

Teniendo en cuenta (4.69), se tiene

$$|(\text{rot } \phi^\varepsilon, \mathbf{v}) - (\text{rot } \phi, \mathbf{v})| = |(\text{rot } (\phi^\varepsilon - \phi), \mathbf{v})| = |(\text{rot } \mathbf{v}, \phi^\varepsilon - \phi)| \leq \|\text{rot } \mathbf{v}\| \|\phi^\varepsilon - \phi\| \rightarrow 0.$$

◇

2. Demostración de la convergencia establecida en (4.74).

Convergencia 8: Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, $\langle J'_u(\mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle \rightarrow \langle J'_u(\tilde{\mathbf{u}}), \mathbf{v} \rangle$,

donde

$$\langle J'_u(\mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle = \beta_1(\text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon, \text{rot } \mathbf{v}) + \beta_2(\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \rho_d, \eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon)N\mathbf{v}).$$

Demostración. De la definición del operador J'_u y (1.19), se tiene

$$\begin{aligned}
& |\langle J'_u(\mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle - \langle J'_u(\tilde{\mathbf{u}}), \mathbf{v} \rangle| \\
& \leq \beta_1 |(\operatorname{rot}(\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}), \operatorname{rot} \mathbf{v})| + \beta_2 |(\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \rho_d, (\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta'(N\tilde{\mathbf{u}}))N\mathbf{v})| \\
& \quad + \beta_2 |(\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta'(N\tilde{\mathbf{u}}), \eta'(N\tilde{\mathbf{u}})N\mathbf{v})| \\
& \leq 2\beta_1 \|\nabla(\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}})\| \|\nabla \mathbf{v}\| + \beta_2 \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \rho_d\| \|\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta'(N\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^\infty} \|N\mathbf{v}\| \\
& \quad + \beta_2 \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta'(N\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^\infty} \|\eta'(N\tilde{\mathbf{u}})\| \|N\mathbf{v}\| \\
& \leq \beta_1 \|\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} + \beta_2 C \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \rho_d\|_{L^\infty} \|\eta'(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta'(N\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^\infty} \|N\mathbf{v}\|_{L^\infty} \\
& \quad + \beta_2 C \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta'(N\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^\infty} \|\eta'(N\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^\infty} \|N\mathbf{v}\|_{L^\infty},
\end{aligned}$$

entonces, observando (5.74)-(5.75) y las convergencias (4.71)-(4.72), se obtiene

$$|\langle J'_u(\mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{v} \rangle - \langle J'_u(\tilde{\mathbf{u}}), \mathbf{v} \rangle| \leq \beta_1 C \|\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma} + \beta_2 C \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta'(N\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^\infty} \rightarrow 0.$$

3. Demostración de las convergencias establecidas en (4.75).

Convergencia 9: Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, $(\tilde{E}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \phi^\varepsilon), z) \rightarrow (\tilde{E}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \phi), z)$.

Demostración. De la definición del operador \tilde{E} , se tiene

$$\begin{aligned}
& |(\tilde{E}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \phi^\varepsilon), z) - (\tilde{E}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \phi), z)| = |(\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla z, \phi^\varepsilon) - (\eta(N\tilde{\mathbf{u}})\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla z, \phi)| \\
& \leq |(\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)(\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \nabla z, \phi^\varepsilon)| + |(\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla z, \phi^\varepsilon - \phi)| + |((\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta(N\tilde{\mathbf{u}}))\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla z, \phi)| \\
& \leq \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} \|\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}\|_3 \|z\|_{H_0^1} \|\phi^\varepsilon\|_6 + \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} |(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla z, \phi^\varepsilon - \phi)| \\
& \quad + \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta(N\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^\infty} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_3 \|z\|_{H_0^1} \|\phi\|_6 \\
& \leq C_3^2 \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} \|\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma} \|z\|_{H_0^1} \|\phi^\varepsilon\|_{H_0^1} + \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty} |(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla z, \phi^\varepsilon - \phi)| \\
& \quad + C_3^2 \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta(N\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^\infty} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma} \|z\|_{H_0^1} \|\phi\|_{H_0^1}.
\end{aligned} \tag{5.84}$$

Como $\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla z \in L^{6/5}(\Omega) = (L^6(\Omega))' \subset H^{-1}(\Omega)$, la convergencia (4.68) implica

$$(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla z, \phi^\varepsilon - \phi) \rightarrow 0. \tag{5.85}$$

Entonces, observando (5.74) y las convergencias (4.71), (4.72) y (5.85), desde (5.84) se obtiene

$$\begin{aligned}
|(\tilde{E}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon, \phi^\varepsilon), z) - (\tilde{E}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \phi), z)| & \leq C \|\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}_\sigma} + C |(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla z, \phi^\varepsilon - \phi)| \\
& \quad + C \|\eta(N\mathbf{u}^\varepsilon) - \eta(N\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^\infty} \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

◇

Convergencia 10: Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, $(\tilde{A}\phi^\varepsilon, z) \rightarrow (\tilde{A}\phi, z)$, $(\operatorname{rot} \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, z) \rightarrow (\operatorname{rot} \boldsymbol{\lambda}, z)$.

Demostración. Observando que \tilde{A} es un operador autoadjunto, se tiene

$$(\tilde{A}\phi^\varepsilon, z) - (\tilde{A}\phi, z) = (\tilde{A}(\phi^\varepsilon - \phi), z) = (\tilde{A}z, \phi^\varepsilon - \phi),$$

y desde que $\tilde{A}z \in H^{-1}(\Omega)$, observando (4.68), se obtiene $(\tilde{A}\phi^\varepsilon, z) - (\tilde{A}\phi, z) \rightarrow 0$.

Teniendo en cuenta (4.69), se tiene

$$|(\operatorname{rot} \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon, z) - (\operatorname{rot} \boldsymbol{\lambda}, z)| = |(\operatorname{rot}(\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon - \boldsymbol{\lambda}), z)| = |(\operatorname{rot} z, \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon - \boldsymbol{\lambda})| \leq \|\operatorname{rot} z\| \|\boldsymbol{\lambda}^\varepsilon - \boldsymbol{\lambda}\| \rightarrow 0.$$

◇

Conclusiones y trabajos futuros

6.1 Conclusiones

Se han estudiado dos problemas de control óptimo, en los cuales las ecuaciones estacionarias de fluidos micropolares fueron consideradas como las restricciones.

El primer problema está asociado a las ecuaciones estacionarias de fluidos micropolares con densidad constante, definidas en un dominio tridimensional, y condiciones de borde mixtas (Dirichlet y fricción tipo Navier), y las funciones de control actuando como condiciones de borde tipo Dirichlet aplicadas a la velocidad de traslación del fluido y a la velocidad de microrotación. Para estas ecuaciones se prueba la existencia y unicidad de soluciones débiles, cabe destacar que no se conocen resultados sobre existencia de soluciones débiles para las ecuaciones de fluidos micropolares con condiciones de fricción tipo Navier sobre la frontera del dominio, por lo que este resultado es un aporte novedoso.

Como aporte a la teoría de control, se probó la existencia de una solución óptima para el problema de control planteado. También, mediante el método de Lagrange, se han obtenido condiciones necesarias de optimalidad de primer orden, desde las cuales se ha derivado un sistema de optimalidad. Al realizar una leve variación al funcional objetivo, se obtienen condiciones suficientes de segundo orden para el problema de control propuesto.

El segundo problema está asociado a las ecuaciones estacionarias de fluidos micropolares con densidad variable, definidas en un dominio bidimensional, y condiciones de borde Dirichlet no nulas. Las funciones de control actúan como condiciones de borde tipo Dirichlet aplicadas a la velocidad de traslación y a la velocidad de microrotación. Para estas ecuaciones, empleando la formulación corriente (esto es, la densidad se representa como una composición entre la velocidad de traslación y su función de línea corriente) se obtiene la existencia de soluciones débiles.

Para el problema de control se prueba la existencia de una solución óptima. Además, mediante un método de penalización sobre el funcional objetivo, se han obtenido condiciones necesarias de primer orden, desde las cuales se deriva un sistema de optimalidad.

Se destaca lo original de este trabajo, pues la literatura existente sobre problemas de control óptimo asociados a las ecuaciones de fluidos micropolares es escasa, sólo se conocen los trabajos de R. Stavre [60], [61], [62], los cuales están asociados a las ecuaciones no estacionarias, definidas en un dominio bidimensional, con condiciones de borde nulas y el control es de tipo distribuido. Es decir, hasta ahora no se estudios de problemas de control asociados a las ecuaciones estacionarias de fluidos micropolares.

6.2 Trabajos futuros

1. Extender los resultados obtenidos en este trabajo al caso de evolución.
2. Estudiar la existencia de soluciones débiles para las ecuaciones estacionarias de fluidos micropolares con densidad variable, definidas en un dominio tridimensional.
3. Estudiar problemas de control asociados a las ecuaciones de fluidos micropolares estacionarias con densidad variable, definidas en un dominio bidimensional, con condiciones de borde mixto (Dirichlet, fricción tipo Navier).
4. Estudiar la existencia y unicidad de soluciones débiles para las ecuaciones estacionarias de fluidos Magneto-Micropolares, los cuales son una generalización de los fluidos asimétricos (fluidos micropolares).

Referencias

- [1] R. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] G. V. Alekseev, *Solvability of stationary boundary control problems for heat convection equations*, Siberian Mathematical Journal. Vol. 39, No 5, pp. 982-998, 1996.
- [3] H. Amann, *Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov Spaces*. Glasnik Matematički, 35, pp. 161-77, 2000.
- [4] M. Benes, *Mixed initial-boundary value problem for the three-dimensional Navier-Stokes equations in polyhedral domains*, Discrete and continuous Dynamical Systems, pp. 135-144, 2011.
- [5] A. Boulkhemair, A. Chakib, *On the uniform Poincaré inequality*, Communications in Partial Differential Equations, Vol. 32, pp. 1439-1447, 2007.
- [6] H. Brézis, *Análisis funcional, Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.
- [7] R. Coleman, *Calculus on normed vector spaces*, Universitext, Springer, 2012.
- [8] C. Conca, R. Gormaz, E. Ortega-Torres, M. Rojas-Medar, *The equations of non homogeneous asymmetric fluids: an iterative approach*, Math. Methods Appl. Sci., Vol. 25, pp. 1251-1280, 2002.
- [9] J. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Second Edition, Springer-Verlag, 1990.
- [10] R. Dautray, J.L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Vol. 2, Springer, Berlin, 2000.
- [11] J.C. De los Reyes, K. Kunisch, *A semi-smooth Newton method for control constrained boundary optimal control of the Navier-Stokes equations*, Nonlinear Analysis, 62, pp. 1289-1316, 2005.
- [12] B. Dong, Z. Chen, *On upper and lower bounds of higher order derivatives for solutions to the 2D micropolar fluid equations*, J. Math. Analysis and Appl. Vol. 334, pp. 1386-1399, 2007.
- [13] D. Iftimie, G. Planas, *Inviscid limits for the Navier-Stokes equations with Navier friction boundary conditions*, Nonlinearity 19, pp. 899-918, 2006.
- [14] A. C. Eringen, *Simple Microfluids*, J. Engng. Sci. Vol. 2, pp. 205-217, 1964.
- [15] A. C. Eringen, *Theory of micropolar fluids*, J. Math. Mech. Vol. 16, pp. 1-16, 1966.

- [16] L. C. Ferreira, G. Planas, E. J. Villamizar-Roa, *On the nonhomogeneous Navier-Stokes system with Navier friction boundary conditions*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 45 No 4, pp. 2576-2595, 2013.
- [17] L. C. Ferreira, E. J. Villamizar-Roa, *Micropolar fluid system in a space of distributions and large time behavior*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 332, pp. 1425-1445, 2007.
- [18] L.C. Ferreira, E. J. Villamizar-Roa, *On the existence and stability of solutions for the micropolar fluids in exterior domains*, Math. Methods Appl. Sci., Vol. 30, pp. 1185-1208, 2007.
- [19] J. Förste, *Existence of time independent flows of incompressible micropolar fluids*, Fluid Dynamics Trans., Vol. 6, Part II, pp. 193-197, 1971.
- [20] J. Förste, *On the theory of micropolar fluids*, Advances of Mechanics, Vol. 2, No. 2, pp. 81-100, 1979.
- [21] N.N. Frolov, *Solvability of the boundary-value problem for motion of a an inhomogeneous fluid*, Mat. Zametki [Math. Notes], 53, No 6, pp.130-140, 1993.
- [22] N.N. Frolov, *The boundary-value problem describing the motion of an inhomogeneous fluid*, Sibirsk. Mat. Zh. [Siberian Math J.], 38, No 2, pp. 433-451, 1996.
- [23] A.V. Fursikov, *Optimal control of distributed Systems. Theory and Applications*, American Mathematical Society (AMS), 2000.
- [24] G. Galdi, S. Rionero, *A note on the existence and uniqueness of solutions of the micropolar fluid equations*, Int. J. Engng. Sci. Vol. 15, pp. 105-108, 1977.
- [25] G. P. Galdi , *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Volume II*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [26] V. Girault, P. Raviart, *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*, Springer-Verlag, 1979.
- [27] M. Gunzburger, *Perspectives in Flow Control and Optimization*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
- [28] M. Gunzburger, L. Hou, Th. Svobodny, *Analysis and finite element approximation of optimal control problems for the stationary Navier-Stokes equations with Dirichlet controls*, RAIRO-Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 25, N 6, pp. 711-748, 1991.
- [29] M. Gunzburger, L. Hou, Th. Svobodny, *Boundary velocity control of incompressible flow with an application to viscous drag reduction*, SIAM J. Control and optimization, Vol. 30, No 1, pp. 167-181, 1992.
- [30] M. Gunzburger, S. Manservigi, *Analysis and approximation of the velocity tracking problem for Navier-Stokes flows with distributed control*, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 37, No. 5, pp. 1481-1512, 2000.
- [31] J. Heywood, *An error estimate uniform in time for spectral Galerkin approximations of the Navier-Stokes problem*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 98, 2, pp. 333-345, 1982.

- [32] A. I. Illarionov, *Optimal boundary control of steady-state flow of a viscous inhomogeneous incompressible fluid*, Mathematical notes, 69, No 5, pp. 614-624, 2001.
- [33] A. Iofee and V. Tikhomorov, *Extremal Problems*, North Holland, Amsterdam, 1979.
- [34] W. Jägger, A. Mikelić, *On the roughness-induced effective boundary conditions for an incompressible viscous flow*, J. Diff. Eqns., 170, pp. 96-122, 2001.
- [35] Y. Jia, W. Zhang, *Remarks on the regularity criterion of the 3D micropolar fluid flows in terms of the pressure*, App. Math. Letters. Vol. 24, pp. 199-203, 2011.
- [36] P. Krzyzanoski, *On stationary flows of asymmetric fluids with diffusion*, Math. Meth. in the Appl. Sci., Vol. 17, pp. 837-854, 1994.
- [37] S. K. Lakshmana, *Existence of periodic solutions of equations of incompressible micropolar fluid flow*, Int. J. Engng. Sci. Vol. 9, pp. 1143-1150, 1971.
- [38] M. C. Lopes Filho, H. J. Nussenzveig, G. Planas, *On the inviscid limit for 2D incompressible flow with Navier friction condition*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 36, pp. 1130-1141, 2005.
- [39] G. Lukaszewicz, *Asymptotic behavior of micropolar fluid flows*, Int. Jour. of Engng. Science. Vol. 41, pp. 259-269, 2003.
- [40] G. Lukaszewicz, *Micropolar Fluids: Theory and Applications* Birkhäuser, Boston, 1999.
- [41] G. Lukaszewicz, *On Nonstationary Flows of Asymmetric Fluids*, Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL, Vol. XII, fasc. 6, pp. 83-97, 1988.
- [42] G. Lukaszewicz, *On Stationary Flows of Asymmetric Fluids*, Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL, Vol. XII, fasc. 3, pp. 35-44, 1988.
- [43] G. Lukaszewicz, *On Non-stationary Flows of Incompressible Asymmetric Fluids*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol. 13, pp. 219-232, 1990.
- [44] G. Lukaszewicz, *On the Existence, Uniqueness and Asymptotic Properties for Solutions of Flows of Asymmetric Fluids*, Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL, Vol. XIII, fasc. 6, pp. 105-120, 1989.
- [45] G. Lukaszewicz, M. A. Rojas-Medar, M.M. Santos, *Stationary micropolar fluid with boundary data in L^2* , J. Math. Anal. Appl., Vol. 271, pp. 91-107, 2002.
- [46] J.C. Maxwell, *On stressed in rarified gases arising from inequalities of temperature*, Phil. Trans. Royal society. pp. 704-712, 1879.
- [47] Kh.S. Mekheimer, M.A. El Kot, *The micropolar fluid model for blood flow through a tapered artery with a stenosis*, Acta Mech. Sin. Vol. 24, pp. 637-644, 2008.
- [48] N.B. Naduvinamani, S.S. Huggi, *Micropolar fluid squeeze film lubrication of short partial porous journal bearings*, Imeche. J. Engineering Tribology, Vol. 223, pp. 1179-1185, 2009.
- [49] C.L.M.H. Navier, *Sur le lois de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques*, Mem. and Acad. R. Sci. Inst. France, 369, 1827.

- [50] E. Ortega-Torres, M. Rojas-Medar, R.C. Cabrales, *A uniform error estimate in time for the spectral Galerkin approximations of the magneto-micropolar fluid equations*, Numer. Methods Partial Differential Equations, Vol. 28, pp. 689-706, 2012.
- [51] E. Ortega-Torres, E. Villamizar-Roa, M. Rojas-Medar, *Micropolar fluids with vanishing viscosity*, Abstr. Appl. Anal, 2010.
- [52] E. Ortega-Torres, M. Rojas-Medar, *On the regularity for solutions of the micropolar fluid equations*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, Vol. 122, pp. 27-37, 2009.
- [53] E. Ortega-Torres, M. Rojas-Medar, *Optimal error estimate of the penalty finite element method for the micropolar fluid equations*, Numer. Funct. Anal. Optim., Vol. 29, pp. 612-637, 2008.
- [54] E. Ortega-Torres, M. Rojas-Medar, *The equations of a viscous asymmetric fluid an iterative approach*, ZAMM. Angew. Math. Mech., Vol. 85, pp. 471-489, 2005.
- [55] P.A. Raviart, J.M. Thomas, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson, Paris, 1983.
- [56] W. Rudin, Análisis funcional, Editorial Reverté, S.A., 1979.
- [57] M. Santos, *Stationary solution of the Navier-Stokes equations in a 2d bounded domain for incompressible flow with discontinuous density*, Z. angew. Math. Phys., Vol. 53, pp. 661-675, 2002,
- [58] V. A. Sava, *Weak solutions in the linear theory of incompressible micropolar fluids*, Porc. Conf. Diff. Equat. Appli., Iasi 1973, pp. 145-177, 1977.
- [59] S.S. Sritharan, Optimal control of viscous flow, SIAM, Philadelphia, 1998.
- [60] R. Stavre, *A distributed control problem for micropolar fluids*. In honour of Academician Nicolae Dan Cristescu on his 70th birthday, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 45, No. 2, pp. 353-358, 2001.
- [61] R. Stavre, *The control of the pressure for a micropolar fluid*. Dedicated to Eugen Sos. Z. Angew, Math. Phys., 53, No. 6, pp. 912-922, 2002.
- [62] R. Stavre, *Optimization and numerical approximation for micropolar fluids*, Numer. Funct. Anal. Optim., 24, No. 34, pp. 223-241, 2003.
- [63] P. Szopa, *On existence and regularity of solutions for 2D micropolar fluid equations with periodic boundary conditions*, Math. Meth. Appl. Sci. Vol. 30, pp. 331-346, 2007.
- [64] R. Temam, Navier-Stokes Equations Theory and Numerical Analysis, North-Holland, New York, 1979.
- [65] R. Verfürth, *Finite element approximation of incompressible Navier-Stokes equations with slip boundary condition*, Numer. Math, 50, pp. 697-721, 1987.
- [66] F. Vitoriano, *On the steady viscous flow of a nonhomogeneous asymmetric fluid*, Annali di Matematica, 192, pp. 665-672, 2013.
- [67] J. Zowe, S. Kurcyusz, *Regularity and Stability for the Mathematical Programming Problem in Banach Spaces*, Appl. Math. Optim. 5, pp. 49-62, 1979.